

Il colore e la QCD

- simmetria della funzione d'onda della Δ^{++}
- Il colore
- Evidenze sperimentali del colore
- I gluoni e la QCD
- Libertà asintotica
- Adronizzazione
- Verifiche sperimentali della QCD

La simmetria della Δ^{++}

- La composizione in quark della Δ^{++} è:

$$\Delta^{++} : J^P = \frac{3}{2}^+ \Rightarrow u \uparrow u \uparrow u \uparrow$$

- La funzione d'onda si può fattorizzare:

$$\Psi = \psi(\text{spaziale}) \cdot \chi(\text{spin}) \cdot \phi(\text{sapore})$$

- $L=0$ (barioni $3/2$ di massa più bassa). Anche χ e ϕ sono simmetriche, quindi la funzione d'onda totale è **simmetrica**, in contraddizione con il principio di Pauli.
- Nel 1964 Greenberg (e poi Han e Nambu) introdusse un nuovo grado di libertà interno, che chiamò **colore**, quindi:

$$\Psi = \psi(\text{spaziale}) \cdot \chi(\text{spin}) \cdot \phi(\text{sapore}) \cdot \xi(\text{colore})$$

- $\xi(\text{colore})$ è antisimmetrica e ristabilisce la giusta connessione spin-statistica della funzione d'onda

il colore

- L'assunzione base della teoria è che ogni quark possa esistere in tre diversi stati di colore:

$$\xi^c = r, g, b \quad (\text{red, green, blue})$$

- I tre stati si possono rappresentare come spinori di colore:

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e si può ripetere quanto detto a proposito di $SU(3)$, ma adesso di parla di $SU(3)$ di colore.

1. si hanno 8 generatori del gruppo di simmetria;
2. si possono individuare 2 generatori diagonali per i quali gli spinori di colore sono delle autofunzioni

Le matrici di Gell-Mann

$$U = e^{-\frac{1}{2}i g \hat{n} \cdot \vec{\lambda}}$$

Rotazione nello spazio del colore

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I_3 = isospin di colore

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Y = ipercarica di colore

I numeri quantici di colore

- Gli operatori diagonali sono λ_3 e λ_8 , dove:

$$\lambda_3 |r\rangle = \frac{1}{2} |r\rangle ; \lambda_8 |r\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |r\rangle ; \text{ etc...}$$

- Si può introdurre un isospin di colore I_3^c ed un'ipercarica di colore Y^c , definiti come:

$$I_3^c \equiv \lambda_3 = ; Y^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8$$

- Con questa assegnazione si hanno i seguenti numeri quantici:

	quark		antiquark	
	I_3^c	Y^c	I_3^c	Y^c
r:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	\bar{r} : $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
g:	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	\bar{g} : $\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
b:	0	$-\frac{2}{3}$	\bar{b} : 0	$\frac{2}{3}$

I valori I_3^c e Y^c sono dei numeri quantici additivi.

Confinamento del colore

- La coniugazione di carica trasforma un quark red in un anti-red con i valori opposti di I_3^c e Y^c .
- In questo modo i quark sono triplicati, quindi si dovrebbe avere una proliferazione di particelle, ad esempio il protone potrebbe esistere come:

$$p = u_r u_b d_g ; u_r u_g d_b ; u_b u_g d_b ; \text{etc....}$$

- si postula quindi che tutti gli adroni liberi osservati in natura debbano avere:

$$I_3^c = 0 ; Y^c = 0$$

cioè devono essere dei singoletti di colore.

Questa è l'ipotesi del confinamento del colore.

Gli adroni

- Ne consegue che l'unico modo di soddisfare questa richiesta è quello di combinare insieme 3 quark oppure una coppia quark-antiquark.

barioni = qqq

mesoni = $q\bar{q}$

$p = u_r u_g d_b$; $\bar{p} = \bar{u}_r \bar{u}_g \bar{d}_b$; etc....

$\pi = rr + gg + bb$

ma non si devono avere combinazioni

qq ; $qq\bar{q}$; $qqqq$; etc

- In teoria di potrebbero avere combinazioni del tipo:

$q\bar{q}q\bar{q}$; $qqqq\bar{q}\bar{q}$

(ultimamente sono stati trovate delle risonanze interpretabili come stati a 4 quark)

La simmetria $SU(3)$ di colore è una simmetria esatta, al contrario della simmetria $SU(3)$ di sapore che è una simmetria approssimata.

Quindi i quark di colore diverso hanno esattamente la stessa massa.

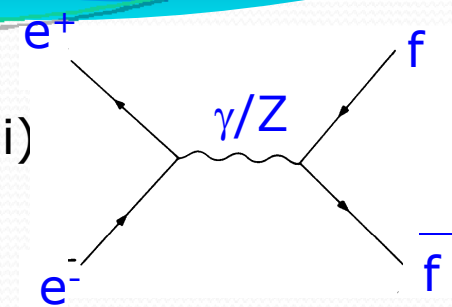
Collider e^+e^-

Vantaggi di un collider e^+e^- :

- stato iniziale perfettamente definito (part. puntiformi)
- \sqrt{s} definita = $2 \times E_{\text{beam}}$

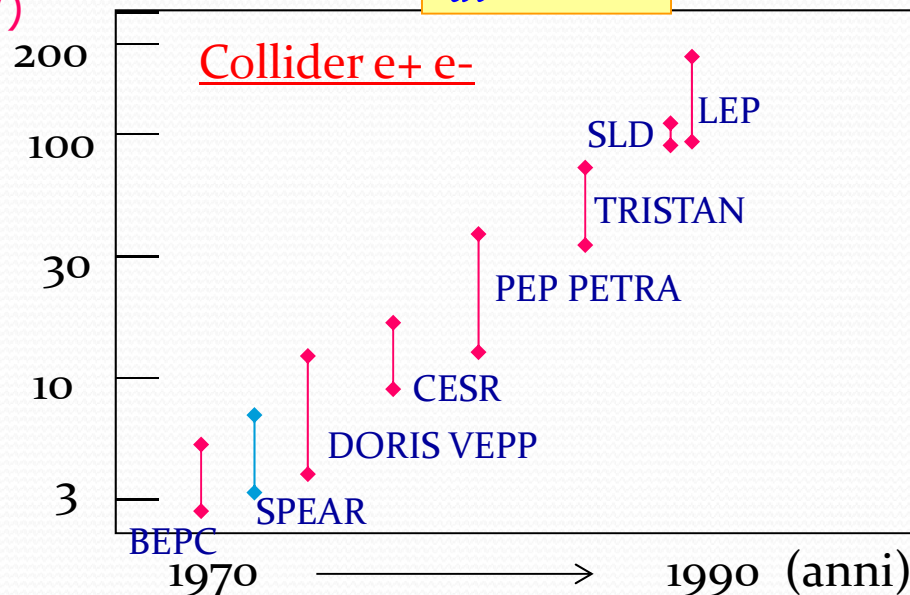
Svantaggi:

- più difficile raggiungere alte energie (rispetto ad un collider a protoni) per via della radiazione di sincrotone.
- Luminosità più bassa rispetto ad un processo a bersaglio fisso.

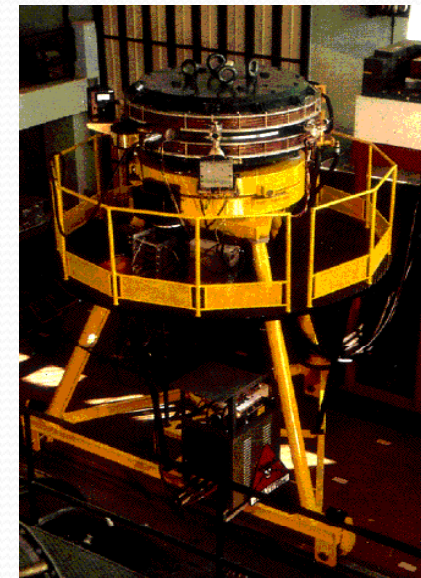


$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \mathcal{L} \cdot \sigma$$

\sqrt{s} (GeV)



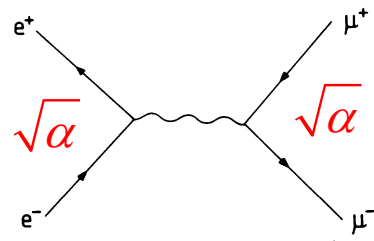
ADA - 1961 - LNF



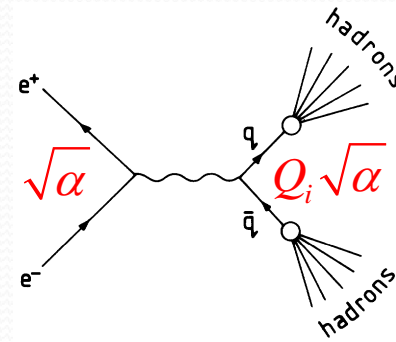
$\sqrt{s} = 500 \text{ MeV}$

Evidenze del colore

- Una delle evidenze più convincenti dell'esistenza del colore viene dal confronto delle sezioni d'urto per i due processi seguenti:



$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$



$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$$

- Se non teniamo conto dell'adronizzazione dei quark, ed assumendo che \sqrt{s} sia grande rispetto alle masse dei fermioni, le ampiezze dei due grafici differiscono solo per la carica elettrica dei fermioni nello stato finale.

- Se non esistesse il colore:
$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{i=1}^n Q_i^2$$

Evidenze del colore

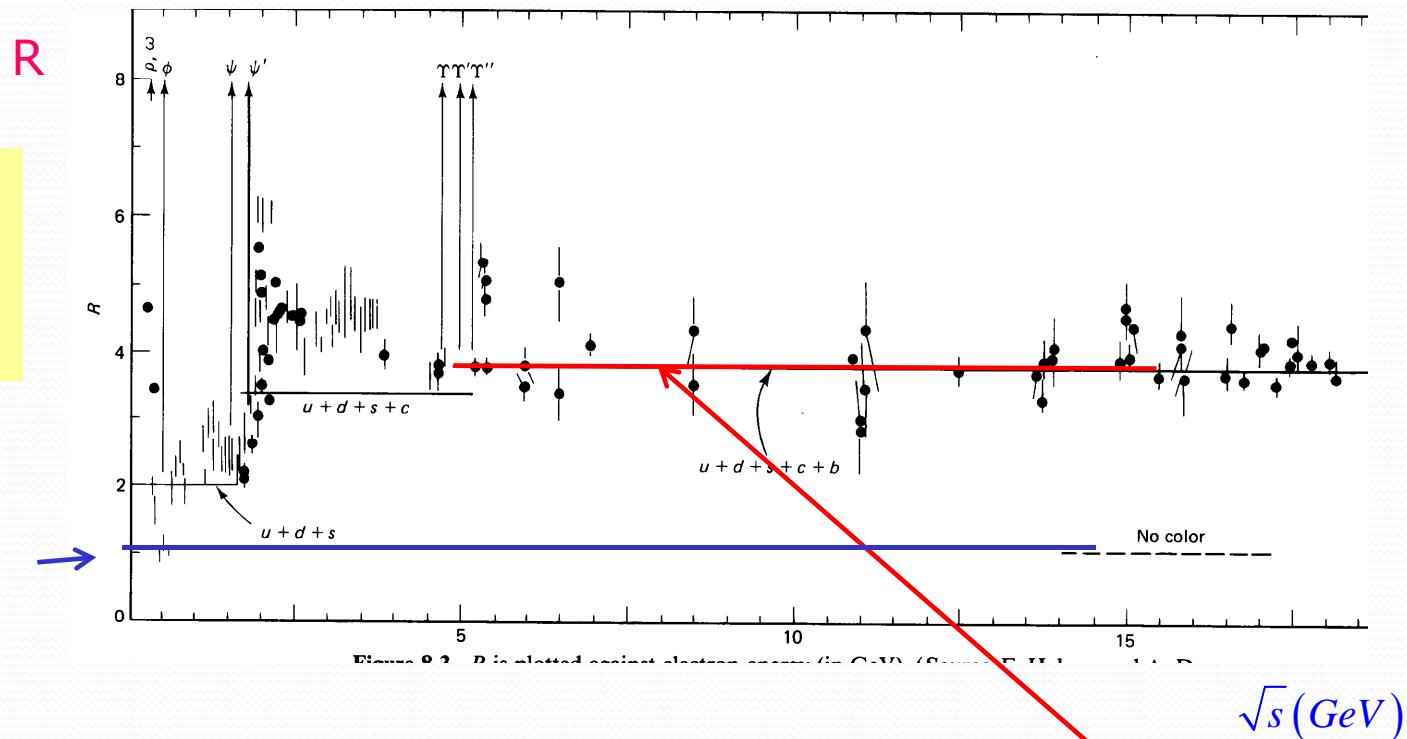
Se esiste il colore, R deve essere moltiplicato per 3 perché il numero di colori dei quark è 3.

R è funzione di \sqrt{s} . Al di sopra della soglia del b si ha:

Senza colore $R = \frac{11}{9}$

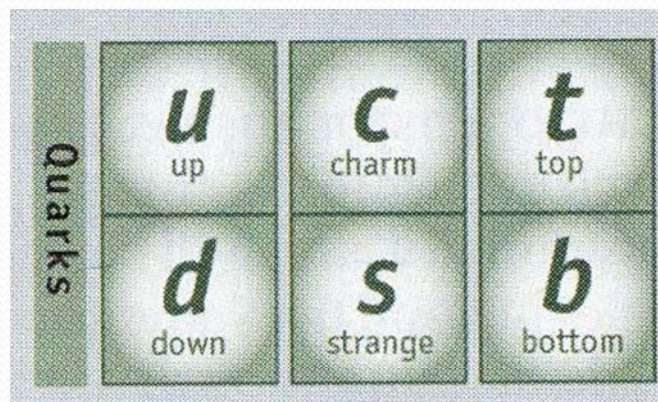
Con il colore

$$R = 3 \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right] = \frac{33}{9} = 3.67$$



Massa dei quark (PDG 2010)

Quark	Massa	Q	I ₃	s	c	b	t
u	1.7 – 3.3 MeV	2/3	1/2	0	0	0	0
d	4.1 – 5.8 MeV	-1/3	-1/2	0	0	0	0
s	80 – 130 MeV	-1/3	0	-1	0	0	0
c	1.18 – 1.34 GeV	2/3	0	0	+1	0	0
b	4.13 – 4.37 GeV	-1/3	0	0	0	-1	0
t	172 – 1.6 GeV	2/3	0	0	0	0	+1



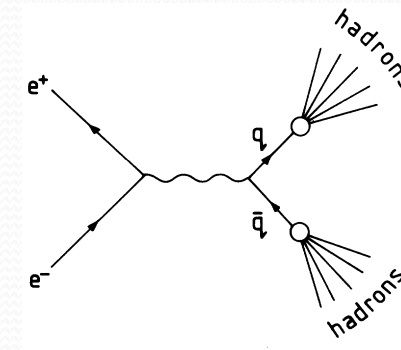
$$Q = \frac{2}{3}e$$

$$Q = -\frac{1}{3}e$$

Domanda: quanto vale R in un collider e^+e^- avente $\sqrt{s} = 6 \text{ GeV}$?

- N.B. il collider produce sempre coppie $q\bar{q}$
- Vengono prodotte solo le coppie tali che:

$$\sqrt{s} > 2m_q$$



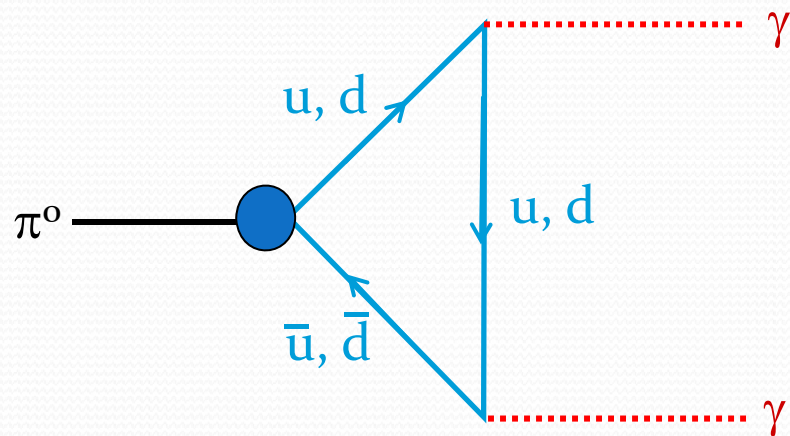
- Quindi se il collider ha un'energia del centro di massa di 6 GeV, vengono prodotte coppie di quark $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$, $c\bar{c}$ ma NON $b\bar{b}$ oppure $t\bar{t}$



$$R = 3 \sum_{i=1}^n Q_i^2 = 3 \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] = \frac{30}{9} = 3.33$$

Decadimento del π^0

- 1949-50 The decay $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ calculated and measured by Steinberger.
1967 Veltman calculates the π^0 decay rate using modern field theory and finds that the π^0 does not decay!
1968-70 Adler, Bell and Jackiw “fix” field theory and now π^0 decays but decay rate is off by factor of 9.
1973-4 Gell-Mann and Fritzsche (+others) use QCD with 3 colors and calculate the correct π^0 decay rate.



Triangle Diagram
Each color contributes one amplitude.
Three Colors changes the decay rate by 9.

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.73 \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \text{ eV} \quad [\text{calcolato}]$$

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.7 \pm 0.6 \text{ eV} \quad [\text{misurato}]$$



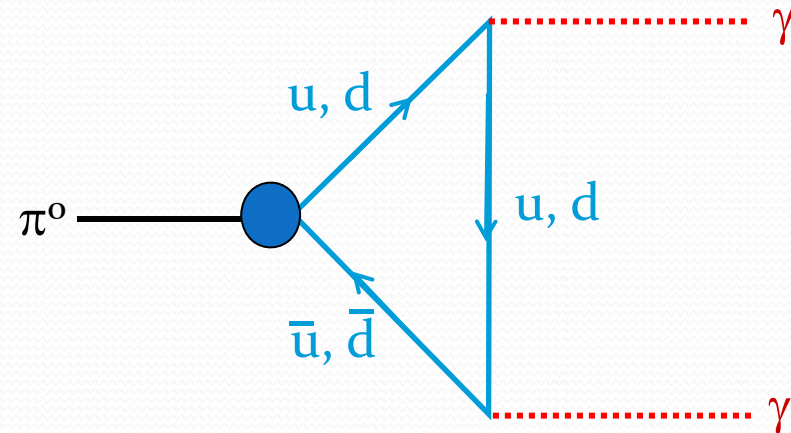
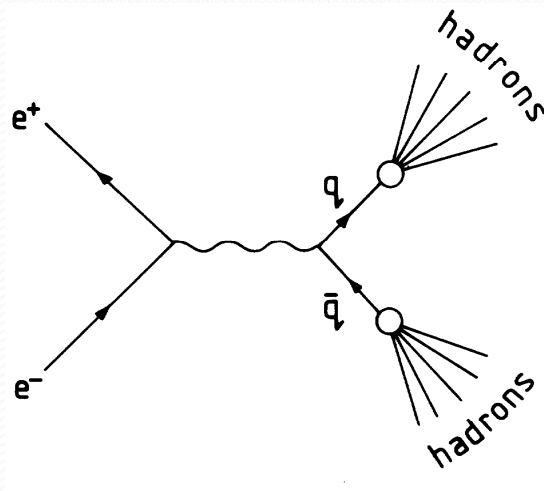
$$N_c = 2.99 \pm 0.12$$

Domanda

- Perché nel rapporto R

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

bisogna moltiplicare R x 3 per tener conto del numero dei colori, mentre nel decadimento del π^0 bisogna moltiplicare la probabilità di decadimento per 9?

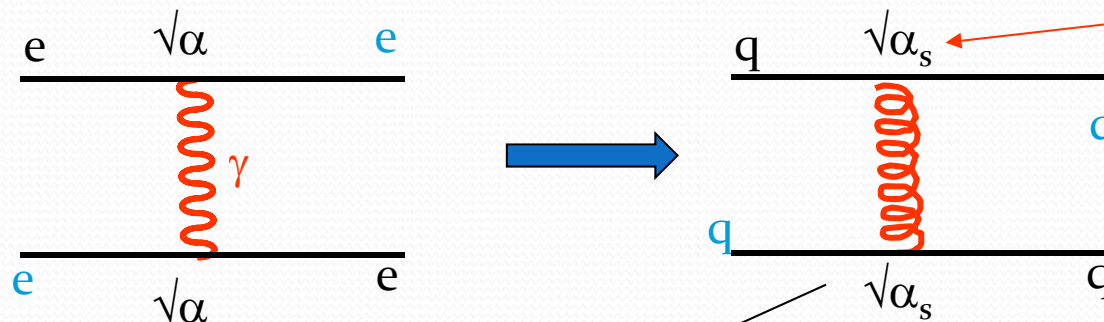


Gluoni e QCD

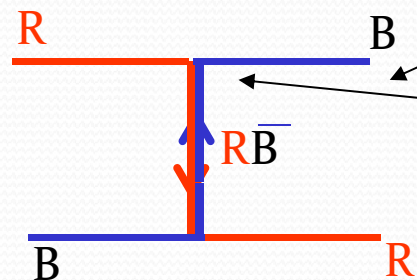
- La teoria che descrive le interazioni forti nel Modello Standard è chiamata CromoDinamica Quantistica (QCD).
- La QCD è simile alla QED, le sue proprietà possono essere ricavate dall'invarianza di gauge per trasformazioni nello spazio $SU(3)$.
- Da questa invarianza discende che le interazioni forti sono mediate da 8 bosoni neutri di spin 1 a massa nulla, che vengono chiamati gluoni (gluons), i quali sono in relazione con gli 8 generatori delle rotazioni nello spazio $SU(3)$.
- La QED è invariante per la trasformazione di gauge $U(1)$. Questa simmetria è abeliana, pertanto il fotone, che si accoppia con la carica elettrica, non possiede carica elettrica e quindi i fotoni non interagiscono tra di loro.
- $SU(3)$ è una simmetria non abeliana, per cui i gluoni, i quali si accoppiano alle cariche di colore, trasportano essi stessi una carica di colore (colore e anticolore), per cui si possono accoppiare tra loro dando luogo a vertici con tre o quattro gluoni. Questi vertici hanno come conseguenza il confinamento del colore e la libertà asintotica.
- I gluoni non distinguono i sapori dei quark, per cui le interazioni forti sono invarianti per rotazioni nello spazio dei sapori.

Il colore dei gluoni

- Carica elettrica \rightarrow carica di colore
- $3^2-1=8$ matrici/operatori \Rightarrow 8 gluoni
- I quark hanno colore RGB
- Il colore è scambiato da 8 gluoni «bicolorati»



α_s = costante di accoppiamento delle interazioni forti.



In questo vertice il gluone $\bar{B}R$ trasforma il quark $R \rightarrow B$ (togliendo il quark R , e lasciando il quark B , il quale è equilibrato dalla componente \bar{B} del gluone)

In ogni vertice si deve conservare il colore.

Il colore dei gluoni

- In analogia con l'ottetto dei mesoni, gli otto gluoni si possono rappresentare nel modo seguente (n.b. questa è solo una delle possibili rappresentazioni):

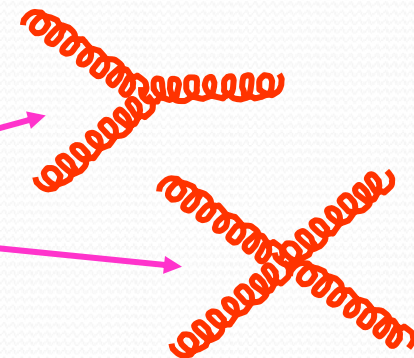
$$g_1 = R\bar{G}, g_2 = R\bar{B}, g_3 = G\bar{R}, g_4 = G\bar{B}, g_5 = B\bar{R}, g_6 = B\bar{G},$$
$$g_7 = \sqrt{\frac{1}{2}} (R\bar{R} - G\bar{G}), g_8 = \sqrt{\frac{1}{6}} (R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})$$

- **N.B.** g_7 e g_8 sono “colorless” ma non sono un singoletto di colore.
- La nona combinazione (3×3) è un singoletto di colore e non può fare da mediatore tra quark “colorati”.

Se esistesse vi sarebbero delle interazioni forti tra adroni a range infinito.

$$\sqrt{\frac{1}{3}} (R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$$

Ricorda, anche i gluoni sono “colorati” e possono interagire tra loro.



Domande:

- I quark sono “reali”? Qual è il loro spin?
- Perché non si osservano quark liberi?
- Esistono i gluoni?
- Cosa sono i jet di particelle?
- Quali calcoli si possono fare con la QCD?

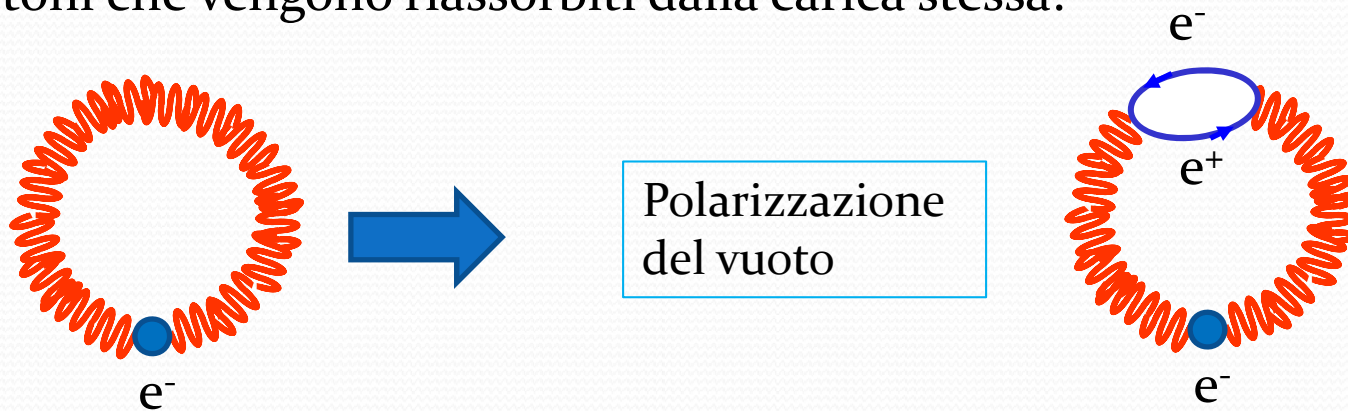
Running di α_{QED}

- Nell'elettromagnetismo classico l'energia potenziale di un elettrone immerso nel campo da esso generato vale:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

L'energia potenziale tende a infinito per r che tende a zero.

- La self-interaction nella teoria dei campi è rappresentata da emissione di fotoni che vengono riassorbiti dalla carica stessa:



- Il positrone viene “attratto” dall’elettrone “schermando” la carica dell’elettrone in modo tale che il suo valore efficace diminuisce.
- Man mano che si penetra nella “nuvola” di positroni l’effetto schermo diminuisce ed il valore della carica aumenta.

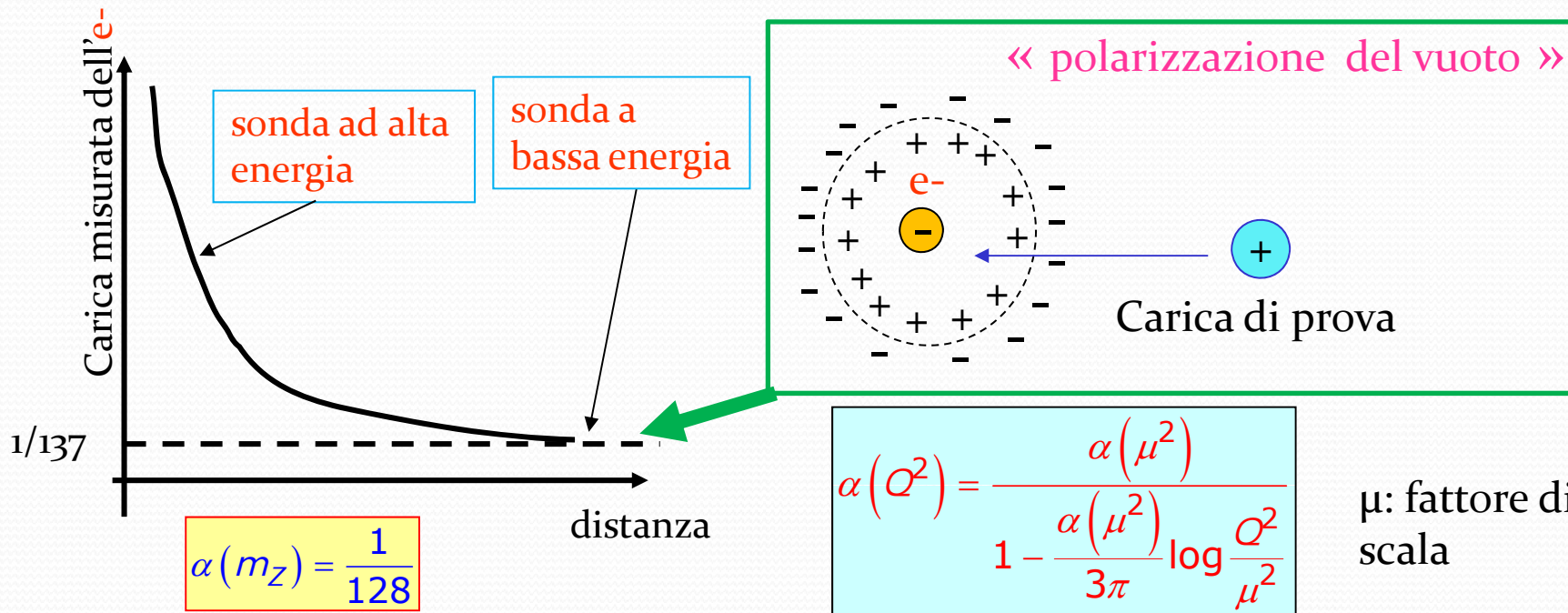
Running di α_{QED}

Consideriamo l'interazione tra due elettroni:



L'interazione viene modificata dalla polarizzazione del vuoto

- La polarizzazione del vuoto fa sì che la carica elettrica dell'elettrone diventi una funzione dell'energia della "carica di prova". I positroni "schermano" la carica e^- ; man mano che ci si avvicina alla carica, lo "schermo" diminuisce e la carica "aumenta".

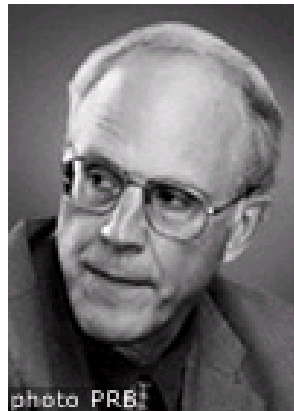


Scoperta della libertà asintotica nella QCD: 1973



The Nobel Prize in Physics 2004

"for the discovery of asymptotic freedom in the theory of the strong interaction"



David J. Gross

🕒 1/3 of the prize

USA

Kavli Institute for
Theoretical Physics,
University of
California
Santa Barbara, CA,
USA

b. 1941



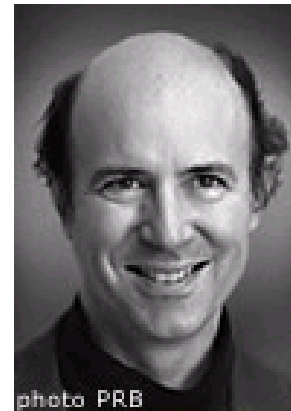
H. David Politzer

🕒 1/3 of the prize

USA

California Institute
of Technology
Pasadena, CA, USA

b. 1949



Frank Wilczek

🕒 1/3 of the prize

USA

Massachusetts
Institute of
Technology (MIT)
Cambridge, MA,
USA

b. 1951

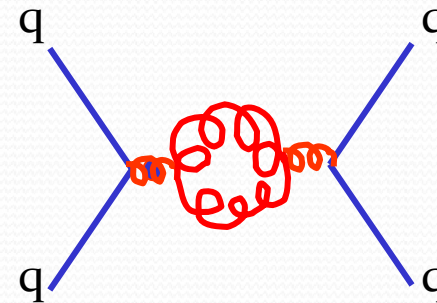
Running di α_s

- Consideriamo l'interazione forte tra due quark:



La produzione di coppie $q\bar{q}$ virtuali nel propagatore del gluone ha l'effetto di schermare la carica di colore, la quale **diminuirebbe** all'aumentare della distanza (cioè a piccoli impulsi trasferiti).

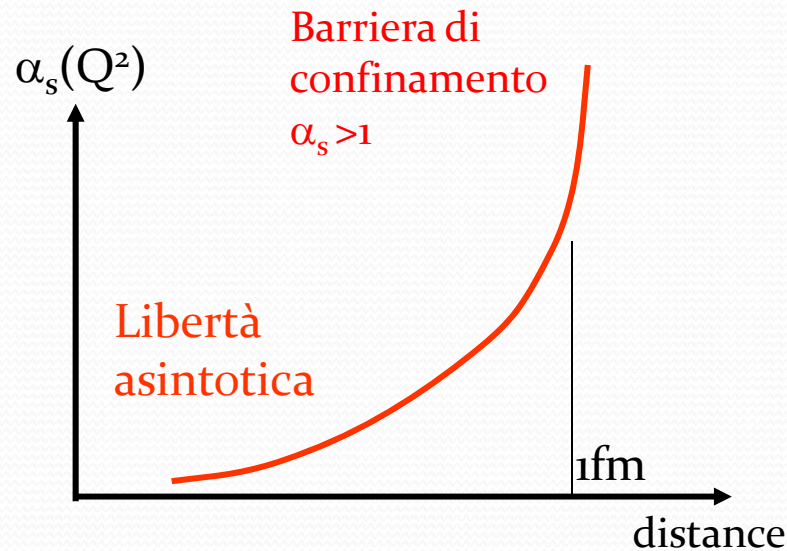
Ma dato che i gluoni sono "colorati", esiste anche questo altro grafico che modifica l'interazione, e produce un effetto di "antischermaggio"



[un loop di fermioni ha segno opposto rispetto ad un loop di bosoni]

Running di α_s

- L'effetto della self-interaction dei gluoni è tale che:



$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2f) \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}$$

f = numero di quark con $4m^2 < Q^2$
 Λ = scala (~ 200 MeV per $f=4$)

$Q^2 \sim \Lambda^2$ accoppiamento forte



~~perturbazioni~~

$Q^2 \gg \Lambda^2$ accoppiamento debole

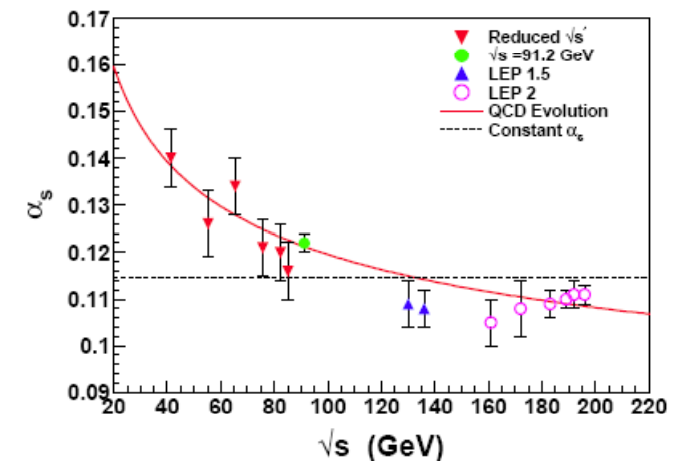
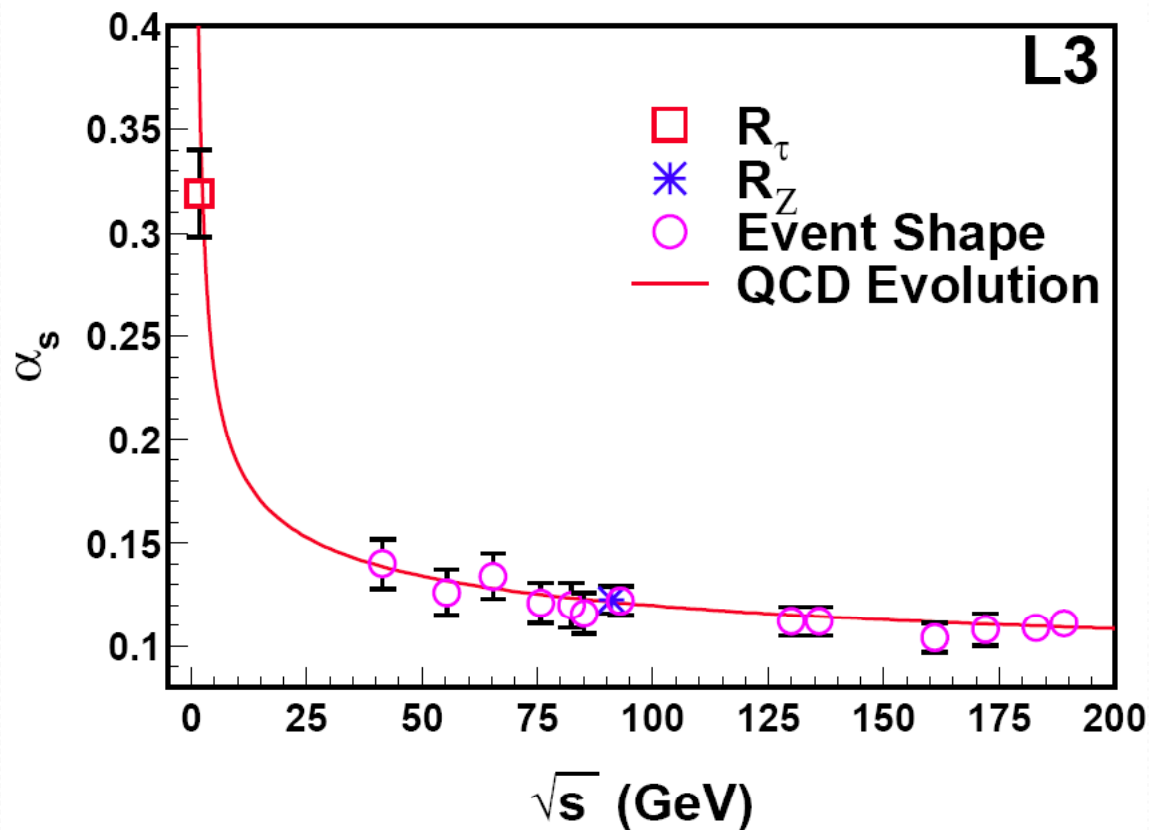


perturbazioni

A grandi impulsi trasferiti (ovvero a piccole distanze) α_s è piccola e si possono fare dei calcoli di QCD con il metodo perturbativo. A piccoli impulsi la costante è grande e non si possono fare dei calcoli perturbativi.

Misura del running di α_s

- La costante di accoppiamento α_s è stata misurata da diversi esperimenti a vari regimi di Q^2 . Ad esempio a Lep si è trovato:



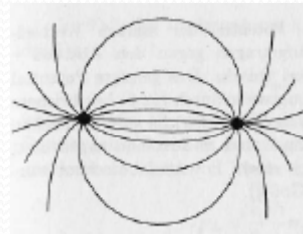
I dati confermano il running di α_s

N.B. Siamo comunque ad energie molto maggiori di Λ_{QCD}

Il potenziale della QCD

- Il potenziale di interazione statico tra una coppia quark-antiquark (in uno stato di singoletto di colore come un mesone) si può riassumere nel modo seguente:
 - A piccole distanze tra i quark (< 0.1 fm) domina lo scambio di un gluone (perché α_s è “piccola”) e il potenziale di interazione è simile al potenziale di QED con lo scambio di un fotone:

$$V(r) = -\frac{4\alpha_s}{3r}$$



- All'aumentare della distanza, α_s aumenta e non si ha più lo scambio di un solo gluone, ma si entra in un regime non perturbativo, dove si possono fare soltanto dei calcoli numerici. Questi sono consistenti con un potenziale a grandi distanze parametrizzabile come:

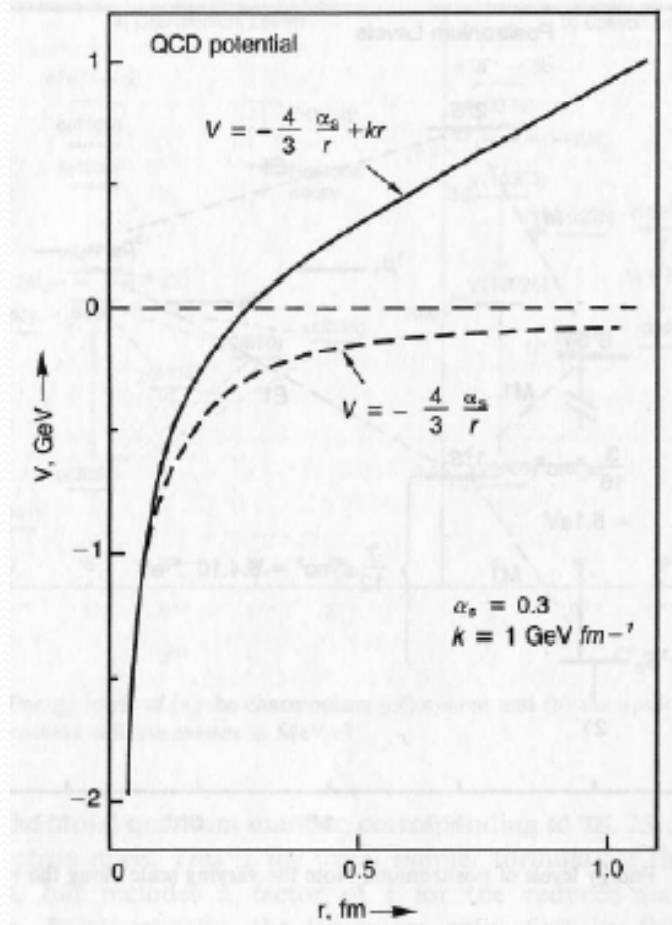
$$V(r) = kr$$

$$k \approx 1 \text{ GeV} \cdot \text{fm}^{-1}$$



Il potenziale della QCD

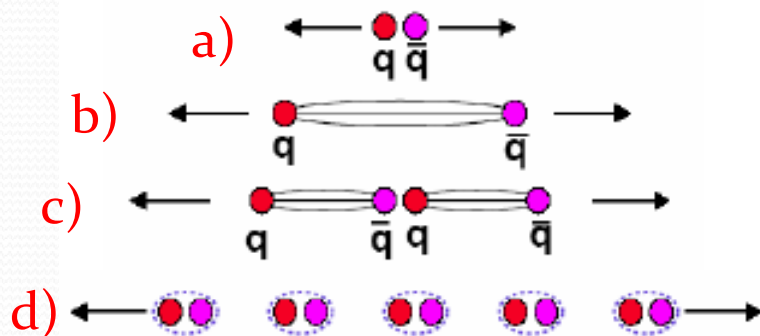
- Quando i due quark si allontanano tra loro, il termine lineare del potenziale domina “incamerando” energia (come succede quando si allunga una molla).



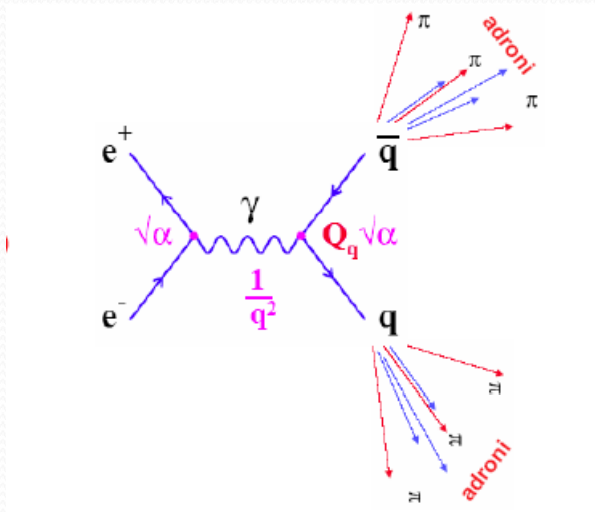
Questo tipo di potenziale permette di spiegare gli stati eccitati di una coppia di quark-antiquark pesanti, come il charmonio (stati legati $c\bar{c}$) ed il bottomio (stati legati $b\bar{b}$)

Adronizzazione

- Una conseguenza della libertà asintotica è il confinamento dei quark all'interno di un adrone.



- I quark sono vicini e la loro energia di interazione è piccola.
- I quark si allontanano e l'energia di interazione aumenta (α_s aumenta con la distanza).
- ad un certo punto per distanze dell'ordine del fm, è energeticamente più conveniente estrarre dal vuoto una coppia $q\bar{q}$ per "accorciare" la stringa.
- Il processo (non perturbativo) chiamato adronizzazione va avanti fino ad avere tutti adroni "bianchi" nello stato finale.

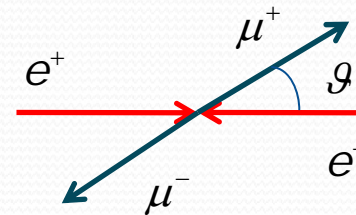


Gli adroni nello stato finale "ricordano" l'impulso iniziale del quark e danno origine ad un **jet** di particelle

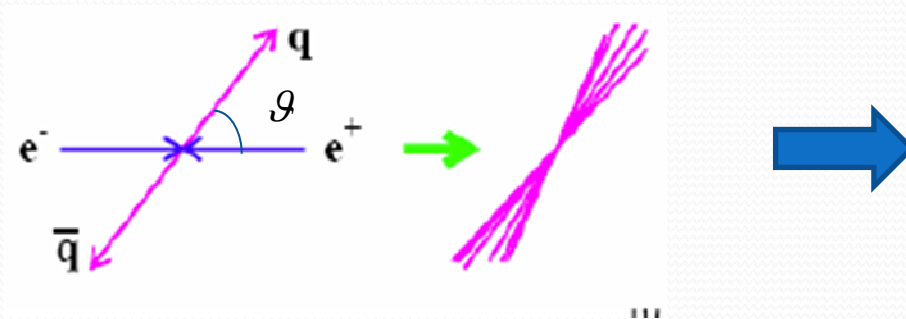
Spin dei quark

- Si può ricavare lo spin dei quark dalla distribuzione angolare dei jet.
- La sezione d'urto differenziale del processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ è:

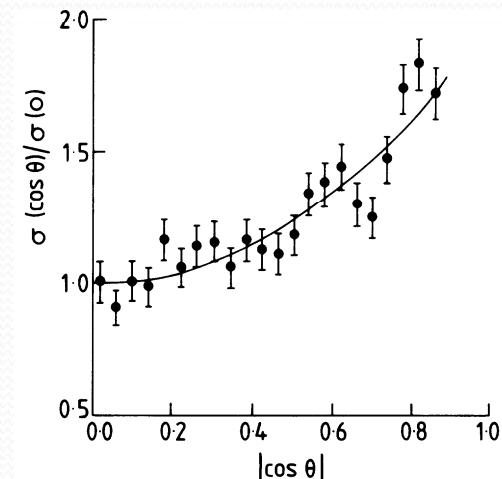
$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = A(1 + \cos^2\theta)$$



- Se i quark sono fermioni di spin $\frac{1}{2}$, la sezione d'urto differenziale del processo $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ deve avere lo stesso andamento.

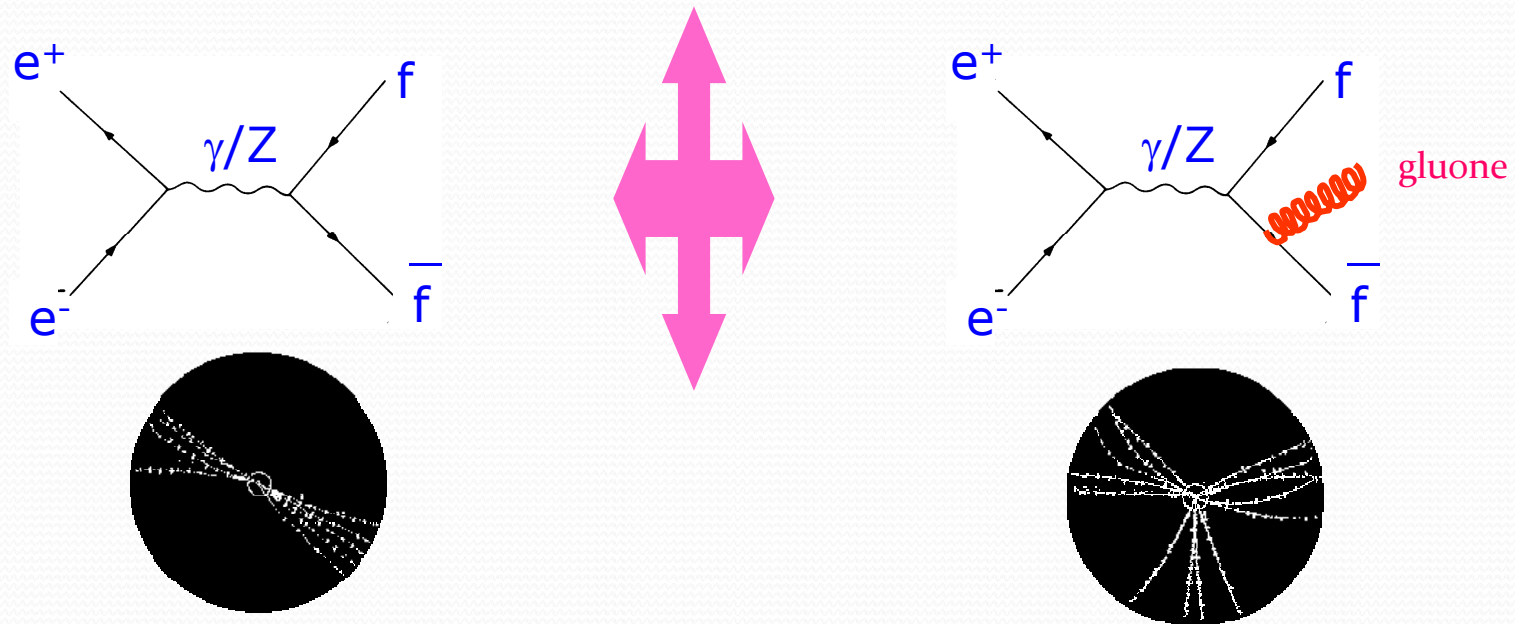


I quark hanno spin $\frac{1}{2}$



Scoperta del gluone

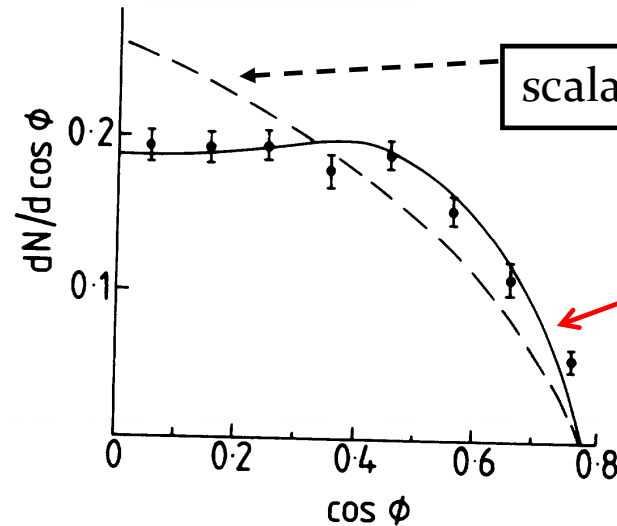
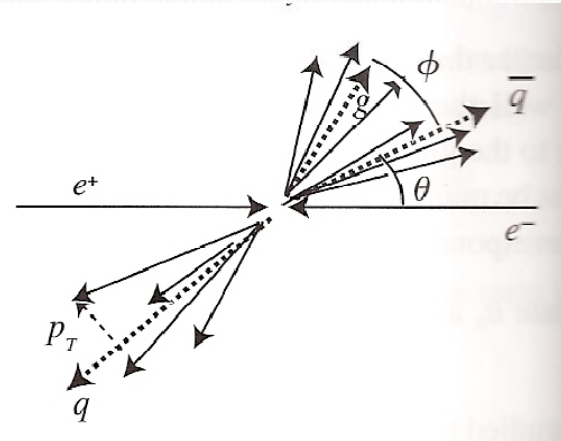
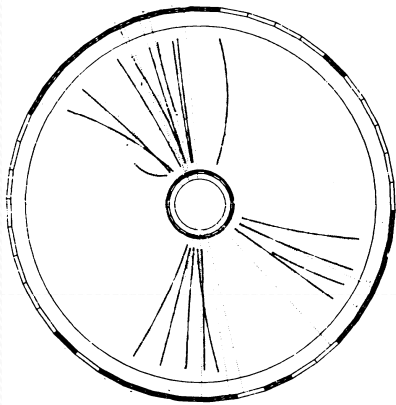
- Il gluone fu scoperto nel 1979 a Petra, un collider e^+e^- , $\sqrt{s}=27$ GeV, a Desy (Amburgo)



- Dai quark dello stato finale può essere irradiato un gluone. Quando questo gluone ha sufficiente energia, esso può adronizzare in maniera indipendente dai quark, e dare origine ad un terzo jet di particelle.
- Si cercavano quindi eventi con 3 jet nel piano trasverso all'asse dei fasci, dove la somma dei quadrimpulsi deve essere zero.
(Un jet è formato da un insieme di adroni, il cui quadrimpulso, sommato, è uguale a quello del quark che lo ha originato)

Spin dei gluoni

- Lo spin del gluone si può dedurre dalla sezione d'urto differenziale dell'angolo ϕ tra il jet del gluone e l'asse degli altri due jet, nel sistema del CM dei due jet.

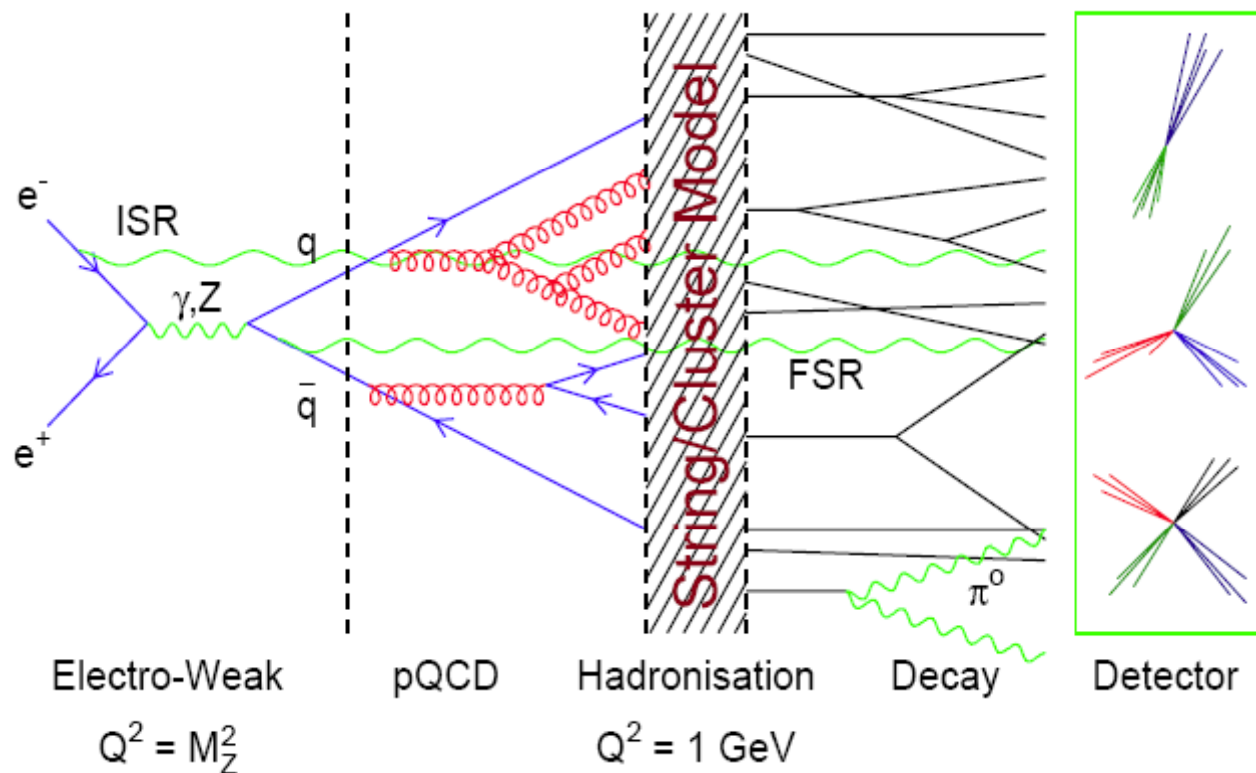


QCD, vector gluons

I gluoni hanno spin 1

Adronizzazione

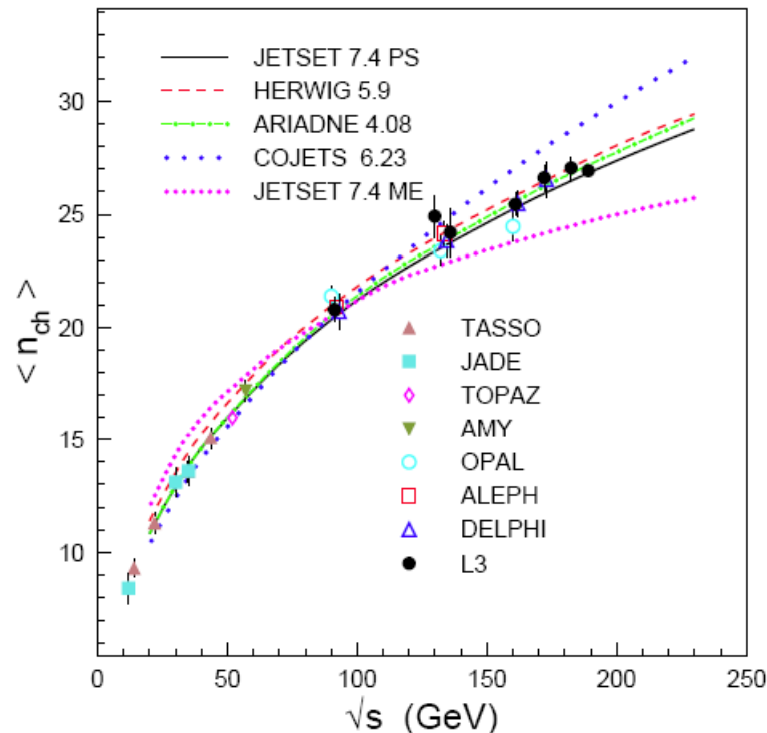
- I quark iniziali sono colorati. Gli adroni finali sono bianchi.
- Il processo di formazione degli adroni si chiama adronizzazione. Avviene per energie “intorno” a 1 GeV ed il processo non è perturbativo, ma va descritto con modelli fenomenologici.



Confronto tra modelli di adronizzazione

- Il grado di “giustezza” dei vari modelli di adronizzazione si ricava dal confronto delle previsioni del Montecarlo con i dati sperimentali per diverse grandezze caratterizzanti un evento adronico, ad esempio:

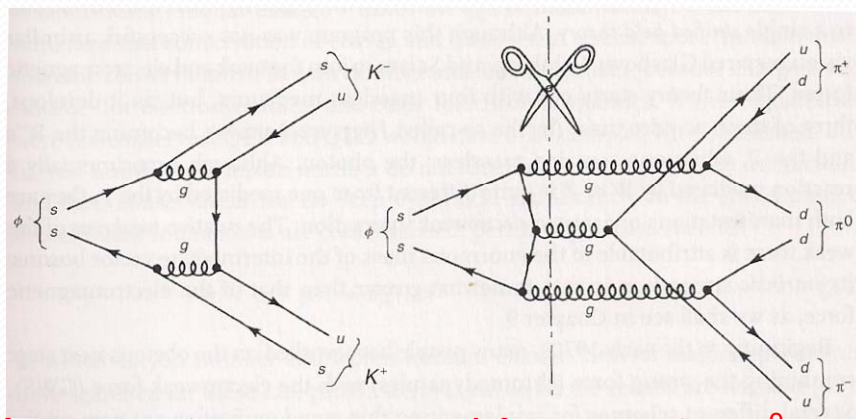
Numero medio di particelle cariche in un jet in funzione dell'energia del centro di massa del sistema e^+e^- .



Ad esempio i MC Jetset 7.4 ME e Cojets 6.23 non riproducono bene i dati ad alta energia.

La regola di OZI e la QCD

- Tramite la libertà asintotica si può spiegare la regola di OZI.



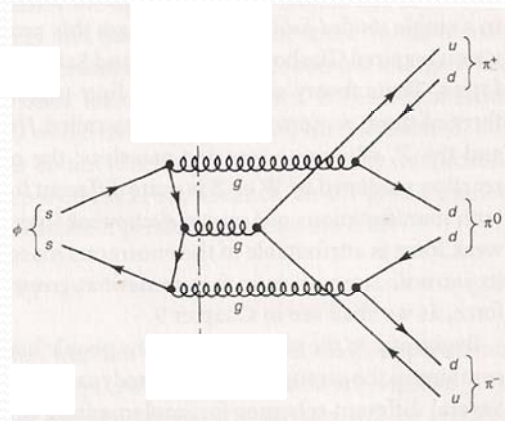
a) $\Phi \rightarrow K^+ K^-$

b) $\Phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

Regola di OZI: Se il diagramma può essere diviso in due tagliando solo linee di gluoni (senza tagliare le linee esterne), il processo è soppresso.

- Nel diagramma a) i gluoni emessi sono “soffici”, cioè trasportano un impulso piccolo, quindi la loro costante di accoppiamento è grande.
- Al contrario nel processo b) i gluoni sono “duri” perché trasportano l’impulso necessario per formare l’adrone dello stato finale, quindi la loro costante di accoppiamento è piccola, pertanto l’ampiezza del processo è ridotta rispetto al caso precedente.

La regola di OZI: perché 3 gluoni



- Lo stato iniziale e lo stato finale sono singoletti di colore, quindi i due stati devono essere connessi da una combinazione di gluoni che sia un singoletto di colore. **Il numero minimo di gluoni per fare ciò è due.**
- La ϕ , così come la J/ψ , ha i numeri quantici del fotone, tra cui $C=-1$. Anche il gluone ha coniugazione di carica uguale a -1 , quindi il numero di gluoni scambiati deve essere dispari (numero quantico moltiplicativo). **Pertanto il numero minimo di gluoni scambiati è tre.**

Esercizio

In un collider e^+e^- asimmetrico, il fascio di elettroni ha energia 4.5 GeV ed il positrone 2.0 GeV.

- calcolare l'energia del centro di massa
- dire quali coppie di quark vengono prodotte nell'annichilazione e^+e^- :

$$e^- = 4.5 \text{ GeV} \quad \leftarrow \quad e^+ = 2 \text{ GeV}$$

L'energia del centro di massa è uguale a \sqrt{s} .

$$s = (\rho(e^+) + \rho(e^-))^2$$

$$\begin{cases} \rho(e^+) = (E^+; 0, 0, -E^+) \\ \rho(e^-) = (E^-; 0, 0, E^-) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s = 4 \cdot E^+ E^- \Rightarrow \sqrt{s} = 2\sqrt{E^+ E^-} = 2\sqrt{4.5 \cdot 2} = 6 \text{ GeV}$$

In questo collider si possono produrre $d\bar{d}$, $u\bar{u}$, $s\bar{s}$, $c\bar{c}$, ma non i $b\bar{b}$ in quanto la massa del b è di 4.5 GeV

Esercizio

Calcolare l'energia di soglia del fotone relativo alla produzione di coppie in presenza del campo di un elettrone.

La produzione di coppie non può avvenire per un fotone isolato in quanto non si conserverebbe il quadrimpulso. Occorre quindi la presenza di una seconda particella, che può essere un nucleo atomico oppure un elettrone.

Nel caso di un elettrone si ha il processo:



Per calcolare l'energia di soglia si assume che le particelle finali vengano prodotte a riposo nel sistema del centro di massa. Inoltre ricordiamo che il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico. Indichiamo con m la massa dell'elettrone.

$$P_\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma) ; E_e = (m, 0)$$

$$\Rightarrow P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}} = (E_\gamma + m, \vec{p}_\gamma) ; P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}} = (3m, 0)$$

$$(P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}})^2 = (P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}})^2 \Rightarrow (E_\gamma + m)^2 - \vec{p}_\gamma^2 = (3m)^2 = E_\gamma^2 + m^2 + 2E_\gamma - \vec{p}_\gamma^2 = 9m^2$$

$$\Rightarrow E_\gamma = 4m = 4 \cdot 0.511 = 2.04 \text{ MeV}$$

Esercizio

Il pione neutro è stato scoperto studiando la fotoproduzione su protoni a riposo ($\gamma+p \rightarrow \pi^0 + p$). Calcolare la minima energia del fotone nel laboratorio per produrre la reazione.

$$(m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2 ; m_p = 938 \text{ MeV}/c^2)$$

Per calcolare l'energia di soglia si assume che le particelle finali vengano prodotte a riposo nel sistema del centro di massa. Inoltre ricordiamo che il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico. Indichiamo con M la massa del protone e con m la massa del pi-zero.

$$P_\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma) ; E_p = (M, 0)$$

$$\Rightarrow P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}} = (E_\gamma + M, \vec{p}_\gamma) ; P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}} = (m + M, 0)$$

$$(P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}})^2 = (P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}})^2 \Rightarrow (E_\gamma + M)^2 - \vec{p}_\gamma^2 = (m + M)^2$$

$$\Rightarrow E_\gamma = m \left(1 + \frac{m}{2M} \right) = 135 \left(1 + \frac{135}{2 \cdot 938} \right) = 145 \text{ MeV}$$