



Fisica Nucleare e Subnucleare II

Prof. Claudio Luci

[http://www.roma1.infn.it/people/
luci/corso_fnsII.html](http://www.roma1.infn.it/people/luci/corso_fnsII.html)

Bibliografia

Il libro di riferimento è:

- **Nuclear and Particle Physics; Burcham and Jobes; Pearson Prentice Hall**

Altri libri utili per consultazione sono:

- **Martin – Shaw; Particle Physics**
- **Perkins; Introduction to high energy physics**
- **Povh, Rith, Scholz, Zetsche; Particelle e Nuclei**

Sui seguenti libri è posto maggiormente l'accento sull'aspetto formale della fisica delle particelle:

- **Griffiths; Introduction to high energy physics**
- **Halzen-Martin; Quark & Leptons**

In questo libro si possono trovare gli articoli originali dei lavori sperimentali più importanti della fisica delle particelle:

- **Cahn-Goldhaber; experimental foundations of particle physics**

Per quanto riguarda i cenni di fisica teorica, potete consultare i libri seguenti:

- **Mandl-Shaw; Quantum Field Theory**
- **Bjorken-Drell; Relativistic Quantum Mechanics**
- **Aitchison-Hey; gauge theories in particle physics**

Cenni di fisica teorica

- **Equazioni d'onda relativistiche: equazione di Klein-Gordon ed equazione di Dirac.**
- **Matrici γ .**
- **Covarianti bilineari.**
- **Elicità.**
- **Introduzione alla seconda quantizzazione.**
- **Formalismo Lagrangiano.**
- **Matrice S .**
- **Diagrammi di Feynman.**
- **Propagatore.**
- **Cenni al problema della rinormalizzazione.**
- **Regola d'oro di Fermi.**
- **Probabilità di transizione per unità di tempo.**



EQUAZIONI RELATIVISTICHE

- PARTICELLA LIBERA ISOLATA

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

⇒ eq. di Schrödinger non relativistica

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t)$$

QUESTA EQUAZIONE NON È COVARIANTE E NON VA BENE

- QUADRI VETTORE ENERGIA-IMPULSO (COVARIANTE)

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2$$

- OPERATORE p^μ È COVARIANTE

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

- POTREMMO SCEGLIERE

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi$$

MA NON È CHIARO COME INTERPRETARE L'OPERATORE $\sqrt{\quad}$

$$\Rightarrow H^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \psi$$

- QUESTA È L'EQUAZIONE DELLE ONDE

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad \square \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

- QUESTA EQUAZIONE CONDUCE A DELLE SOLUZIONI CON ENERGIE NEGATIVE
- COSTRUIAMO UNA CORRENTE CONSERVATA

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0$$

$$\nabla^\mu (\psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \operatorname{div} \frac{\hbar}{2im} \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] = 0$$

- EQUAZIONE DI CONTINUITA'

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \equiv \text{densità di probabilità}$$

... PROBLEMA ... NON È DEFINITA POSITIVA

- QUESTA EQUAZIONE SI CHAMA EQ. DI KLEIN-GORDON ED È ORA UTILIZZATA PER DESCRIVERE IL COMPORTAMENTO DI PARTICELLE CON SPIN 0
- PER OTTENERE UNA DENSITÀ DI PROBABILITÀ POSITIVA OCCORRE TROVARE UN'EQUAZIONE CHE SIA LINEARE NELLE DERIVATE

EQUAZIONE DI DIRAC

- NEL 1928 DIRAC PROPOSÌ L'EQ. SEGUENTE

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta m c^2 \psi \equiv H \psi$$

- I COEFFICIENTI α_i NON POSSONO ESSERE DEI NUMERI
ALTRIMENTI L'EQ. NON SAREBBE INVARIANTE NEMMENO
PER ROTAZIONI SPAZIALI

$\Rightarrow \psi$ NON PUÒ ESSERE UN SEMPLICE SCALARE

- DIRAC PROPOSÌ CHE LA SUA FOSSE UN'EQ. MATRICIALE

LA ψ PUÒ ESSERE SCRITTA COME UN VETTORE COLONNA
A N COMPONENTI

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}$$

I COEFFICIENTI α_i E β SONO MATRICI $N \times N$

- L'EQUAZIONE DEVE DARE LA GIUSTA RELAZIONE RELAT.
TRA ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

VALIDA PER UNA PARTICELLA LIBERA

- EQUAZIONE DI CONTINUITA' VALIDA
- DEVE ESSERE COVARIANTE
- PER SODDISFARE LA RELAZIONE ENERGIA-MOMENTO, CIASCUNA COMPONENTE ψ_α DI Ψ DEVE SODDISFARE L'EQ. DI SECONDO GRADO DI KLEIN-GORDON

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi_\alpha$$

ITERANDO L'EQ. PRECEDENTE SI HA:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j}^3 \frac{\alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\hbar m c^3}{i} \sum_i^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 c^4 \psi$$

- PER SODDISFARE L'EQ. DI KLEIN-GORDON SI DEVE AVERE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} \quad (\text{anticommutazione}) \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \end{array} \right.$$

- INOLTRE LE α_i E β DEVONO ESSERE MATRICI HERMITIANE IN MODO CHE LO SIA ANCHE H

- DATO CHE $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$

\Rightarrow GLI AUTOVALORI DEVONO ESSERE ± 1

(N.B. una matrice hermitiana può sempre essere diagonalizzata)

- DALLE PROPRIETÀ DI ANTICOMMUTAZIONE SEGUE CHE LA TRACCIA DELLE MATRICI DEVE ESSERE ZERO

$\Rightarrow N$ DEVE ESSERE PARI

\Rightarrow LA DIMENSIONE PIÙ BASSA È UGUALE A 4

- IN UNA RAPPRESENTAZIONE ESPlicita SI HA:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

DENSITÀ DI PROBABILITÀ

- $\Psi^+ = (\psi_1^* \dots \psi_n^*)$ funzione d'onda hermitiana coniugata

$$\Rightarrow i\hbar \Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_k \Psi^+ \alpha_k \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} + m c^2 \Psi^+ \beta \Psi$$

- SCRIVIAMO L'EQ. DI DIRAC CONIUGATA E POI MOLTIPLICHIAMO A DESTRA PER Ψ

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} \Psi = +i\hbar c \sum_k \frac{\partial \Psi^+}{\partial x^k} \alpha_k \Psi + m c^2 \Psi^+ \beta \Psi$$

- SOTTRAIAMO LE DUE EQUAZIONI MEMBRO A MEMBRO, SI HA:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^+ \Psi) = \sum_k \frac{\hbar c}{i} \frac{\partial}{\partial x^k} (\Psi^+ \alpha^k \Psi)$$

EQUIVALENTE A:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

CON L'IDENTIFICAZIONE

$$\rho = \Psi^+ \Psi = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^* \psi_{\sigma} \quad (\text{densità di probabilità})$$

$$j^k = c \Psi^+ \alpha^k \Psi \quad (\text{corrente di probabilità})$$

- SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ρ E \vec{j} FORMANO LE COMPONENTI DI UN QUADRIVETTORE E L'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ È COVARIANTE

SOLUZIONI DELL'EQ. DI DIRAC PER UN ELETTRONE A RIPOSO

- SE L'ELETTRONE È A RIPOSO ($\vec{p} = 0$) LA FUNZIONE D'ONDA NON DIPENDE DALLA POSIZIONE

⇒ L'EQ. DI DIRAC DIVENTA:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2 \psi \quad \left[\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

- LE 4 SOLUZIONI SONO:

$$\psi^1 = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \psi^2 = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{energia positiva})$$

$$\psi^3 = e^{+\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \psi^4 = e^{+\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{energia negativa})$$

- DIRAC POSTULÒ UN MARE COMPLETAMENTE RIEMPIUTO DA ELETTRONI CON ENERGIA NEGATIVA. A VOLTE C'È UNA "LACUNA" CHE APPARE COME UNA CARICA POSITIVA

- FEYNMAN E STÜCKELBERG INTERPRETARONO LE SOLUZIONI ψ^3 e ψ^4 COME QUELLE DI UN ELETTRONE CHE SI MUOVE ALL'INDIETRO NEL TEMPO, CHE CORRISPONDE AD UN POSITRONE CHE SI MUOVE IN AVANTI NEL TEMPO

$$e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}$$

COVARIANZA DELL'EQ. DI DIRAC

- RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE IN UNA FORMA CHE CONSERVI LA SIMMETRIA TRA ct E x^i .
- INTRODUCIAMO LE MATRICI γ

$$\gamma^0 = \beta \quad ; \quad \gamma^i = \beta \alpha_i \quad i=1, 2, 3$$

- L'EQ. DIVENTA, DOPO AVER MOLTIPLICATO PER β/c

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \Psi - mc\Psi = 0$$

- REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE PER LE MATRICI γ^μ

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\gamma^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

- LE γ^i SONO ANTIHERMITIANE, CON $(\gamma^i)^2 = -1$

- γ^0 È HERMITIANO

- UNA POSSIBILE RAPPRESENTAZIONE È LA SEGUENTE:

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- N.B. SPINORE AGGIUNTO

$$\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger \gamma^0$$

- NOTAZIONE DI FEYNMAN

$$A = \gamma^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu A^\nu = \gamma^0 A^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{A}$$

- IN PARTICOLARE

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\gamma^0}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$$

- L'EQ. DI DIRAC DIVENTA :

$$(i\hbar \not{\partial} - mc) \psi = 0$$

OPPURE, CONSIDERANDO CHE $p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$$\Rightarrow (\not{p} - mc) \psi = 0$$

DA QUI SI VEDE IMMEDIATAMENTE CHE L'EQUAZIONE DI DIRAC E' COVARIANTE A VISTA

- SI PUO' DIMOSTRARE CHE LE SOLUZIONI AD ENERGIA NEGATIVA E QUELLE AD ENERGIA POSITIVA, HANNO VALORI OPPOSTI DELL'AUTOVALORE DELLA RIFLESSIONE SPAZIALE, OVVERO HANNO PARITA' INTRINSECA OPPOSTA.

N.B. \Rightarrow FERMIONI E ANTI FERMIONI HANNO PARITA' INTRINSECA OPPOSTA

COVARIANTI BILINEARI

- FACENDO DEI PRODOTTI DELLE MATRICI γ SI POSSONO COSTRUIRE 16 MATRICI LINEARMENTE INDIPENDENTI $\Gamma_{\alpha\beta}^n$ CHE APPAIONO SPESSO NELLE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DI DIRAC.

$$\Gamma^S = 1 \quad ; \quad \Gamma_\mu^V = \gamma_\mu \quad ; \quad \Gamma_{\mu\nu}^{LT} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

$$\Gamma^P = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5 \quad ; \quad \Gamma_\mu^A = \gamma^5 \gamma_\mu$$

- SI TROVA CHE $\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0$

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma_0$$

- SI POSSONO TROVARE LE PROPRIETA' DI TRASFORMAZIONE DELLE 16 FORME BILINEARI $\bar{\psi}(x) \Gamma^n \psi(x)$

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) : \text{SCALARE}$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) : \text{PSEUDO SCALARE}$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \text{VETTORE}$$

$$\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\mu \psi(x) : \text{PSEUDO VETTORE}$$

$$\bar{\psi}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) : \text{TENSORE DI RANGO 2 ANTISIMMETRICO}$$

SOLUZIONE CON ONDE PIANE

(GRIFFITHS)

- CERCHIAMO UNA SOLUZIONE DELLA FORMA:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Omega e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon t - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(\epsilon, \vec{p})$$

$$\equiv \Psi(x^\mu) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fattore di normalizzazione}}}{\Omega} e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u(p_\mu) \quad \leftarrow \text{spinore}$$

- N.B. LA DIPENDENZA DA x^μ È SOLO NELL'ESPOLENTE, QUINDI:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = -\frac{i}{\hbar} p_\mu \Omega e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u(p_\mu)$$

- INTRODUCENDO QUESTA SOLUZIONE NELL'EQ. DI DIRAC, SI OTTIENE

$$\gamma^\mu p_\mu \Omega e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u - mc \Omega e^{-\frac{i}{\hbar} x^\mu p_\mu} u = 0$$

$$\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - mc) u(p_\mu) = 0 \quad \left[\text{Eq. di Dirac nelle spaz. e ai} \right. \\ \left. \text{momenti} \right]$$

NON CI SONO DERIVATE IN QUESTA EQUAZIONE

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = \frac{\hbar}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \vec{p} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_0 c}{\hbar} & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -\frac{m_0 c}{\hbar} \end{pmatrix}$$

QUINDI :

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) u = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} - mc & -\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -\frac{E}{c} - mc \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} =$$

SOLUZIONI
DEI COMPONENTI.

$$= \begin{bmatrix} (\frac{E}{c} - mc) u_A - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_B \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} u_A - (\frac{E}{c} + mc) u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- PER SODDISFARE L'EQUAZIONE DI DIRAC DOBBIAMO AVERE :

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_B \quad ; \quad u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) u_A$$

- DA QUI SI POSSONO COSTRUIRE LE 4 SOLUZIONI INDIPENDENTI DELL'EQ. DI DIRAC.

- LAVORANDO IL FATTORE DI NORMALIZZAZIONE :

$$1) \text{ scegliamo } u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{c}{E + mc^2} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + i p_y \end{pmatrix}$$

$$2) \quad " \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - i p_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

$$3) \quad " \quad u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{c}{E - mc^2} \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + i p_y \end{pmatrix}$$

$$4) \quad " \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_x - i p_y \\ -p_z \end{pmatrix}$$

PER LE SOLUZIONI 1) e 2) DOBBIAMO SCEGLIERE "E" POSITIVA (PARTICELLE),
NEUTRE PER 3) e 4) "E" NEGATIVA (ANTI-PARTICELLE)

GLI SPINORI SI POSSONO NORMALIZZARE IN VARI MODI,
AD ESEMPIO:

$$u^\dagger u = \frac{2|E|}{c} \quad (\text{Halzen and Martin})$$

$$u^\dagger u = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{Bjorken and Drell}) ; \text{ problemi per } m \rightarrow 0$$

$$u^\dagger u = 1 \quad (\text{Bogoliubov and Shirkov})$$

QUINDI:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c \cdot p_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad \text{etc...}$$

$$N = \sqrt{(|E| + mc^2) / c}$$

- SI POTREBBE PENSARE CHE $u^{(1)}$ E $u^{(2)}$ DESCRIVANO UN'ELETTRONE CON SPIN UP (DOWN) MA NON E' COSI'
- LE 4 SOLUZIONI COSTITUISCONO UN SET COMPLETO DI SOLUZIONI MA NON SONO AUTOSTATI DELL'ELICITA' ($\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}$)
- \vec{S} NON E' UNA GRANDEZZA CONSERVATA, SOLO IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ LO E'

- PER LE PARTICELLE DI DIRAC LA MATRICE DI SPIN È:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} \quad \text{DOVE} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

SI PUÒ VERIFICARE CHE $U^{(1)}$ NON È AUTOSTATO DI Σ_z

- TUTTAVIA, SE ORIENTIAMO L'ASSE Z NELLA DIREZIONE DEL MOTO SI HA $p_x = p_y = 0$

⇒ $U^{(1)}$ E $U^{(3)}$ SONO AUTOSTATI CON SPIN UP
 $U^{(2)}$ E $U^{(4)}$ SONO AUTOSTATI CON SPIN DOWN

N.B. E e \vec{p} NELL'EQUAZIONE $\psi(\vec{r}, t) = Q e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(E, \vec{p})$ SONO PARAMETRI MATEMATICI CHE CORRISPONDONO FISICAMENTE A ENERGIA E QUANTITÀ DI MOTO. QUESTO È VERO PER GLI STATI $U^{(1)}$ E $U^{(2)}$.

- QUESTO NON È POSSIBILE PER GLI STATI $U^{(3)}$ e $U^{(4)}$ PERCHÉ I POSIZIONI IN DANI CASO HANNO ENERGIA POSITIVA, QUINDI PER QUESTE SOLUZIONI SI CAMBIA IL SEGNO DI E e \vec{p}

$$\psi(\vec{r}, t) = Q e^{\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(-E, -\vec{p}) \quad (\text{per } U^{(3)} \text{ e } U^{(4)})$$

- LE SOLUZIONI $U^{(3)}$ e $U^{(4)}$ CHE DESCRIVONO I POSIZIONI, ESPRESSE IN TERMINI DEI PARAMETRI FISICI (ENERGIA POSITIVA) SI INDICANO IN LETTERATURA CON ψ

$$\psi^{(1)} \equiv U^{(4)} \quad (\text{spin down})$$

$$\psi^{(2)} \equiv -U^{(3)} \quad (\text{spin up})$$

N.B. L'OPERAZIONE CORRISPONDENTE È CHIAMATA OPERAZIONE DI CARICA (C) (12)

$$U^{(1)} = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c p_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \end{bmatrix} ; U^{(2)} = N \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \end{bmatrix}$$

$$U^{(4)}(\vec{E}, \vec{p}) = U^{(4)}(-\vec{E}, -\vec{p}) = N \begin{bmatrix} \frac{c(p_x - i p_y)}{E + mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{(2)}(\vec{E}, \vec{p}) = -U^{(3)}(-\vec{E}, -\vec{p}) = -N \begin{bmatrix} \frac{c p_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $E = \sqrt{p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2 + p_z^2 c^2 + m^2 c^4}$
- LE U SODDISFANO L'EQUAZIONE $(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$
- MENTRE PER LE v BISOGNA INSERIRE IL SEGNO DI p_μ
 $(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0$

CAMPO E.M. IN ASSENZA DI CARICHE

RAUOL - SHAW

- EQ. DI MAXWELL unite funzione vortonizzata (cgs)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- POTENZIALI $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

- TRASFORMAZIONE DI GAUGE, FUNZIONE ARBITRARIA $f(\vec{x}, t)$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} ; \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f$$

- EQ. DI MAXWELL TRAMITE I POTENZIALI

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{1}{c} \vec{j}$$

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

$$\square \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \rho$$

- SE $\rho = 0$ E $\vec{j} = 0$, SI PUO' SCEGLIERE LA GAUGE DI COULOMB (GAUGE DI RADIAZIONE) DOVE $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{quindi si puo' scegliere } \phi = 0$$

- LA SOLUZIONE PER \vec{A} E' LA SEGUENTE

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad \text{con } \vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

- \vec{A} E' PERPENDICOLARE ALLA PROPAGAZIONE DELL'ONDA

- L'HAMILTONIANA DEL SISTEMA È:

$$H_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3\vec{x}$$

- AD UN DATO TEMPO t , IL CAMPO VA SPECIFICATO IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO \vec{x} , QUINDI IL CAMPO POSSIÈDE UN NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ INFINITO.
- PER SEMPLIFICARE CONSIDERIAMO IL CAMPO ALL'INTERNO DI UN CUBO DI LATO L E VOLUME V ED IMPOSTIAMO DELLE CONDIZIONI AL CONTOURNO PERIODICHE SULLA SUPERFICIE

$$\vec{A}(0, y, z, t) = \vec{A}(L, y, z, t), \text{ etc.}$$

- LE FUNZIONI $\frac{1}{\sqrt{V}} \vec{E}_r(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ $r=1,2$

FORMANO UN SET COMPLETO DI VETTORI DI CAMPO ORTONORMALI

- IL VETTORE D'ONDA \vec{k} HA LA FORMA:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3) \quad n_1, n_2, n_3 = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\vec{E}_r(\vec{k}) \cdot \vec{E}_s(\vec{k}) = \delta_{rs} \quad ; \quad \vec{E}_r(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0 \quad r, s = 1, 2$$

- IL CAMPO \vec{A} SI PUÒ SVILUPPARE IN SERIE DI FOURIER

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_r \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{E}_r(\vec{k}) \left[a_r(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_r^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]$$

DOVE $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$

- SOSTITUENDO $\vec{A}(x, t)$ NELL'EQUAZIONE $\square \vec{A} = 0$ SI OTTIENE

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_r(\vec{k}, t) = -\omega_k^2 Q_r(\vec{k}, t)$$

$$\rightarrow Q_r(\vec{k}, t) = Q_r(\vec{k}) e^{-i\omega_k t}$$

- L'ENERGIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO SI PUO' ESPRIMERE COME :

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega_k Q_r^*(\vec{k}) Q(\vec{k})$$

N.B. QUESTA E' INDIPENDENTE DAL TEMPO, COME CI SI ASPETTA SE NON CI SONO CARICHE E CORRENTI

- LA QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO E.M. SI FA QUANTIZZANDO I SINGOLI MODI DI OSCILLAZIONE

OSCILLATORE ARMONICO

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$[q, p] = i\hbar$$

- INTRODUCIAMO GLI OPERATORI:

$$\left. \begin{array}{l} a \\ a^+ \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m \omega q \pm i p)$$

- SODDISFANO LA RELAZIONE $[a, a^+] = 1$

$$H_{osc} = \frac{1}{2} \hbar \omega (a^+ a + a a^+) = \hbar \omega (a^+ a + \frac{1}{2})$$

- DA NOTARE CHE:

$$a^+ a \equiv N ; \text{ definito positivo;}$$

conta il numero di quanti nello stato

$$\langle \psi | N | \psi \rangle = \langle \psi | a^+ a | \psi \rangle = \langle a \psi | a \psi \rangle \geq 0$$

\Rightarrow N POSSIÈDE UN AUTOVALORE MINIMO NON NEGATIVO

$$\alpha_0 \geq 0$$

- DALL'EQUAZIONE DEGLI AUTOVALORI SEGUE:

$$N |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

\uparrow numero di quanti nello stato

- UTILIZZANDO LE REGOLE DI COMMUTAZIONE SI TROVA:

$$N Q |\alpha\rangle = (\alpha-1) Q |\alpha\rangle ; N Q^+ |\alpha\rangle = (\alpha+1) Q^+ |\alpha\rangle$$

OVVERO $Q |\alpha\rangle$ E $Q^+ |\alpha\rangle$ SONO AUTOFUNZIONI DI N CON AUTOVALORI $\alpha-1$ E $\alpha+1$ RISPETTIVAMENTE

- DATO CHE α_0 È L'AUTOVALORE PIÙ PICCOLO, DOBBIAMO AVERE:

$$Q |\alpha_0\rangle = 0$$

$$\text{E DATO CHE } Q^+ Q |\alpha_0\rangle = \alpha_0 |\alpha_0\rangle \Rightarrow \alpha_0 = 0$$

\Rightarrow GLI AUTOVALORI DI N SONO GLI INTERI $n=0, 1, 2, \dots$

- PER NORMALIZZARE GLI STATI A 1, DOBBIAMO AVERE:

$$\langle n | n \rangle = 1 \Rightarrow Q |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle ; Q^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

- SE $\langle 0 | 0 \rangle = 1 \Rightarrow$ GLI AUTOSTATI DI N NORMALIZZATI SONO

$$|n\rangle = \frac{(Q^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle ; n=0, 1, 2, \dots$$

QUESTE SONO LE AUTOFUNZIONI DELL'OSCILLATORE ARMONICO, AVENTI I SEGUENTI AUTOVALORI PER L'ENERGIA:

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n=0, 1, 2, \dots$$

- GLI OPERATORI Q E Q^+ SONO CHIAMATI OPERATORI DI ABBASSAMENTO E DI INNALZAMENTO
- NELLA TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI $|n\rangle$ RAPPRESENTA UNO STATO CON n QUANTI
 - L'OPERATORE a ANNICHILA UN QUANTO, MENTRE L'OPERATORE Q^+ CREA UN QUANTO
- N.B. È CONVENIENTE VEDERE GLI OPERATORI NELLO SCHEMA DI HEISENBERG, DOVE GLI OPERATORI SONO FUNZIONI DEL TEMPO

- IN PARTICOLARE

$$i\hbar \frac{dQ(t)}{dt} = [Q(t), H_{\text{occ.}}] \quad \text{CON } Q(t=0) = Q$$

$$\Rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} = -i\omega Q(t)$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q e^{-i\omega t}$$

IL CAMPO DI RADIAZIONE QUANTIZZATO

- QUANTO DETTO PER L'OSCILLATORE ARMONICO SI PUO' ESTENDERE AL CAMPO DI RADIAZIONE, INTRODUCENDO DELLE RELAZIONI DI COMMUTAZIONE

$$\begin{cases} [Q_r(\vec{k}), Q_s^+(\vec{k}')] = \delta_{rs} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [Q_r(\vec{k}), Q_s(\vec{k}')] = [Q_r^+(\vec{k}), Q_s^+(\vec{k}')] = 0 \end{cases}$$

- L'HAMILTONIANA SI PUO' RISCRIVERE COME:

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega (\alpha_r^+(\vec{k}) \alpha_r(\vec{k}) + \frac{1}{2})$$

- L'OPERATORE $N_r(\vec{k}) = \alpha_r^+(\vec{k}) \alpha_r(\vec{k})$ HA AUTOVALORI $0, 1, 2, \dots$ E AUTOFUNZIONI DELLA FORMA:

$$|n_r(\vec{k})\rangle = \frac{[\alpha_r^+(\vec{k})]^{n_r(\vec{k})}}{\sqrt{n_r(\vec{k})!}} |0\rangle$$

- LE AUTOFUNZIONI DELL'HAMILTONIANA DI RADIAZIONE SONO PRODOTTI DI QUESTI STATI:

$$|\dots n_r(\vec{k}) \dots\rangle = \prod_{\vec{k}_i} \prod_{r_i} |n_{r_i}(\vec{k}_i)\rangle$$

CON ENERGIA

$$\sum_{\vec{k}} \sum_r \hbar \omega_{\vec{k}} (n_r(\vec{k}) + \frac{1}{2})$$

- GLI OPERATORI $Q_r(\vec{k})$, AGENDO SULLO STATO $| \dots n_r(\vec{k}) \dots \rangle$ RIDUCONO IL NUMERO DI OCCUPAZIONE $n_r(\vec{k})$ DEL MODO (\vec{k}, r) DI UN'UNITA', LASCIANDO GLI ALTRI NUMERI DI OCCUPAZIONE INALTERATI

$$Q_r(\vec{k}) | \dots n_r(\vec{k}) \dots \rangle = \sqrt{n_r(\vec{k})} | \dots, n_r(\vec{k}) - 1, \dots \rangle$$

- L'ENERGIA DELLO STATO E' RIDOTTA DI $\hbar\omega = \hbar c |\vec{k}|$

- $Q_r(\vec{k})$ E' L'OPERATORE DI ANNICILAZIONE (DISTRUZIONE, ASSORBIMENTO) DI UN FOTONE NELLO STATO (\vec{k}, r) , OVVERO DI MOMENTO $\hbar\vec{k}$ E ENERGIA $\hbar\omega_k$ E VETTORE DI POLARIZZAZIONE $\hat{e}_r(\vec{k})$
- IN MANIERA ANALOGA $Q_r^+(\vec{k})$ E' L'OPERATORE DI CREAZIONE
- N.B. I FOTONI SONO BOSONI, QUINDI IN UN DETERMINATO STATO VI POSSONO ESSERE 0, 1, 2, ... N FOTONI.
NEL CASO DEI FERMIONI IL NUMERO DI OCCUPAZIONE E' LIMITATO A 0 E 1. IN QUEL CASO BISOGNERA' INTRODURRE DELLE REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE
- N.B. NELLA MEC. QUANT. RELATIVISTICA LE AMPIEZZE (E QUINDI I CAMPI) SONO OPERATORI MENTRE LE POSIZIONI ED IL TEMPO SONO NUMERI ORDINARI. NELLA MEC. QUANT. NON REL. SONO LE POSIZIONI (MA NON IL TEMPO) AD ESSERE DEGLI OPERATORI

SECONDA QUANTIZ. EQ. DI DIRAC

- LE DUE SOLUZIONI $U(P)$ SONO ASSOCIATE ALL'ONDA PIANA e^{-iPx} ED HANNO IMPULSO $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$ E ENERGIA $E > mc^2$

LE SOLUZIONI $V(P)$ SONO ASSOCIATE ALL'ONDA PIANA e^{iPx} , ED HANNO IMPULSO $-\vec{p}$ E ENERGIA $-E$

- ESPANSIONE IN SERIE DI FOURIER DELLA $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^2 \left[a_{pr} u_r(p) e^{-iPx} + b_{pr}^+ v_r(p) e^{+iPx} \right]$$

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

- PER L'AGGIUNTO SI PUO' SCRIVERE:

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{r=1}^2 \left[a_{pr}^+ \bar{u}_r(p) e^{+iPx} + b_{pr} \bar{v}_r(p) e^{-iPx} \right]$$

- BISOGNA INTRODURRE DELLE REGOLE DI ANTICOMMUTAZIONE PER LE VARIABILI DEL CAMPO:

$$\{a_{pr}, a_{p'r'}^+\} = \delta(p-p') \delta_{rr'}$$

$$\{b_{pr}, b_{p'r'}^+\} = \delta(p-p') \delta_{rr'}$$

- GLI OPERATORI a, a^+, b, b^+ POSSONO ESSERE INTERPRETATI COME OPERATORI DI CREAZIONE E DISTRUZIONE

a_{pr} DISTRUGGE UNA PARTICELLA DI MOMENTO \vec{p} E ENERGIA E

a_{pr}^+ CREA " " " " \vec{p} " E

b_{pr} CREA " " " " $-\vec{p}$ " $-E$

b_{pr}^+ DISTRUGGE " " " " $-\vec{p}$ " $-E$

(L'INDICE r SI RIFERISCE ALLO SPIN)

a_{pr} DISTRUGGE ELETTRONI

a_{pr}^+ CREA ELETTRONI

b_{pr} DISTRUGGE POSITRONI

b_{pr}^+ CREA POSITRONI

TUTTI DI IMPULSO \vec{p}
E ENERGIA E

QUINDI

$\psi(x)$ DISTRUGGE ELETTRONI O CREA POSITRONI
NEL PUNTO x

$\bar{\psi}(x)$ CREA ELETTRONI O DISTRUGGE POSITRONI
NEL PUNTO x

FORMULAZIONE LAGRANGIANA

- CONSIDERIAMO I CAMPI IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO COME LE VARIABILI DINAMICHE DA QUANTIZZARE. PER FARE CIÒ SI INTRODUCE UNA LAGRANGIANA (PER MEGLIO DIRE, UNA DENSITA' DI LAGRANGIANA)
- SI INTRODUCONO I MOMENTI CONIUGATI DEI CAMPI E SI IMpongONO LE REGOLE DI COMMUTAZIONE AI CAMPI E AI LORO MOMENTI
- CLASSICAMENTE LA LAGRANGIANA È DEFINITA COME:

$$L = K - V$$

LA LAGRANGIANA È UNA FUNZIONE DELLE COORDINATE q_i (x, y, z) E DELLE LORO DERIVATE TEMPORALI \dot{q}_i ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$)

- NELLA LAGRANGIANA LA LEGGE FONDAMENTALE DEL MOTO È L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

IN COORDINATE CARTESIANE ABBIAMO:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial K}{\partial v_x} = m v_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

E COME SI PUÒ VEDERE SI RITROVA LA LEGGE DI NEWTON (PER I SISTEMI CONSERVATIVI)

LAGRANGIANA NELLA TEORIA RELATIVISTICA

- UNA PARTICELLA PER SUA NATURA È UN'ENTITÀ LOCALIZZATA; NELLA MECCANICA CLASSICA VOGLIAMO RICAVARE LA SUA POSIZIONE IN FUNZIONE DEL TEMPO.
- UN CAMPO INVECE OCCUPA UNA CERTA REGIONE DELLO SPAZIO; NELLA TEORIA DEI CAMPI CI INTERESSA CONOSCERE UNA O PIÙ FUNZIONI DELLA POSIZIONE E DEL TEMPO: $\phi_i(x, y, z, t)$
- LE VARIABILI DEL CAMPO POSSONO ESSERE, AD ESEMPIO, LA TEMPERATURA DI UNA STANZA O IL POTENZIALE ELETTRICO V
- NELLA TEORIA DEI CAMPI SI PARTE DA UNA DENSITÀ DI LAGRANGIANA \mathcal{L} [$\mathcal{L} = \frac{dL}{dV}$] CHE È UNA FUNZIONE DEI CAMPI ϕ_i E DELLE LORO DERIVATE RISPETTO A x, y, z, t

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu}$$

- NELLA TEORIA DEI CAMPI L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE SI GENERALIZZA IN QUESTO MODO:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

- SI PUÒ DEFINIRE IL MOMENTO CONIUGATO COME:

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \quad \left[\dot{\phi}_r = \frac{\partial \phi_r}{\partial t} \right]$$

- DENSITÀ DI HAMILTONIANA

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L}$$

ESEMPIO: LAGRANGIANA DEL CAMPO DI KLEIN-GORDON (SPIN 0)

- ABBIAMO UN SOLO CAMPO SCALARE ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

N.B. SE VI MANCA UN FATTORE $\frac{1}{2}$, RICORDATE CHE:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi - \partial_2 \phi \partial_2 \phi - \partial_3 \phi \partial_3 \phi] - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \phi)} = -\partial_1 \phi = \partial^1 \phi ; \quad \text{etc...}$$

- NEL FRATTEMPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi$$

QUINDI L'EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE DIVENTA:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0$$

CHE E' L'EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON CHE DESCRIVE PARTICELLE DI SPIN 0 E MASSA m

ESEMPIO: EQ. DI DIRAC

- CONSIDERIAMO UN CAMPO SPINORIALE Ψ E LA LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - (mc^2) \bar{\Psi} \Psi$$

- CONSIDERIAMO Ψ E IL SUO AGGIUNTO $\bar{\Psi}$ COME VARIABILI INDIPENDENTI (DATO CHE Ψ È UNO SPINORE COMPLESSO CI SONO 8 CAMPI INDIPENDENTI)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - mc^2 \Psi$$

$$\Rightarrow i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \Psi = 0 \quad (\text{eq. di DIRAC})$$

- APPLICHIAMO L'EQUAZIONE DI E.L. A Ψ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} = i \hbar c \bar{\Psi} \gamma^\mu \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -mc^2 \bar{\Psi}$$

$$\Rightarrow i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \bar{\Psi} = 0 \quad (\text{eq. di DIRAC per } \bar{\Psi})$$

ESEMPIO: LAGRANGIANA DI PROCA PER SPIN 1

- PRENDIAMO UN CAMPO VETTORIALE A^μ AVUTE LA LAGRANGIANA SEGUENTE:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu$$

L' EQUAZIONE DI E. L. PRODUCE

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad \text{eq. di PROCA}$$

DESCRIVE PARTICELLE DI SPIN 1 E MASSA m

- INTRODUCIAMO LA COMBINAZIONE:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{16} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \quad (\text{eq. di PROCA})$$

N.B. QUESTE SONO LE LAGRANGIANE PER I CAMPI LIBERI, SENZA SORCENTI O INTERAZIONI

LAGRANGIANA DI MAXWELL CON SORGENTE J^μ PER $m = 0$

- PRENDIAMO $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu$

DOVE J^μ È UNA FUNZIONE DATA

- L'EQ. DI E.L. PRODUCE

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \rightarrow \text{forma tensoriale delle equazioni di Maxwell}$$

- N.B. DA QUESTA EQUAZIONE SEGUE

$$\partial_\nu J^\nu = 0$$

CIOÈ J^ν DEVE OBBEDIRE ALL'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ'
(LA CARICA ELETTRICA SI DEVE CONSERVARE)

LEGGI DI CONSERVAZIONE

- PER UNA TEORIA DERIVATA DA UNA DENSITA' DI LAGRANGIANA \mathcal{L} , SI POSSONO COSTRUIRE QUANTITA' CONSERVATE DALL' INVARIANZA DI \mathcal{L} PER TRASFORMAZIONI DI SIMMETRIA, CIOE' ABBIAMO EQUAZIONI DELLA FORMA:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

f^α SONO FUNZIONI DEGLI OPERATORI DI CAMPO E DELLE LORO DERIVATE

- SE DEFINIAMO:

$$F^\alpha(t) = \int d^3x f^\alpha(x, t) \quad (\text{e' integrale e' su tutto lo spazio})$$

L'EQUAZIONE DI CONTINUITA' DIVENTA:

$$\frac{1}{c} \frac{dF^0(t)}{dt} = - \int d^3x \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} f^i(x, t) = 0$$

(l'uguaglianza deriva dal teorema delle divergenze :
integrale di volume \leftrightarrow integrale di superficie)

$$\Rightarrow F^0 = \int d^3x f^0(x, t) \text{ E' LA QUANTITA' CONSERVATA}$$

$f^\alpha(x)$ SI DEFINISCE ANCHE CORRENTE CONSERVATA

- IL FATTO CHE DA UN' INVARIANZA DERIVI UNA GRANDEZZA CONSERVATA E' CONOSCIUTO COME TEOREMA DI NOETHER

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO DI KLEIN - GORDON

- LAGRANGIANA

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2$$

- CAMPO CONIUGATO DI ϕ

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$$

- IL CAMPO REALE ϕ DIVENTA UN OPERATORE HERMITIANO $\phi^\dagger = \phi$ CHE SODDISFA ALLE SEGUENTI REGOLE DI COMMUTAZIONE:

$$\begin{cases} [\phi(x, t), \dot{\phi}(x', t)] = i \hbar c^2 \delta(x - x') \\ [\phi(x, t), \phi(x', t)] = [\dot{\phi}(x, t), \dot{\phi}(x', t)] = 0 \end{cases}$$

- PER STABILIRE LA CORRISPONDENZA CON LE PARTICELLE, SI SVILUPPA $\phi(x)$ IN UN SET COMPLETO DI SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI KLEIN - GORDON

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$$

DOVE

$$\phi^+(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)} a(\mathbf{k}^{\rightarrow}) e^{-i\mathbf{k}x} \quad k_0 = \frac{1}{c} \omega_{\mathbf{k}}$$

$$\phi^-(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}} a^\dagger(\mathbf{k}^{\rightarrow}) e^{i\mathbf{k}x} \quad E = \hbar \omega = \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}^2 c^4 + c^2 (\hbar \mathbf{k}^{\rightarrow})^2}$$

- $a(\mathbf{k}^{\rightarrow})$ e $a^\dagger(\mathbf{k}^{\rightarrow})$ STESSE REGOLE DI COMMUTAZ. OSC. ARM.

$$\begin{cases} [a(\mathbf{k}^{\rightarrow}), a^\dagger(\mathbf{k}'^{\rightarrow})] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}^{\rightarrow}), a^\dagger(\mathbf{k}'^{\rightarrow})] = 0 \end{cases}$$

MATRICE S (ALTARELLI)

- PERTURBAZIONI DIPENDENTI DAL TEMPO

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle = H |\Psi_S(t)\rangle \Rightarrow |\Psi_S(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\Psi_S(0)\rangle$$

$$\langle \Psi_S(t) | F_S | \Phi_S(t) \rangle \equiv \langle \Psi_S(0) | e^{\frac{i H t}{\hbar}} F_S e^{-\frac{i H t}{\hbar}} | \Phi_S(0) \rangle$$

↑ operatore di Schrödinger

$$\Rightarrow |\Psi_H\rangle \equiv |\Psi_S(0)\rangle \quad \text{Stato di Heisenberg}$$

$$\bar{F}_H = e^{\frac{i H t}{\hbar}} F_S e^{-\frac{i H t}{\hbar}} \quad \text{operatore di Heisenberg}$$

$$\dot{\bar{F}}_H = \frac{i}{\hbar} [H, \bar{F}_H] \quad \text{derivata dell'operatore rispetto al tempo (eq. del m.o.)}$$

- VEDIAMO LA RAPPRESENTAZIONE DI INTERAZIONE O DI DIRAC SE H È DECOMPOIBILE IN $H_0 + V$, VOGLIAMO VEDERE SE È POSSIBILE TROVARE DEGLI STATI $|\Psi_I(t)\rangle$ LA CUI EVOLUZIONE TEMPORALE SIA:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = V_I |\Psi_I(t)\rangle$$

IN MODO CHE GLI STATI SIANO COSTANTI NEL TEMPO IN ASSENZA DI INTERAZIONI.

- VOGLIAMO CHE: $|\Psi_I(t)\rangle = U |\Psi_S(t)\rangle$ U è unitari.

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = V_I |\Psi_I(t)\rangle \equiv V_I U |\Psi_S(t)\rangle$$

↓ svolgiamo la derivata

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\hookrightarrow U (H_0 + V_S) |\Psi_S(t)\rangle$$

- METTENDO INSIEME I VARI PEZZI

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + U (H_0 + V_S) U^\dagger |\Psi_S(t)\rangle = V_I U |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + U H_0 U^\dagger U |\Psi_S(t)\rangle + U V_S U^\dagger U |\Psi_S(t)\rangle = V_I U |\Psi_S(t)\rangle$$

$$\text{SE } V_I = U V_S U^\dagger$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle + U H_0 |\Psi_S(t)\rangle = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = -U H_0 = -H_0 U \leftarrow (\text{se } H_0 \text{ e } U \text{ commutano})$$

$$\Rightarrow U = e^{i \frac{H_0}{\hbar} (t-t_0)} ; U(t_0) = 1$$

$$V_I = e^{i \frac{H_0 t}{\hbar}} V_S e^{-i \frac{H_0 t}{\hbar}}$$

- VOGLIAMO CHE $|\Psi_I(t)\rangle = S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$

LA MATRICE S FA EVOLVERE LO STATO DAL TEMPO t_0 AL TEMPO t

- SCRIVIAMO L'EVOLUZIONE TEMPORALE:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = V_I |\Psi_I(t)\rangle = V_I S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle) = V_I S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} |\Psi_I(t_0)\rangle = V_I S(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = V_I \cdot S \Rightarrow S(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right]$$

$$S(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right]$$

- QUESTA NON È ANCORA LA SOLUZIONE PERCHÉ A TEMPI DIVERSI NON È DETTO CHE I V_I COMMUTANO, QUINDI VI DEVE ESSERE UNA PROCEDURA DI ORDINAMENTO TEMPORALE

$$S(t, t_0) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right]$$

- TRASFORMIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE IN ES. INTEGRALE

$$S(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') S(t', t_0) dt'$$

QUESTA SI PUÒ RISOLVERE PER ITERAZIONI SUCCESSIVE

$$S^0(t_0, t_0) = 1$$

$$S^1(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \cdot 1$$

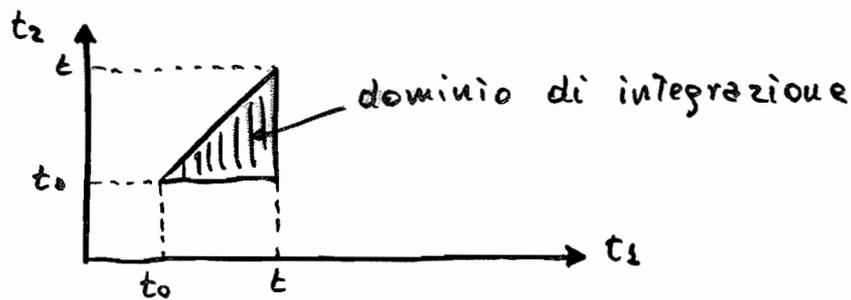
$$S^2(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_2) + \dots$$

- LA PROCEDURA DI ORDINAMENTO TEMPORALE È LA SUCCESSIONE CRONOLOGICA; IL TEMPO PIÙ GRANDE (OVVERO SUCCESSIVO) A SINISTRA ED IL TEMPO PIÙ PICCOLO (OVVERO QUELLO PRECEDENTE) A DESTRA

$$T(V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)) = \begin{cases} V_I(t_1) \cdot V_I(t_2) & t_1 > t_2 \\ V_I(t_2) \cdot V_I(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

QUINDI ABBIAMO

$$\left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)]$$



- DATO CHE IL TIME ORDER PRODUCT È SIMMETRICO, POSSO ESTENDERE L'INTEGRALE E DIVIDERE PER 2

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)] = \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 T[V_I(t_1) \cdot V_I(t_2)]$$

- QUESTO SI PUÒ ESTENDERE A TUTTI GLI ORDINI E SI PUÒ SCRIVERE:

$$S(t, t_0) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') dt' \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T[V_I(t_1) \dots V_I(t_n)]$$

- QUELLO CHE INTERESSA È CONSIDERARE QUESTO OPERATORE TRA I TEMPI $-\infty$ E $+\infty$; CIOÈ ABBIAMO UNO STATO LIBERO $|i\rangle$ E VOGLIAMO CONOSCERE COME EVOLVE DOPO L'INTERAZIONE

$$|\phi(\infty)\rangle = S(\infty, -\infty) |i\rangle$$

- SE VOGLIAMO L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ DI TROVARE UNO STATO $|f\rangle$, SI HA:

$$\langle f | \phi(\infty) \rangle = \langle f | S(\infty, -\infty) | i \rangle = \langle f | S | i \rangle$$

$$S = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' V_I(t') \right]$$

- TUTTE LE HAMILTONIANE SONO OTTENUTE INTEGRANDO IN d^3x LA DENSITA' DI HAMILTONIANA \mathcal{H}

$$V_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(x^0, t)$$

$$\Rightarrow S = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{H}_I(x^0, t) \right]$$

- VOGLIAMO CALCOLARE $\langle f | S | i \rangle$

RICORDIAMO I PRODOTTI NORMALI (Normal Order Product)

$$N(\phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2)) \equiv : \phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2) :$$

$\phi = \phi^+ + \phi^-$ $\phi^+ \rightarrow$ "energie positive": contiene operatori di distruzione

$\phi^- \rightarrow$ "energie negative" contiene operatori di creazione

$$: \phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2) : = \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_2^- + \eta \phi_2^- \phi_1^+ \quad \eta = \begin{matrix} +1 & \text{bosoni} \\ -1 & \text{fermioni} \end{matrix}$$

\hookrightarrow distruzione a destra e creazione a sinistra

- SUPPONIAMO DI AVERE UNA STRINGA DI CAMPI:

$N(A_1 A_2 \dots A_n)$ con A indico ϕ^\pm , cioè contiene un solo tipo di campo

$$N(A_1 A_2 \dots A_n) = (-1)^P A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_n} \quad P \text{ è il numero di scambi dei campi fermionici}$$

- VALE LA LEGGE DISTRIBUTIVA

$$N(A_1 A_2 + \dots B_1 B_2 + \dots) = N(A_1 A_2) + N(B_1 B_2) + \dots$$

- IL METODO DI ESPANDERE LA MATRICE S COME SOMMA DI PRODOTTI NORMALI È DOVUTO A DYSON E WICK

RIVEDIAMO IL TIME ORDER PRODUCT

$$T[\phi_1(x_1) \cdot \phi_2(x_2)] = \begin{cases} \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) & \text{se } x_1^0 > x_2^0 \\ \eta \phi_2(x_2) \phi_1(x_1) & \text{se } x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \quad \eta = \begin{cases} +1 & \text{bosoni} \\ -1 & \text{fermioni} \end{cases}$$

$$T(\phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n)) = (-1)^P \phi_{i_1}(x_{i_1}) \cdots \phi_{i_n}(x_{i_n})$$

$$x_{i_1}^0 > x_{i_2}^0 > \cdots > x_{i_n}^0$$

$\langle f | S | i \rangle$ SARA' DEL TIPO:

$$\langle 0 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega^\dagger \Omega^\dagger \Omega \Omega_1^\dagger \Omega_2^\dagger | 0 \rangle \leftarrow \text{si crea uno stato partendo dal vuoto}$$

- L'ORDINAMENTO NORMALE È ABBASTANZA FACILE DA TRATTARE, COSÌ NON È PER IL PRODOTTO CRONOLOGICO, QUINDI DOBBIAMO RIDURLI A PRODOTTI NORMALI, MEDIANTE IL CALCOLO COMBINATORIO
- TEOREMA DI WICK

$$T[\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)] = N[\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)] + \langle 0 | T(\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)) | 0 \rangle$$

- L'ELEMENTO DI MATRICE $\langle 0 | T(\phi_1 \phi_2) | 0 \rangle$ SI CHIAMA CONTRAZIONE OPPURE PROPAGATORE DEI DUE CAMPI

$$\langle 0 | T(\phi_1 \cdot \phi_2) | 0 \rangle = \underbrace{\phi_1 \phi_2}$$

IL PROPAGATORE È SEMPRE ZERO A MENO CHE UN OPERATORE CREA UNA PARTICELLA CHE L'ALTRO RIASSORBE

- INTRODUCIAMO UNA NOTAZIONE SEMPLIFICATORIA

$$N[\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \cdots \phi_{n-1}} \cdot \phi_n] = (-1)^P \underbrace{\phi_2 \phi_4} \underbrace{\phi_3 \phi_{n-1}} N[\phi_1 \phi_5 \cdots \phi_n]$$

- IL T DI UNA STRINGA DI CAMPI È UGUALE AD UNA SOMMA DI N CON TUTTE LE CONTRAZIONI POSSIBILI

$$T(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n) = N(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n) + N(\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n}) + N(\underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_n})$$

- DATO CHE I CAMPI SONO n LE CONTRAZIONI POSSIBILI SONO $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, POI DEVO AGGIUNGERE GLI N CHE HANNO DUE CONTRAZIONI, POI I TERMINI CON TRE CONTRAZIONI, FINCHE' ARRIVO ALLA SITUAZIONE IN CUI TUTTI I CAMPI SONO CONTRATTI SE n È PARI, OPPURE NELL'ULTIMO TERMINE PUO' ESSERE SOLO UN CAMPO SE n È DISPARI

- DOBBIAMO ORA TROVARE QUANTO VALE LA CONTRAZIONE

- IL COMMUTATORE TRA DUE CAMPI È UN NUMERO

$$\begin{aligned} [\psi_1^+, \psi_2^-]_{\pm} &= \langle 0 | [\psi_1^+, \psi_2^-] | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_1^+ \psi_2^- \pm \psi_2^- \psi_1^+ | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \psi_1^+ \psi_2^- | 0 \rangle = \langle 0 | \psi_1 \psi_2 | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | T(\psi_2, \psi_1) | 0 \rangle \end{aligned}$$

= 0 perché contiene oper. di distruzione

- LA CONTRAZIONE VA VALUTATA A TEMPI DIVERSI
- ESSA VALE SEMPRE ZERO, A MENO CHE UN CAMPO CREA UNA PARTICELLA CHE L'ALTRO ASSORBE

MATRICE S (MANDL)

- CONSIDERIAMO IL CASO REALISTICO IN CUI LE PARTICELLE VENGONO CREATE, DISTRUTTE ED INTERAGISCONO
- IL PROBLEMA SI RIESCE A TRATTARE SOLO NELLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI DIVIDENDO L'HAMILTONIANA NELLA H DI CAMPI LIBERI PIU UN H DI INTERAZIONE

$$H = H_{free} + H_{int}$$

N.B. SI PASSA CONTINUAMENTE DALLA FORMULAZIONE HAMILTONIANA A QUELLA LAGRANGIANA; BISOGNA RICORDARE CHE:

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r \dot{\psi}_r - \mathcal{L} \quad ; \quad H_F(x) = -\mathcal{L}_F(x)$$

N.B. LO SCHEMA DELLA RAPPRESENTAZIONE DI INTERAZIONE NON VA BENE PER DESCRIVERE STATI LEGATI, MA VA MOLTO BENE PER DESCRIVERE PROCESSI DI SCATTERING

- IN UN PROCESSO DI COLLISIONE LO STATO $|i\rangle$ ($t_i = -\infty$) E' SPECIFICATO DANDO IL NUMERO DI PARTICELLE, CON BEN DEFINITE PROPRIETA' E DISTANZI TRA DI LORO
- NEL PROCESSO DI COLLISIONE LE PARTICELLE SI AVVICINANO, INTERAGISCONO E POI SI ALLONTANANO NUOVAMENTE

$$|\phi(\infty)\rangle = S |\phi(-\infty)\rangle = S |i\rangle$$

LA COLLISIONE PUO' PORTARE A DIVERSI STATI $|f\rangle$ E TUTTE QUESTE POSSIBILITA' SONO CONTENUTE ENTRO $|\phi(\infty)\rangle$

- LA PROBABILITÀ DI TRANSIZIONE DALLO STATO INIZIALE $|i\rangle$ AD UNO STATO FINALE $|f\rangle$ È DATA DA:

$$|\langle f | \phi(\infty) \rangle|^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{si assume che gli stati siano} \\ \text{tutti normalizzati a 1} \end{array} \right)$$

- LA CORRISPONDENTE AMPIEZZA DI PROBABILITÀ È:

$$\langle f | \phi(\infty) \rangle = \langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi}$$

- SE ESPANDIAMO $|\phi(\infty)\rangle$ IN TERMINI DI UN SET COMPLETO DI STATI ORTONORMALI, ABBIAMO:

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f | \phi(\infty) \rangle = \sum_f |f\rangle S_{fi}$$

- L'UNITARIETÀ DELLA MATRICE S PUÒ ESSERE SCRITTA COME:

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1$$

QUESTA ESPRIME LA CONSERVAZIONE DELLA PROBABILITÀ, È PIÙ GENERALE DELLA CORRISPONDENTE CONSERVAZIONE DELLE PARTICELLE NELLA MEC. QUANT. NON REL. PERCHÉ ADESSO LE PARTICELLE POSSONO ESSERE CREATE E DISTRUTTE

N.B. PER $t \rightarrow \infty$, NELLA FORMULAZIONE DI DYSON DOVE ABBIAMO LA DENSITÀ DI HAMILTONIANA, SI HA:

$$S = \sum_0^\infty \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \}$$

(l'integrazione è fatta sullo spazio a 4 dimensioni)

- DATO UN PARTICOLARE PROCESSO, SOLTANTO ALCUNI ELEMENTI DELLA MATRICE S CONTRIBUISCONO, VALE A DIRE QUELLI CHE CONTENGONO IL GIUSTO NUMERO DI OPERATORI DI DISTRUZIONE E CREAZIONE

QED

- CONSIDERIAMO L'INTERAZIONE DI ELETTRONI-POSITRONI CON UN CAMPO e.m.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

$$\mathcal{L}_0 = N \left[\bar{\Psi}(x) (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) - \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) \right]$$

$$\mathcal{L}_I = N \left[-S^\mu(x) A_\mu(x) \right] = N \left[e \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \Psi(x) \right]$$



Normal Order Product, ovvero gli operatori di creazione a sinistra e quelli di distruzione a destra

- $H_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) = -e N \left[\bar{\Psi}(x) A(x) \Psi(x) \right] =$

- $= -e N \left[(\bar{\Psi}^+ + \bar{\Psi}^-) (A^+ + A^-) (\Psi^+ + \Psi^-) \right]_x$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 assorbe crea assorbe crea assorbe crea
 posit. elec. fotone fotone elec. posit.

- FACCIAMO L'ESEMPIO DELLO SCATTERING COMPTON

$$\begin{array}{ccc}
 e^- + \gamma & \rightarrow & e^- + \gamma \\
 \uparrow \quad \uparrow & & \downarrow \quad \uparrow \\
 \text{VAUO} & \text{CREATI} & \text{VAUO} & \text{DISTRUTTI}
 \end{array}$$

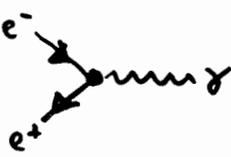
DATO CHE LE PARTI NEGATIVE (POSITIVE) DELLE FREQUENZE $A^-, \bar{\Psi}^-, \Psi^-$ ($A^+, \bar{\Psi}^+, \Psi^+$) SONO LINEARI NEGLI OPERATORI DI CREAZIONE (ASSORBIMENTO) PER FOTONI, ELETTRONI E POSITRONI RISPETTIVAMENTE, IL SOLO PRODOTTO NORMALE CHE CONTRIBUISCE ALLO SCATTERING COMPTON E':

$$\begin{array}{cccc}
 \bar{\Psi}^- & A^- & \Psi^+ & A^+ \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{crea} & \text{crea} & \text{dist.} & \text{dist.} \\
 \text{elec.} & \text{fotone} & \text{elec.} & \text{fotone}
 \end{array}$$

DIAGRAMMI DI FEYNMAN QED

$$H_I = -eN \{ (\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-) (A^+ + A^-) (\psi^+ + \psi^-) \}$$

MOLTIPLICANDO TRA DI LORO GLI OPERATORI SI HANNO 8 PROCESSI

	$\longrightarrow t$	
$\bar{\psi}^+ A^+ \psi^+$		vengono distrutte tutte e 3 le particelle
$\bar{\psi}^+ A^+ \psi^-$		scattering di un positrone
$\bar{\psi}^+ A^- \psi^+$		annichilazione e+e-
$\bar{\psi}^+ A^- \psi^-$		scattering di un positrone
$\bar{\psi}^- A^+ \psi^+$		scattering di un elettrone
$\bar{\psi}^- A^+ \psi^-$		produzione di coppie
$\bar{\psi}^- A^- \psi^+$		scattering di un elettrone
$\bar{\psi}^- A^- \psi^-$		vengono create tutte e 3 le particelle

- TUTTI QUESTI PROCESSI NON CONSERVANO IL QUADRIIMPULSO AL VERTICE QUINDI NON POSSONO AVVENIRE. PER AVERE DEI PROCESSI REALI OCCORRE COMBINARE DUE VERTICI DI QUESTO TIPO, CIOE' ANDARE ALL'ESPRESSIONE AL SECONDO ORDINE DELLA MATRICE S

$$\Rightarrow \langle f | S^{(1)} | i \rangle = 0 \Rightarrow \langle f | S^{(2)} | i \rangle$$

QED : SECONDO ORDINE

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)}$$

dove:

$$S_A^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}] \leftarrow \text{non serve a niente (non ci sono propagatori)}$$

$$S_B^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}] + N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}] \right\}$$

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}]$$

$$S_D^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \left\{ N [(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}] + N [(\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}] \right\}$$

$$S_E^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}]$$

$$S_F^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 (\bar{\Psi} \gamma^\alpha A_\alpha \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} \gamma^\beta A_\beta \Psi)_{x_2}$$

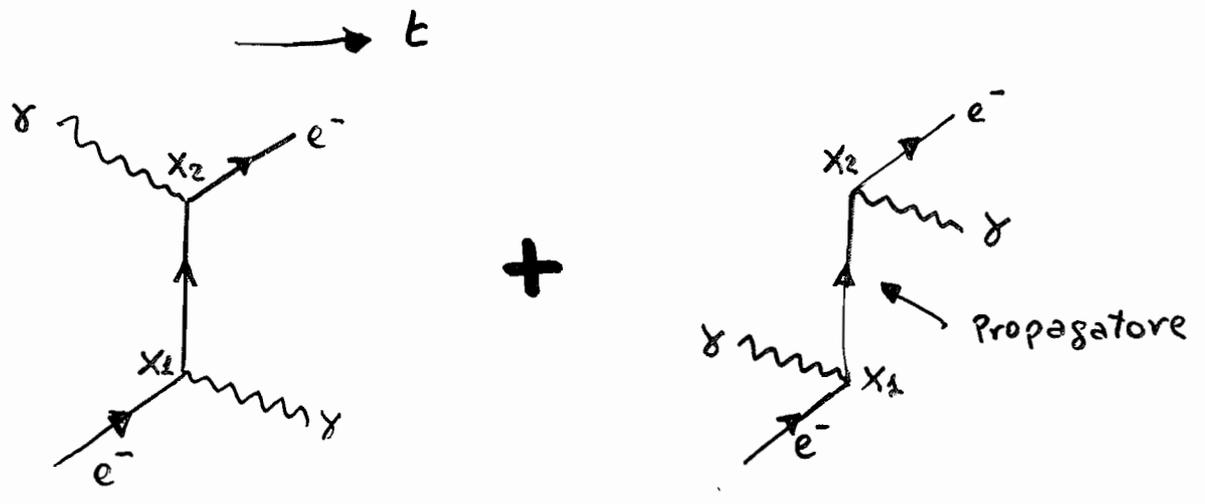
N.B. I DUE TERMINI IN $S_B^{(2)}$ SONO IN LINEA DI PRINCIPIO DIVERSI PERCHÉ I CAMPI FERMIONICI ANTI COMMUTANO, MA DATO CHE PER ANDARE DA UN TERMINE ALL'ALTRO OCCORRE FARE UN NUMERO DI PERMUTAZIONI PARI, ESSI SONO UGUALI

$$\Rightarrow S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N [(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1} (\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}]$$

N.B. NELLA MATRICE S NON C'È PIÙ IL TIME ORDER PRODUCT, QUINDI NON BISOGNA PIÙ PREOCCUPARSI DEL PROCESSO CHE AVVIENE PRIMA È DI QUELLO CHE AVVIENE DOPO; QUESTO È PRESO AUTOMATICAMENTE IN CONSIDERAZIONE DAL PROPAGATORE

COMPTON SCATTERING

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$$

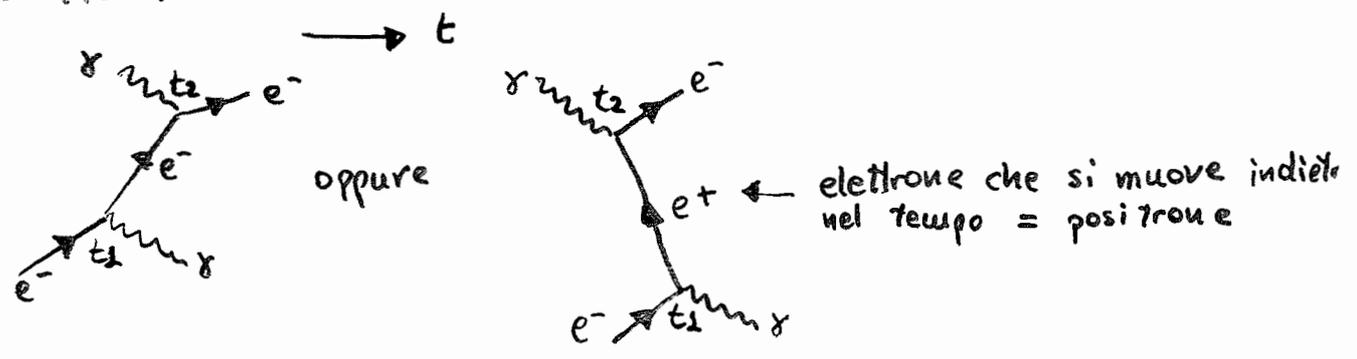


- IL FOTONE PUO' ESSERE DISTRUTTO IN X_2 E CREATO IN X_1 O VICEVERSA
- IL PROPAGATORE CONNETTE SEMPRE DUE VERTICI ED E' UNA PARTICELLA VIRTUALE; VUOL DIRE CHE NON RISPETTA LA RELAZIONE

$$E^2 - P^2 \neq m^2$$

- DEL CASO DEL PROPAGATORE FERMIONICO, SE $t_1 < t_2$ POSSIAMO PENSARE AL PROPAGATORE COME AD UN ELETTRONE VIRTUALE CHE VA DA X_1 A X_2 , ALTRIMENTI E' UN POSITRONE VIRTUALE

ESEMPIO:



• I GRAFICI SONO COMBINAZIONI DEGLI 8 GRAFICI PRECEDENTI

REGOLE DI FEYNMAN E MATRICI

- IN UNA TRANSIZIONE DALLO STATO INIZIALE $|i\rangle$ ALLO STATO FINALE $|f\rangle$, L'ELEMENTO DI MATRICE S_{fi} SI PUO' SCRIVERE IN QUESTO MODO:

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} - i \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f^{\text{TOT}} - P_i^{\text{TOT}}) \prod_{\text{ext}} \left(\frac{m}{vE} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\text{ext}} \left(\frac{1}{2V\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot M$$

↑
↑
↑
↑

Stato finale uguale a stato iniziale
Conservazione del quadrimomento totale
fattori di normalizzazione

- P_i^{TOT} E P_f^{TOT} SONO I QUADRI-MOMENTI DELLO STATO INIZIALE E FINALE
 - LA PRODUTTORIA E' ESTESA SOLO ALLE GAMBE ESTERNE
 - E E ω SONO LE ENERGIE DEI FERMIONI E FOTONI ESTERNI
 - V E' UN VOLUME DI NORMALIZZAZIONE
 - M E' L'ELEMENTO DI MATRICE CHE PUO' ESSERE OTTENUTO CON LE PRESCRIZIONI DI FEYNMAN. ESSO CONTIENE TUTTA LA DINAMICA DELL'INTERAZIONE
- U.B. IN LETTERATURA COMPARE ANCHE LA MATRICE DI TRANSIZIONE T

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{if} + i (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \langle f | T | i \rangle$$

L'ELEMENTO DI MATRICE T_{fi} E' INVARIANTE SE OPPORTUNAMENTE NORMALIZZATO

REGOLE DI FEYNMAN PER LA QED

1) PER CIASCUN VERTICE SCRIVERE UN FATTORE $i e \gamma^\alpha$ [$e \alpha \mu$]

2) PER CIASCUNA LINEA FOTONICA INTERNA (PROPAGATORE), LABELLATA DAL MOMENTO k , SCRIVERE:

$$i \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$$


3) PER CIASCUNA LINEA FERMIONICA INTERNA (PROPAGATORE), LABELLATA DAL MOMENTO p , SCRIVERE:

$$i \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad \left[\text{su un altro testo: } i \frac{\gamma^\mu \not{p}_\mu + m}{p^2 - m^2} \right]$$

4) PER CIASCUNA LINEA ESTERNA, SCRIVERE UNO DEI SEGUENTI:

a) ELETTRONE INIZIALE: $u_r(p)$

b) ELETTRONE FINALE: $\bar{u}_r(p)$

c) POSITRONE INIZIALE: $\bar{v}_r(p)$

d) POSITRONE FINALE: $v_r(p)$

e) FOTONE INIZIALE: $\epsilon_\mu(k)$

f) FOTONE FINALE: $\epsilon_\mu(k)$

5) METTERE IN ORDINE I FATTORI SPINORIALI DA DESTRA A SINISTRA

IN MODO DA SEGUIRE IL VERSO DELLE FRECCHE SULLE LINEE FERMIONICHE

6) PER OGNI LOOP FERMIONICO, PRENDERE LA TRACCIA E MOLTIPLICARE PER -1

7) AD OGNI VERTICE SI DEVE CONSERVARE IL QUADRIIMPULSO. PER OGNI

QUADRI-MOMENTO NON DETERMINATO DALLA REGOLA DI CONSERVAZIONE

FARE L'INTEGRAZIONE $(2\pi)^{-4} \int d^4q$

8) MOLTIPLICARE PER UN FATTORE DI FASE $\delta_p = \pm 1$ IN BASE AL NUMERO

DI SCAMBI FERMIONICI PARI O DISPARI NECESSARI PER IL NORMAL ORDER

PRODUCI

ORDINI SUCCESSIVI E DIVERGENZE

- TORNIAMO AL COMPTON SCATTERING

$$e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$$

- NELLA MATRICE S DEVONO "SOPRAVVIVERE" SOLO I SEGUENTI OPERATORI

$$\bar{\Psi} - A^- \Psi^+ A^+$$

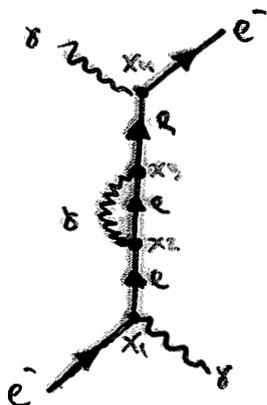
- SCRIVIAMO, COME ESEMPIO, UNO DEI TERMINI DELLO SVILUPPO AL QUARTO ORDINE E FACCIAMO LE CONTRAZIONI:

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 N \left[\underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_1}}_{\text{e}} \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_2}}_{\text{e}} \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_3}}_{\text{e}} \underbrace{(\bar{\Psi} A \Psi)_{x_4}}_{\text{e}} \right]$$

(N.B. è solo un esempio illustrativo del concetto, non è rigoroso)

- COMPARIAMO 4 PARTICELLE VIRTUALI: 1 FOTONE E 3 "ELETTRONI"

— ESEMPIO DI DIAGRAMMA DI FEYNMAN

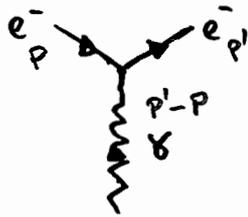


N.B. AD OGNI VERTICE COMPARE UN FATTORE $\sqrt{\alpha}$, QUINDI I DIAGRAMMI DI ORDINE SUPERIORE SONO SOPPRESSI RISPETTO A QUELLO FONDAMENTALE

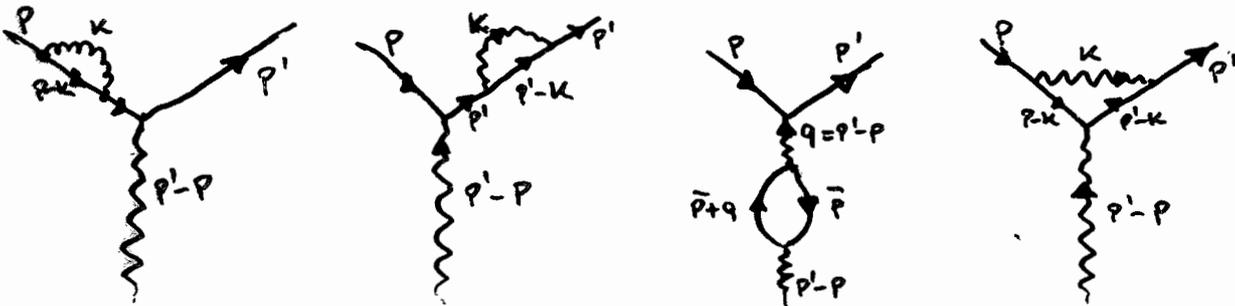
N.N.B. PROBLEMA: I LOOP DANNO ORIGINE A DELLE DIVERGENZE

CORREZIONI RADIATIVE

- PRENDIAMO IL VERTICE FONDAMENTALE DELLA QED



- VEDIAMO ORA I QUATTRO CONTRIBUTI DELLE CORREZIONI AL SECONDO ORDINE RADIATIVO DI QUESTO VERTICE



- APPLICANDO LE REGOLE DI FERMION PER IL CALCOLO DI QUESTI CONTRIBUTI, SI TROVA CHE ESSI DIVERGONO (DA UNO ∞ COME RISULTATO) [N.B. la divergenza c'è anche nell'elettrodinamica classica: $U = \frac{e^2}{r}$ per $r \rightarrow 0$]

- LA "SOLUZIONE" DEL PROBLEMA È COMPLESSA, MA IN "SOLDONI" È LA SEGUENTE:

UN ELETTRONE NON INTERAGENTE POSSIÈDE UNA CARICA "NUDA" ED UNA MASSA "NUDA" ANCHE ESSE DI VALORE INFINITO.

L'INTERAZIONE "CORREGGE" QUESTI VALORI INFINITI E LI RIPORTA AI VALORI RISULTATI SPERIMENTALMENTE

$$\Rightarrow \infty - \infty = \text{VALORE FINITO}$$

- LA SOLUZIONE NON È ELEGANTE MA FUNZIONA!

MOMENTO MAGNETICO ANOMALO

- IL MOMENTO MAGNETICO DELL'ELETTRONE È PROPORZIONALE ALLO SPIN

$$\vec{\mu} = -g \frac{e}{2m} \vec{S}$$

- g È IL RAPPORTO GIROMAGNETICO, NELLA TEORIA DI DIRAC g È UGUALE A 2 (VALORE MISURATO), MEDIANTE CLASSICAMENTE SAREBBE DOVUTO ESSERE UGUALE A 1
- MISURE PIÙ PRECISE DADNO PER g UN VALORE LEGGERMENTE MAGGIORE DI 2 (ANOMALIA)
- DALLA QED, FACENDO LO SVILUPPO FINO AL TERZO ORDINE, RISULTA:

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)^{\text{elettrone}} = 0.5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) - 0.32848 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.19 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots$$

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)^{\text{muone}} = 0.5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + 0.76578 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 24.45 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \dots$$

RISULTATI ~ 2000

	ELETTRONE	MUONE
PREDETTO	$11\,586\,524 \pm 4 \cdot 10^{-10}$	$11\,659\,180 \pm 100 \cdot 10^{-10}$
MISURATO	$11\,586\,521.9 \pm 0.1 \cdot 10^{-10}$	$11\,659\,230 \pm 80 \cdot 10^{-10}$

N.B. SI PUÒ RISCALVERE LA CORREZIONE INTRODUCENDO UNA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO α EFFICACE

$$\frac{g-2}{2} = \frac{0.5}{\pi} \alpha_{\text{eff.}}$$

$$\alpha_{\text{eff.}}^{\text{muone}} > \alpha_{\text{eff.}}^{\text{elettrone}}$$

MORENTO

RAQUETICO

ANDRACO

diagrammi
fondamentali

CORREZIONI
AL PRIMO
ORDINE

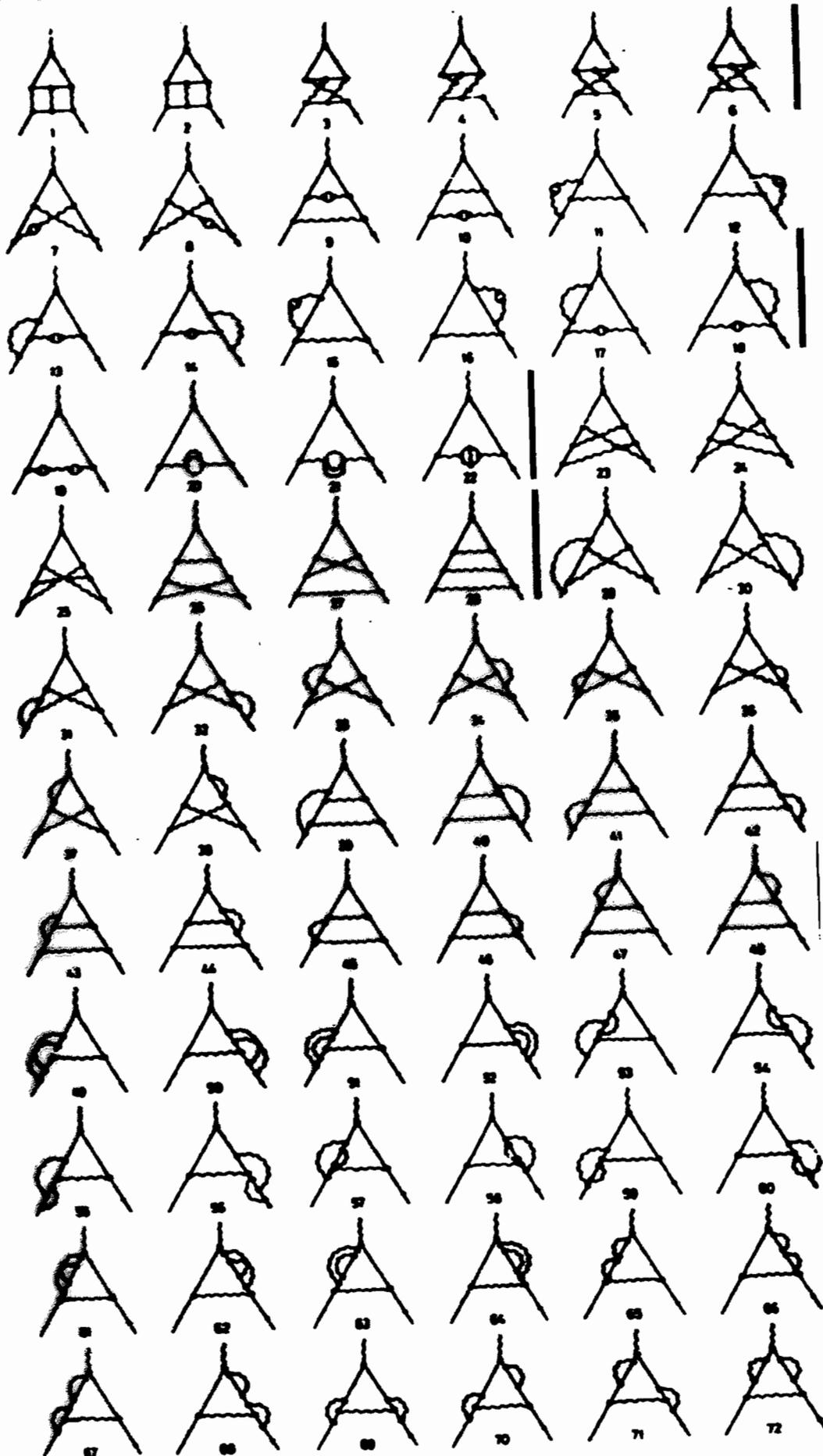
$$\left(\frac{g-2}{2}\right) =$$

$$0.5 \left(\frac{g}{\pi}\right) +$$

$$a \left(\frac{g}{\pi}\right)^2 +$$

$$b \left(\frac{g}{\pi}\right)^3 +$$

$$\dots$$

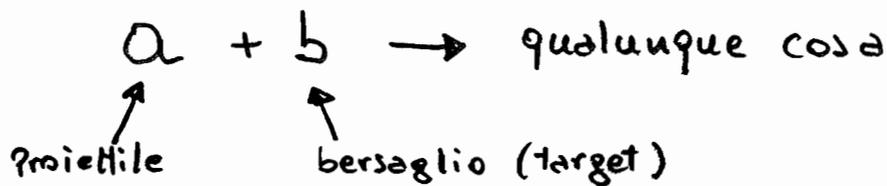


CORREZIONI DEL TERZO ORDINE

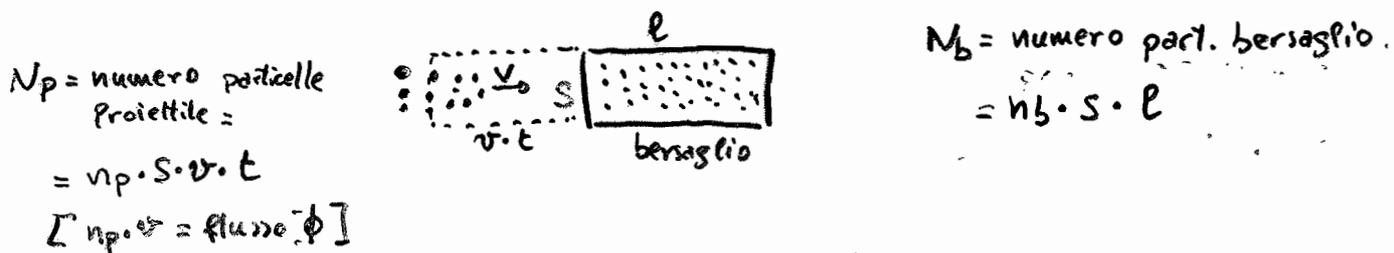
S MATRIX : WHAT FOR ?

- DA UN PUNTO DI VISTA SPERIMENTALE NOI MISURIAMO DUE COSE: SEZIONI D'URTO E VITE MEDIE

- SEZIONE D'URTO



LA SEZIONE D'URTO È LA MISURA DELLA PROBABILITÀ DI OCCORRENZA DI UN DATO PROCESSO



$$N_{\text{EVENTI}} = N_p \cdot N_b \cdot \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{N_{\text{EVENTI}}}{t} \cdot \frac{1}{n_p \cdot S \cdot v} \cdot \frac{1}{N_b}$$

$$\omega = \sigma \cdot \phi = \sigma \cdot n_p \cdot v \quad \text{probabilità di transizione per unità di area e per 1 sola particella bersaglio}$$

• VITA MEDIA

$a \rightarrow$ qualunque cosa

LA PARTICELLA a PUÒ DECADERE IN VARI MODI

$$N(t) = N(0) e^{-\Gamma_{\text{TOT}} t} \quad (\text{numero di particelle al tempo } t)$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{\text{TOT}}} \quad \text{vita media} \quad ; \quad \Gamma_{\text{TOT}} = \text{larghezza totale (probabilità di transizione)}$$

$$\Gamma_{\text{TOT}} = \sum_i \Gamma_i \quad \Gamma_i = \text{larghezza parziale}$$

$$B. R. = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{TOT}}} = \text{rapporto di decadimento} \quad (= \frac{N_i}{N_{\text{TOT}}})$$

PROBABILITA' DI TRANSIZIONE

- PARTENDO DA UNO STATO $|i\rangle$ L'OPERATORE S PRODUCE LO STATO $S|i\rangle$, IL QUALE E' UNA SOVRAPPOSIZIONE DI TUTTI GLI STATI FINALI.

- L'AMPIEZZA DI PROBABILITA' DI TROVARE UN PARTICOLARE STATO FINALE $|f\rangle$ E' DATA DA:

$$S_{if} = \langle f | S | i \rangle = S_{if} + i (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \langle f | T | i \rangle$$

- PER AVERE LA PROBABILITA' DI TRANSIZIONE E' NECESSARIO PRENDERE IL MODULO QUADRO DEL SECONDO TERMINE

compere il fattore $(2\pi)^8 |\delta^4(p_f - p_i)|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) (2\pi)^4 \delta(0)$

Per $V \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow \infty$; $(2\pi)^4 \delta(0) = VT$

$$\Rightarrow W_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) |\langle f | T | i \rangle|^2 \cdot V \cdot T$$

- SI CONSIDERA LA PROBABILITA' DI TRANSIZIONE PER UNITA' DI TEMPO

N.B. SI NORMALIZZA ANCHE PER IL VOLUME V , MA OCCORRE FARE ATTENZIONE AL TIPO DI NORMALIZZAZIONE (1 particelle per unite' di volume, 2? etc...)

- TRAMITE I DIAGRAMMI DI FEYNMAN, ED UTILIZZANDO LE GIUSTE NORMALIZZAZIONI PER ELIMINARE IL VOLUME V , SI CALCOLA L'ELEMENTO DI MATRICE T_{fi} , O CON UN'ALTRA TERMINOLOGIA M_{fi}

RÈGOLA D'ORO DI FERMI

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(\epsilon)$$

↑
probabilità di
transizione per
unità di tempo

↑
elemento di
matrice

↑
spazio delle fasi

- L'AMPIEZZA M CONTIENE TUTTA L'INFORMAZIONE DINAMICA DEL PROCESSO
- LO SPAZIO DELLE FASI CONTIENE INVECE SOLO LE INFORMAZIONI CINEMATICHE DEL PROCESSO. ESSO DIPENDE DALLE MASSE, ENERGIE E IMPULSI DEI PARTECIPANTI, E RIFLETTE IL FATTO CHE UN PROCESSO È PIÙ FACILE CHE OCCORRA SE C'È PIÙ "SPAZIO PER MANOVRARE"
- AD ESEMPIO UNA PARTICELLA NON DECADE IN DUE PARTICELLE LA CUI SOMMA DELLE MASSE È MAGGIORE DELLA MASSA INIZIALE PERCHÉ NON C'È SPAZIO DELLE FASI.

In un collider e^+e^- asimmetrico, il fascio di elettroni ha energia 4.5 GeV ed il positrone 2.0 GeV.

- calcolare l'energia del centro di massa
- dire quali coppie di quark vengono prodotte nell'annichilazione e^+e^- :

$$e^- = 4.5 \text{ GeV} \quad e^+ = 2 \text{ GeV}$$

L'energia del centro di massa è uguale a \sqrt{s} .

$$s = (\rho(e^+) + \rho(e^-))^2 \quad \begin{cases} \rho(e^+) = (E^+; 0, 0, -E^+) \\ \rho(e^-) = (E^-; 0, 0, E^-) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s = 4 \cdot E^+ E^- \Rightarrow \sqrt{s} = 2\sqrt{E^+ E^-} = 2\sqrt{4.5 \cdot 2} = 6 \text{ GeV}$$

In questo collider si possono produrre $d\bar{d}$, $u\bar{u}$, $s\bar{s}$, $c\bar{c}$, ma non $b\bar{b}$ in quanto la massa del b è di 4.5 GeV

In un esperimento ad un collider protone-protone vengono identificati, tra le numerose particelle prodotte, due muoni back-to-back (ovvero collineari) di carica opposta, aventi rispettivamente un impulso di 47 MeV/c e 30.95 GeV/c (in realtà questa configurazione cinematica è alquanto improbabile ed è molto difficile misurare l'impulso di un muone di 47 MeV, ma ha il pregio di semplificare il calcolo). Si trovi la massa della particella madre che ha generato i due muoni e, considerando un errore sulla massa del 5%, si dica di quale particella si potrebbe trattare

$$P_1 = -47 \text{ MeV} \quad P_2 = 30.95 \text{ GeV}$$


La massa della particella madre si ricava dal quadrimpulso dei due muoni dello stato finale. Dalla conoscenza dell'impulso del muone e dalla sua massa, si deve costruire il quadrimpulso:

$$E_1 = \sqrt{m_\mu^2 + p_1^2} = \sqrt{0.105^2 + 47^2} = 115 \text{ MeV}$$

$$E_2 = \sqrt{m_\mu^2 + p_2^2} = \sqrt{0.105^2 + 30.95^2} \approx 30.95 \text{ GeV}$$

$$E_f = E_1 + E_2 = 0.115 + 30.95 = 31.06 \text{ GeV}$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -0.047 + 30.95 = 30.90 \text{ GeV}$$

Il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico ed è uguale alla massa al quadrato della particella madre:

$$m = \sqrt{E_f^2 - \vec{p}_f^2} = \sqrt{31.06^2 - 30.90^2} = 3.15 \text{ GeV}$$

Un errore del 5% su questo valore dà un'incertezza sulla massa di 0.16 GeV, quindi occorre vedere quali particelle neutre hanno una massa compresa nell'intervallo 2.99-3.31 GeV.

Ad esempio la massa della J/Ψ è di 3.096 GeV ed è quindi un buon candidato.

Calcolare l'energia di soglia del fotone relativo alla produzione di coppie in presenza del campo di un elettrone.

La produzione di coppie non può avvenire per un fotone isolato in quanto non si conserverebbe il quadrimpulso. Occorre quindi la presenza di una seconda particella, che può essere un nucleo atomico oppure un elettrone.

Nel caso di un elettrone si ha il processo:



Per calcolare l'energia di soglia si assume che le particelle finali vengano prodotte a riposo nel sistema del centro di massa. Inoltre ricordiamo che il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico. Indichiamo con m la massa dell'elettrone.

$$P_\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma) ; E_e = (m, 0)$$

$$\Rightarrow P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}} = (E_\gamma + m, \vec{p}_\gamma) ; P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}} = (3m, 0)$$

$$\begin{aligned} (P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}})^2 &= (P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}})^2 \Rightarrow (E_\gamma + m)^2 - \vec{p}_\gamma^2 = (3m)^2 = \\ &= \cancel{E_\gamma^2} + m^2 + 2E_\gamma - \cancel{\vec{p}_\gamma^2} = 9m^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_\gamma = 4m = 4 \cdot 0.511 = 2.04 \text{ MeV}$$

Il pione neutro è stato scoperto studiando la fotoproduzione su protoni a riposo ($\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$). Calcolare la minima energia del fotone nel laboratorio per produrre la reazione.

$$(m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2 ; m_p = 938 \text{ MeV}/c^2)$$

Per calcolare l'energia di soglia si assume che le particelle finali vengano prodotte a riposo nel sistema del centro di massa. Inoltre ricordiamo che il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico. Indichiamo con M la massa del protone e con m la massa del pi-zero.

$$P_\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma) ; E_p = (M, 0)$$

$$\Rightarrow P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}} = (E_\gamma + M, \vec{p}_\gamma) ; P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}} = (m + M, 0)$$

$$(P_{\text{iniz.}}^{\text{Lab.}})^2 = (P_{\text{fin.}}^{\text{C.M.}})^2 \Rightarrow (E_\gamma + M)^2 - \vec{p}_\gamma^2 = (m + M)^2$$

$$\Rightarrow E_\gamma = m \left(1 + \frac{m}{2M} \right) = 135 \left(1 + \frac{135}{2 \cdot 938} \right) = 145 \text{ MeV}$$

Simmetrie e leggi di conservazione

- Simmetrie in meccanica quantistica.
- Simmetrie continue e discrete. Numeri quantici additivi e moltiplicativi.
- parità. Parità intrinseca.
- Invarianza di gauge e conservazione della carica. Numero barionico e leptonico.
- Coniugazione di carica.
- Time reversal.
- Teorema CPT.
- Isospin.
- SU(2).
- Invarianza delle interazioni forti per trasformazioni di isospin.
- Formula di Gell-Mann Nishijima.



SIMMETRIE E INVARIANZE

- UNA LEGGE FISICA È SIMMETRICA IN RAPPORTO AD UNA TRASFORMAZIONE SE LA FORMA DELL'EQUAZIONE CHE ESPRIME LA LEGGE È INVARIANTE PER QUESTA TRASFORMAZIONE

ESEMPIO: $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ invariante rispetto all'inversione temporale: $t \rightarrow -t$

- UNA SIMMETRIA RIFLETTE UN'IGNORANZA, CIOÈ L'ESISTENZA DI UNA GRANDEZZA NON OSSERVABILE.
 - IN MECCANICA CLASSICA AD UNA SIMMETRIA CORRISPONDE UNA GRANDEZZA CONSERVATA
 - IN MEC. QUANT. CONTINUA AD ESSERE VERO, ATTENZIONE CHE IN ENTRAMBI I CASI È VERO SOLO PER LE SIMMETRIE CONTINUE

ESEMPI:

- ASSENZA DI UN'ORIGINE ASSOLUTA DELLO SPAZIO \leftrightarrow INVARIANZA PER TRASLAZIONI \leftrightarrow CONS. QUANTITÀ DI MOTO
- ASSENZA DI UN'ORIGINE ASSOLUTA DEL TEMPO \leftrightarrow INVARIANZA PER TRASL. TEMPORALI \leftrightarrow CONS. ENERGIA
- ASSENZA DI UNA DIREZIONE ASSOLUTA NELLO SPAZIO \leftrightarrow INVARIANZA PER ROTAZIONI \leftrightarrow CONS. MOMENTO ANGOLARE

SIMMETRIE IN M. Q.

- PRENDIAMO UN OPERATORE F

IL VALOR MEDIO DI F NELLO STATO Ψ_a VALE:

$$\langle F \rangle = \langle \Psi_a | F | \Psi_a \rangle$$

SE F È UN OSSERVABILE IL SUO VALOR MEDIO $\langle F \rangle$

PUB' ESSERE MISURATO, QUINDI $\langle F \rangle$ DEVE ESSERE REALE,
PER CUI F DEVE ESSERE HERMITIANO ($F^\dagger = F$)

$$\frac{d}{dt} \langle F \rangle = [H, F] \quad (F \text{ non dipende esplicitamente dal tempo})$$

- SE $\langle F \rangle$ È UNA COSTANTE DEL MOTTO $\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle F \rangle = 0 \Rightarrow [H, F] = 0$

\Rightarrow GLI OPERATORI DELLE QUANTITÀ CONSERVATE DEVONO
COMMUTARE CON L'HAMILTONIANA

- CERCHIAMO ORA UN OPERATORE DI UNA SIMMETRIA
- CHIAMIAMO U L'OPERATORE DELLA SIMMETRIA

$$|\Psi'\rangle = U |\Psi\rangle$$

SE U È UNA SIMMETRIA NON CAMBIA, AD ESEMPIO, IL PRODOTTO
SCALARE TRA DUE STATI

$$\langle a | b \rangle = \langle a' | b' \rangle = \langle a | U^\dagger U | b \rangle$$

$\Rightarrow U$ DEVE ESSERE UNITARIO, CIÒ È $U^\dagger U = U^{-1} U = 1$

- SE U È UNA SIMMETRIA, ALLORA $U\Psi$ DEVE SODDISFARRE LA STESSA EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

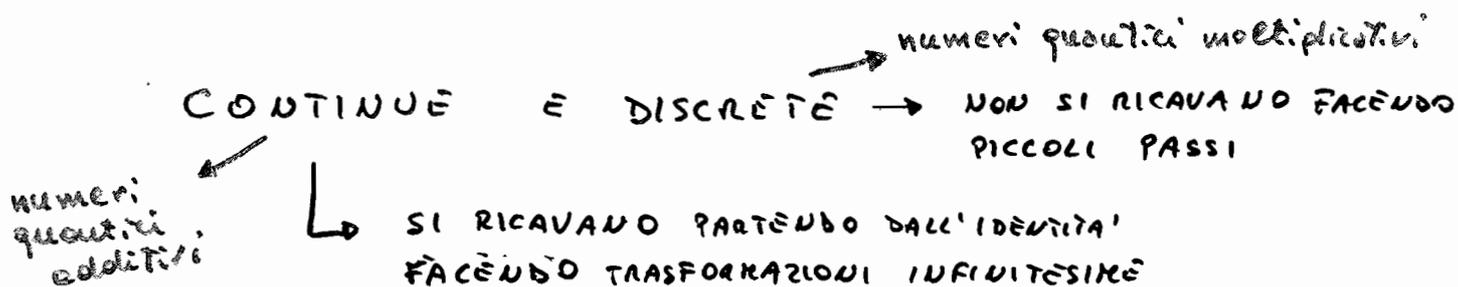
$$i\hbar \frac{d(U\Psi)}{dt} = H U\Psi$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d(U^{-1}U\Psi)}{dt} = U^{-1}H U\Psi \quad (U \text{ non dipende dal tempo})$$

$$\Rightarrow H = U^{-1}H U = U^\dagger H U \Rightarrow UH = HU \Rightarrow [H, U] = 0$$

→ L'OPERATORE DI SIMMETRIA COMMUTA CON L'HAMILTONIANA

- SE U È HERMITIANO \Rightarrow SARA' UN OSSERVABILE, ALTRIMENTI BISOGNA TROVARE UN ALTRO OPERATORE HERMITIANO CHE SIA IN RELAZIONE AD U (GENERATORE DELLA TRASFORMAZIONE)
- IN GENERALE GLI OPERATORI DELLE TRASFORMAZIONI NON SONO HERMITIANI, ANCHE SE CI SONO DELLE ECCEZIONI
- CI SONO DUE TIPI DI TRASFORMAZIONI



- NELLE TRASFORMAZIONI DISCRETE SI TROVANO OPERATORI CHE SONO CONTEMPORANEAMENTE UNITARI E HERMITIANI, AD ESEMPIO L'OPERATORE DI PARITA'

TRASFORMAZIONI CONTINUE

- UN ESEMPIO DI TRASFORMAZIONI CONTINUE SONO LE ROTAZIONI INTORNO AD UN ASSE DI UN ANGOLO ARBITRARIO α
- L'OPERATORE U DI QUESTA TRASFORMAZIONE PUO' ESSERE SCRITTO COME :

$$U = e^{i\alpha F} \quad \alpha \text{ E' UN PARAMETRO REALE}$$

F E' IL GENERATORE DELLA TRASFORMAZIONE

- U PUO' ESSERE ESPANSO IN SERIE DI POTENZE:

$$U = 1 + i\alpha F + \frac{(i\alpha F)^2}{2!} + \dots$$

- IN LINEA DI PRINCIPIO

$$e^{i\alpha F} \neq e^{-i\alpha F^\dagger} \Rightarrow U \text{ NON E' HERMITIANO}$$

- SE IMPONIAMO CHE U SIA UNITARIO, ALLORA SI HA:

$$e^{-i\alpha F^\dagger} \cdot e^{i\alpha F} = e^{i\alpha(F-F^\dagger)} = 1 \Rightarrow F = F^\dagger \Rightarrow F \text{ E' HERMITIANO}$$

- PER UNA TRASFORMAZIONE INFINITESIMA:

$$U = 1 + i\alpha F$$

$$U \text{ COMMUTA CON } H \Rightarrow H(1+i\alpha F) = (1+i\alpha F)H \Rightarrow [H, F] = 0$$

- F E' HERMITIANO E COMMUTA CON $H \Rightarrow$ E' UN OSSERVABILE
- SI PUO' DIMOSTRARE CHE PER LE ROTAZIONI SPAZIALI F E' PROPORZIONALE ALL'OPERATORE DEL MOMENTO ANGOLARE E PER LE TRASLAZIONI F E' PROPORZIONALE ALL'OPERATORE DELLA QUANTITA' DI MOTO

$$F = e^{-i\theta \frac{\hat{n} \cdot \vec{L}}{\hbar}} \quad ; \quad F = e^{+i \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{\hbar}}$$

CARICA ELETTRICA

- SPERIMENTALMENTE È STATO VERIFICATO CHE LA CARICA ELETTRICA SI CONSERVA, QUINDI L'HAMILTONIANA DEVE ESSERE INVARIANTE PER UNA QUALCHE OPERAZIONE DI SIMMETRIA

QUESTA È L'INVARIANZA DI GAUGE

$$\psi' = \psi e^{i\alpha Q}$$

α = PARAMETRO REALE

Q HERMITIANO È COMMUTA CON H

Q VIENE IDENTIFICATO CON LA CARICA ELETTRICA

NUMERO BARIONICO

- SPERIMENTALMENTE SI TROVA CHE NELLE REAZIONI NUCLEARI IL NUMERO DI NUCLEONI SI CONSERVAVA; QUESTO CONTINUAVA AD ESSERE VERO ANCHE CONSIDERANDO I FERMIONI "STRANI"

COME Λ E Σ

STUCCHELBERG IPOTIZZÒ CHE SI DOVEVA CONSERVARE IL NUMERO BARIONICO

OCCIA DICIAMO CHE IN UNA REAZIONE SI DEVE CONSERVARE IL NUMERO DI QUARK MENO IL NUMERO DI ANTIQUARK

- TUTTAVIA NON SI RIESCE ANCORA A TROVARE UNA SIMMETRIA DELL'HAMILTONIANA CHE TENGA CONTO DI QUESTO EFFETTO, PER CUI CI SONO TEORIE CHE VIOLANO LA CONSERVAZIONE DEL NUMERO BARIONICO

NUMERO LEPTONICO

STESSO DISCORSO FATTO PER IL NUMERO BARIONICO

PARITÀ

- L'OPERAZIONE DI INVERSIONE DELLE COORDINATE SPAZIALI È UNA TRASFORMAZIONE DISCRETA

$$X, Y, Z \rightarrow -X, -Y, -Z$$

- LA TRASFORMAZIONE È PRODOTTA DALL'OPERATORE DI PARITÀ P

$$P \Psi(\vec{r}) \rightarrow \Psi(-\vec{r})$$

$$P \Psi(-\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) \Rightarrow P^2 = 1 \Rightarrow P \text{ È UNITARIO}$$

- GLI AUTOVALORI DI P SONO ± 1
- UNA FUNZIONE D'ONDA PUÒ AVERE O NON AVERE UNA PARITÀ DEFINITA. NEL CASO L'AVESSE PUÒ ESSERE PARI (AUTOVALORE $+1$) OPPURE DISPARI (AUTOVALORE -1)

ESEMPIO: ARMONICHE SFERICHE

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r) Y_l^m(\theta, \varphi) = \chi(r) \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

L'INVERSIONE SPAZIALE $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ È EQUIVALENTE A:

$$\theta \rightarrow \pi - \theta ; \varphi \rightarrow \pi + \varphi$$

$$\Rightarrow e^{im\varphi} \rightarrow e^{im(\pi + \varphi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$$

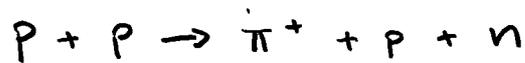
$$P_l^m(\cos\theta) \rightarrow P_l^m[\cos(\pi - \theta)] = (-1)^{l+m} P_l^m(\cos\theta)$$

$$\text{OVVERO } Y_l^m(\theta, \varphi) \rightarrow Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

\Rightarrow LA PARITÀ DELLE ARMONICHE SFERICHE È $(-1)^l$

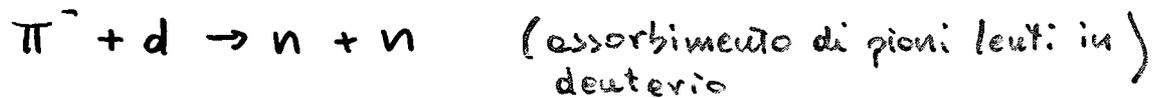
PARITA' INTRINSECA

- NELLE INTERAZIONI FORTI ED E.M. LA PARITA' E' CONSERVATA. SE CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA REAZIONE



OCCORRE ASSEGNARE AL PIONE UNA PARITA' INTRINSECA AFFINCHÉ LA PARITA' GLOBALE SIA CONSERVATA NELLA REAZIONE

PARITA' DEL PIONE η_π



- INDICHIAMO CON l_i E l_f IL MOMENTO ANGOLARE ORBITALE DELLO STATO INIZIALE E DELLO STATO FINALE. LA CONSERVAZIONE DELLA PARITA' RICHIEDE:

$$\eta_\pi \eta_d (-1)^{l_i} = \eta_n \cdot \eta_n \cdot (-1)^{l_f}$$

- $\eta_d = 1$ (due nucleoni in onde s) ; $\eta_n^2 = 1$

$$\Rightarrow \eta_\pi = (-1)^{l_f - l_i} \Rightarrow (-1)^{l_f} \quad \left[\begin{array}{l} l_i = 0 \\ \text{pione quasi fermo} \end{array} \right]$$

- LO SPIN DEL DEUTONE E' UGUALE A 1, QUINDI PER LO STATO FINALE A 2 NEUTRONI ABBIAMO [N.B. $S_\pi = 0$]

$$\eta_\pi = + \quad |\Psi_{nn}^{(1)}\rangle = |S=1, s=1, l_f=0 \text{ oppure } 2\rangle \quad \Psi \text{ simmetrica}$$

$$\eta_\pi = - \quad |\Psi_{nn}^{(2)}\rangle = |S=1, s=1, l_f=1\rangle \quad \Psi \text{ antisimmetrica}$$

$$\eta_\pi = - \quad |\Psi_{nn}^{(3)}\rangle = |S=1, s=0, l_f=1\rangle \quad \Psi \text{ simmetrica}$$

I DUE NEUTRONI SONO DUE FERMIONI IDENTICI, QUINDI LA FUNZIONE D'ONDA TOTALE DEVE ESSERE ANTISIMMETRICA $\Rightarrow \eta_\pi = -1$

CONIUGAZIONE DI CARICA

- L'OPERATORE CONIUGAZIONE DI CARICA TRASFORMA UNA PARTICELLA NELLA SUA ANTIPARTICELLA, LA QUALE HA TUTTI I NUMERI QUANTICI INTERNI DI SEGNO OPPOSTO (CARICA, STRANEZZA, MOMENTO MAGNETICO, ETC.....)

⇒ SOLO LE PARTICELLE "NEUTRE" POSSONO ESSERE AUTOSTATI DELL'OPERATORE DI CONIUGAZIONE DI CARICA

$$\hat{C} |\alpha, \psi\rangle = C_\alpha |\alpha, \psi\rangle \text{ autostato di } C$$

$$\text{E} \quad \hat{C} |a, \psi\rangle = |\bar{a}, \psi\rangle \quad \bar{a} = \text{antiparticella } a$$

APPLICANDO DUE VOLTE \hat{C} NE CONSEGUÈ CHE GLI AUTOVALORI C_α SONO ± 1

- C_α È UN NUMERO MOLTIPLICATIVO
- AUTOSTATI SI POSSONO ANCHE COSTRUIRE CON COPPIE PARTICELLE-ANTIPARTICELLE DOVE L'OPERATORE C SCAMBIA SEMPLICEMENTE LE DUE PARTICELLE

- SE LO STATO È SIMMETRICO O ANTISIMMETRICO PER VIA DELLO SCAMBIO, SI HA:

$$\hat{C} |a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle = |\bar{a}, \psi_1; a, \psi_2\rangle = \pm |a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle$$

QUINDI $|a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle$ È UN AUTOSTATO DI C

STATO $\pi^+ \pi^-$

- PRENDIAMO UNA COPPIA $\pi^+ \pi^-$ IN UNO STATO DI MOMENTO ANGOLARE ORBITALE L :

$$\hat{C} |\pi^+ \pi^-; L\rangle = (-1)^L |\pi^+ \pi^-; L\rangle$$

PERCHÉ SCAMBIARE I DUE PIONI È EQUIVALENTE AD INVERTIRE LE LORO POSIZIONI SPAZIALI

STATO $f \bar{f}$

- PRENDIAMO UNA COPPIA DI FERMIONI DI SPIN $\frac{1}{2}$
- DA TENERE PRESENTE CHE:

$$|\uparrow\uparrow\rangle; \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle); |\downarrow\downarrow\rangle \quad \text{simmetrica}$$

$S=1; S_z=1 \qquad S=1; S_z=0 \qquad S=1; S_z=-1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \text{antisimmetrica}$$

$S=0; S_z=0$

SCAMBIARE I DUE FERMIONI INTRODUCENDO, A CAUSA SOLO DELLO SPIN, UN FATTORE $(-1)^{S+L}$

- INOLTRE, A CAUSA DELLA PARITÀ INTRINSECA OPPOSTA DI FERMIONE - ANTI FERMIONE (VEI DIRAC), OCCORRE INTRODURRE UN ALTRO FATTORE -1

$$\Rightarrow \hat{C} |f\bar{f}, J, L, S\rangle = (-1)^L (-1)^{S+L} (-1) |f\bar{f}, J, L, S\rangle = (-1)^{L+S} |f\bar{f}, J, L, S\rangle$$

- QUESTO PONE DEI VINCOLI, AD ESEMPIO, NELL'ASIGNAZIONE DEL CONTENUTO DEI QUARK ALLE VARIE PARTICELLE

CONIUGAZIONE DI CARICA DEL π^0

- IL π^0 È UN MESONE DI SPIN 0 ED È COMPOSTO, COME TUTTI I MESONI, DA UN QUARK E UN ANTIQUARK.

LA FUNZIONE D'ONDA DEI DUE QUARK AVRA' SPIN S E MOMENTO ANGOLARE ORBITALE; LA LORO SOMMA $L+S=5$ DA' LO SPIN DEL PIONE

$$\Rightarrow L+S=0$$

$$\Rightarrow C_{\pi^0} = (-1)^{L+S} = (-1)^0 = 1$$

- SPERIMENTALMENTE SI TROVA CHE IL DECADIMENTO DOMINANTE È: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

$$\hat{C} |\pi^0\rangle = C_{\pi^0} |\pi^0\rangle$$

$$\hat{C} |\gamma\gamma\rangle = C_\gamma C_\gamma |\gamma\gamma\rangle = |\gamma\gamma\rangle \quad \text{DATO CHE } C_\gamma^2 = 1$$

PER L'INVARIANZA DELL'INTERAZIONE E.M. PER C PARITY, SI DEVE AVERE

$$C_{\pi^0} = 1 \quad (\text{in accordo con il modello a quark})$$

N.B. LA C-PARITY DEL FOTONE PUÒ ESSERE DEBITA DAL COMPORTAMENTO DEL CAMPO E.M. CLASSICO. DATO CHE IL CAMBIO DEL SEGNO DELLA CARICA COMPORTA IL CAMBIO DEL SEGNO DEI CAMPI $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\Rightarrow C_\gamma = -1$

$$\Rightarrow \text{LA C-PARITY DI 3 FOTONI È } (C_\gamma)^3 = -1$$

$$\Rightarrow \text{IL DECADIMENTO } \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma \text{ VIOLA LA C-PARITY}$$

SPERIMENTALMENTE SI HA:

$$R \equiv \frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} < 3 \cdot 10^{-8}$$

mentre ci si aspetterebbe che fosse di ordine $\alpha = \frac{1}{137}$

DOMANDE

$$R \equiv \frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} < 3 \cdot 10^{-8}$$

- 1) PERCHÉ DA UN PUNTO DI VISTA SPERIMENTALE NON POSSIAMO SEMPLICEMENTE DIRE $R = 0$?
- 2) COME FACCIAMO AD ESSERE SICURI CHE NEL DECADIMENTO $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ NON CI SIAMO "PERSI" UN FOTONE, ED ERANO INVECE 3 γ ?
- 3) LO SPAZIO DELLE FASI GIOCA UN RUOLO NEL VALUTARE R ?

TIME REVERSAL

- GLI OPERATORI \hat{P} E \hat{C} SONO HERMITIANI E UNITARI E DANNO ORIGINE A NUMERI QUANTICI MOLTIPLICATIVI
- L'OPERATORE DI TIME REVERSAL \hat{T} NON È UNITARIO E PERTANTO AD ESSO NON È ASSOCIATO NESSUN NUMERO QUANTICO
- TUTTAVIA L'INVARIANZA PER TIME REVERSAL È UTILE NELLA FISICA SUBATOMICA, AD ESEMPIO NEL CASO DI BILANCIO DETTAGLIATO

- ALCUNE CONSEGUENZE:

$$t \xrightarrow{\hat{T}} -t ; \quad \vec{x} \xrightarrow{\hat{T}} \vec{x} ; \quad \vec{p} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{p} ; \quad \vec{s} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{s} ; \quad \begin{matrix} \vec{E} \xrightarrow{\hat{T}} \vec{E} \\ \vec{B} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{B} \end{matrix}$$

- LE LEGGI DI NEWTON SONO INVARIANTI PER \hat{T} PERCHÉ LA DERIVATA TEMPORALE COMPARE AL SECONDO ORDINE
- PRENDIAMO L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER:

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t) \quad \left[\begin{array}{l} \text{formalmente è uguale all'equazione di} \\ \text{diffusione che non è invariante per } \hat{T} \end{array} \right]$$

SE $\hat{T}|\psi(t)\rangle$ SODDISFA LA STESSA EQ. DI $|\psi(t)\rangle \Rightarrow \hat{T} = \text{SINMETRIA}$

$$i\hbar \frac{d(\hat{T}\psi(t))}{dt} = H(\hat{T}\psi(t))$$

SE PONIAMO $\hat{T}\psi(t) = \psi(-t)$ LE COSE NON TORNANO

→ PONENDO $t' = -t \Rightarrow dt' = -dt$; ABBIAMO

$$-i\hbar \frac{d\psi(t')}{dt'} = H\psi(t')$$

CHE È DIVERSA DALL'EQUAZIONE DI $\psi(t)$

- LA CORRETTA TRASFORMAZIONE PER $\Psi(t)$ FU TROVATA DA WIGNER

$$T \Psi(t) = \Psi^*(-t)$$

$$\Rightarrow -i\hbar \frac{d\Psi^*(t')}{dt'} = H \Psi^*(t')$$

PRENDIAMO POI IL COMPLESSO CONIUGATO DELL'INTERA EQUAZIONE E TORNIAMO ALL'EQ. DI SCHRÖDINGER DI PARTENZA

$$i\hbar \frac{d\Psi(t')}{dt'} = H \Psi(t')$$

MA A PATTO CHE H SIA REALE

SE H CONTIENE DEI TERMINI IMMAGINARI ALLORA L'HAMILTONIANA NON È INVARIANTE PER TIME REVERSAL

- T È UN OPERATORE ANTIUNITARIO E ANTI LINEARE

$$\langle \Psi' | \Psi' \rangle = \langle \Psi T^\dagger | T \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle^* = \langle \Psi | \Psi \rangle$$

$$T(C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) = C_1^* T_1 \Psi_1 + C_2^* T_2 \Psi_2$$

- L'INTERPRETAZIONE PIÙ FISICA DELLA TIME REVERSAL È UN MOTION-REVERSAL, DATO CHE T INVERTE SIA L'IMPULSO CHE IL MOMENTO ANGOLARE

$$T | \vec{p}, \vec{j} \rangle = | -\vec{p}, -\vec{j} \rangle \quad \text{particella di momento } -\vec{p}$$

- NON CI SONO SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

$$T \Psi(t) = \eta_T \Psi(t) \quad \text{PERCHÉ} \quad T \Psi(t) = \Psi^*(-t)$$

- L'INVARIANZA PER TIME REVERSAL NON PUÒ ESSERE VERIFICATA CERCANDO DECADIMENTI CHE LA VIOLANO PERCHÉ NON C'È UN NUMERO QUANTICO CHE CARATTERIZZA UNO STATO

PARTICELLE IDENTICHE

- SE UN SISTEMA È COMPOSTO DA PARTICELLE IDENTICHE, IL PRINCIPIO DI INDISTINGUIBILITÀ AFFERMA CHE NESSUNA MISURA PUÒ ESSERE FATTA CHE DISTINGUA QUESTO SISTEMA DA UNO NEL QUALE DUE (O PIÙ) PARTICELLE VENGANO SCAMBIATE

$$\Rightarrow |\xi_2, \xi_1\rangle = e^{i\alpha} |\xi_1, \xi_2\rangle$$

SE FACCIAMO UN SECONDO CAMBIO:

$$|\xi_2, \xi_2\rangle = e^{i\alpha} |\xi_2, \xi_1\rangle = e^{i2\alpha} |\xi_1, \xi_2\rangle \Rightarrow e^{i2\alpha} = 1 \Rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1$$

- BOSONI: $e^{i\alpha} = +1$ (FUNZIONE D'ONDA SIMMETRICA)
- FERMIONI: $e^{i\alpha} = -1$ (FUNZIONE D'ONDA ANTISIMMETRICA)

N.B. LA FUNZIONE D'ONDA TOTALE PUÒ ESSERE IL PRODOTTO DI TANTE PARTI:

$$\xi = \psi(\text{SPAZIALE}) \cdot \chi(\text{SPIN}) \cdot \varphi(\text{SAPORE}) \cdot \sigma(\text{COLORE})$$

TEOREMA CPT

- NON C'È NESSUNA RAGIONE FONDAMENTALE PER LA QUALE LE FORZE IN NATURA DEBBANO ESSERE INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI C, P, T SEPARATAMENTE.
- TUTTAVIA UNA TEORIA DEI CAMPI QUANTISTICA CHE SIA INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI DI LORENZ DEVE ESSERE ANCHE INVARIANTE PER LA TRASFORMAZIONE CPT
- CONSEGUENZE: AD ESEMPIO UNA PARTICELLA E LA SUA ANTIPARTICELLA DEVONO AVERE RIADDSAMENTE LA STESSA MASSA E LA STESSA VITA MEDIA

GRUPPO DI SIMMETRIA

- SI STUDIA LA SIMMETRIA DI UN SISTEMA FACENDO DELLE "ROTAZIONI" IN UNO SPAZIO APPROPRIATO
- L'INSIEME DEGLI OPERATORI DI ROTAZIONE FORMANO UN GRUPPO DI SIMMETRIA
- SE ABBIAMO UN NUMERO FINITO DI STATI TALI CHE, SOTTO L'AZIONE DEGLI OPERATORI, SI TRASFORMANO IN UN ALTRO STATO DELLO SPAZIO, ALLORA ABBIAMO UN SOTTOSPAZIO INVARIANTE DI STATI. PER QUESTI STATI GLI OPERATORI DEL GRUPPO NON POSSONO CONNETTERE LO STATO CON UN ALTRO AL DI FUORI DI QUESTO SPAZIO. LO SPAZIO È IRRIDUCIBILE SE È IL PIÙ PICCOLO DEI SOTTOSPAZI.
- UN SOTTOSPAZIO INVARIANTE IRRIDUCIBILE SI CHIAMA MULTIPLETTO DEL GRUPPO DI OPERATORI.
- UN TEOREMA GENERALE AFFERMA CHE SE L'HAMILTONIANA DI UN SISTEMA COMMUTA CON GLI OPERATORI DEL GRUPPO DI SIMMETRIA, ALLORA I MULTIPLETTI SONO DEGLI INSIEMI DI AUTOSTATI DEGENERI DELL'HAMILTONIANA (AD ESEMPIO STESSA MASSA)
- SAPPIAMO CHE PER LE PARTICELLE ELEMENTARI GLI STATI NON SONO DEGENERI (NON HANNO LA STESSA MASSA), QUINDI L'HAMILTONIANA NON COMMUTA CON IL GRUPPO DI SIMMETRIA. [ESEMPIO: L'ACCOPIAMENTO SPIN ORBITA $\vec{L} \cdot \vec{S}$ ROMPE LA SIMMETRIA DI ROTAZIONE, ALLORA I LIVELLI ATOMICI SI SPLITTAANO]
- UN GRUPPO DI LIE È UN GRUPPO CONTINUO COMPOSTO DAGLI OPERATORI $U(\vec{\alpha}) = U(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ CHE DIPENDE ANALITICAMENTE DAGLI n PARAMETRI α E PER IL QUALE $U(\vec{0}) = \mathbb{1}$

TEORIA DEI GRUPPI!

- INTRODUCIAMO BREVEMENTE SOLO LA TERMINOLOGIA PRENDENDO AD ESEMPIO LE ROTAZIONI SPAZIALI
- L'INSIEME DELLE ROTAZIONI FORMANO UN GRUPPO, OGNI ROTAZIONE È UN ELEMENTO DEL GRUPPO
- DUE ROTAZIONI SUCCESSIVE, R_1 SEQUITA DA R_2 , SONO EQUIVALENTI AD UNA SINGOLA ROTAZIONE, CHIAMATA PRODOTTO $R_2 R_1$
- L'INSIEME DELLE ROTAZIONI È CHIUSO RISPETTO ALLE MOLTIPLICAZIONI, CIOÈ OGNI MOLTIPLICAZIONE PRODUCE UN ELEMENTO CHE FA PARTE DELL'INSIEME
- C'È UN ELEMENTO IDENTITÀ (NESSUNA ROTAZIONE) ED UN ELEMENTO INVERSO (ROTAZIONE ALL'INDIETRO)
- IL PRODOTTO NON È NECESSARIAMENTE COMMUTATIVO $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$. QUANDO LO È IL GRUPPO SI CHIAMA ABELIANO. VALE SEMPRE LA REGOLA ASSOCIATIVA $R_3 (R_2 R_1) = (R_3 R_2) R_1$
- IL GRUPPO DELLE ROTAZIONI È CARATTERIZZATO DA UN INSIEME DI PARAMETRI CONTINUI $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. OGNI ROTAZIONE PUÒ ESSERE ESPRESSA COME SOMMA DI ROTAZIONI INFINITESIME: GRUPPO DI LIE
- I GENERATORI DELLE ROTAZIONI SONO I TRE OPER. DEL MOM. ANG.

$$[\vec{J}_i, \vec{J}_j] \in i\hbar \epsilon_{ijk} \vec{J}_k$$

QUESTA RELAZIONE DEFINISCE COMPLETAMENTE LE PROPRIETÀ DEL GRUPPO: ALGEBRA DI LIE.

- DATO CHE I GENERATORI NON COMMUTANO, SOLO UNO PUÒ ESSERE UTILIZZATO PER DEFINIRE IL NUMERO QUANTICO DI UNO STATO: ESEMPIO J_z

- FUNZIONI NON LINEARI DEI GENERATORI CHE COMMUTANO CON TUTTI I GENERATORI SONO CHIAMATI INVARIANTI O OPERATORI DI CASIMIR

PER IL GRUPPO DELLE ROTAZIONI :

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

QUESTO È IL SOLO OPERATORE DI CASIMIR

$$[J^2, J_i] = 0 \quad i=1, 2, 3$$

QUINDI SI POSSONO COSTRUIRE SIMULTANEAMENTE AUTOSTATI DI J^2 E DI UNO DEI J_i , AD ESEMPIO J_3

$$J^2 |J, m\rangle = J(J+1) |J, m\rangle$$

$$J_3 |J, m\rangle = m |J, m\rangle$$

- SI POSSONO COSTRUIRE GLI OPERATORI DI INNALZAMENTO E DI ABBASSAMENTO

$$J_{\pm} = J_1 \pm i J_2$$

$$\Rightarrow J_{\pm} |J, m\rangle = [J(J+1) - m(m \pm 1)]^{1/2} |J, m \pm 1\rangle$$

- ALTRE DEFINIZIONI

- GENERATORI DI UN GRUPPO = NUM. DI MATRICI INDIPENDENTI
- RANGO DI UN GRUPPO = NUMERO DI MATRICI DIAGONALI, CORRISPONDENTI AL NUMERO DI OPERATORI CHE COMMUTANO
(IL RANGO È ANCHE UGUALE AL NUMERO DI OPERATORI DI CASIMIR)

- VEDIAMO COME SI TRASFORMA L'AUTOSTATO $|J, m\rangle$ IN SEGUITO AD UNA ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE 2 (Y)

$$e^{-i\theta J_2} |J, m\rangle = \sum_{m'} d_{m'm}^J(\theta) |J, m'\rangle$$

I COEFFICIENTI $d_{m'm}^J$ POSSONO ESSERE INTERPRETATI COME MATRICI DI ROTAZIONE.

- DA NOTARE CHE GLI AUTOSTATI CHE HANNO LO STESSO J VENGONO MESCOLATI TRA DI LORO DALLA ROTAZIONE. ESSI FORMAN LA BASE DI DIMENSIONE $(2J+1)$ DELLA RAPPRESENTAZIONE IRRIDUCIBILE DEL GRUPPO DELLE ROTAZIONI

SU(2)

- CONSIDERIAMO LE ROTAZIONI DEGLI STATI CON $J = \frac{1}{2}$

— I GENERATORI DELLE ROTAZIONI POSSONO ESSERE SCRITTI COME:

$$J_i = \frac{1}{2} \sigma_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{matrici di Pauli}$$

- LA BASE DI QUESTA RAPPRESENTAZIONE È DATA DAGLI AUTOSTATI DI σ_3

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- LE MATRICI DELLE TRASFORMAZIONI SONO:

$$U(\theta_i) = e^{-i\theta_i \sigma_i / 2} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Matrici Unitarie}$$

- L'INSIEME DI TUTTE LE MATRICI UNITARIE 2×2 È NOTO COME GRUPPO $U(2)$. TUTTAVIA IL GRUPPO $U(2)$ È PIÙ GRANDE DEL GRUPPO DELLE MATRICI $U(\theta_i)$, PERCHÉ LE σ_i HANNO TRACCIA ZERO.

- PER OGNI MATRICE A TRACCIA ZERO SI HA:

$$\det(e^{i\sigma}) = e^{i \text{Tr}(\sigma)} = 1$$

- L'INSIEME DELLE MATRICI 2×2 A TRACCIA NULLA FORMANO IL SOTTOGRUPPO $SU(2)$ DI $U(2)$. $SU(2)$ DENOTA IL GRUPPO SPECIALE UNITARIO IN DUE DIMENSIONI

- L'ALGEBRA DI $SU(2)$ È QUELLA DEI GENERATORI J_i :

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$$

- LA RAPPRESENTAZIONE A DUE DIMENSIONI DI $SU(2)$ È LA RAPPRESENTAZIONE FONDAMENTALE

COMBINAZIONE DI RAPPRESENTAZIONI

- PRENDIAMO UN SISTEMA COMPOSTO DA DUE SISTEMI DI MOMENTO ANGOLARE J_A E J_B

$$|J_A J_B m_A m_B\rangle \equiv |J_A m_A\rangle |J_B m_B\rangle$$

- L'OPERATORE $\vec{J} = \vec{J}_A + \vec{J}_B$ SODDISFA LE REGOLE DELL'ALGEBRA DI LIE DEL GRUPPO: $[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$
- I NUMERI QUANTICI CONSERVATI SONO J E M
- IL PRODOTTO DI DUE RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI DIMENSIONI $(2J_A + 1)$ E $(2J_B + 1)$ PUÒ ESSERE DECOMPOSTO NELLA SOMMA DI RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI DIMENSIONE $2J + 1$, DOVE:

$$J = |J_A - J_B| ; |J_A - J_B| + 1 ; \dots ; J_A + J_B$$

L'AUTOSTATO È: $|J_A, J_B, J, M\rangle$; DOVE: $M = m_A + m_B$

- SI HA:

$$|J_A, J_B, J, M\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(m_A, m_B, J, M) |J_A, J_B, m_A, m_B\rangle$$

↑ coefficienti di Clebsch-Gordan

- I COEFFICIENTI SI POSSONO CALCOLARE USANDO IN SEQUENZA L'OPERATORE DI ABBASSAMENTO $J_- = (J_A)_- + (J_B)_-$ ALLO STATO:

$$|J_A, J_B, J, M = J\rangle = |J_A, J_B, m_A = J_A, m_B = J_B\rangle$$

- ESEMPIO: NEL CASO DI DUE SISTEMI DI SPIN $\frac{1}{2}$ ABBIAMO:

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \leftarrow \text{ANTISIMMETRICO}$$

↑ SIMMETRICO

- AGGIUNGENDO UN TERZO SPIN $\frac{1}{2}$ ABBIAMO:

$$(2 \otimes 2) \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2) = 4 \oplus 2 \oplus 2$$

\uparrow $J = \frac{3}{2}$ \uparrow $J = \frac{1}{2}$ \uparrow $J = \frac{1}{2}$

ISOSPIN

- HEISENBERG PROPOSSE NEL 1932 CHE IL PROTONI E IL NEUTRONE ERANO DUE STATI DIVERSI DI UNA STESSA PARTICELLA: IL NUCLEONE, E CHE L'INTERAZIONE FORTE FOSSE LA STESSA PER P E N.
- PER IMPLEMENTARE QUESTA IDEA SI PUO' RAPPRESENTARE IL NUCLEONE COME UN VETTORE COLONNA A DUE COMPONENTI:

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IL PROTONI HA $I_3 = \frac{1}{2}$ E IL NEUTRONE HA $I_3 = -\frac{1}{2}$

- SE LE INTERAZIONI FORTE SONO INVARIANTI PER ROTAZIONI NELLO SPAZIO DELL'ISOSPIN, ALLORA L'ISOSPIN SI DEVE CONSERVARE IN TUTTI I PROCESSI DOVE INTERVENGONO LE INTERAZIONI FORTE
- VEDIAMO UNA CONSEQUENZA DINAMICA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ISOSPIN:

— SUPPONIAMO DI AVERE 2 NUCLEONI, DALLA REGOLA DI ADDIZIONE DEI MOMENTI ANGOLARI, SAPPIAMO CHE L'ISOSPIN TOTALE PUO' ESSERE 1, 0

TRIPLETTO SIMMETRICO

a) $|1, 1\rangle = pp$

b) $|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np)$

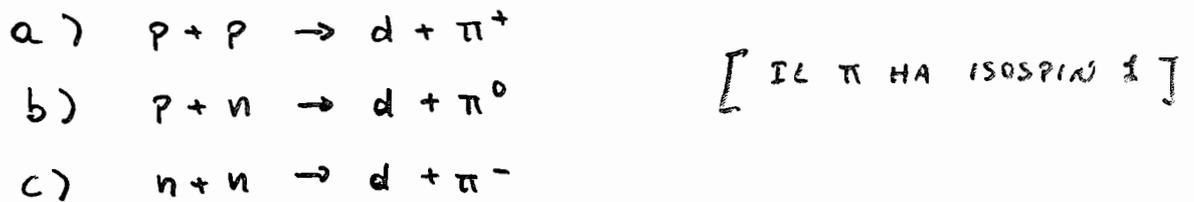
c) $|1, -1\rangle = nn$

ISOSINGOLETTO ANTISIMMETRICO

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np)$$

- ESISTE UNO STATO LEGATO PROTONI-NEUTRONE = DEUTONE
NON ESISTE UNO STATO LEGATO PROTONI-PROTONI OPPURE NEUTRONE-NEUTRONE, QUINDI IL DEUTONE DEVE ESSERE UN ISOSINGOLETTO, ALTRIMENTI SAREBBERO DOVUTI ESISTERE ANCHE GLI ALTRI DUE STATI CHE DIFFERISCONO PER UNA ROTAZIONE NELLO SPAZIO DELL'ISOSPIN (1

- VEDIAMO DELLE IMPLICAZIONI SULLO SCATTERING NUCLEONE-NUCLEONE. CONSIDERIAMO I PROCESSI:



DATO CHE IL DEUTONE HA ISOSPIN $I=0$, GLI STATI SULLA DESTRA SONO:

$$d + \pi^+ = |1, 1\rangle ; \quad d + \pi^0 = |1, 0\rangle ; \quad d + \pi^- = |1, -1\rangle$$

MENTRE QUELLI SULLA SINISTRA SONO:

$$p + p = |1, 1\rangle ; \quad p + n = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle) ; \quad n + n = |1, -1\rangle$$

- DATO CHE I SI DEVE CONSERVARE, CONTRIBUISCONO SOLO GLI STATI CON $I = 1$. LE AMPIEZZE DI SCATTERING DEVONO STARE NEL RAPPORTO:

$$1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$

E LE SEZIONI D'URTO COME $2 : 1 : 2$

- I PROCESSI a) e b) SONO STATI MISURATI, ED UNA VOLTA TENUTO IN CONTO LE CORREZIONI PER L'INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA, ESSI HANNO IL RAPPORTO PREDETTO

- FORMULA DI GELL-MANN - NISHIJIMA

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} (B + S)$$

\swarrow stranezza
 \uparrow numero barionico

N.B. $B + S = Y$ (IPERCARICA)

$$\Rightarrow Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$$

SU(3)

- SU(3) È LO SPAZIO DELLE MATRICI UNITARIE 3x3 A TRACCIA NULLA. VI SONO $3^2 - 1 = 8$ MATRICI INDIPENDENTI

- IL DOPPIETTO BASE DI SU(2) È SOSTITUITO DA UN TRIPLETTO

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

- IL TRIPLETTO BASE SI TRASFORMA COME: $\varphi \rightarrow \varphi' = U\varphi$
LE MATRICI U SONO MATRICI UNITARIE 3x3

- LA RAPPRESENTAZIONE CANONICA DELLE U È:

$$U = e^{-\frac{i}{2} \sigma \cdot \hat{n} \cdot \vec{\lambda}} \quad \left[\frac{1}{2} \vec{\lambda} \text{ SONO GLI 8 GENERATORI DEL GRUPPO DI SIXETRIA} \right]$$

- LE MATRICI $\vec{\lambda}$ FURONO INTRODOTTE DA GELL-MANN & SONO EQUIVALENTI ALLE MATRICI $\vec{\sigma}$ DI PAULI PER SU(2)

- LA FORMA STANDARD È:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- GLI 8 GENERATORI SODDISFANO ALLE REGOLE DI COMMUTAZIONE $\left[\frac{1}{2} \lambda_i, \frac{1}{2} \lambda_j \right] = i f_{ijk} \frac{1}{2} \lambda_k$

$$\left[\frac{1}{2} \partial_i, \frac{1}{2} \lambda_5 \right] = i f_{ijk} \frac{1}{2} \lambda_k$$

- $f_{123} = 1$; $f_{247} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$; $f_{458} = f_{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
- GLI f_{ijk} SONO ANTISIMMETRICI PER LO SCAMBIO DI DUE INDICI.

N.B. CI SONO SOLO DUE MATRICI DIAGONALI; QUESTO CORRISPONDE AL NUMERO MASSIMO DI GENERATORI CHE COMMUTANO. QUESTO SI CHIAMA RANGO DEL GRUPPO:

- $SU(3)$: RANGO 2

- $SU(2)$: RANGO 1

\Rightarrow IN $SU(3)$ CI SONO 2 OPERATORI DI CASIMIR (COMBINAZIONI NON LINEARI DEI GENERATORI CHE COMMUTA CON TUTTI I GENERATORI)

- I DUE GENERATORI DIAGONALI IDENTIFICANO DUE NUMERI QUANTICI ADDITIVI CHE POSSONO ESSERE UTILIZZATI PER IDENTIFICARE GLI ELEMENTI DEL MULTIPLETTO.

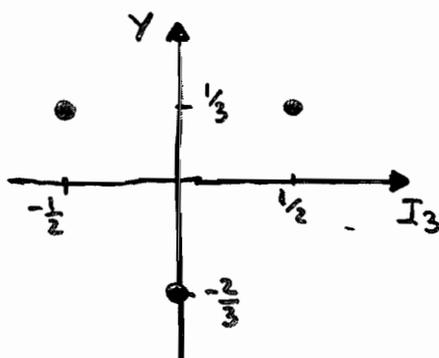
LA SCELTA CONVENZIONALE E' :

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$I_3 =$ ISOSPIN

$Y =$ IPERCARICA

- GLI STATI VENGONO RAPPRESENTATI IN UN GRAFICO BIDIENSIONALE



I 3 AUTOVETTORI DEL TRIPLETTO FONDAMENTALE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}$$

$$I_3 = 0$$

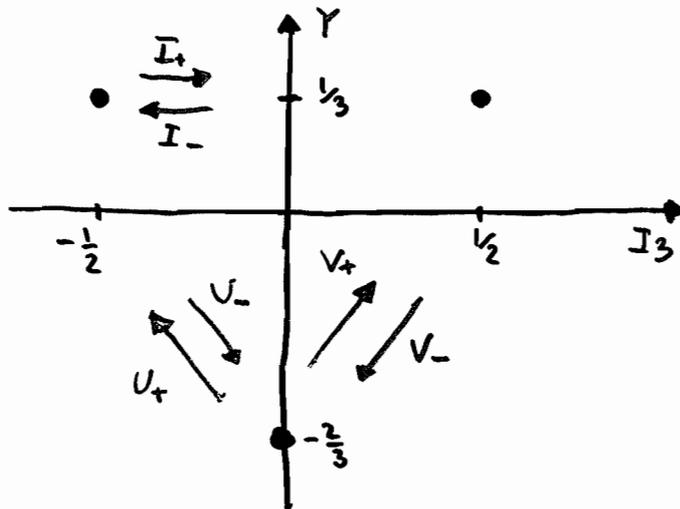
$$Y = \frac{1}{3}$$

$$Y = \frac{1}{3}$$

$$Y = -\frac{2}{3}$$

OPERATORI "LADDER"

- SI POSSONO TROVARE DELLE COMBINAZIONI DEI GENERATORI ($\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{\lambda}$) CHE CONNETTONO TRA DI LORO I VARI STATI DI UN MULTIPLETTO'



$$I_{\pm} = F_1 \pm i F_2 ; I_3 = F_3$$

$$V_{\pm} = F_4 \pm i F_5$$

$$U_{\pm} = F_6 \pm i F_7$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$$

- $I_{\pm} \Rightarrow \Delta Y = 0 ; \Delta I_3 = \pm 1$
- $U_{\pm} \Rightarrow \Delta Y = \pm 1 ; \Delta I_3 = \mp \frac{1}{2}$
- $V_{\pm} \Rightarrow \Delta Y = \pm 1 ; \Delta I_3 = \pm \frac{1}{2}$

N.B. GLI OPERATORI LADDER CONNETTONO SOLO STATI CHE APPARTENGONO AD UN MULTIPLETTO IRRIDUCIBILE

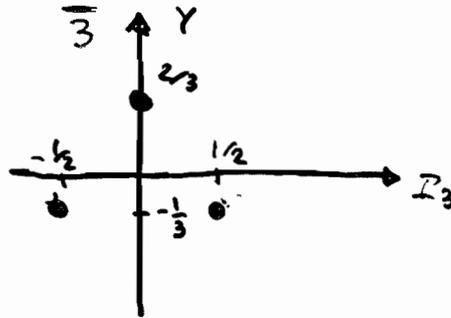
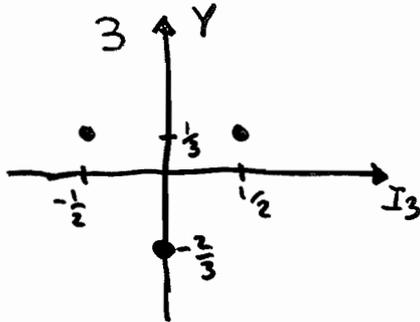
- REGOLE DI COMMUTAZIONE

$$[I_3, I_{\pm}] = \pm I_{\pm} ; [I_3, U_{\pm}] = \mp \frac{1}{2} U_{\pm} ; [I_3, V_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} V_{\pm}$$

$$[Y, I_{\pm}] = 0 ; [Y, U_{\pm}] = \pm U_{\pm} ; [Y, V_{\pm}] = \pm V_{\pm}$$

PRODOTTO DI RAPPRESENTAZIONI

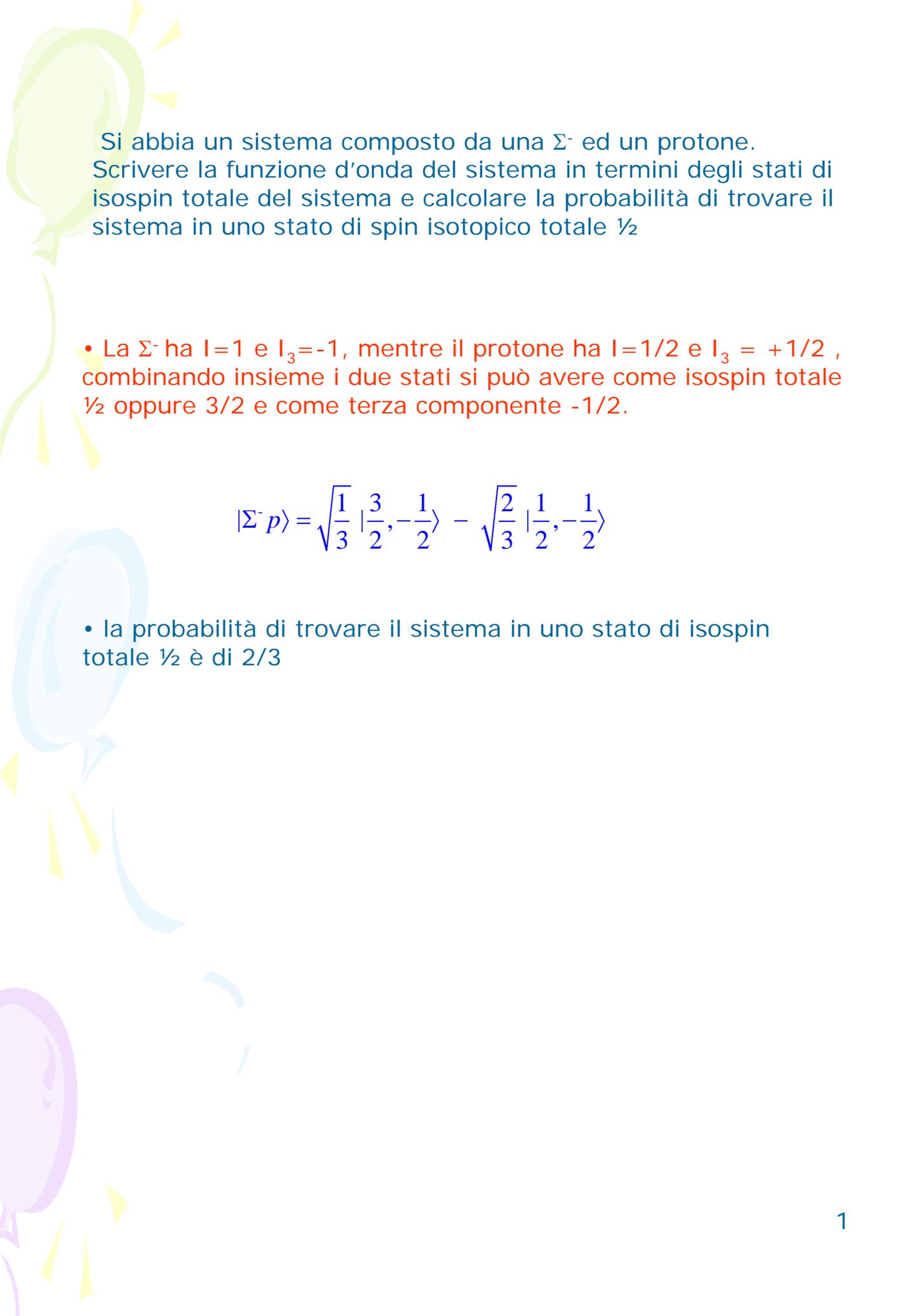
N.B. LA RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA DI $SU(3)$, $\bar{3}$, SI TRASFORMA IN MODO DIVERSO DALLA 3 E HA NUMERI QUANTICI DIVERSI



(che cosa è una rappresentazione coniugata diventa chiaro quando le interpretiamo in termini di particelle)

- $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 \leftarrow$ singoletto di $SU(3)$
 \uparrow otetto di $SU(3)$
- $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$
- $3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = 3 \otimes 6 \oplus 3 \otimes \bar{3} =$
 $= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 singoletto otetto otetto decupletto

- QUESTE SONO RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI $SU(3)$ CARATTERIZZATE DAGLI STESSI NUMERI QUANTICI INDIVIDUATI DAGLI OPERATORI DI CASIMIR.
- GLI STATI ALL'INTERNO DI UN MULTIPLETTO SONO INDIVIDUATI DA I_3 E Y E SONO CONNESSI TRA DI LORO DAGLI OPERATORI LADDER



Si abbia un sistema composto da una Σ^- ed un protone.
Scrivere la funzione d'onda del sistema in termini degli stati di isospin totale del sistema e calcolare la probabilità di trovare il sistema in uno stato di spin isotopico totale $\frac{1}{2}$

- La Σ^- ha $I=1$ e $I_3=-1$, mentre il protone ha $I=1/2$ e $I_3 = +1/2$, combinando insieme i due stati si può avere come isospin totale $\frac{1}{2}$ oppure $3/2$ e come terza componente $-1/2$.

$$|\Sigma^- p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

- la probabilità di trovare il sistema in uno stato di isospin totale $\frac{1}{2}$ è di $2/3$

Il barione Λ decade in protone $- \pi^-$ oppure in neutrone $- \pi^0$. Nel decadimento il quark s della Λ si trasforma in un quark u del nucleone, quindi il suo isospin forte varia di $\frac{1}{2}$. Assumendo che nel decadimento della Λ questa regola di selezione venga rispettata e trascurando altre correzioni, qual è il rapporto che ci si aspetterebbe tra il B.R. in $p- \pi^-$ rispetto a quello in $n- \pi^0$?

Il nucleone ha isospin $\frac{1}{2}$ mentre il pione ha isospin 1, quindi un nucleone più un pione possono dare isospin totale uguale a $\frac{1}{2}$ oppure $\frac{3}{2}$. La Λ ha isospin zero, quindi nella funzione d'onda del sistema nucleone-pione occorre prendere in considerazione soltanto la componente con isospin $\frac{1}{2}$, per la regola di selezione $\Delta I = \frac{1}{2}$

$$p + \pi^- = \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle + |1; -1\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$n + \pi^0 = \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + |1; 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle$$

La probabilità di transizione è proporzionale al quadrato della funzione d'onda:

$$\frac{B.R.(\Lambda \rightarrow p + \pi^-)}{B.R.(\Lambda \rightarrow n + \pi^0)} = \frac{\left| \langle p + \pi^- | \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \rangle \right|^2}{\left| \langle n + \pi^0 | \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \rangle \right|^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

I valori sperimentali sono: $B.R.(\Lambda \rightarrow p + \pi^-) = 63.9\%$; $B.R.(\Lambda \rightarrow n + \pi^0) = 35.8\%$

$$\frac{B.R.(\Lambda \rightarrow p + \pi^-)}{B.R.(\Lambda \rightarrow n + \pi^0)} = \frac{63.9}{35.8} = 1.78$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con $\Delta I = \frac{3}{2}$

Il K_S^0 può decadere in due pioni carichi oppure in due pioni neutri. Trovare il rapporto tra il B.R. del decadimento in pioni neutri rispetto a quello in pioni carichi. Si ricorda che per ragioni di simmetria lo stato finale deve avere isospin totale zero

Nei decadimento deboli con $\Delta S=1$ si ha $\Delta I=1/2$, quindi dato che il K ha $I=1/2$, lo stato finale dei due pioni deve avere $I=0$ oppure $I=1$. La funzione d'onda dei due pioni deve essere simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle, quindi dato che essi hanno spin zero e si trovano in uno stato di momento angolare $l=0$, anche la parte di isospin deve essere simmetrica, quindi $I=0$.

Utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan si ha:

$$\begin{aligned} |0;0\rangle &= +\sqrt{\frac{1}{3}}|1,+1;1-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1;1+1\rangle = \\ &= +\sqrt{\frac{1}{3}}\pi^+\pi^- - \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^0\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^-\pi^+ \end{aligned}$$

Di conseguenza abbiamo:

$$\frac{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0)}{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)} = \frac{|\langle \pi^0 \pi^0 | 0;0 \rangle|^2}{|\langle \pi^+ \pi^- | 0;0 \rangle|^2} = \frac{1}{2}$$

I valori sperimentali sono:

$$\begin{aligned} B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0) &= 30.7\% \quad ; \quad B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) = 69.2\% \\ \frac{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0)}{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)} &= \frac{30.7}{69.2} = 0.44 \end{aligned}$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con $\Delta I=3/2$

. Dedurre attraverso quali canali di isospin possono avvenire le seguenti due reazioni:



Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, trovare il rapporto tra le sezioni d'urto σ_a/σ_b

Ricordiamo l'isospin totale e la terza componente delle particelle coinvolte nella reazione e scriviamo lo stato iniziale ed i due stati finali in termini degli autostati di isospin utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan.

$$K^- = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle ; \quad p = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle \quad \rightarrow \quad K^- + p = +\sqrt{\frac{1}{2}} |1; 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |0; 0\rangle$$

$$\Sigma^0 = |I = 1; I_3 = 0\rangle ; \quad \pi^0 = |I = 1; I_3 = 0\rangle \quad \rightarrow \quad \Sigma^0 + \pi^0 = +\sqrt{\frac{2}{3}} |2; 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0; 0\rangle$$

$$\Sigma^+ = |I = 1; I_3 = 1\rangle ; \quad \pi^- = |I = 1; I_3 = -1\rangle \quad \rightarrow \quad \Sigma^+ + \pi^- = +\sqrt{\frac{1}{6}} |2; 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |1; 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |0; 0\rangle$$

Di conseguenza la reazione a) può avvenire soltanto attraverso il canale di isospin totale 0, mentre la reazione b) può avvenire attraverso il canale con isospin 0 ed anche con isospin 1.

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, allora il rapporto tra le sezioni d'urto è pari al rapporto dei quadrati dei coefficienti di C.G. dell'autostato di isospin 0 nei due stati finali:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{\left| \langle \Sigma^0 + \pi^0 | 0; 0 \rangle \right|^2}{\left| \langle \Sigma^+ + \pi^- | 0; 0 \rangle \right|^2} = \frac{\left| -\sqrt{\frac{1}{3}} \right|^2}{\left| \sqrt{\frac{1}{3}} \right|^2} = 1$$

Adroni e modello a quark

- **Classificazione delle particelle adroniche.**
- **Grafico isospin-ipercarica.**
- **Gruppo SU(3).**
- **Matrici di Gell-Mann.**
- **Generatori di SU(3).**
- **Introduzione dei quark.**
- **Numeri quantici dei quark.**
- **Costruzione dell'ottetto 0^- dei mesoni.**
- **Degenerazione degli stati con $Y=0$ e $I_3=0$.**
- **Formula di massa di Gell-Mann e Okubo.**
- **Mesoni vettoriali 1^- .**
- **Mescolamento φ_0 e φ_8 .**
- **Decadimenti della φ e dell' ω .**
- **Regola di OZI.**
- **Massa dei quark.**



LE PARTICELLE "STRANE"

[HUGHES]

- I LAVORI PIONIERISTICI SULLE PARTICELLE "STRANE" FURONO FATTI UTILIZZANDO CAMERE A NEBBIA AL LIVELLO DEL MARE ED IN ALTA MONTAGNA, ED ESPERIMENTI NUCLEARI SU PALCONI AEROSTATICI.
- LA PRIMA EVIDENZA RISALE AL 1946, DOVE IN UNA CAMERA A NEBBIA LEPRINCE-RINGUET RIPORTÒ LA PRESENZA DI UNA PARTICELLA CON MASSA $500 \pm 50 \text{ MeV}/c^2$ (PROBABILMENTE UN Λ)
- I PRIMI ESEMPI CHIARAMENTE IDENTIFICATI COME NUOVE PARTICELLE DA LINDSEY E BUTLER DELL'UNIVERSITÀ DI MANCHESTER. NEL CORSO DI UN ANNO DI FUNZIONAMENTO DI UNA CAMERA A NEBBIA AL LIVELLO DEL MARE TROVARONO DEGLI ESEMPI DI PARTICELLE V
- LE V ERANO PARTICELLE NEUTRE CHE DECADEVANO IN DUE PARTICELLE CARICHE. FURONO TROVATI AD ESEMPIO I DECADIMENTI:

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- \quad (m_\Lambda = 1116 \text{ MeV}; m_p = 938 \text{ MeV})$$

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (m_{K^0} = 498 \text{ MeV}; m_{\pi^-} = 139.6 \text{ MeV})$$

- FU TROVATO UN K CARICO CHE DECADEVA IN 3 PIONI

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \quad (\text{B.R. } 5.6\%) \quad [\Sigma\text{-meson}]$$

E FU TROVATO ANCHE UN K CARICO CHE DECADEVA IN 2 PIONI

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 \quad (\text{B.R. } 21\%) \quad [\Theta\text{-meson}]$$

N.B. $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ [B.R. 63.4%]; $K^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ [B.R. $1.5 \cdot 10^{-5}$]

[RITROVEREMO Θ - Σ NELLA VIOLAZIONE DELLA PARITÀ NELLE INTERAZIONI DEBOLI]

ALTRE PARTICELLE STRANE

- Λ ($S = -1, I = 0$) = uds $\tau = 263$ ps
 $m_\Lambda = 1116$ MeV
 - PRIMO DECADIMENTO OSSERVATO $\Lambda \rightarrow p \pi^-$ [B.R. 64%]
 - $\Lambda \rightarrow n \pi^0$ [B.R. 36%]

N.B. $I_\Lambda = 0$; $I_N = \frac{1}{2}$; $I_\pi = 1$

$$\Rightarrow |p \pi^- \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} \right\rangle ; |n \pi^0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\Lambda \rightarrow p \pi^-}{\Lambda \rightarrow n \pi^0} = \begin{cases} 2:1 & \text{per } I = \frac{1}{2} ; \Delta I = \frac{1}{2} \\ 1:2 & \text{per } I = \frac{3}{2} ; \Delta I = \frac{3}{2} \end{cases}$$

- Σ ($S = -1, I = 1$) $\left[\overset{80 \text{ ps}}{\Sigma^+}, \overset{\tau = 7.4 \cdot 10^{-20} \text{ s}}{\Sigma^0}, \Sigma^- \right] \rightarrow \tau = 148$ ps
 1189 MeV \downarrow 1193 MeV \downarrow 1197 MeV

- $\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0$ [B.R. 51.6%]
- $\Sigma^+ \rightarrow n \pi^+$ [B.R. 48.3%]
- $\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$ [B.R. 99.8%]
- $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma$ [B.R. 100%]

[Perché non c'è $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda \pi^+$?]

- Ξ ($S = -2, I = \frac{1}{2}$) $[\Xi^-, \Xi^0]$
 \downarrow 1314.8 MeV ; $\tau = 230$ ps
 \downarrow 1321.3 MeV ; $\tau = 164$ ps
- $\Xi^- \rightarrow \Lambda \pi^-$ [B.R. 99.9%]
- $\Xi^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$ [B.R. 99.5%]

- Ω^- ($S = -3, I = 0$) $m_{\Omega^-} = 1672$ MeV ; $\tau = 82$ ps

- $\Omega^- \rightarrow \Xi^- \pi^0$ [B.R. 8.6%]
- $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 \pi^-$ [B.R. 23.6%]
- $\Omega^- \rightarrow \Lambda \kappa^-$ [B.R. 67.8%]

N.B. IL PRIMO ESEMPIO DI PRODUZIONE DI QUESTE PARTICELLE
 FU TROVATO IN CAMERA A BOLLE A BROADHAVEN (AGS)
 NEL 1964

(ii) $j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2}$

		j					
		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
		m					
m_1	m_2	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
+1	$+\frac{1}{2}$	1					
+1	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$				
0	$+\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$				
0	$-\frac{1}{2}$				$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
-1	$+\frac{1}{2}$				$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	
-1	$-\frac{1}{2}$						1

(iii) $j_1 = 1, j_2 = 1$

		j								
		2	2	1	2	1	0	2	1	2
		m								
m_1	m_2	+2	+1	+1	0	0	0	-1	-1	-2
+1	+1	1								
+1	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$							
0	+1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$							
+1	-1				$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	0				$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$			
-1	+1				$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$			
0	-1						$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$		
-1	0						$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		
-1	-1									1

COEFFICIENTI DI CLEBSCH-GORDAN

ESEMPIO $|\rho\rangle = |I=\frac{1}{2}; I_3=\frac{1}{2}\rangle$; $|\pi\rangle = |I=1; I_3=-1\rangle$

$$\Rightarrow |\rho\pi\rangle = \underset{\downarrow 1/\sqrt{3}}{a} |I=\frac{3}{2}; I_3=-\frac{1}{2}\rangle + \underset{\downarrow -\sqrt{2/3}}{b} |I=\frac{1}{2}; I_3=-\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\eta\rangle = |I=\frac{1}{2}; I_3=-\frac{1}{2}\rangle; |\pi^0\rangle = |I=1, I_3=0\rangle$$

$$\Rightarrow |\eta\pi^0\rangle = \underset{\downarrow \sqrt{2/3}}{a} |I=\frac{3}{2}; I_3=-\frac{1}{2}\rangle + \underset{\downarrow 1/\sqrt{3}}{b} |I=\frac{1}{2}; I_3=-\frac{1}{2}\rangle$$

PERCHE' "STRANE" ?

- OSSERVANDO LE VITE MEDIE SI NOTA CHE SONO DELL'ORDINE DI 10^{-10} S, TIPICO DELLE INTERAZIONI DEBOLI (INT. E.M. $\approx 10^{-20}$ S; INT. FORTI $\approx 10^{-23}$ S)
 - D'ALTRA PARTE LA SEZIONE D'URTO DI PRODUZIONE DI QUESTE PARTICELLE, AD ESEMPIO LA Λ , NELL'INTERAZIONE π^+p , E' DELL'ORDINE DEL mb, IN QUESTO ESEMPIO 10 mb, TIPICO DELLE INTERAZIONI FORTI
 - IN LINEA DI PRINCIPIO LO SPAZIO DELLE FASI POTREBBE GIUSTIFICARE LA LUNGA VITA MEDIA COME UN EFFETTO CINEMATICO E NON DINAMICO (COSTANTI DI ACCOPPIAMENTO), MA LA DIFFERENZA TRA PRODUZIONE E DECADIMENTO ERA TROPPO GRANDE PER ESSERE GIUSTIFICATA IN QUESTO MODO
 - UNA SPIEGAZIONE DELL'ANOMALIA FU FORNITA NEL 1954 DA GELL-MANN E PAIS E INDIPENDENTEMENTE DA NISHIJIMA.
 - INTRODUSSERO UN NUOVO NUMERO QUANTICO, LA STRANEZZA, CHE VENIVA CONSERVATO DALLE INTERAZIONI FORTI, MA VENIVA VIOLATO DALLE INTERAZIONI DEBOLI
- ⇒ NELLA PRODUZIONE LE PARTICELLE STRANE DOVEVANO ESSERE PRODOTTE IN COPPIA (PRODUZIONE ASSOCIATA) CON STRANEZZA OPPOSTA

Produzione Associata:



C. DIONISI

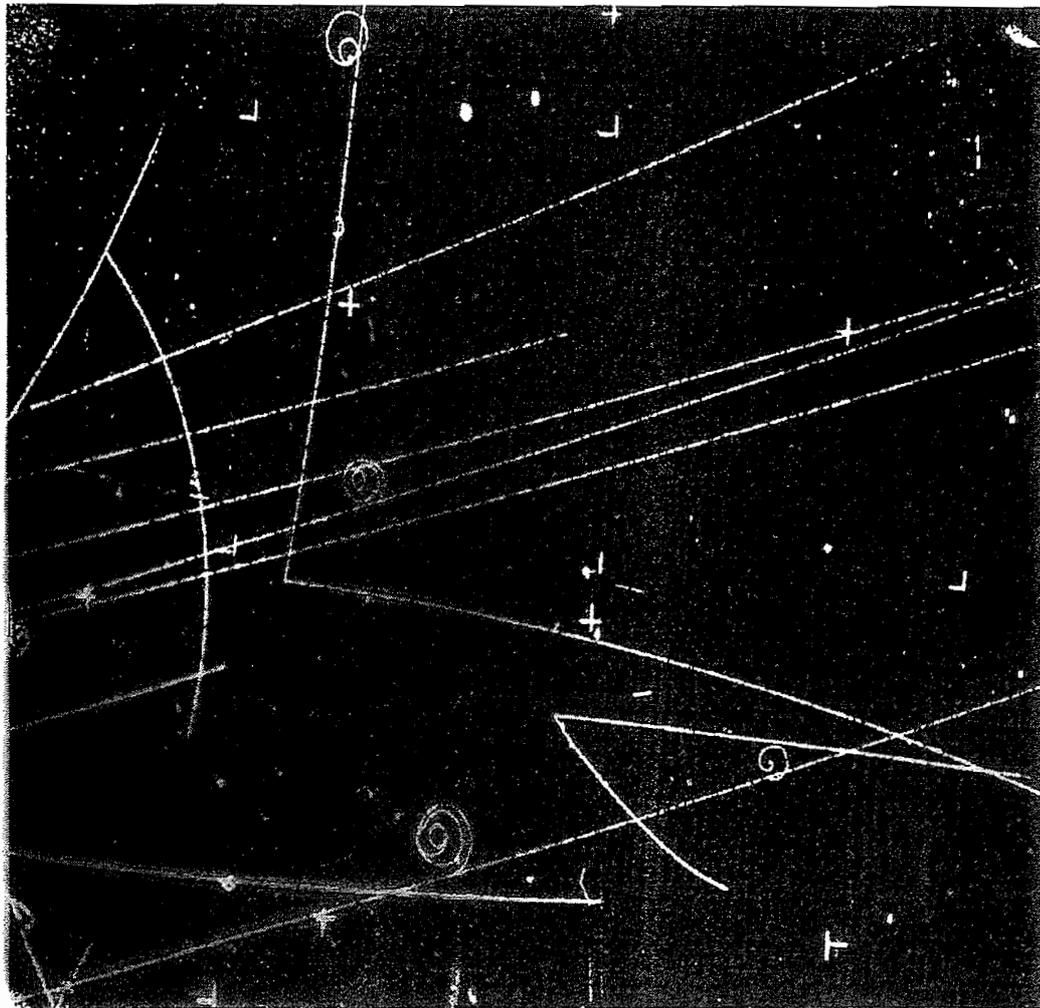
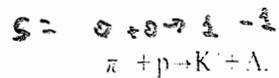
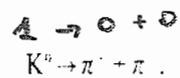


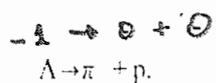
Fig. 10.8 A photograph of an interaction of a 1 GeV.c π^- meson with a proton in a liquid hydrogen bubble chamber. The reaction is



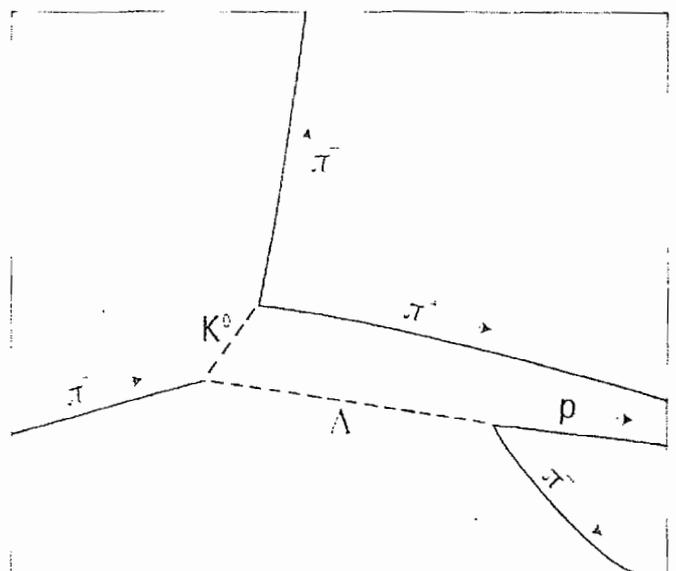
followed by



and



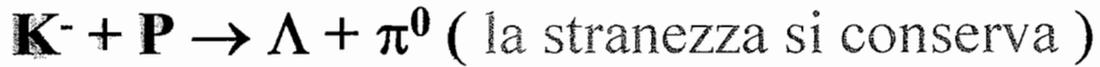
This is an example of associated production of two strange particles.



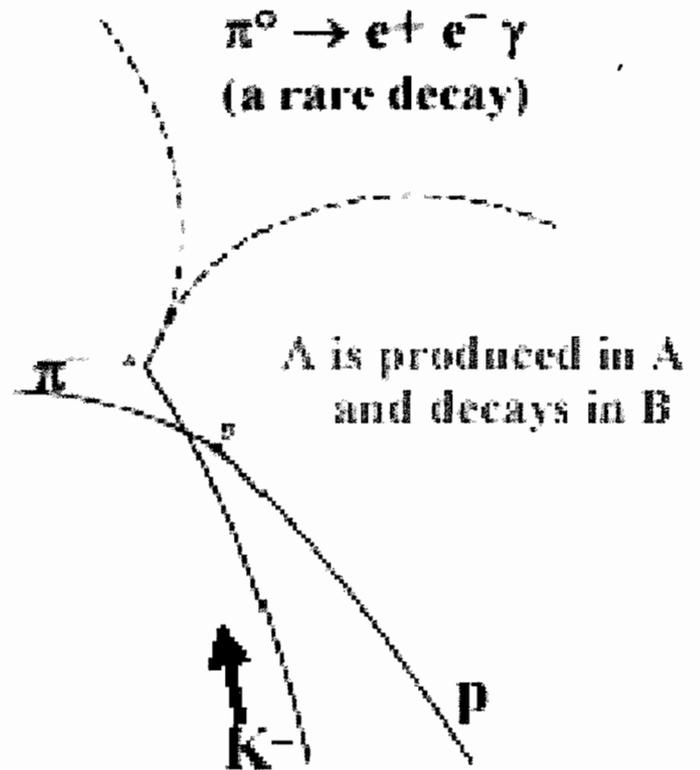
La scoperta delle particelle "strane"

C. DIONISI

◆ Esempio di un K^- che si arresta in una camera a bolle ad idrogeno liquido:



seguito dal decadimento



La scoperta dell' Ω^-

C. DIONISI

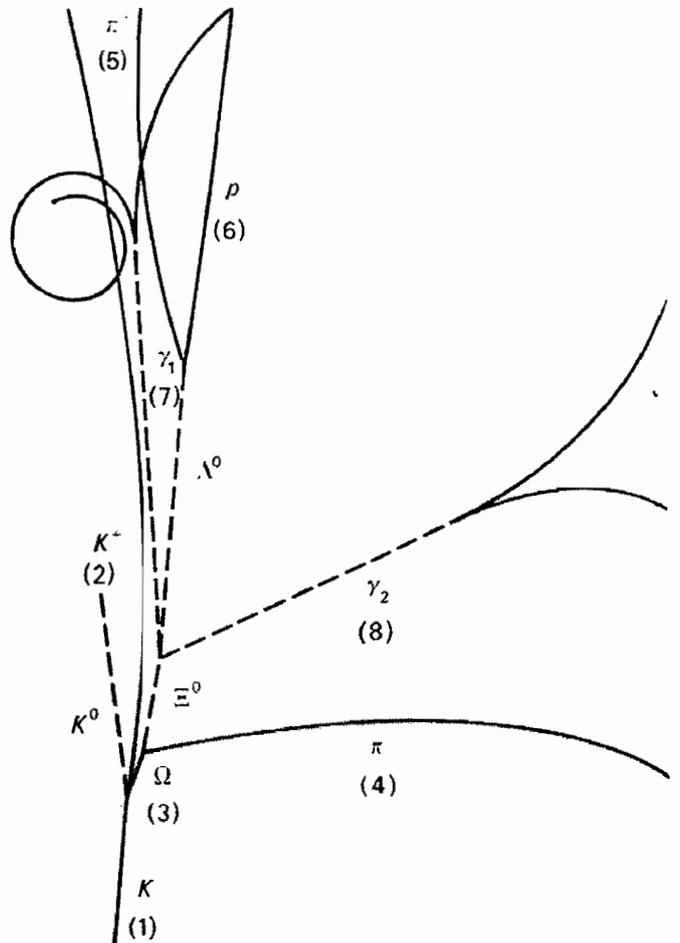
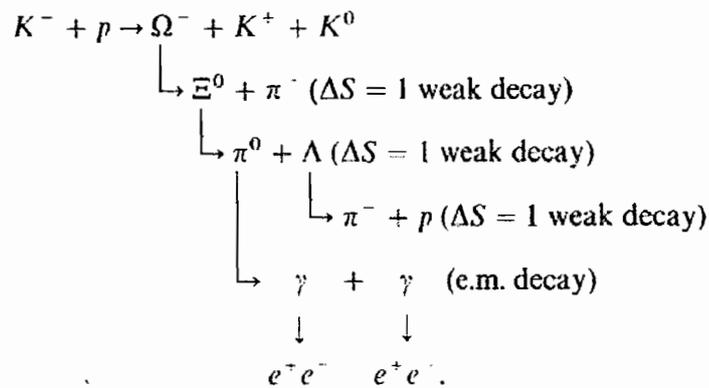
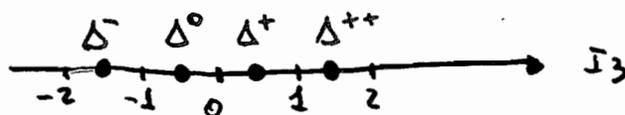


Figure 5.2 The first Ω^- event (Barnes *et al.* (1964).) (Courtesy Brookhaven National Laboratory.) It depicts the following chain of events:



CLASSIFICAZIONE DELLE PARTICELLE

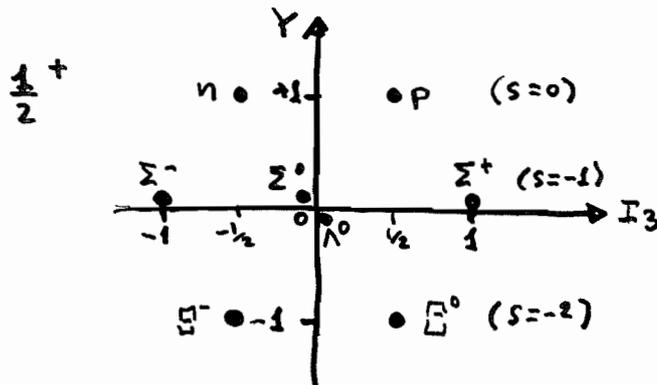
- NEGLI ANNI 50 FURONO SCOPERTE NUOVE PARTICELLE E RISONANZE CHE VENNERO CONSIDERATE ESSE STESSO COME NUOVE PARTICELLE.
- SI CERCO' DI CLASSIFICARE TUTTE QUESTE PARTICELLE IN UN MODO TALE DA RIVELARNE LA LORO VERA NATURA (UN LAVORO SIMILE FU FATTO DA RYDBERG CHE TROVO' UNA FORMULA PER DESCRIVERE GLI SPETTRI ATOMICI, OPPURA DA MENDELÉEV)
- UNA PRIMA SIMMETRIA TROVATA FU QUELLA ASSOCIATA ALLO SPIN ISOTOPICO; LE PARTICELLE CON LO STESSO ISOSPIN SONO ESATTAMENTE LA STESSA PARTICELLA PER LE INTERAZIONI FORTI, MA LE INTERAZIONI E.M. ROMPONO LA SIMMETRIA E PROVOCANO UNA DIFFERENZA DI MASSA DI QUALCHE % TRA LE PARTICELLE DELLO STESSO MULTIPLETTO.
- PER ESTENDERE LA SIMMETRIA SI CERCO' DI RAGGRUPPARE DIVERSI MULTIPLETTI DI ISOSPIN IN UN GRUPPO PIU' GRANDE CHE AVESSE LO STESSO SPIN E PARITA' MA CON DIVERSA STRANEZZA (O IPERCARICA)
- VI SONO ALTRE POSSIBILI SCELTE A PRIORI, AD ESEMPIO STESSA STRANEZZA MA SPIN E PARITA' DIVERSE, MA QUESTE NON FUNZIONANO.
- I COMPONENTI DEI MULTIPLETTI DI ISOSPIN VENGONO RAPPRESNTATI COME PUNTI SPAZIATI DI UN'UNITA' SULL'ASSE ORIZZONTALE I_3 . AD ESEMPIO PER LA $\Delta(1232)$, LA PRIMA RISONANZA SCOPERTA DA FERMI NEL 1952, ABBIAMO:



$$Q = I_3 + \frac{(B+S)}{2}$$

N.B. $I_\Delta = \frac{3}{2}$

- PER INCLUDERE ALTRI MULTIPLETTI DI ISOSPIN OCCORRE PASSARE AD UNA RAPPRESENTAZIONE BIDIMENSIONALE, METTENDO SULL'ASSE DELLE ORDINATE L'IPERCARICA $Y = B + S$
- PRENDIAMO AD ESEMPIO I BARIONI DI SPIN $\frac{1}{2}$ E PARITÀ $+$; SE NE CONOSCEVANO 8 AI TEMPI IN CUI LA CLASSIFICAZIONE FU PROPOSTA (1961: GELL-MANN E NE'EMANN)



N.B. LE PARTICELLE SULLA
DIAGONALE NEGATIVA
HANNO LA STESSA CARICA

[N.B. Gli antibarioni
occupano un'altro ottaedro
di $SU(3)$: $\bar{8}$]

- QUESTE 8 PARTICELLE FANNO PARTE DI UN MULTIPLETTO DI $SU(3)$, FANNO PARTE QUINDI DI UNA RAPPRESENTAZIONE IRRIDUCIBILE, OGNI STATO PUO' ESSERE OTTENUTO DALLI ALTRI CON GLI OPERATORI LADDER (INNALZAMENTO, ABBASSAMENTO, ETC...)
- SE LA SIMMETRIA $SU(3)$ FOSSE ESATTA, PER LE INTERAZIONI FORTI QUESTE 8 PARTICELLE DOVREBBERO ESSERE IDENTICHE, AVERE AD ESEMPIO LA STESSA MASSA. DATO CHE COSI' NON E', VUOL DIRE CHE LA SIMMETRIA $SU(3)$ E' "ROTTA".
- PER SPIEGARE LO SPLITTING DI MASSA TRA GLI STATI CON DIVERSA STRANERZZA, GELL-MANN PROPOSE CHE L'HAMILTONIANA FORTI SI DECOMPONESSE IN UNA PARTE H_0 SIMMETRICA, PIU' UNA PARTE H' "MEDIANEMENTE FORTI" CHE ROMPEVA LA SIMMETRIA $SU(3)$.
- IN QUESTO MODO GELL-MANN HA TROVATO DELLE FORMULE EMPIRICHE PER SPIEGARE LO SPLITTING DI MASSA

FORMULE DI MASSA DI GELL-MANN

- GELL-MANN E OKUBO RICAVALONO LE RELAZIONI TRA LE MASSE DEI MULTIPLETTI DI ISOSPIN INVOCANDO DEI PRINCIPI DI SIMMETRIA DELL'HAMILTONIANA. OGGI QUESTE RELAZIONI SONO VISTE SOLO COME DELLE FORMULE EMPIRICHE.

- **BARIONI**

$$m = m_0 + m_1 Y + m_2 \left[I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]$$

ESEMPIO: NEL DECUPLETTO SI HA $Y = B+S = 2(I-1)$

$$\Rightarrow m = (m_0 + 2m_2) + Y(m_1 + \frac{3}{2}m_2)$$

$$\Rightarrow \Delta m \approx \text{costante} \approx 150 \text{ MeV (sperimentalmente)}$$

ESEMPIO: NELL'OTTETTO $\frac{1}{2}^+$ SI HA:

$$\begin{array}{ccc} 2m_{\Lambda} + 2m_{\Sigma^0} & = & m_{\Sigma^0} + 3m_{\Lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4515 \text{ MeV} & & 4533 \text{ MeV} \end{array}$$

- **MESONI**

NEL CASO DEI MESONI OCCORRE CONSIDERARE IL QUADRATO DELLE MASSE. L'ACCORDO CON I DATI SPERIMENTALI RISULTA PEGGIORATO DAL MIXING TRA IL SINGOLETTO DI $SU(3)$ ED IL SINGOLETTO DELL'OTTETTO

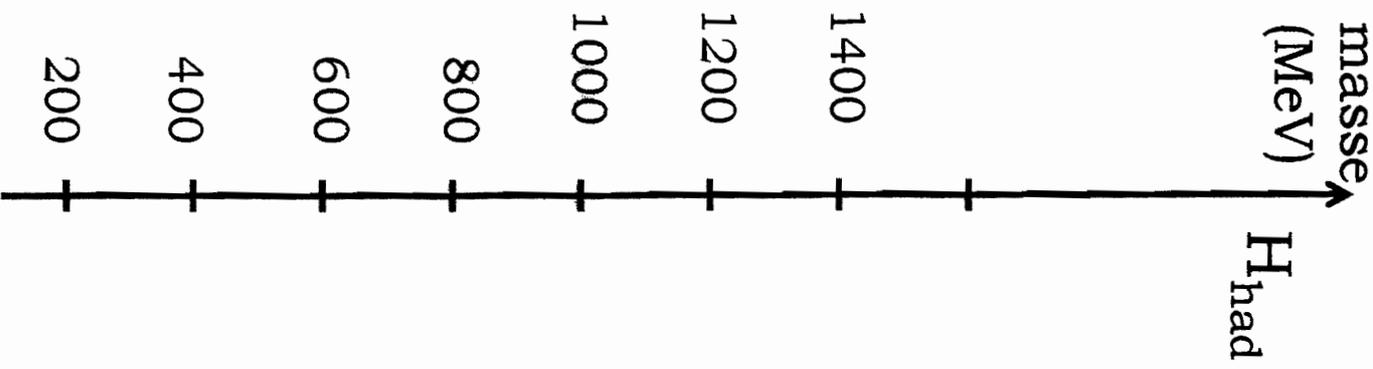
$$m^2 = m_0^2 + m_1^2 Y + m_2^2 \left[I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]$$

AD ESEMPIO:

$$2 \left[m_{K^0}^2 + m_{\bar{K}^0}^2 \right] = 4 m_{K^0}^2 = m_{\pi^0}^2 + 3 m_{\eta}^2$$

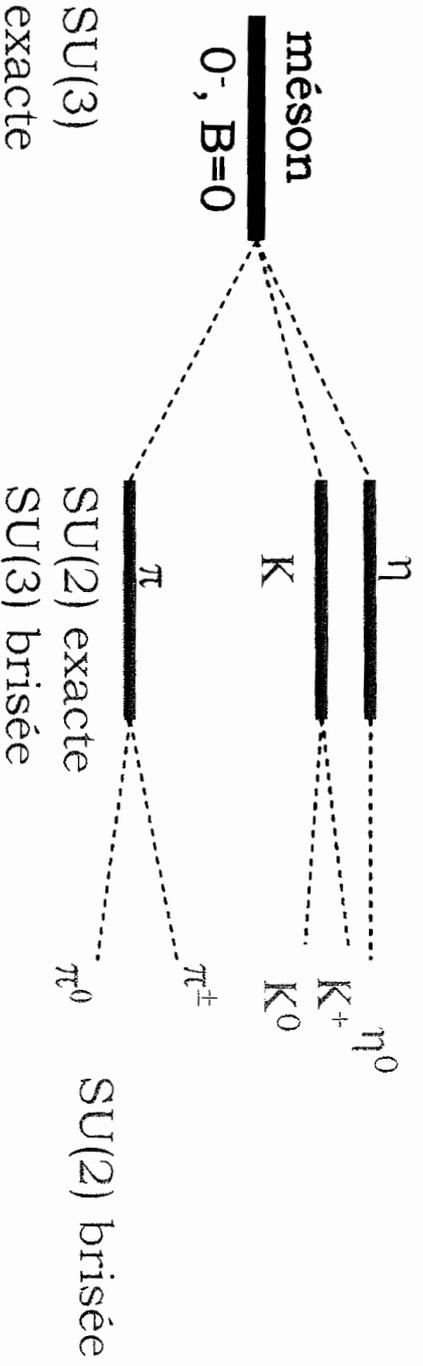
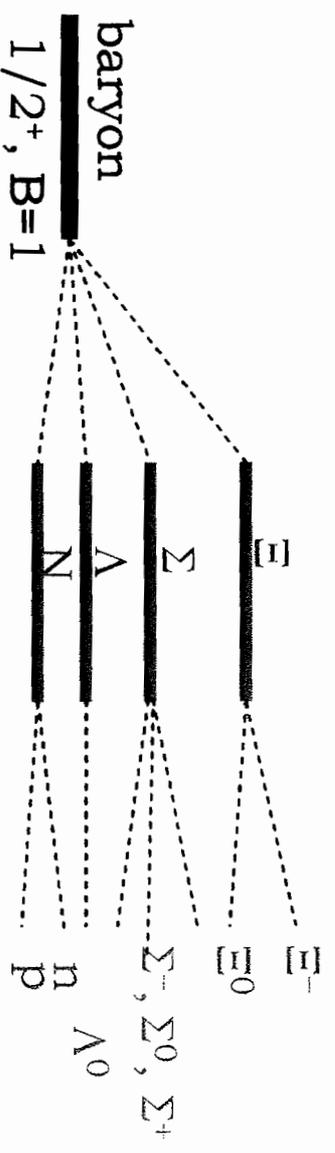
\downarrow 0.988 GeV^2 \downarrow 0.924 GeV^2

masse (MeV)

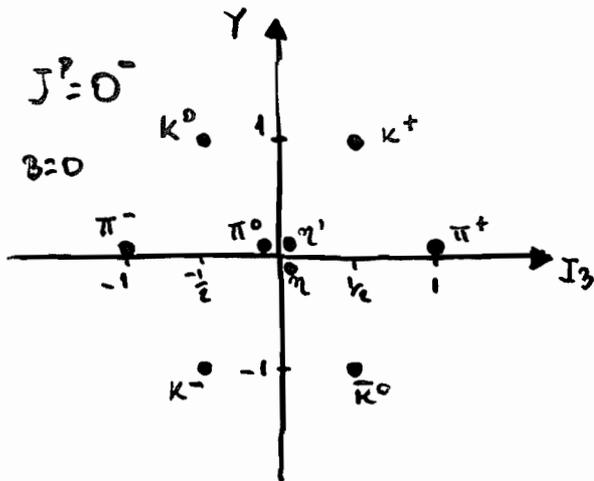


$H_{0,f}$ + δH_f + δH_{elm}
 = baryons (J^P) \neq non étranges
 mésons (J^P) \neq étranges la charge électrique !

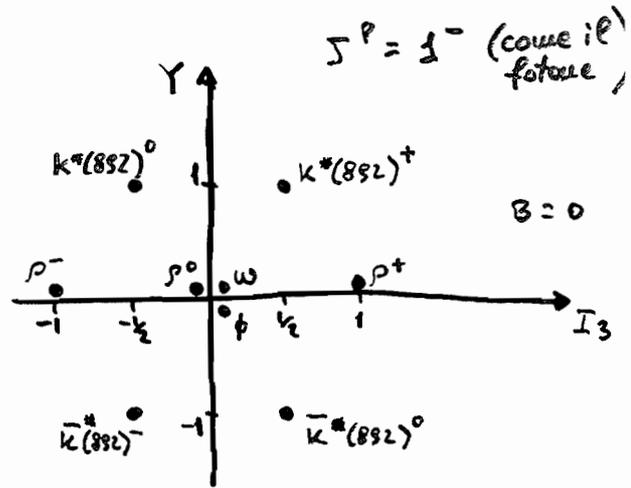
ACHILLE
STOICH!



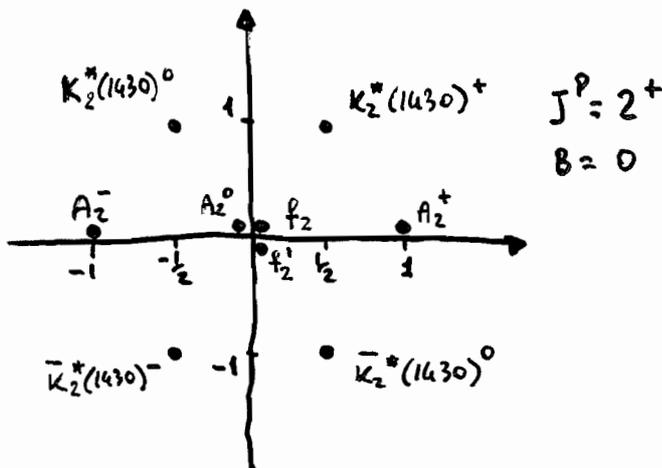
MESONI



$m_{\eta} = 547.7 \text{ MeV}$; $m_{\eta'} = 558 \text{ MeV}$



$m_{\rho} = 770 \text{ MeV}$; $m_{\omega} = 782 \text{ MeV}$
 $m_{\phi} = 1020 \text{ MeV}$



$m_{f_2} = 1275 \text{ MeV}$
 $m_{A_2} = 1318 \text{ MeV}$
 $m_{f_2'} = 1525 \text{ MeV}$

... CI SONO ALTRI MULTIPLETTI, COME AD ESEMPIO 0^+ , ETC...

N.B. NEI MESONI PARTICELLE E ANTIPARTICELLE COMPIONO NELLO STESSO MULTIPLETTO PERCHE' HANNO TUTTE $B=0$

- IN OGNI MULTIPLETTO CI SONO 9 PARTICELLE, TUTTAVIA LE RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI $SU(3)$ SONO $8 \oplus 1$, QUINDI UNA DELLE 3 PARTICELLE CON $Y=0, I_3=0$ APPARTIENE AL SINGOLETTO; IN TALTA' VI E' UN MIXING TRA IL SINGOLETTO E LO STATO DELL'OTTETTO CON $I=0, I_3=0, Y=0$

MODELLO DI SAKATA

- NEL 1949 FERMI E YANG NOTARONO CHE UN PIONE HA GLI STESSI NUMERI QUANTICI DI UNA COPPIA NUCLEONE-ANTINUCLEONE NELLO STATO S^0 , CIOE':

$$B = 0 \quad ; \quad J^P = 0^- \quad ; \quad S = 0 \quad ; \quad Q = 0, +1, -1$$

E SUGGERIRONO CHE IL π FOSSE UNO STATO LEGATO DI UNA COPPIA NUCLEONE-ANTINUCLEONE CON UN'ENERGIA DI LEGARE MOLTO GRANDE ($2m_N - m_\pi$)

- DOPO LA SCOPERTA DELLE PARTICELLE STRANE SAKATA MOSTRO' CHE IL MODELLO DI FERMI E YANG POTEVA ESSERE ESTESO PER INCLUDERE ANCHE LE PARTICELLE STRANE AGGIUNGENDO LA Λ ALL'INSIEME DELLE PARTICELLE FONDAMENTALI

[p, n, Λ VENNERO CHIAMATI SAKATONI]

- TUTTAVIA IL MODELLO, SEBBENE SIA IN GRADO DI COSTRUIRE TUTTE LE PARTICELLE (NOTE ALL'EPOCA) NON FUNZIONA PER DIVERSE RAGIONI:
 - LE TRE PARTICELLE FONDAMENTALI A VOLTE COMPaiono COME "FRATTIONI" DELLE ALTRE PARTICELLE E A VOLTE COME UN SISTEMA COMBINATO A SE' STANTE, QUINDI C'E' UNA CERTA MANCANZA DI SIMMETRIA
 - INOLTRE, PIU' IMPORTANTE, POSSONO ANCHE ESSERE COSTRUITE DELLE PARTICELLE CHE NON SONO STATE OSSERVATE IN NATURA, OPPURE ALTRE CON I NUMERI QUANTICI SBAGLIATI

\Rightarrow IL MODELLO FU ABBANDONATO E RIMANE SOLO UNA CURIOSITA' STORICA, SEBBENE ABBAIA IL MERITO DI INDICARE CHE LE CHIAMATE PARTICELLE ELEMENTARI, ELEMENTARI NON LO ERANO PER NULLA MA ERANO OGGETTI COMPOSTI

SU(3)

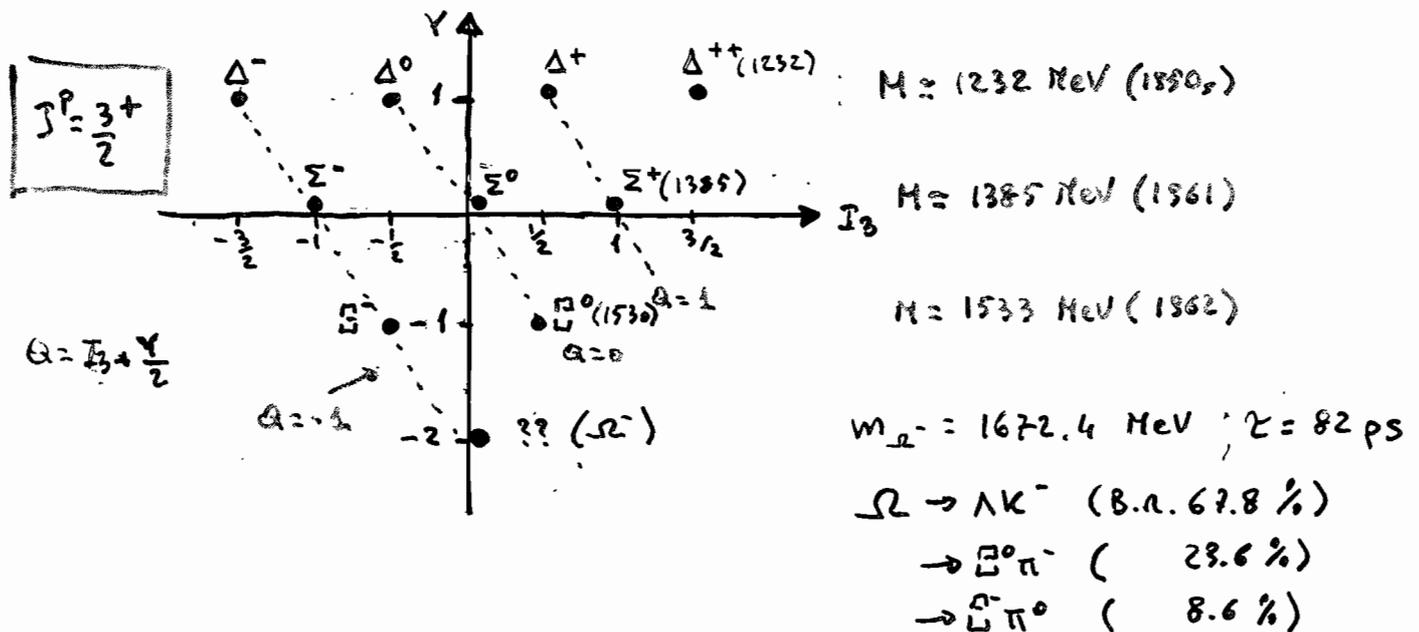
- LE RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI SU(3) DEL PRODOTTO DI RAPPRESENTAZIONI:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad \text{BARIONI}$$

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad \text{MESONI}$$

DESCRIVENDO BENE LA CLASSIFICAZIONE DI BARIONI E MESONI

- IN PARTICOLARE NEL 1962 GELL-MANN FU IN GRADO DI PREDIRL'ESISTENZA DI UNA NUOVA PARTICELLA, Ω^- , CON I GIUSTI NUMERI QUANTICI, MASSA E L'ORDINE DI GRANDEZZA DELLA VITA MEDIA



$$m_{\Xi^-} - m_{\Delta^-} \approx m_{\Xi^0} - m_{\Sigma^-} \approx m_{\Omega^-} - m_{\Xi^-} \approx 150 \text{ MeV}$$

- DOMANDA: PERCHÉ $3 \otimes 3 \otimes 3 \in 3 \otimes \bar{3}$?

QUARK

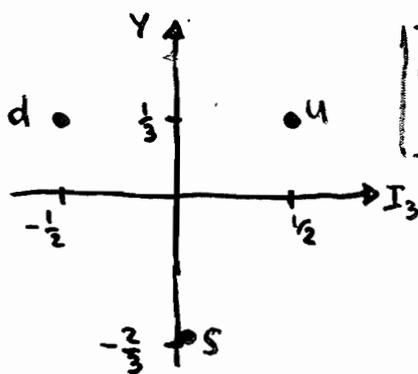
- ABBIAMO VISTO CHE PER IL GRUPPO $SU(3)$ IL MULTIPLETTO ELEMENTARE È UN TRIPLETTO. IL TRIPLETTO PUÒ ESSERE DESCRITTO DA TRE AUTOVETTORI:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

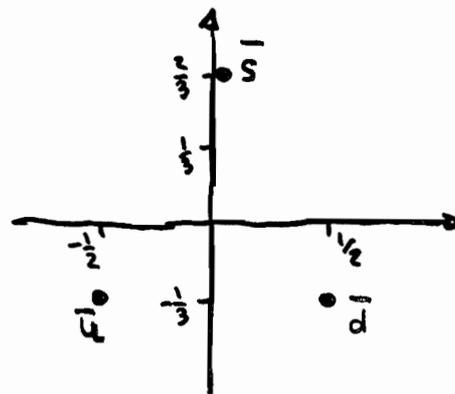
UP DOWN STRANGE

- NEL 1964 GELL-MANN, ED IN MANIERA INDIPENDENTE ZWEIF, ASSOCIÒ AD OGNI AUTOVETTORE UNA PARTICELLA ELEMENTARE, CHE CHIAMÒ QUARK. I QUARK SONO FERMIONI DI SPIN $\frac{1}{2}$
- IN QUESTO MODO:
 - BARIONI: $3 \otimes 3 \otimes 3 \Rightarrow 999$ (sono composti da 3 quark)
 - MESONI: $3 \otimes \bar{3} \Rightarrow 9\bar{9}$ (sono composti da 1 quark ed 1 antiquark)

- NUMERI QUANTICI DEI QUARK (SI OTTENGONO APPLICANDO GLI OPERATORI \hat{I}_3 E \hat{Y})



$$\begin{aligned} S(u, d) &= 0 \\ S(s) &= -1 \end{aligned}$$



$$S(\bar{s}) = +1$$

QUARK ($B = \frac{1}{3}$)

ANTIQUARK ($B = -\frac{1}{3}$)

- APPLICANDO LA FORMULA $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ SI PUÒ TROVARE LA CARICA:

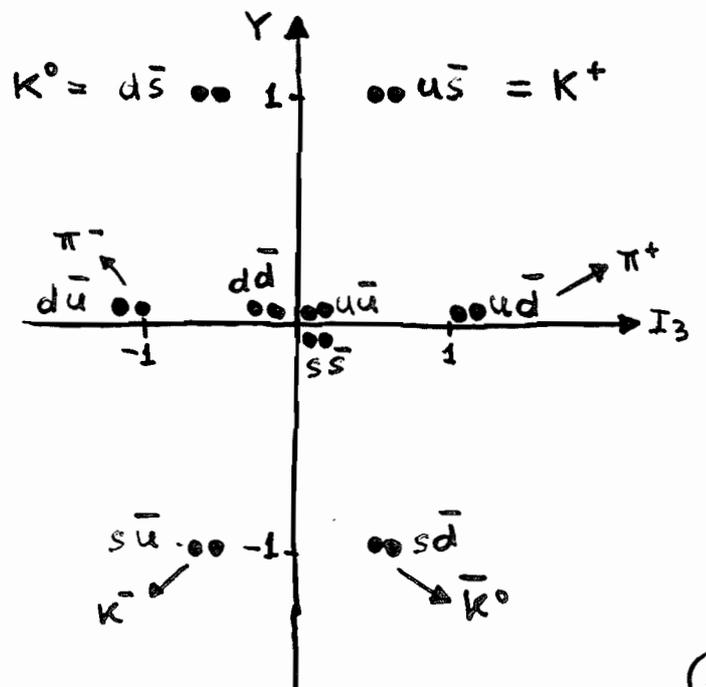
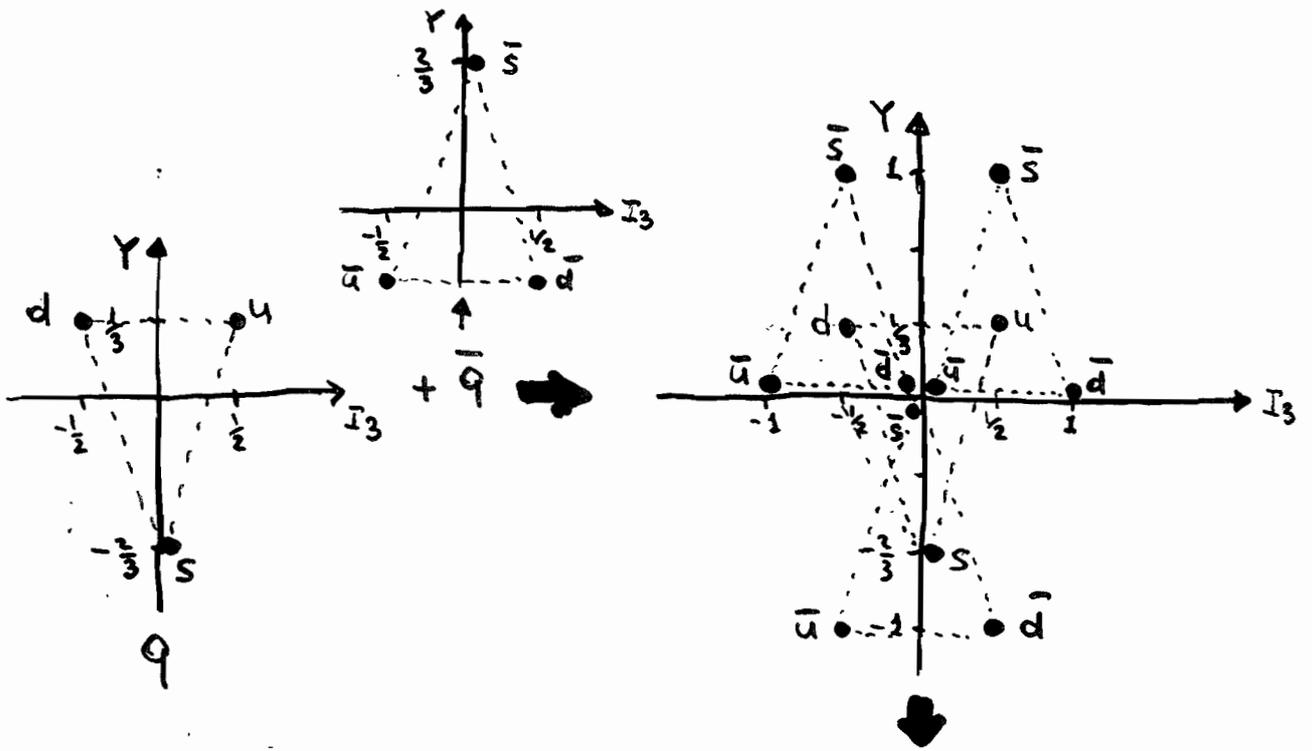
$$Q_u = \frac{2}{3} ; Q_d = Q_s = -\frac{1}{3} \qquad Q_{\bar{u}} = -\frac{2}{3} ; Q_{\bar{d}} = Q_{\bar{s}} = +\frac{1}{3}$$
- I QUARK SONO UN "GIOCHETTO" MATEMATICO O ESISTONO DAVVERO?

MESONI 0^-

- I MESONI SONO UNA COMBINAZIONE DI QUARK-AUTIQUARK. CONSIDERIAMO QUELLI IN ONDA S ($l=0$, ENERGIA PIU' BASSA) E CON SPIN OPPOSTI $\Rightarrow J=0$ E PARITA' $P=-1$

[RICORDA: LA PARITA' DI UN SISTEMA FORMATO DA UNA COPPIA FERM. - ANTIFERM. E' : $(-1)^{L+1}$, PERCHE' FERMIONI E ANTIFERMIONI HANNO PARITA' INTRINSECA OPPOSTA]

- I MESONI POSSONO ESSERE COSTRUITI CON UN METODO GRAFICO



• CON CHE COSA SI IDENTIFICANO LE 3 COPPIE $d\bar{d}$, $u\bar{u}$, $s\bar{s}$ CHE HANNO GLI STESSI NUMERI QUANTICI 0, 0?

- $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$

- I TRE STATI A, B, C AVENTI $I_3=0$ E $Y=0$ SONO DELLE COMBINAZIONI LINEARI ORTOGONALI DEGLI STATI $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$

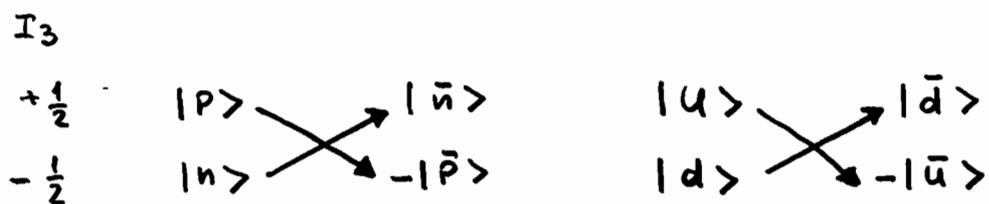
- INDICHIAMO UNO STATO CON: $\{n, |I, I_3\rangle\}$
DOVE n È LA DIMENSIONE DELLA RAPPRESENTAZIONE

- IL SINGOLETTO DI $SU(3)$ DOVRÀ CONTENERE, PER SIMMETRIA, TUTTI E 3 GLI STATI CON LO STESSO PESO:

$$\{1, |0, 0\rangle\} = \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

- UNO DEGLI ALTRI DUE STATI CON $I_3=0$ DEVE FAR PARTE DEL TRIPLETTO CON ISOSPIN=1, QUINDI PUÒ ESSERE RICAIVATO CON GLI OPERATORI LADDER

- PER CONDITA' RICORDIAMO COME SI COMPORTANO ALCUNI NUCLEONI PER CONIUGAZIONE DI CARICA. COMPARIAMO ALCUNI SEGNI MENO IN ACCORDO CON LA CONVENZIONE DI CONDON-SHORTLEY



N.B. $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \Rightarrow I^-|\bar{d}\rangle = -\bar{u} ; I^+|\bar{u}\rangle = |-\bar{d}\rangle$

IL QUARK S ($0\bar{s}$) È UN SINGOLETTO DI ISOSPIN, QUINDI SE LO SI AGGIUNGE A UN DOPPIETTO DI ISOSPIN NON NE CAMBIA LE PROPRIETÀ'

$$\begin{pmatrix} u\bar{s} = K^+ \\ d\bar{s} = K^0 \end{pmatrix} \text{ E } \begin{pmatrix} s\bar{d} = \bar{K}^0 \\ -s\bar{u} = -K^- \end{pmatrix}$$

- COMBINANDO U CON \bar{d} (O VICEVERSA) POSSIAMO AVERE
 $I=0$ OPPURE $I=1$

- APPLICHIAMO L'OPERATORE DI SHIFT DI ISOSPIN CHE HA LA SEGUENTE PROPRIETA':

$$I^{\pm} |\Psi(I, I_3)\rangle = \sqrt{I(I \pm 1) - I_3(I_3 \pm 1)} |\Psi(I, I_3 \pm 1)\rangle$$

- SE LO APPLICHIAMO AD UN QUARK OTTIENIAMO:

$$I^+ |d\rangle \rightarrow |u\rangle ; I^+ |\bar{u}\rangle \rightarrow |-\bar{d}\rangle ; I^+ |u\rangle = I^+ |-\bar{d}\rangle = 0$$

INOLTRE:

$$I^- |\Psi(1, 1)\rangle = I^+ |\Psi(1, -1)\rangle = \sqrt{2} |\Psi(1, 0)\rangle$$

$$I^+ |\Psi(1, 0)\rangle = \sqrt{2} |\Psi(1, 1)\rangle ; I^+ |\Psi(1, 1)\rangle = I^- |\Psi(1, -1)\rangle = 0$$

- PER CONVENZIONE LA FUNZIONE D'ONDA DEL π^- E': $-d\bar{u}$

$$I^+ |\pi^-\rangle = I^+ |-d\bar{u}\rangle = |-(I^+d)\bar{u} + d(I^+\bar{u})\rangle = |-u\bar{u} + d\bar{d}\rangle = \sqrt{2} \pi^0$$

$$I^+ |\pi^0\rangle = I^+ \frac{|d\bar{d} - u\bar{u}\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|u\bar{d} + 0 - 0 + u\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} |u\bar{d}\rangle = \sqrt{2} |\pi^+\rangle$$

\Rightarrow IL π^0 VIENE IDENTIFICATO CON $\frac{1}{\sqrt{2}} (d\bar{d} - u\bar{u})$

- PER TROVARE IL SINGOLETTO DELL'OTTETO $\eta_8 \equiv \{8, 10, 0\}$ BISOGNA TROVARE LA COMBINAZIONE ORTOGONALE A $\eta_1 \equiv \{1, 10, 0\}$ E AL π^0

$$\Rightarrow \eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} (d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s}) \quad [I^{\pm} |\eta_8\rangle = 0]$$

- GLI STATI FISICI η E η' SONO UNA COMBINAZIONE LINEARE DI η_1 E η_8 , MA DATO CHE L'ANGOLO DI MIXING E' PICCOLO, $\sim 11^\circ$, ALLORA SI HA:

$$\eta_8 \equiv \eta \quad ; m_\eta = 548 \text{ MeV}$$

$$\eta_1 \equiv \eta' \quad ; m_{\eta'} = 958 \text{ MeV}$$

MESONI VETTORIALI 1^-

- I MESONI VETTORIALI 1^- HANNO LA STESSA COMPOSIZIONE IN QUARK DEI MESONI 0^- , SI TROVANO IN ONDA S MA I DUE QUARK (QUARK-ANTIQUARK) HANNO GLI SPIN PARALLELI.

- VI SONO 3 MESONI CON $I_3=0$ E $Y=0$; UNO DI ESSI FA PARTE DEL TRIPLETTO DI ISOSPIN ρ : ρ^+ , ρ^0 , ρ^-
 - ρ^0 HA LA STESSA FUNZIONE D'ONDA DEL π^0

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}) \quad [\text{cioè un fattore } -1]$$

- IL SINGOLETTO DI $SU(3)$ ϕ_1 E IL SINGOLETTO DI ISOSPIN DELL'OCTETTO ϕ_8 SI MESCOLANO TRA DI LORO PER DARE GLI AUTOSTATI DI MASSA ϕ E ω

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 \sin \theta - \phi_8 \cos \theta \\ \omega &= \phi_1 \cos \theta + \phi_8 \sin \theta \end{aligned} \quad [\text{in questo caso } \theta \approx 35^\circ]$$

- ESERCIZIO (ACCADENICO): VEDIAMO COME SI RICAVA θ .
 ASSUMIAMO CHE L'ELEMENTO DI MATRICE DELL'HAMILTONIANA TRA DUE STATI DIVERSI DIA IL VALORE DELLA MASSA AL QUADRATO:

$$M_\phi^2 = \langle \phi | H | \phi \rangle = M_1^2 \sin^2 \theta + M_8^2 \cos^2 \theta - 2 M_{18}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$M_\omega^2 = \langle \omega | H | \omega \rangle = M_1^2 \cos^2 \theta + M_8^2 \sin^2 \theta + 2 M_{18}^2 \sin \theta \cos \theta$$

- DATO CHE ω E ϕ SONO DUE AUTOSTATI DI MASSA, SONO ORTOGONALI

$$\begin{aligned} M_{\phi\omega}^2 = \langle \phi | H | \omega \rangle &= 0 = (M_1^2 - M_8^2) \sin \theta \cos \theta + \\ &+ M_{18}^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

- ELLIMINANDO M_8 E π_1 DA QUESTE TRE EQUAZIONI, OTTIENIAMO:

$$\tan^2 \theta = \frac{M_\phi^2 - M_8^2}{M_8^2 - \pi_1^2}$$

- UTILIZZANDO LA FORMULA DI MASSA DI GELL-MANN - OKUBO, SI TROVA LA RELAZIONE:

$$M_8^2 = \frac{1}{3} (4 M_{K^*}^2 - M_\rho^2)$$

$M_\rho = 776 \text{ MeV}$
$M_{K^*} = 892 \text{ MeV}$
$M_\omega = 783 \text{ MeV}$
$M_\phi = 1020 \text{ MeV}$

- METTENDO NELLA FORMULA I VALORI MISURATI DELLE MASSE, SI HA $\theta \approx 40^\circ$
- SE UTILIZZIAMO $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\theta \approx 35^\circ$), SI HA:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\phi_1 - \sqrt{2} \phi_8)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} (\phi_8 + \sqrt{2} \phi_1)$$

- DATO CHE:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (d\bar{d} + u\bar{u} + s\bar{s})$$

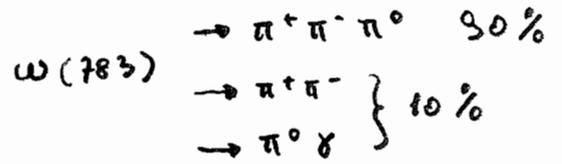
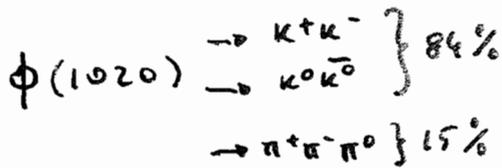
$$\phi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} (d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$$

ABBIAMO $\phi = s\bar{s}$; $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d})$

- IN QUESTO CASO DI "MIXING IDEALE", CHE È QUASI VERO IN PRATICA, LA ϕ È COMPOSTA INTERAMENTE DA QUARK S E L' ω DA U E D
- QUESTO COMPORTA CHE LA MASSA DELL' ω DOVREBBE ESSERE SIMILE A QUELLA DELLA ρ^0 E LA MASSA DELLA ϕ PIÙ GRANDE, COME OSSERVATI SPERIMENTALMENTE.

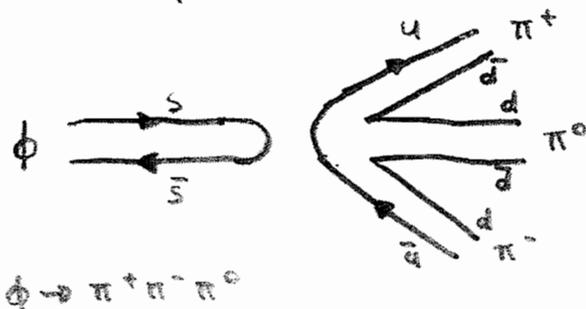
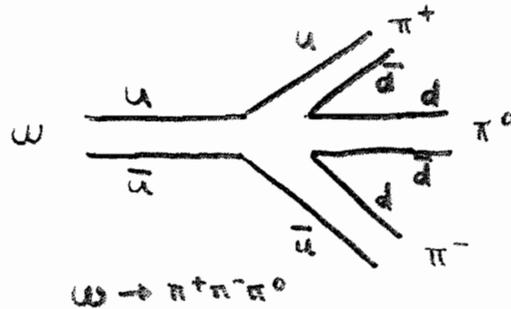
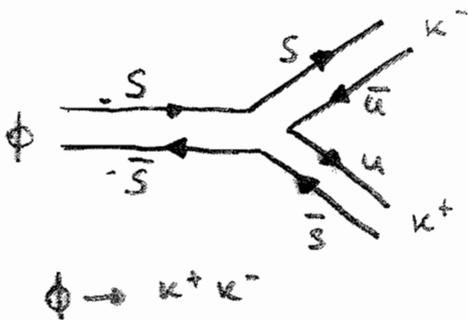
REGOLA DI OZI

- LA COMPOSIZIONE IN QUARK DELLA ϕ E DELL' ω , INSIEME CON LA REGOLA DI OZI (OKUBO, ZWIG, IIZUKA), PERMETTE DI CAPIRE MEGLIO I DECADIMENTI DI ω E ϕ



- LO SPAZIO DELLE FASI FAVORISCE IL DECADIMENTO DELLA ϕ IN 3π ($Q \sim 600$ MeV) RISPETTO AL $Q \approx 24$ MeV DEL DECADIMENTO IN KK .

- QUESTO PUO' ESSERE "SPIEGATO" CON LA OZI RULE



- LA REGOLA DI OZI DICE CHE QUANDO CI SONO DELLE LINEE DI QUARK NON CONNESSE, ALLORA VI E' UNA SOPPRESSIONE DI QUESTI DIAGRAMMI. UNA PSEUDOSPIEGAZIONE PUO' ESSERE DATA FACENDO RICORSO ALLA QCD, ED ALLO SCAMBIO DI GLUONI
- LA REGOLA DI OZI E' IMPORTANTE PER CAPIRE LA LUNGA VITA MEDIA DELLA ψ/Ψ E DELLA Υ

MASSÈ DEI BARIONI

- FORMULA DI GELL-MANN - OKUBO

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left[I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right]$$

- SE APPLICHIAMO QUESTA FORMULA ALLE PARTICELLE CON CARICA $Q = -1$ DEL DECOPLETTO $\frac{3}{2}^+$, SI HA:

$$M_{\Sigma^-} - M_{\Delta^-} \approx M_{\Xi^-} - M_{\Sigma^-} \approx M_{\Omega^-} - M_{\Xi^-} \approx 150 \text{ MeV}$$

- DATO CHE: $\Delta^- = ddd$; $\Sigma^- = dds$; $\Xi^- = dss$; $\Omega^- = sss$
LA DIFFERENZA DI MASSA SUGGERISCE CHE LA MASSA DEL QUARK S SIA:

$$m_s \approx 150 \text{ MeV}$$

- LA FORMULA DI GELL-MANN - OKUBO PERMETTE DI TROVARE DELLE RELAZIONI TRA LE MASSÈ DELLE PARTICELLE APPARTENENTI ALLO STESSO MULTIPLETTO. SE DALLA FORMULA FOSSE ESTATI ALLORA TUTTE LE PARTICELLE DELLO STESSO MULTIPLETTO AVREBBERO MASSA M_0
- M_0 DEVE ESSERE IN RELAZIONE IN QUALCHE MODO CON IL CONTENUTO IN QUARK DELL'ADRONE. DATO CHE, AD ESEMPIO, I MESONI 0^- ED I MESONI 1^- HANNO LO STESSO CONTENUTO IN QUARK, MA MASSÈ SIGNIFICATIVAMENTE DIVERSE, LA MASSA DELL'ADRONE DEVE DIPENDERE ANCHE DAGLI ACCOPPIAMENTI SPIN-SPIN, OLTRE CHE DAL MOMENTO ANGOLARE ORBITALE

\Rightarrow MASSA ADRONE \neq SOMMA DELLE MASSÈ DEI QUARK

N.B. DATO CHE LA DIFFERENZA DI MASSÈ ALL'INTERNO DI UN MULTIPLETTO DI ISOSPIN È PICCOLA \Rightarrow $m_u \approx m_d$ ($m_d - m_u \approx 4-5 \text{ MeV}$)

MASSE DEI QUARK

- UTILIZZANDO UN "SEMPLICE" MODELLO" NEL QUALE LA MASSA DELL'ADRONE DERIVA DALLA MASSA DEI QUARK E DALLE LORO INTERAZIONI IPERFINI, FACENDO DEI FIT OPPORTUNI AL VALORE MISURATO DELLE PARTICELLE ADRONICHE (VEDERE I DETTAGLI SUL BUNCHAN E SOBES) SI RICAVA IL VALORE DELLA MASSA "EFFICACE" DEI QUARK.

QUARK	MASSA "LIBERA" (MeV/c ²)	MASSA EFFICACE (MeV/c ²)	
		MESONI	BARIONI
u	5.6 ± 1.1	310	363
d	9.9 ± 1.1		
s	198 ± 33	483	538

] diversa energia di legame tra mesoni e barioni

[LA MASSA "LIBERA" E' VALUTATA ALLA SCALA DI 1 GeV/c²]

- LA MASSA EFFICACE E' DIVERSA DALLA MASSA "LIBERA" (VERA?). DEI QUARK
- D'ALTRA PARTE, CHE COSA E' LA MASSA DI UNA PARTICELLA?
 - NON POTRETE METTERLA SU UNA BILANCIA ($F = G \frac{mM}{r^2}$).
 - $E^2 - P^2 = m^2$? [ma non esistono quark liberi]
 - POLO DEL PROPAGATORE? - PARTE REALE DEL PROPAGATORE?
- IN OGNI CASO NELLA LAGRANGIANA CHE DESCRIVE LE INTERAZIONI DEI QUARK (MODELLO STANDARD + QCD) VA CONSIDERATA LA MASSA "LIBERA" DEI QUARK E NON LA MASSA EFFICACE

$$\mathcal{L} = m_u u \bar{u} + m_d d \bar{d} + m_s s \bar{s} + \dots$$

- LA SCALA DI MASSA TIPICA DELLA QCD E' $\Lambda_{QCD} = 200$ MeV. LA SIMMETRIA DI ISOSPIN QUASI ESATTA DERIVA DAL FATTO CHE $m_u, m_d \ll \Lambda_{QCD}$. (MENTRE SULLI) E' SOLO UNA SIMMETRIA APPROSSIMATA

MOMENTO MAGNETICO DEI BARIONI

- CONSIDERIAMO IL MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO DEI BARIONI DELL' OTTETTO $\frac{1}{2}^+$ (PROTONE, Λ , ETC...)
- NELLO STATO FONDAMENTALE I QUARK HANNO MOMENTO ANGOLARE RELATIVO UGUALE A ZERO, QUINDI:

$$\text{BARIONE} \rightarrow \vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3 \quad \leftarrow \text{momento magnetico dei quark}$$

- PER UNA PARTICELLA PUNTIFORME DI SPIN $\frac{1}{2}$ E MASSA m SI HA:

$$\mu = \frac{e}{2m} \quad \left[\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \right]$$

\Rightarrow PER I QUARK ABBIAMO:

$$\mu_u = \frac{2}{3} \frac{e}{2m_u} ; \mu_d = -\frac{1}{3} \frac{e}{2m_d} ; -\frac{1}{3} \frac{e}{2m_s}$$

- PER CALCOLARE IL MOMENTO MAGNETICO DEI BARIONI NELLO STATO FONDAMENTALE, DOBBIAMO PROIETTARE I MOMENTI MAGNETICI DEI QUARK SU UNO STESSO ASSE, AD ESEMPIO L'ASSE Z; CERCHIAMO QUINDI LA COMPONENTE S_z DELLA FUNZIONE D'ONDA DEI QUARK.
- FACENDO IL CALCOLO ESPlicito SI OTTIENE:

$$\mu_p = \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_d) \quad (\text{protone}) ; \mu_n = \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_u) \quad (\text{neutrone})$$

- UTILIZZANDO LE MASSE EFFICACI DEI QUARK SI OTTIENE

$$\mu_u = 1.863 ; \mu_d = -0.931 ; \mu_s = -0.582 \quad \left(\begin{array}{l} \text{magneton nucleare} \\ m = \text{massa protone} \end{array} \right)$$

\Rightarrow

BARIONE	MOMENTO DI DIPOLO	PREDETTO / μ_N	MISURATO / μ_N
P	$\frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_d)$	2.79	2.753
n	$\frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_u)$	-1.86	-1.913
Λ	μ_s	-0.58	-0.613 \pm 0.004
Σ^+	$\frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_s)$	2.68	2.42 \pm 0.05

\Rightarrow I BARIONI NON SONO PARTICELLE PUNTI FORMI

V.E. ... ESISTONO ANCHE QUARK DEL MARE...

Dire quali reazioni sono possibili e quali no. Nel caso siano possibili indicare l'interazione responsabile e nel caso non lo siano, spiegare perché.

a) $\pi^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ SI NO :

il π^0 ha una massa inferiore al π^+

b) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- + \bar{\nu}_e$ SI NO :

violazione del numero leptonico

c) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + e^+ + e^-$ SI NO :

interazione debole

d) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \mu^+ + \mu^-$ SI NO :

conservazione dell'energia

e) $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$ SI NO :

interazione forte

f) $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^- + e^+ + \nu_e$ SI NO :

in questo caso viene violata la regola $\Delta S = \Delta Q$.

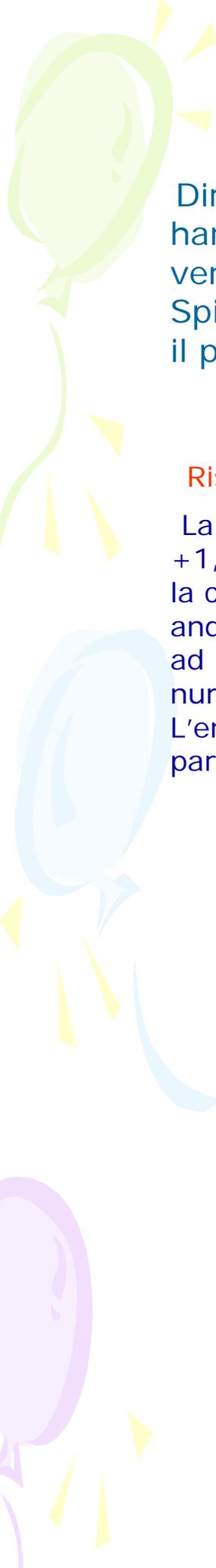
Utilizzando il modello a quark, sarebbe necessaria la transizione di un quark s in un quark d, ma questo non è possibile al primo ordine (FCNC)

g) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ SI NO :

interazione debole. In questo caso $\Delta S = \Delta Q$

h) $\nu_\mu + n \rightarrow K^0 + p + e^-$ SI NO :

Violazione numero leptonico



Dire se nella reazione $K^0 + \text{protone}$, dove i K^0 hanno un'energia cinetica di 800 MeV, possono venire prodotti dei barioni dotati di stranezza. Spiegare perché, se non è possibile, oppure scrivere il processo se è invece possibile.

Risposta: NON è possibile

La composizione in quark del K^0 è $d\bar{s}$, quindi ha stranezza +1, mentre i barioni strani hanno stranezza -1, quindi per la conservazione della stranezza nelle interazioni forti andrebbero prodotti almeno due antibarioni strani insieme ad un barione strano. Inoltre, per la conservazione del numero barionico, andrebbero prodotti altri due barioni. L'energia del K^0 è troppo piccola per produrre tutte queste particelle.

Dire quali reazioni sono possibili e quali no. Nel caso siano possibili indicare l'interazione responsabile e nel caso non lo siano, spiegare perché. (si tenga presente che i processi deboli al secondo ordine sono di fatto proibiti).

a) $n + p \rightarrow d + \gamma$ SI NO :

elettromagnetico per via della presenza del fotone

b) $\Xi^- \rightarrow n + K^-$ SI NO :

La massa del Ξ^- è inferiore alla massa del neutrone più quella del K

c) $p + p \rightarrow \pi^+ + d$ SI NO :

interazione forte perché non c'è nulla che lo proibisca

d) $D^+ \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^+$ SI NO :

processo debole perché cambia sia il charm che la stranezza

e) $K^- + p \rightarrow K^0 + n$ SI NO :

proibita al primo ordine delle interazioni deboli perché si ha $\Delta S = 2$

f) $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$ SI NO :

interazione forte: produzione associata, $\Delta S = 0$

g) $e^+ + e^- \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ SI NO :

interazione debole, avviene tramite lo scambio di uno Z

h) $\Omega^- \rightarrow \bar{K}^0 + K^-$ SI NO :

violazione del numero barionico

Il mesone D_S ha $\text{charm}=1$, $\text{stranezza}=1$ e spin zero. Indicare la sua composizione in quark, il suo spin isotopico e la sua carica. Il mesone D_S^* ha lo stesso contenuto in quark del D_S ma ha spin 1. Il D_S^* decade in $D_S + \pi$ con un B.R. del 6%. Spiegare qual è l'interazione responsabile di questo decadimento.

Il D_S è composto dal quark c e dall'antiquark s , quindi il suo spin isotopico è zero (solo i quark u e d hanno spin isotopico $\frac{1}{2}$) e la sua carica è $+1$.

Anche il D_S^* ha spin isotopico zero, mentre il pione ha spin isotopico 1, quindi lo stato finale $D_S^* + \pi$ ha spin isotopico 1, mentre lo stato iniziale, D_S , ha spin isotopico nullo, quindi il decadimento non può essere forte per la conservazione dello spin isotopico totale. Il decadimento sarà mediato dall'interazione elettromagnetica, in quanto essa non deve sottostare alla legge della conservazione dello spin isotopico totale e non vi è nessun'altra regola di conservazione violata dal decadimento elettromagnetico.

Il decadimento più probabile (94%) è $D_S^* \rightarrow D_S + \gamma$, il che conferma che il decadimento è elettromagnetico (B.R. dello stesso ordine di grandezza).

Ricordiamo le masse e la stranezza delle tre particelle:

Λ : $m=1115$ MeV, $S=-1$; Σ^0 : $m=1192$ MeV, $S=-1$; Ξ^0 : $m=1314$ MeV, $S=-2$.

La Λ e la Ξ^0 sono rispettivamente i barioni più leggeri con stranezza -1 e -2 , quindi i loro decadimenti dovranno essere necessariamente mediati dalle interazioni deboli, mentre la Σ^0 può fare un decadimento elettromagnetico, $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$, e quindi avrà una vita media molto più breve, tipica delle interazioni elettromagnetiche.

L'ottetto dei barioni $\frac{1}{2}^+$ di SU(3) è composto da p,n, Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^- , Ξ^0 , Λ . La vita media della Λ è di $2.6 \cdot 10^{-10}$ s, quella della Σ^0 è di $7.4 \cdot 10^{-20}$ s e quella della Ξ^0 è di $2.9 \cdot 10^{-10}$ s. Spiegare come mai la vita media della Σ^0 è molto più piccola di quelle della Λ e della Ξ^0 .

Ricordiamo le masse e la stranezza delle tre particelle:

Λ : $m=1115$ MeV, $S=-1$; Σ^0 : $m=1192$ MeV, $S=-1$; $\Xi^0=1314$ MeV, $S=-2$.

La Λ e la Ξ^0 sono rispettivamente i barioni più leggeri con stranezza -1 e -2, quindi i loro decadimenti dovranno essere necessariamente mediati dalle interazioni deboli, mentre la Σ^0 può fare un decadimento elettromagnetico, $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$, e quindi avrà una vita media molto più breve, tipica delle interazioni elettromagnetiche.

Dire quali reazioni sono possibili e quali no. Nel caso siano possibili indicare l'interazione responsabile e nel caso non lo siano, spiegare perché. (si tenga presente che i processi deboli al secondo ordine sono di fatto proibiti).

a) $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$ SI NO :

Interazione forte, si conserva la stranezza

b) $\pi^- + p \rightarrow K^- + \Sigma^+$ SI NO :

Non si conserva la stranezza $S=0 \rightarrow S=-2$

c) $\bar{p} + p \rightarrow 2\pi^+ + 2\pi^- + \nu_e$ SI NO :

Violazione del numero leptonico elettronico

d) $\Sigma^+ \rightarrow p + \mu^+ + \mu^-$ SI NO :

Processo proibito al primo ordine perché è un FCNC

e) $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu} + \gamma$ SI NO :

Interazione debole, il γ viene dallo stato iniziale

f) $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda$ SI NO :

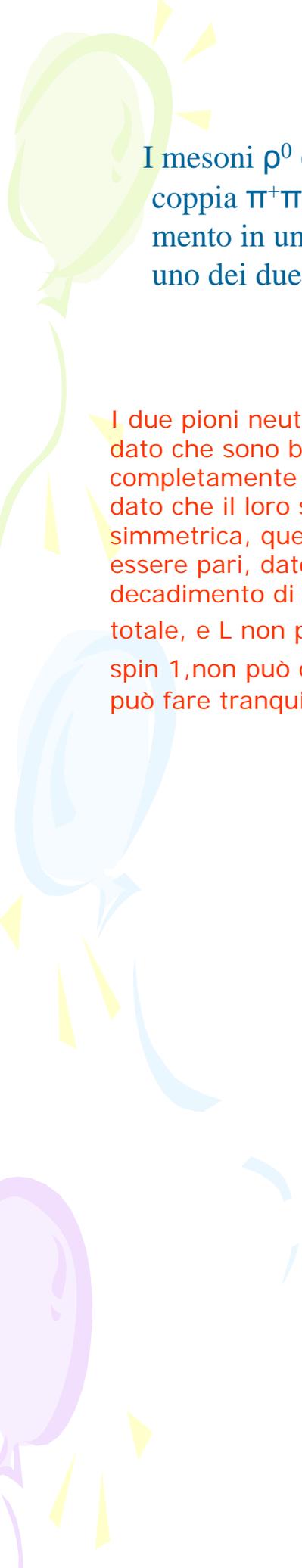
Interazione forte, si conserva la stranezza

g) $\mu^+ + e^- \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ SI NO :

violazione dei numeri leptonici

h) $\Omega^- \rightarrow \Lambda + K^-$ SI NO :

interazione debole, viene violata la stranezza



I mesoni ρ^0 (770) e f_2^0 (1270) decadono per interazione forte in una coppia $\pi^+\pi^-$, e hanno rispettivamente spin 1 e spin 2. Il decadimento in una coppia di pioni neutri è assolutamente proibita per uno dei due mesoni. Indicare quale e spiegare il perché.

I due pioni neutri costituiscono un sistema di due particelle identiche, e dato che sono bosoni (hanno spin 0) la loro funzione d'onda deve essere completamente simmetrica. La parte di spin è simmetrica per definizione dato che il loro spin è nullo, quindi la parte orbitale deve essere simmetrica, questo vuol dire che il loro momento orbitale relativo deve essere pari, dato che la parità è uguale a $(-1)^L$. Dato che nel decadimento di una particella si deve conservare il momento angolare totale, e L non può essere dispari, ne consegue che il mesone ρ^0 che ha spin 1, non può decadere in due pioni neutri, mentre la f_2^0 che ha spin 2 lo può fare tranquillamente.

Dire quali reazioni sono possibili e quali no. Nel caso siano possibili indicare l'interazione responsabile e nel caso non lo siano, spiegare perché. (si tenga presente che i processi deboli al secondo ordine sono di fatto proibiti).

a) $p+p \rightarrow K^+ + K^+ + n+n$ SI NO :

Violazione della stranezza

b) $\bar{p}+n \rightarrow \pi^- + \pi^0$ SI NO

interazione forte

c) $K^+ + n \rightarrow K^+ + \bar{K}^0$ SI NO :

violazione del numero barionico

d) $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ SI NO :

violazione del momento angolare totale

e) $\pi^0 \rightarrow \mu^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ SI NO :

violazione del numero leptonico

f) $K^0 \rightarrow K^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ SI NO :

int. debole, anche se lo spazio delle fasi è molto piccolo quindi di fatto non avviene

g) $K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-$ SI NO :

int. forte

h) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ SI NO :

int. debole

Determinare il numero barionico, l'ipercarica, lo spin isotopico e la carica dei seguenti sistemi di quark.

a) $u\bar{s}$: $B = \dots 0 \dots$ $Y = \dots 1 \dots$ $I = \dots \frac{1}{2} \dots$; $Q = \dots 1 \dots$

b) $c\bar{d}$: $B = \dots 0 \dots$ $Y = \dots 1 \dots$ $I = \dots \frac{1}{2} \dots$; $Q = \dots 1 \dots$

c) ddc : $B = \dots 1 \dots$ $Y = \dots 2 \dots$ $I = \dots 1 \dots$; $Q = \dots 0 \dots$

Non si può avere isospin 0, perché $Q=0$ si ha solo se $I_3=-1$

d) ubc : $B = \dots 1 \dots$ $Y = \dots 1 \dots$ $I = \dots \frac{1}{2} \dots$; $Q = \dots 1 \dots$

e) $s\bar{s}$: $B = \dots 0 \dots$ $Y = \dots 0 \dots$ $I = \dots 0 \dots$; $Q = \dots 0 \dots$

Colore e QCD

- **Problemi con la simmetria della funzione d'onda della Δ^{++} .**
- **Introduzione del colore.**
- **Ipercarica di colore e di isospin di colore.**
- **Gli adroni sono "bianchi" (singoletti di colore).**
- **Carica di colore.**
- **Gluoni.**
- **Evidenza sperimentale del colore: larghezza del π^0 e rapporto R.**



COLORE

- PRENDIAMO LA RISONANZA Δ^{++} , LA QUALE HA CARICA $+2e$ E SPIN $\frac{3}{2}$. IN TERMINI DI QUARK LA SUA COMPOSIZIONE È:

$$\Delta^{++} \rightarrow J^P = \frac{3}{2}^+ \Rightarrow u \uparrow u \uparrow u \uparrow$$

- LA FUNZIONE D'ONDA Ψ PUÒ ESSERE FATTOZZATA NEL MODO SEGUENTE:

$$\Psi = \Psi(\text{spaziale}) \cdot \chi(\text{spin}) \cdot \phi(\text{sapore})$$

- IL MOMENTO ANGOLARE ORBITALE RELATIVO IN QUESTO MULTIPLETTO È ZERO (PERCHÉ SONO I BARIONI CON SPIN $\frac{3}{2}$ DI MASSA PIÙ BASSA), QUINDI LA PARTE SPAZIALE È SIMMETRICA.

- ANCHE LA PARTE DI SAPORE È DI SPIN $\frac{3}{2}$ CHIAMATA Δ^{++} , QUINDI LA FUNZIONE D'ONDA TOTALE È SIMMETRICA.

- QUESTO CONTRADDICE IL PRINCIPIO DI PAULI, IN QUANTO PER LO SCAMBIO DI DUE QUARK LA FUNZIONE D'ONDA DEVE ESSERE ANTISIMMETRICA.

- NEL 1964 GREENBERG, E POI HAN E NAMBU, INTRODUSSE UN NUOVO GRADO DI LIBERTÀ INTERNO, CHE CHIAMO' COLORE.

- QUINDI LA FUNZIONE D'ONDA TOTALE È ANTISIMMETRICA:

$$\Psi = \Psi(\text{spaziale}) \cdot \chi(\text{spin}) \cdot \phi(\text{sapore}) \cdot \xi(\text{colore})$$

DOVE $\xi(\text{colore})$ È ANTISIMMETRICA

- L'ASSUNZIONE BASE DELLA TEORIA DEL COLORE È CHE OGNI QUARK POSSA ESISTERE IN TRE DIVERSI STATI DI COLORE:

$$x^c = r, g, b \quad (\text{red, green, blue})$$

- I TRE STATI SI POSSONO RAPPRESENTARE COME SPINORI DI COLORE

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

È SI PUÒ RIPETERE QUANTO DETTO A PROPOSITO DI SU(3), SOLO CHE ADESSO SI PARLA DI SU(3) DI COLORE.

⇒ SI HANNO 8 GENERATORI DEL GRUPPO DI SIMMETRIA

⇒ SI POSSONO INDIVIDUARE 2 GENERATORI "DIAGONALI" PER I QUALI GLI SPINORI DI COLORE SONO DELLE AUTOFUNZIONI

• QUESTI OPERATORI SONO \hat{F}_3 E \hat{F}_8 , DOVE:

$$\hat{F}_3 |r\rangle = \frac{1}{2} |r\rangle; \quad \hat{F}_8 |r\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} |r\rangle; \quad \text{ETC...}$$

- SI PUÒ INTRODURRE UN ISOSPIN DI COLORE I_3^c ED UN IPERCARICA DI COLORE Y^c , QUINDI:

$$\hat{I}_3^c \equiv \hat{F}_3^c; \quad \hat{Y}^c \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{F}_8$$

- CON QUESTA ASSUNZIONE SI HANNO I SEGUENTI VALORI:

	QUARK			ANTIQUARK	
	I_3^c	Y^c		I_3^c	Y^c
r	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	\bar{r}	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
g	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	\bar{g}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
b	0	$-\frac{2}{3}$	\bar{b}	0	$\frac{2}{3}$

- I VALORI Y^c E I_3^c SONO DEI NUMERI QUANTICI ADDITIVI
- LA COMBINAZIONE DI CARICA TRASFORMA UN QUARK RED IN UN QUARK ANTIREG CON I VALORI OPPOSTI DI Y^c E I_3^c
- IN QUESTO MODO I QUARK SONO TRIPPLICATI E QUINDI SI AVREBBE UNA PROLIFERAZIONE DI PARTICELLE, AD ESEMPIO IL PROTONE POTREBBE ESSERE:

$$P = u_R u_B d_G ; u_R u_G d_B ; u_B u_G d_R ; \dots$$

MENTRE SPERIMENTALMENTE QUESTA PROLIFERAZIONE NON SI OSSERVA

- SI POSTULA, QUINDI, CHE TUTTI GLI ADRONI LIBERI OSSERVATI IN NATURA DEVONO AVERE

$$I_3^c = 0 ; Y^c = 0$$

CIOE' DEVONO ESSERE DEI SINGOLETTI DI COLORE; QUESTA E' L'IPOTESI DEL CONFINAMENTO DI COLORE

- NE CONSEGUENTE CHE L'UNICO MODO DI SODDISFARE QUESTA RICHIESTA, E' QUELLO DI COMBINARE INSIEME 3 QUARK OPPURE UNA COPPIA QUARK - ANTIQUARK

$$\text{BARIONI} = qqq$$

$$\text{MESONI} = q\bar{q}$$

$$P = RGB ; \bar{P} = \bar{R}\bar{G}\bar{B}$$

$$\pi = R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}$$

MA NON SI POSSONO AVERE COMBINAZIONI qq ; $qq\bar{q}$; $qqqq$, ...

- IN TEORIA SI POTREBBERO AVERE COMBINAZIONI DEL TIPO:

$$qq\bar{q}\bar{q} \quad \text{E} \quad qq\bar{q}\bar{q}\bar{q}$$

(ultimamente ci sono state delle evidenze sui pentaquark, ma ci sono molti dibattiti in merito)

- LA SIMMETRIA $SU(3)$ DI COLORE È UNA SIMMETRIA ESATTA AL CONTRARIO DELLA SIMMETRIA $SU(3)$ DI SAPORE CHE È UNA SIMMETRIA APPROSSIMATA

- COME DETTO SI HANNO 8 GENERATORI DEL GRUPPO, 2 DIAGONALI CORRISPONDENTI ALL'ISOSPIN DI COLORE E ALL'IPERCARICA DI COLORE, E 6 OPERATORI CHE MESCOLANO TRA DI LORO GLI AUTOSTATI DI COLORE

- GLI OSSERVABILI ASSOCIATI CON GLI OPERATORI \hat{F}_i SONO TUTTI DELLE COSTANTI DEL MOTO, IN QUANTO TUTTI GLI \hat{F}_i COMMUTANO CON L'HAMILTONIANA

$$[\hat{F}_i, H] = 0 \quad (i=1, \dots, 8)$$

- QUESTE OSSERVABILI VENGONO CHIAMATE CARICHE DI COLORE E SONO LE SORCENTI DELLE INTERAZIONI FORTI.

- AD UN ADRONE È ASSOCIATA UNA FUNZIONE D'ONDA DI COLORE χ_h^c , IL CONFINAMENTO DEL COLORE IMPLICA CHE:

$$\hat{F}_i \chi_h^c = 0 \quad (i=1, \dots, 8)$$

(VI È UNA SIMILITUDINE CON GLI STATI DI SINGOLETTO DI SPIN, DOVE:
 $\hat{S}_x \chi = 0$; $\hat{S}_y \chi = 0$; $\hat{S}_z \chi = 0$, PER QUESTA RAGIONE GLI ADRONI SI CHIAMANO SINGOLETTI DI COLORE)

- LA FUNZIONE D'ONDA DI COLORE RISULTA LA COMBINAZIONE TOTALMENTE ANTISIMMETRICA

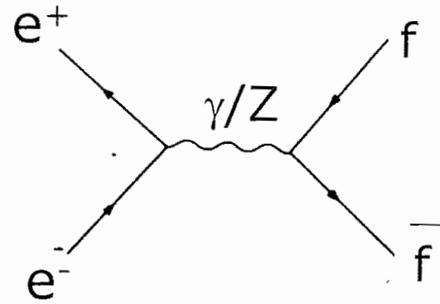
$$\chi_B^c = \frac{1}{\sqrt{6}} (r_1 g_2 b_3 - g_1 r_2 b_3 + b_1 r_2 g_3 - b_1 g_2 r_3 + g_1 b_2 r_3 - r_1 b_2 g_3)$$

- DATO CHE LA FUNZIONE D'ONDA TOTALE DI UN BARIONE DEVE ESSERE COMPLETAMENTE ANTISIMMETRICA PER LO SCAMBIO DI DUE QUARK IDENTICI, QUESTO IMPLICA CHE LA PARTE SPAZIALE E LA PARTE DI SPIN DEVONO ESSERE SIMMETRICHE

Collider e^+e^-

Vantaggi di un collider e^+e^- :

- stato iniziale perfettamente definito (particelle puntiformi).
- \sqrt{s} definita = $2xE_{\text{beam}}$

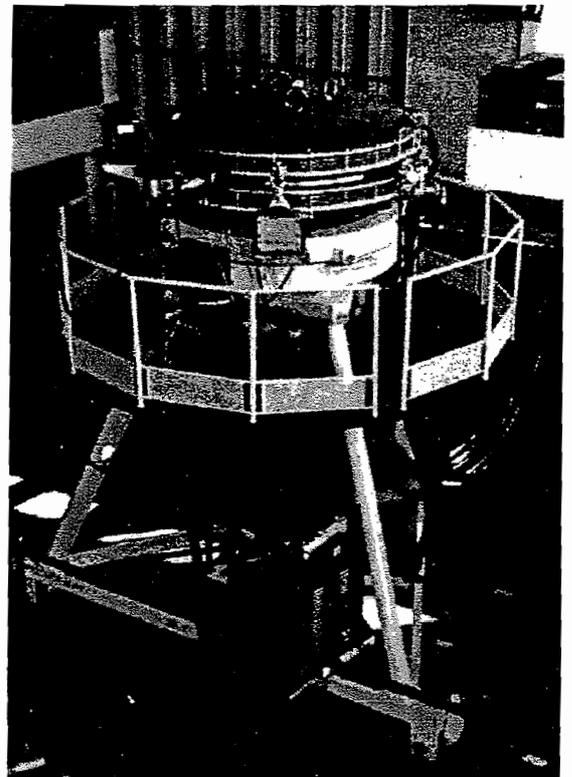
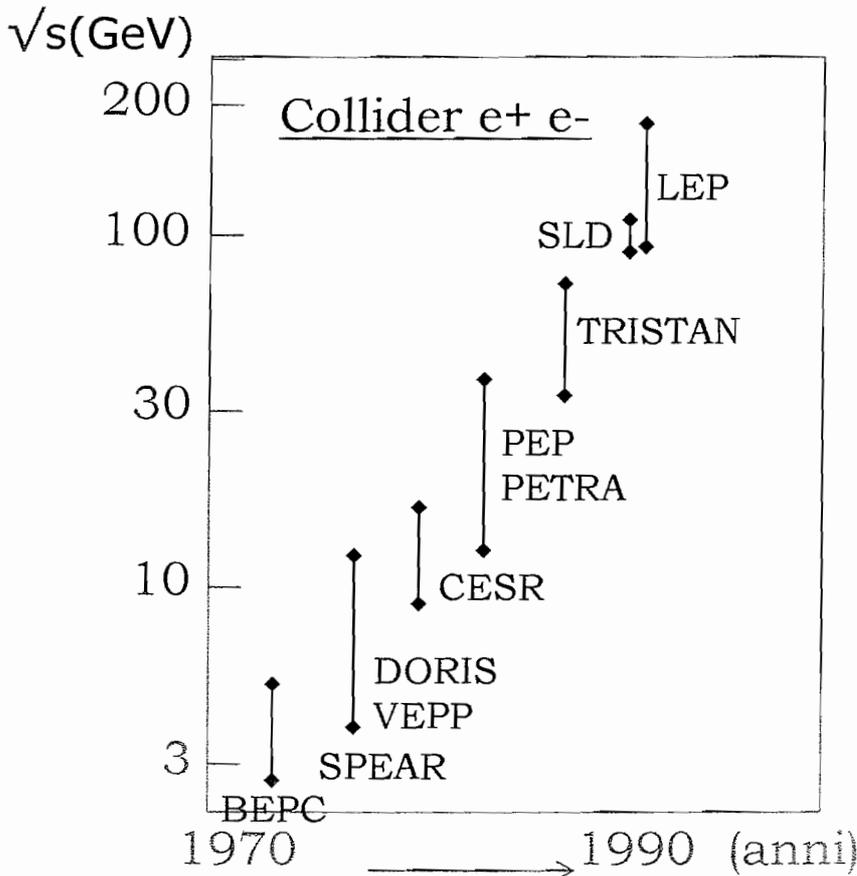


Svantaggi:

- più difficile raggiungere alte energie (rispetto ad un collider a protoni) per via della radiazione di sincrotone.
- Luminosità più bassa rispetto ad un processo a bersaglio fisso (fixed target).

$$\frac{dN}{dt} = L \cdot \sigma$$

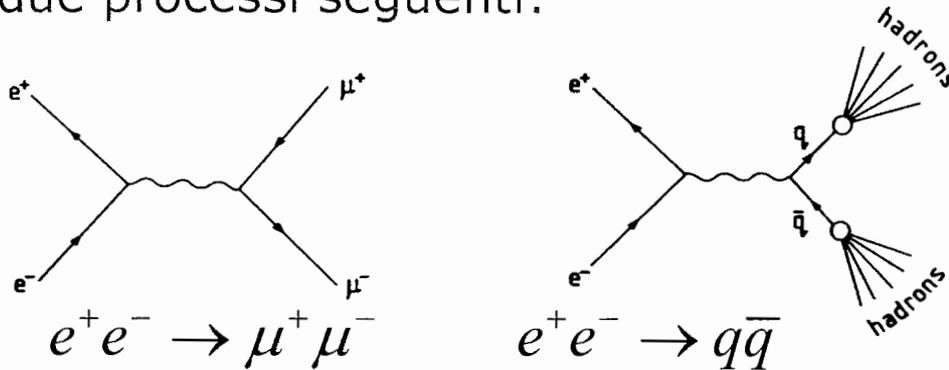
ADA - 1961 - LNF



$\sqrt{s} = 500 \text{ MeV}$

Evidenze del colore

- Una delle evidenze più convincenti dell'esistenza del colore viene dal confronto delle sezioni d'urto per i due processi seguenti:



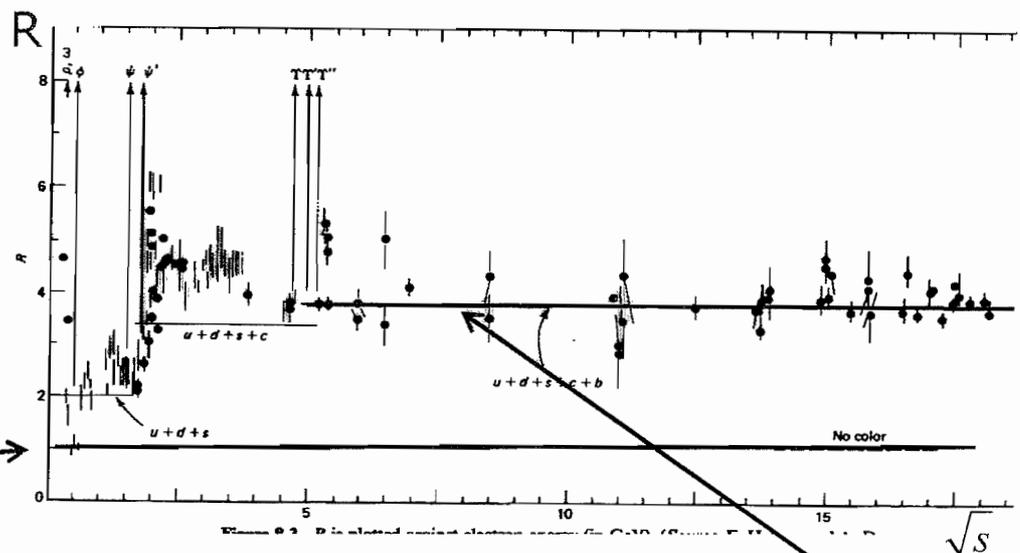
- Se non teniamo conto dell'adronizzazione dei quark, ed assumendo che \sqrt{s} sia grande rispetto alle masse dei fermioni, le ampiezze dei due grafici differiscono solo per la carica elettrica dei fermioni nello stato finale.

- Se non esistesse il colore:
$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{i=1}^n Q_i^2$$

- Se esiste il colore, R deve essere moltiplicato per 3 perché il numero di colori dei quark è 3.

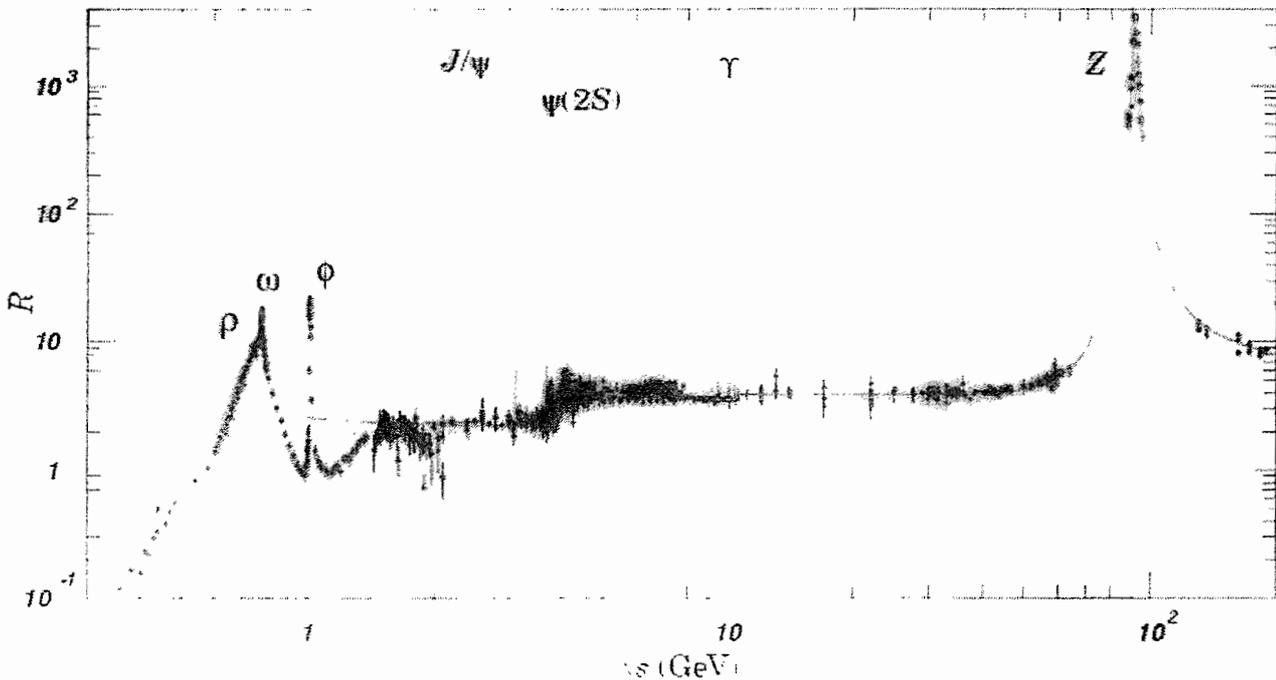
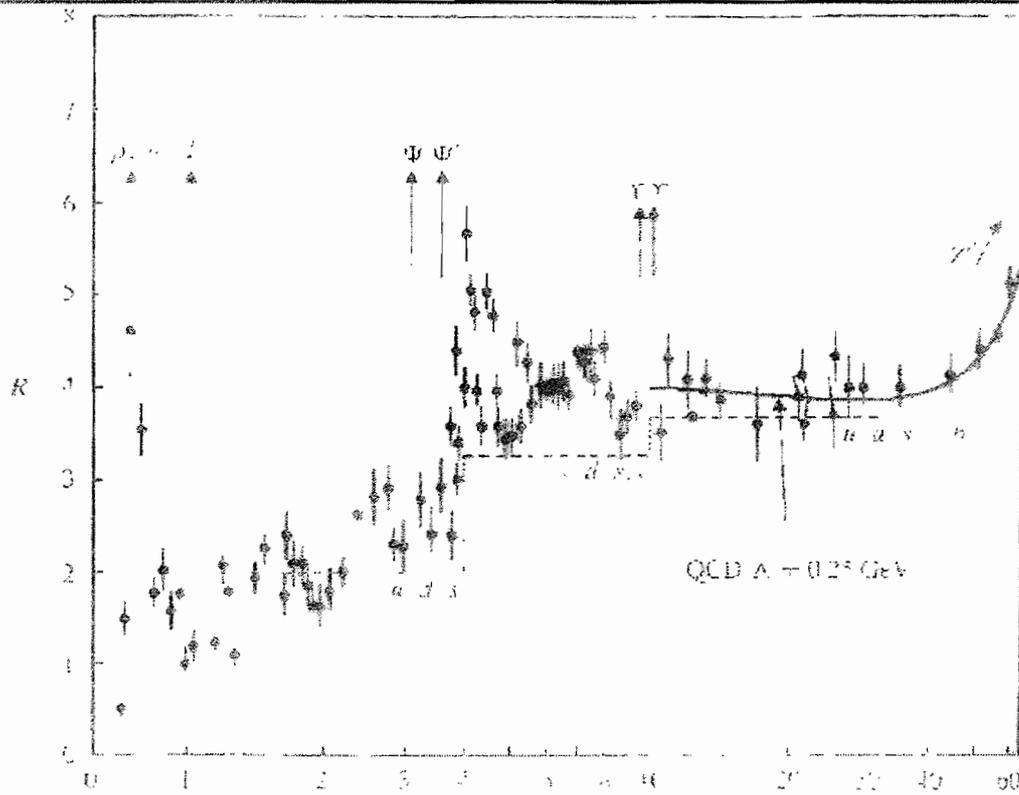
R è funzione di \sqrt{s} . Al di sopra della soglia del b si ha:

Senza colore $R = \frac{11}{9}$



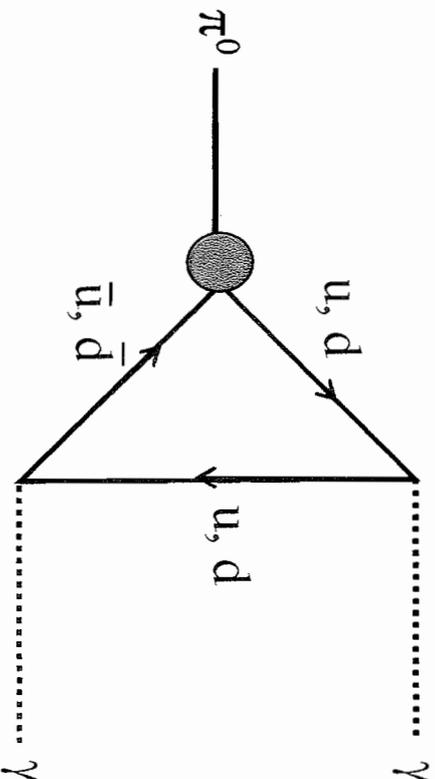
Con il colore
$$R = 3\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{33}{9} = 3.67$$

R_{had} vs. c.m. Energy



QCD, Color, and the decay of the π^0

- 1949-50 The decay $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ calculated and measured by Steinberger.
- 1967 Veltman calculates the π^0 decay rate using modern field theory and finds that the π^0 does not decay!
- 1968-70 Adler, Bell and Jackiw “fix” field theory and now π^0 decays but decay rate is off by factor of 9.
- 1973-4 Gell-Mann and Fritzsche (+others) use QCD with 3 colors and calculate the correct π^0 decay rate.



Triangle Diagram
 Each color contributes one amplitude. Three colors changes the decay rate by 9.

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.73 \cdot \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \cdot eV \quad [\text{calculated}]$$

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.7 \pm 0.6 \text{ eV} \quad [\text{SPRINGERLICHE}]$$

$$\Rightarrow N_c = 2.99 \pm 0.12$$

N.B. $\Gamma \cdot \tau \approx 4$

$$\tau = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ sec}$$

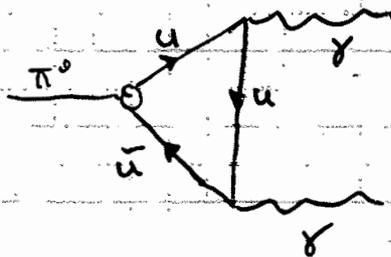
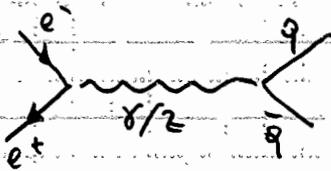
DOMANDA

- PERCHÉ NEL RAPPORTO R

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

BISOGNA MOLTIPLICARE R x 3 PER TENER CONTO DEL NUMERO DI COLORI

MENTRE NEL DECADIMENTO DEL π^0 BISOGNA MOLTIPLICARE LA PROBABILITÀ DI DECADIMENTO PER 9?

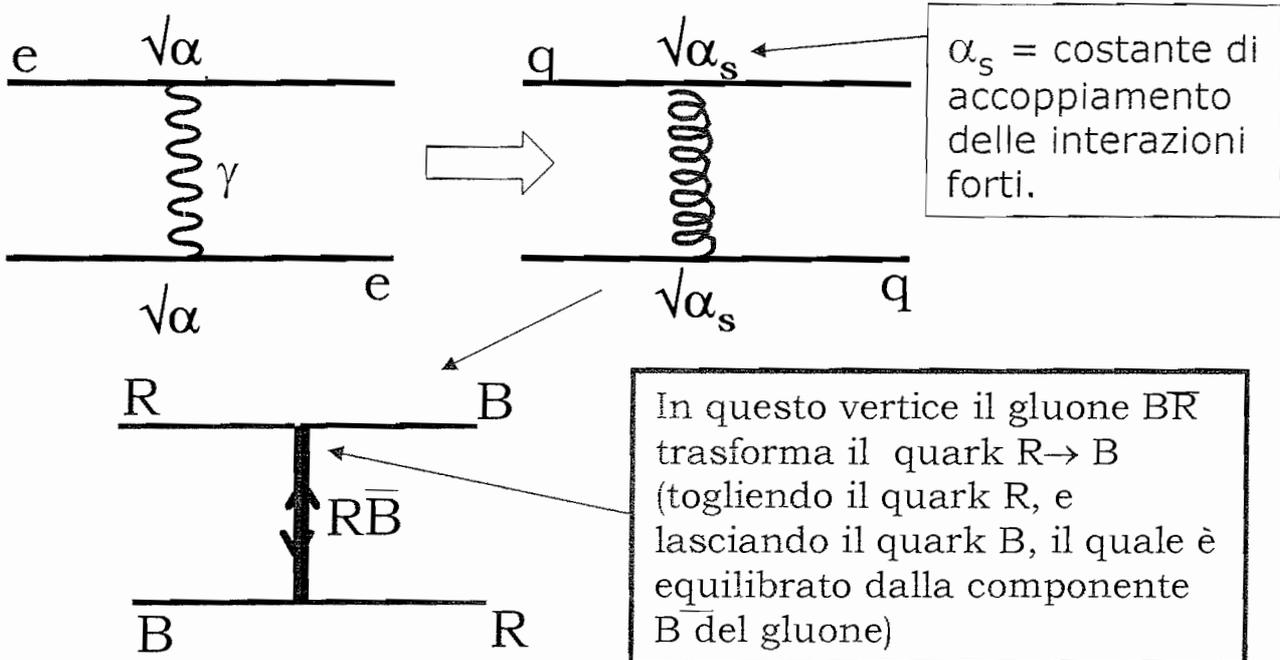


Gluoni e QCD

- La teoria che descrive le interazioni forti nel Modello Standard è chiamata CromoDinamica Quantistica (QCD).
- La QCD è simile alla QED, le sue proprietà possono essere ricavate dall'invarianza di gauge per trasformazioni nello spazio $SU(3)$.
- Da questa invarianza discende che le interazioni forti sono mediate da 8 bosoni neutri di spin 1 a massa nulla, che vengono chiamati gluoni (gluons), i quali sono in relazione con gli 8 generatori delle rotazioni nello spazio $SU(3)$.
- La QED è invariante per la trasformazione di gauge $U(1)$. Questa simmetria è abeliana, pertanto il fotone, che si accoppia con la carica elettrica, non possiede carica elettrica e quindi i fotoni non interagiscono tra di loro.
- $SU(3)$ è una simmetria non abeliana, per cui i gluoni, i quali si accoppiano alle cariche di colore, trasportano essi stessi una carica di colore (colore e anticolore), per cui si possono accoppiare tra loro dando luogo a vertici con tre o quattro gluoni. Questi vertici hanno come conseguenza il confinamento del colore e la libertà asintotica.
- I gluoni non distinguono i sapori dei quark, per cui le interazioni forti sono invarianti per rotazioni nello spazio dei sapori.

Il colore dei gluoni

- Carica elettrica \rightarrow carica di colore
- $3^2-1=8$ matrici/operatori \Rightarrow 8 gluons
- I quark hanno colore R B
- Il colore è scambiato da 8 gluoni «bicolorati»



In ogni vertice si deve conservare il colore.

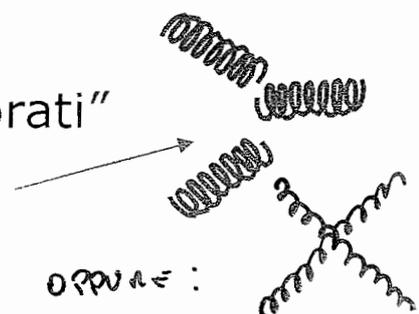
- Gli 8 gluoni sono:

$$R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, \sqrt{\frac{1}{2}}(R\bar{R} - G\bar{G}), \sqrt{\frac{1}{6}}(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})$$

- La nona combinazione (3x3) è un singoletto di colore, cioè non trasporta colore, e non può fare da mediatore tra quark "colorati".

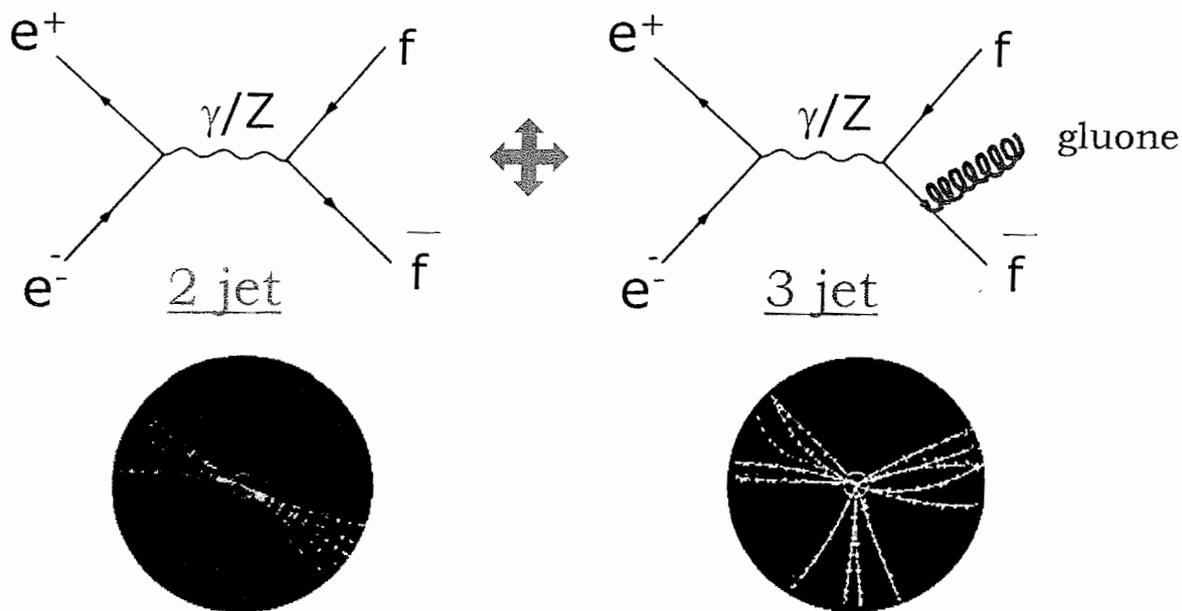
$$\sqrt{\frac{1}{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$$

Ricorda, anche i gluoni sono "colorati" e possono interagire tra loro.



Scoperta del gluone

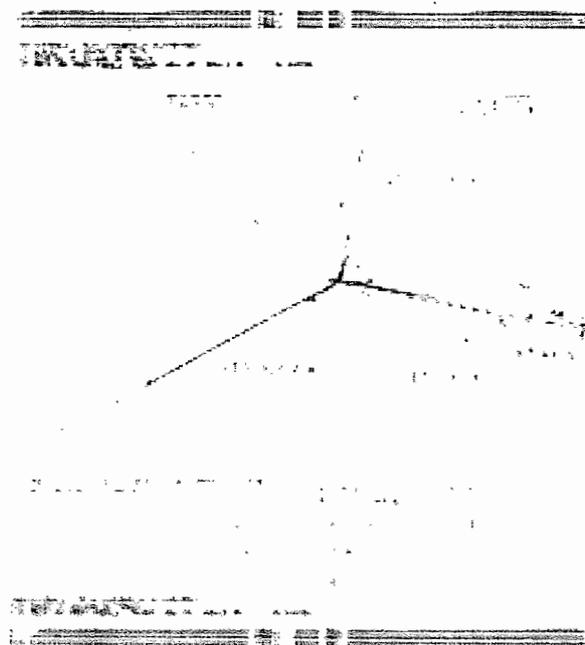
- Il gluone fu scoperto nel 1979 a Petra, un collider e^+e^- , $\sqrt{s}=27$ GeV, a Desy (Amburgo)



- Dai quark dello stato finale può essere irradiato un gluone. Quando questo gluone ha sufficiente energia, esso può adronizzare in maniera indipendente dai quark, e dare origine ad un terzo jet di particelle.

- Si cercavano quindi eventi con 3 jet nel piano trasverso all'asse dei fasci, dove la somma dei quadrimpulsi deve essere zero.

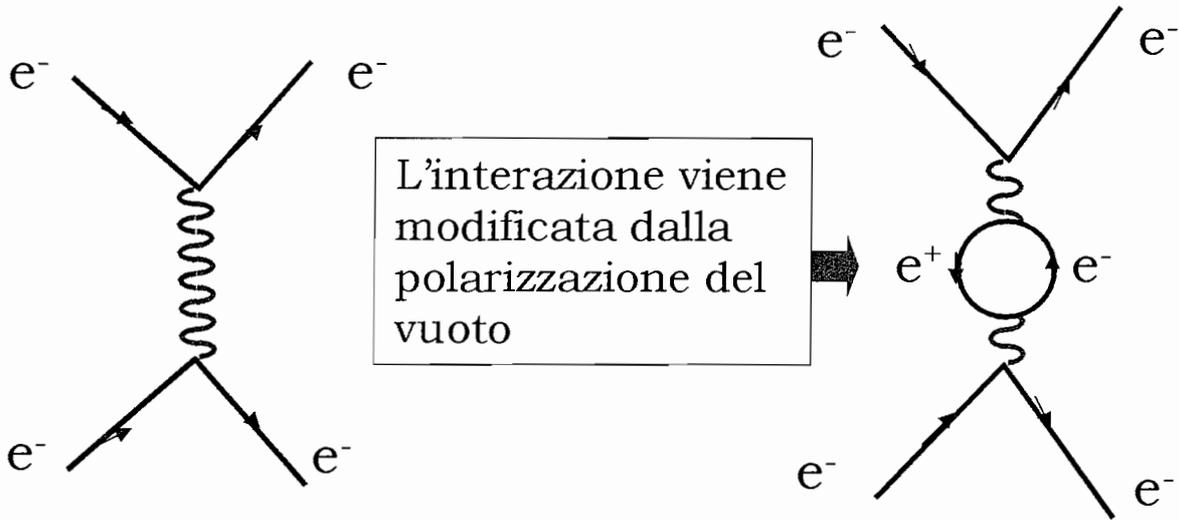
(Un jet è formato da un insieme di adroni, il cui quadrimpulso, sommato, è uguale a quello del quark che lo ha originato)



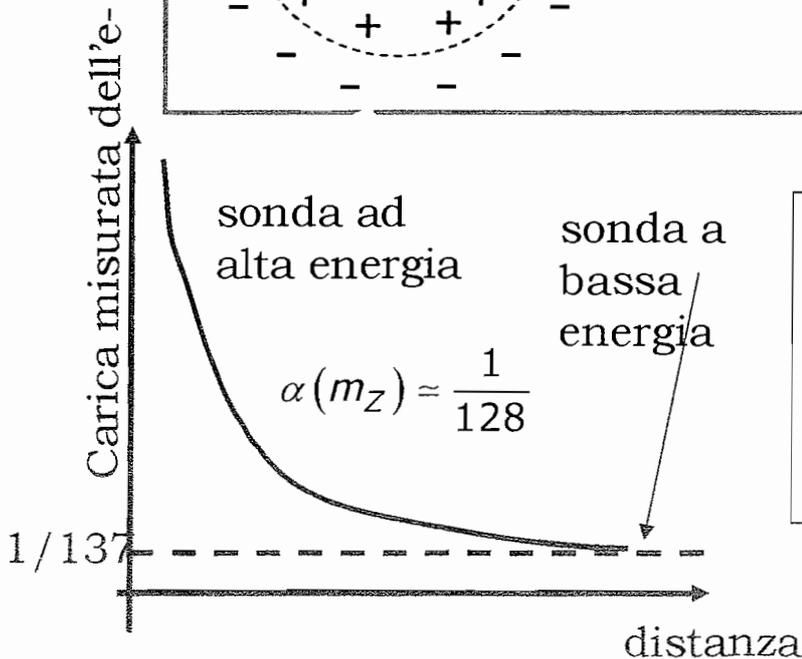
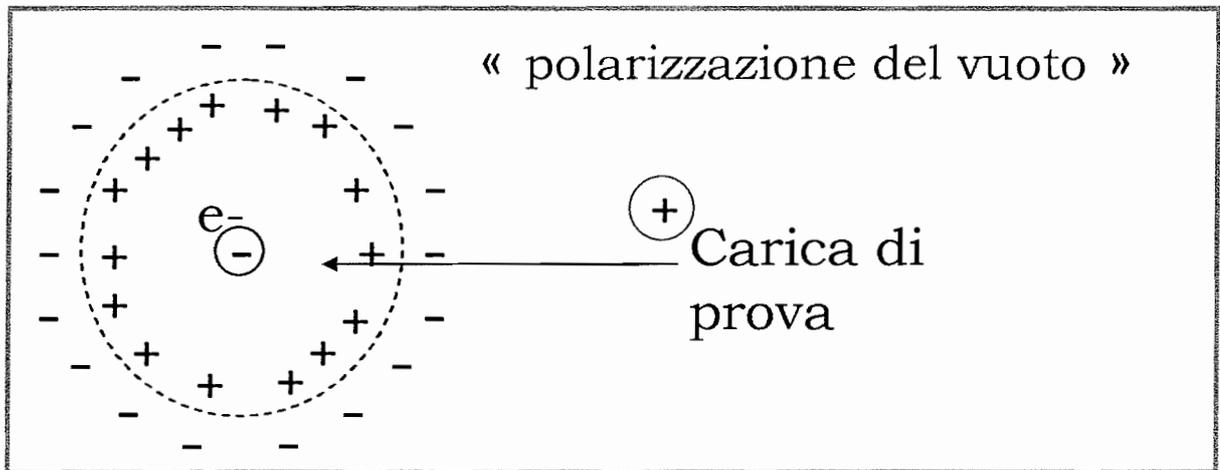
Logbook dell'esperimento Tasso

Running di α_{QED}

- Consideriamo l'interazione tra due elettroni:



- La polarizzazione del vuoto fa sì che la carica elettrica dell'elettrone diventi una funzione dell'energia della "carica di prova".



I positroni "schermano" la carica e^- ; man mano che ci si avvicina alla carica, lo "schermo" diminuisce e la carica "aumenta".

RUNNING DI α_{2eD}

- ANCORA SULLA RINORMALIZZAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA
- NELL'ELETTROMAGNETISMO CLASSICO IL POTENZIALE DI UN ELETTRONE VALE:

$$V = -\frac{e}{r}$$

- L'ENERGIA POTENZIALE DI UNA CARICA POSITIVA $+e$ IMMERSA NEL CAMPO VALE:

$$U = -\frac{e^2}{r}$$

- SE CONSIDERIAMO L'ENERGIA POTENZIALE DELL'ELETTRONE NEL CAMPO ELETTRICO DA ESSO GENERATO ($r \rightarrow 0$) L'ENERGIA POTENZIALE TENDE AD INFINITO.

- QUESTA SELF-INTERACTION NELLA TEORIA DEI CAMPI E' RAPPRESENTATA DA EMISSIONE DI FOTONI CHE VENGONO RIASSORBITI DALLA CARICA STESSA



- CON LA POLARIZZAZIONE DEL VUOTO SI HA:

- IL POSITRONE VIENE "ATTRATTO" DALL'ELETTRONE "SCHERMANDO" LA CARICA DELL'ELETTRONE IN MODO CHE IL SUO VALORE EFFICACE DIMINUISCE.

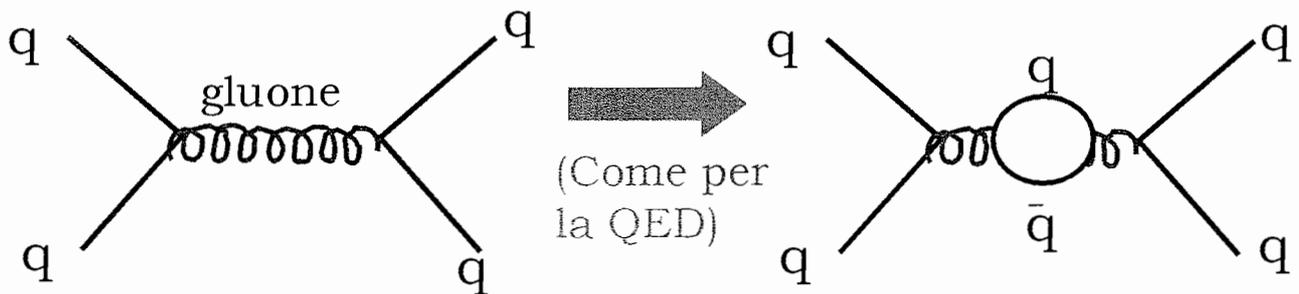
- MAN MANO CHE SI PENETRA NELLA "NUVOLE" DI POSITRONI L'EFFETTO SCHERMANO DIMINUISCE ED IL VALORE DELLA CARICA AUMENTA

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \log \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

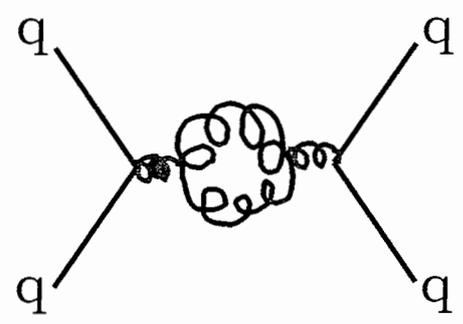
$\mu =$ fattore di scala

Running di α_s

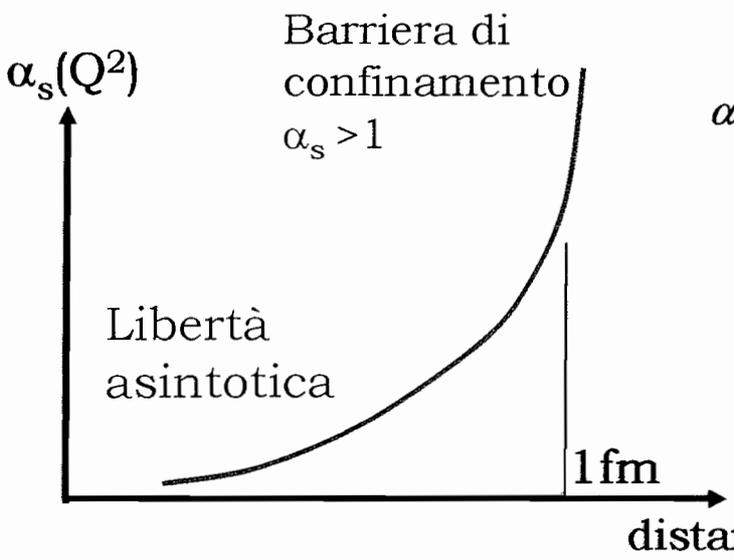
- Consideriamo l'interazione forte tra due quark:



Ma dato che i gluoni sono "colorati", esiste anche questo altro grafico che modifica l'interazione, e produce un effetto di "antischermaggio"



- L'effetto della self-interaction dei gluoni è tale che:



$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2f) \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}$$

f = numero di quark con $4m^2 < Q^2$
 Λ = scala (~ 200 MeV)

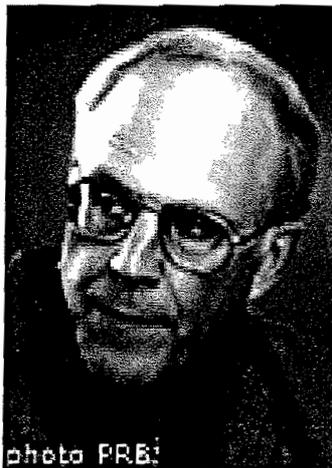
$Q^2 \sim \Lambda^2$ accoppiamento forte \rightarrow ~~perturbazioni~~
 $Q^2 \gg \Lambda^2$ accoppiamento debole \rightarrow perturbazioni

Scoperta della libertà asintotica nella QCD: 1973



The Nobel Prize in Physics 2004

"for the discovery of asymptotic freedom in the theory of the strong interaction"



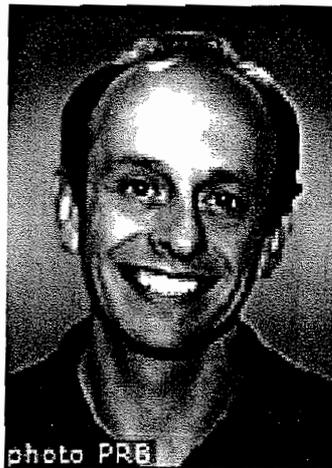
David J. Gross

🕒 1/3 of the prize

USA

Kavli Institute for
Theoretical Physics,
University of
California
Santa Barbara, CA,
USA

b. 1941



H. David Politzer

🕒 1/3 of the prize

USA

California Institute
of Technology
Pasadena, CA, USA

b. 1949



Frank Wilczek

🕒 1/3 of the prize

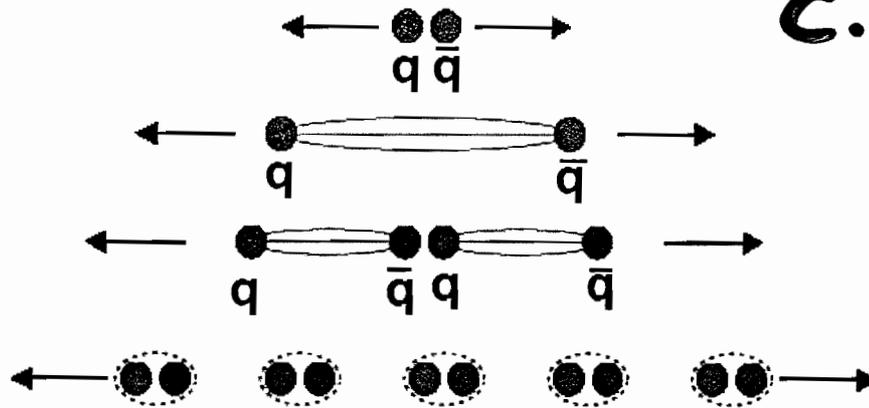
USA

Massachusetts
Institute of
Technology (MIT)
Cambridge, MA,
USA

b. 1951

Evidenza Sperimentale dell' esistenza dei quark (2)

C. DI NISI

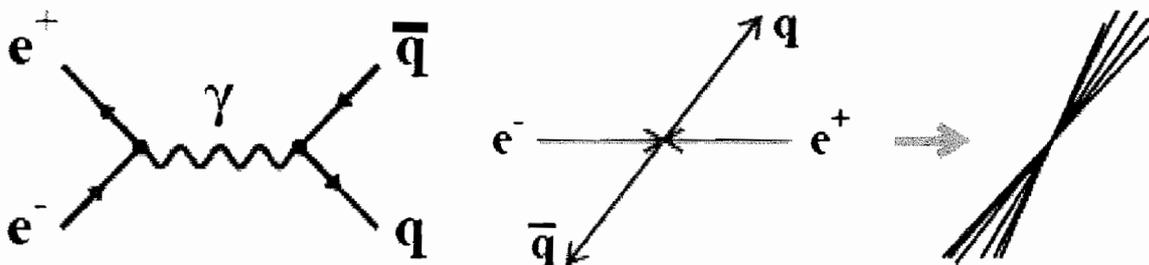
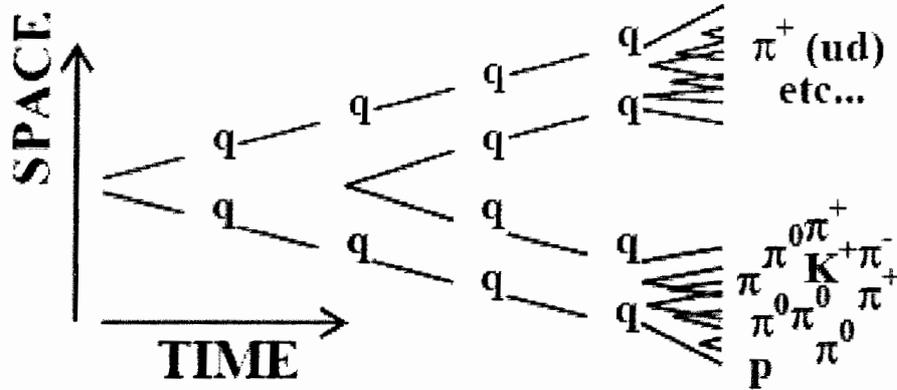


★ processo di adronizzazione

Mentre i quark si separano, altre coppie quark-antiquark sono prodotte dall' energia potenziale del campo di colore.

Questo processo e' chiamato **ADRONIZZAZIONE**:

inizia con quark e termina con getti collimati e stretti di adroni.

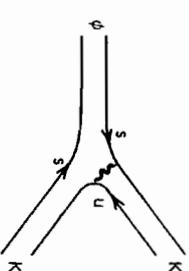
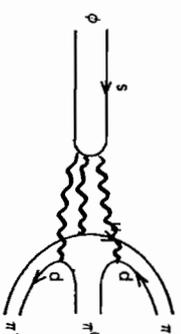


OZI Rule

Richard Kass

QCD explains the OZI rule as follows:

For decays involving quark anti-quark annihilation the initial and final states are connected by gluons. Since gluons carry color and mesons are colorless there must be more than one gluon involved in the decay.



The gluons involved in the decay must combine in a way to conserve all strong interaction quantum numbers. For example, in terms of charge conjugation (C):

two gluon state: $C = +1$

three gluon state: $C = -1$

Vector mesons such as the ϕ , ψ , and Y have $C = -1$ and thus their decays involving quark anti-quark annihilation must proceed through three gluon exchange.

Since these mesons are fairly massive (> 1 GeV) the gluons must be energetic (“hard”) and therefore due to asymptotic freedom, the coupling constant for each gluon will be small. Thus the amplitude for $\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ will be small since it depends on α_s^3 .

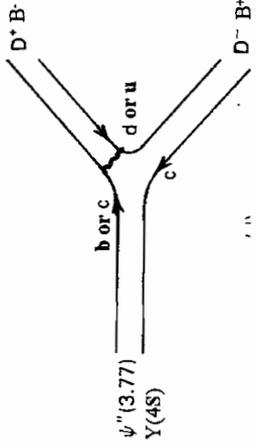
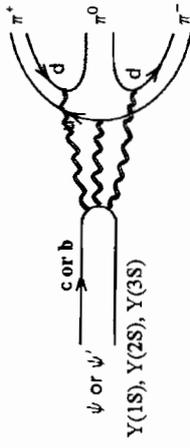
Although the amplitude for $\phi \rightarrow KK$ also involves gluon exchange it will not be suppressed as these gluons are low energy (“soft”) and therefore α_s is large here.

Although QCD explains the OZI rule it is still very difficult (impossible?) to perform precise rate calculations since the processes are in the regime where α_s large.

Both charmonium (ψ, ψ', ψ'') and bottomonium ($Y(1S), Y(2S), Y(3S), Y(4S)$) provide examples of the OZI rule in action. The lower mass charmonium (ψ, ψ') and bottomonium states ($Y(1S), Y(2S), Y(3S)$) differ in one important way from the ϕ . While the ϕ is massive enough to decay into strange mesons ($\phi \rightarrow KK$), the ψ and ψ' are below threshold to decay into charmed mesons while the $Y(1S), Y(2S), Y(3S)$ are below threshold to decay into B-mesons.

$$\psi = c\bar{c}$$

$$Y = b\bar{b}$$

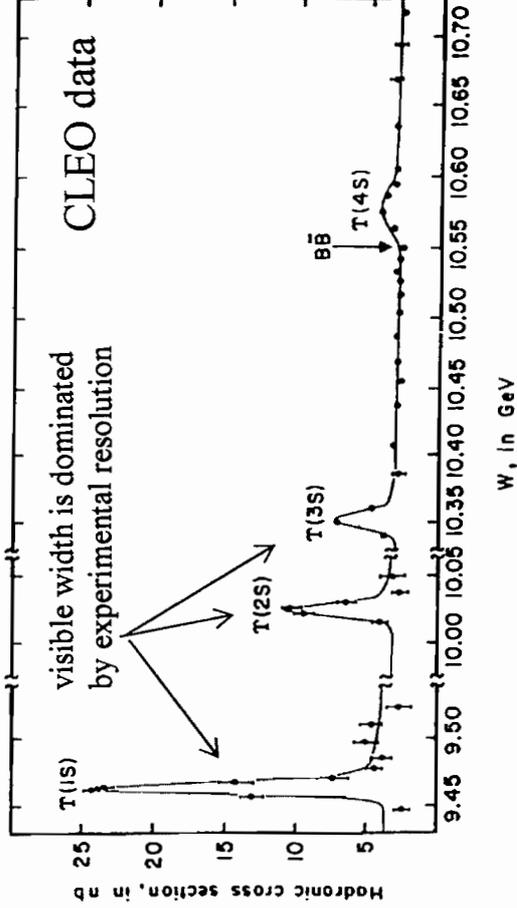


Therefore the decays of the (ψ, ψ') and ($Y(1S), Y(2S), Y(3S)$) have to proceed through the annihilation diagram and as a result these states live $\approx 250\text{-}1000X$ longer than expected without the OZI suppression.

Lifetime of state = (width)⁻¹
 $\tau = \Gamma^{-1}$

$$\Gamma(\psi) = 87 \text{ keV} \quad \Gamma(\psi'') = 24 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(Y(3S)) = 26 \text{ keV} \quad \Gamma(Y(4S)) = 21 \text{ MeV}$$

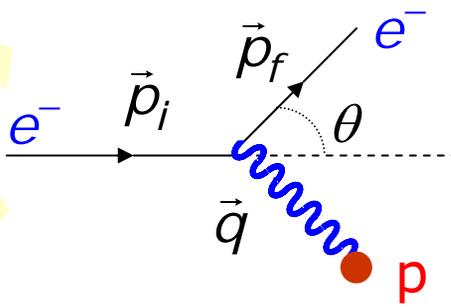


Struttura degli adroni e modello a partoni

- Scattering elastico elettrone-protone.
- Sezione d'urto di Rutherford, di Mott e di Rosenbluth.
- Risultati dell'esperimento di Hofstadter.
- Invarianza dalla scala.
- Scattering anelastico elettrone-protone.
- Scaling di Bjorken.
- Funzioni di struttura.
- Ipotesi dei partoni.
- Relazione di Callan-Gross.
- Quark di valenza e quark del mare.
- Cenni alla violazione dello scaling.

Scattering elettrone-protone

- Nel 1950 Hofstadter utilizzò elettroni da 180 MeV per sondare la distribuzione di carica dei nuclei.
- Consideriamo dapprima la diffusione Coulombiana di un elettrone da parte di un protone in quiete.



Se l'elettrone fosse senza spin e il protone avesse massa infinita, avremmo lo scattering di Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4p_i^2} \sin^4 \frac{\theta}{2}$$

Notare la dipendenza $1/p^2$ →

- L'impulso trasportato dal fotone vale:

$$\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f \quad \Rightarrow \quad q^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f$$

- Se il protone ha massa infinita, l'elettrone conserva la sua energia cinetica: $\Rightarrow |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$

$$\Rightarrow q^2 = 2p_i^2 (1 - \cos \theta) = 4p_i^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

- Inoltre: $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d(-\cos \theta)$

$$dq^2 = 2p_i^2 d(-\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad d\Omega = \frac{\pi}{p_i^2} dq^2$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}$$

Formula di Rutherford

Fattore di Forma

- Nella realtà la carica del protone non è localizzata in un punto, quindi occorre considerare il fattore di forma:

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} dV$$

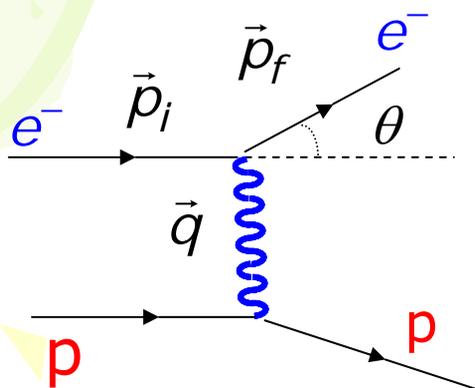
$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{misurata}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot [F(q^2)]^2$$

- Dalla misura sperimentale della sezione d'urto, e dal suo confronto con la sezione d'urto puntuale di Rutherford, si ricava $F(q^2)$ e da questa la distribuzione della carica all'interno del protone.

Distribuzione di carica	Fattore di forma	Esempio
Puntiforme	Costante	Elettrone
Esponenziale	Dipolare	Protone
Gaussiana	Gaussiano	${}^6\text{Li}$
Sfera omogenea	Oscillante	—
Sfera a superficie diffusa	Oscillante	${}^{40}\text{Ca}$

$$F(q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{a^2 \hbar^2}\right)^2}$$

Sezione d'urto di Mott

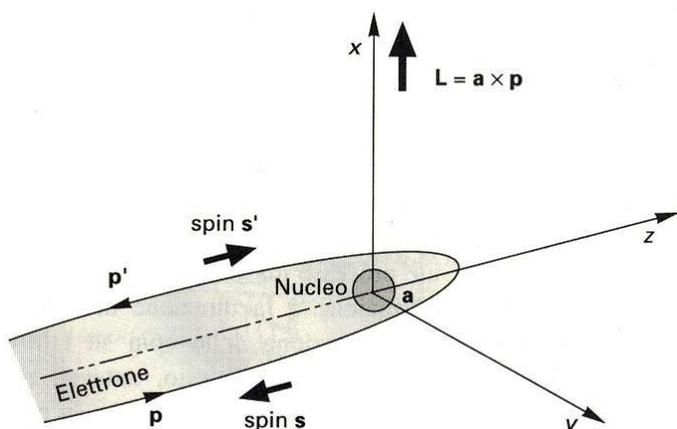


θ = angolo di scattering dell'elettr.
 M = massa del protone
 E = energia dell'elettrone incidente

- Consideriamo ora la spin dell'elettrone e consideriamo il rinculo del protone. Il protone viene ancora considerato come una particella puntiforme priva di spin. Otteniamo in questo modo **la sezione d'urto di Mott**.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

- Dalla formula si vede che per $\theta = \pi$ la sezione d'urto è nulla. Questo è in relazione con l'elicità dell'elettrone e nell'aver considerato il protone privo di spin.

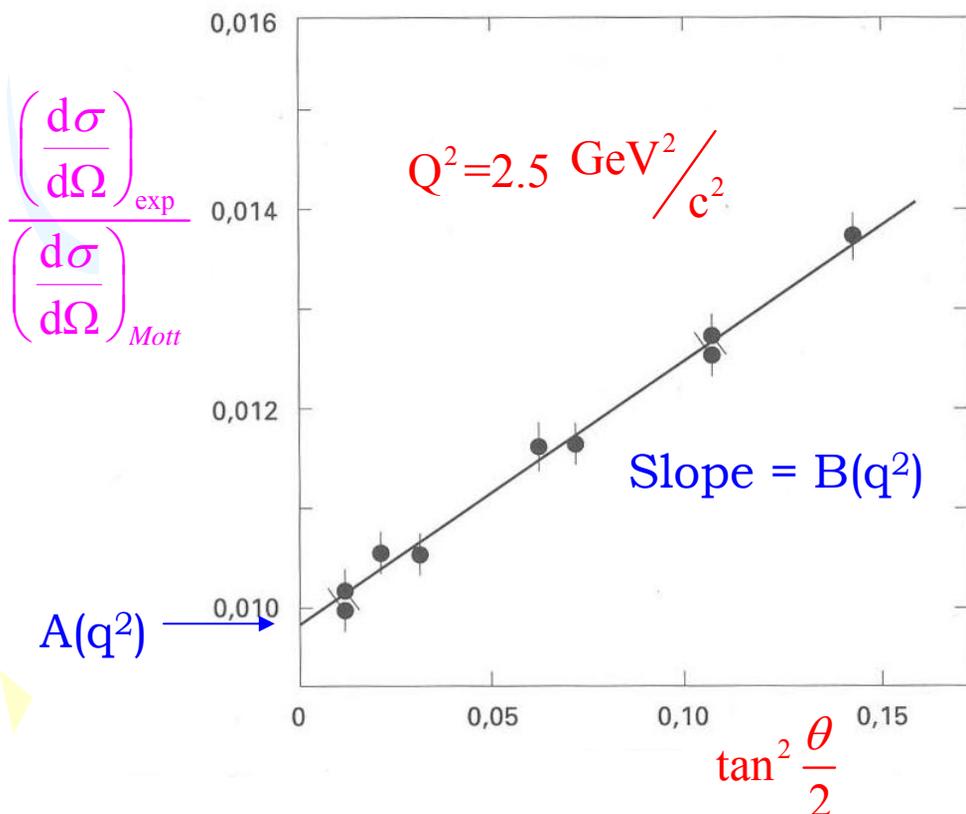


L'elettrone deve fare uno spin-flip, che non può essere fatto se il protone ha spin zero.

Sezione d'urto di Rosenbluth

- La sezione d'urto di Mott può essere migliorata introducendo nel calcolo anche lo spin del protone, considerato come una particella puntiforme di Dirac di spin $\frac{1}{2}$.
- L'elettrone interagirà pertanto sia con la carica che con il momento magnetico del protone (che sappiamo essere diverso da quello previsto da Dirac per una particella puntiforme).
- Questo dà luogo a due fattori di forma, uno elettrico ed uno magnetico. Il calcolo esplicito fu fatto da Rosenbluth.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosem.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[A(q^2) + B(q^2) \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$



Momento magnetico

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Momento magnetico di una particella con carica q , massa m e momento angolare orbitale L

$$\vec{\mu} = g \frac{qh}{2m} \vec{S}$$

S =spin; g =rapporto giromagnetico. Classicamente $g=1$

- La teoria di Dirac prevede che l'elettrone abbia $g=2$ (ed ovviamente spin $1/2\hbar$)

$$\mu_e = \frac{eh}{2m_e} \approx 5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \quad \text{Magnetone di Bohr}$$

- Sostituendo nella formula la massa dell'elettrone con la massa del protone, abbiamo il magnetone nucleare

$$\mu_N = \frac{eh}{2m_N} \approx 3.1525 \times 10^{-8} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

- I valori misurati del momento magnetico del protone e del neutrone sono:

$$\mu_p = \frac{g_p}{2} \cdot \mu_N = +2.79 \cdot \mu_N ; \quad \mu_n = \frac{g_n}{2} \cdot \mu_N = -1.91 \cdot \mu_N$$

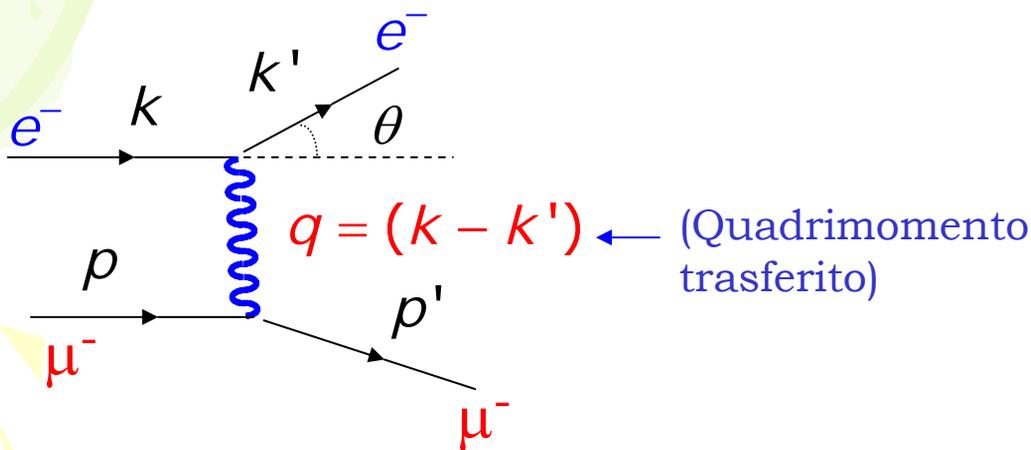
- Se fossero state due particelle di Dirac avremmo avuto:

$$\mu_p = \mu_N \quad ; \quad \mu_n = 0$$

- Quindi la parte anomala del momento magnetico, espressa in termini di magnetone nucleare, vale:

$$\kappa_p = 1.79 \quad ; \quad \kappa_n = -1.91$$

Scattering elastico elet.-muone



- L'interazione è elettromagnetica. Il diagramma di Feynman fondamentale è dato dallo scambio di un solo fotone.
- L'elemento di matrice del processo si ottiene considerando l'interazione corrente-corrente, tra la corrente di Dirac dell'elettrone e quella del muone.

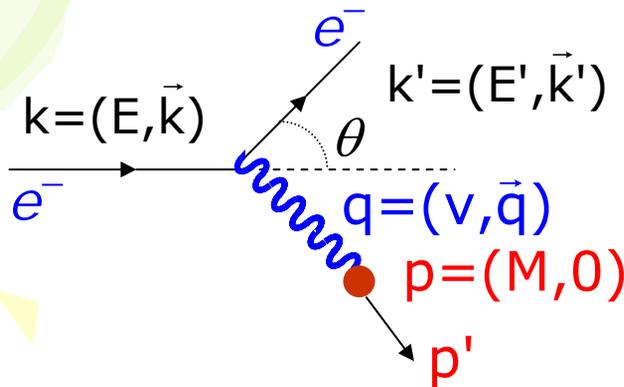
$$M_{fi} = [\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] \frac{e^2}{q^2} [\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)]$$

- Per trovare la sezione d'urto occorre fare il modulo quadro di M_{fi} . Dato che il proiettile (elettrone) ed il bersaglio (muone) non sono polarizzati, occorre mediare sugli spin dello stato iniziale e sommare su quelli dello stato finale.

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m^2(p' \cdot p) - M^2(k' \cdot k) + 2m^2 M^2]$$

m = massa dell'elettrone; M = massa del muone

Scattering elastico elet.-muone



Variabili cinematiche nel sistema di riferimento in cui il muone è fermo

- Valutiamo di nuovo M_{fi}^2 nel sistema di riferimento in cui il muone è fermo, trascurando la massa dell'elettrone. Ricordiamo che:

$$q = k - k' = p' - p \Rightarrow p' = k - k' + p$$

$$\Rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[-\frac{1}{2} q^2 (k \cdot p - k' \cdot p) + 2(k' \cdot p)(k \cdot p) + \frac{1}{2} M^2 q^2 \right]$$

- Sperimentalmente si misurano soltanto le grandezze relative all'elettrone (Energia (E, E') ed angolo di scattering θ), le quali inserite in M_{fi}^2 , danno:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} 2EE'M^2 \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- Per ottenere la sezione d'urto differenziale per lo scattering dell'elettrone nell'angolo solido $d\Omega$ e di energia compresa nell'intervallo E' e $E'+dE'$, occorre aggiungere all'elemento di matrice M_{fi}^2 , il fattore relativo allo spazio delle fasi

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)$$

Scattering elastico elet.-muone

- Nello scattering elastico vi è una relazione tra l'energia e l'angolo dell'elettrone diffuso:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}$$

- Integrando la sezione d'urto differenziale rispetto ad E' , si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- Questa può essere riscritta nella forma seguente:

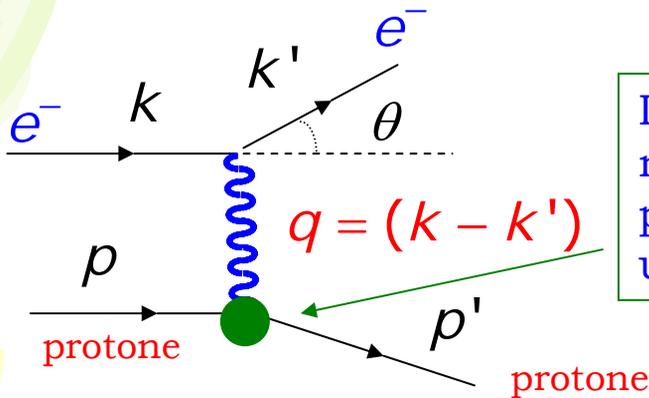
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[1 - \frac{q^2}{2M^2} \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

dove

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]}$$

- L'equazione della sezione d'urto differenziale gioca un ruolo molto importante dello studio della struttura del protone attraverso lo scattering elettrone protone.
- Si tenga inoltre presente che il termine $\sin^2(\theta/2)$ nella sezione d'urto di Mott deriva dall'interazione dello spin dell'elettrone con il momento magnetico del muone.

Scattering elastico elet.-protone



Il vertice protone-fotone non è il vertice di Dirac perché il protone non è una particella puntiforme

- L'elemento di matrice è sempre dato dall'interazione corrente-corrente

$$M_{fi} = J_{\mu}^{elec.} \frac{1}{q^2} J_{prot.}^{\mu}$$

- Corrente dell'elettrone: $J_{\mu}^{elec.} = -e \cdot \bar{u}(k') \cdot \gamma_{\mu} \cdot u(k)$

- Il protone deve obbedire all'equazione di Dirac, tuttavia la struttura complicata del protone si manifesta nel vertice di accoppiamento fotone-protone che è diverso da quello fotone-elettrone. La corrente del protone si scrive come:

$$J_{prot.}^{\mu} = e \cdot \bar{u}(p') \cdot \Gamma^{\mu} \cdot u(p)$$

- J^{μ} deve essere un quadrivettore di Lorentz. La forma più generale che si possa scrivere per Γ^{μ} , seguendo la decomposizione di Gordon, è:

$$\Gamma^{\mu} = \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Int. elettrica}}}{F_1(q^2)} \gamma^{\mu} + \frac{\kappa}{2M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Int. magnetica}}}{F_2(q^2)} i\sigma^{\mu\nu} q_{\nu} \right]$$

Sezione d'urto di Rosenbluth

$$\Gamma^\mu = \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right]; \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

- $\kappa=1.79$ magnetoni nucleari; è la parte anomala del momento magnetico ($\mu_p = 2.79$ magnetoni nucl.)

- M è la massa del protone

N.B. non ci sono termini in γ^5 perché l'interazione elettromagnetica conserva la parità.

- Se $q^2 \rightarrow 0$, il fotone virtuale ha una grande lunghezza d'onda e non è sensibile ai dettagli della struttura del protone; quindi esso viene visto come una particella puntiforme.
- In questi limiti si deve avere:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} F_1(q^2) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{q^2 \rightarrow 0} F_2(q^2) = 1$$

- Dall'ampiezza si può calcolare la sezione d'urto, sommando sugli spin finali e mediando su quelli iniziali; in questo modo si ottiene la sezione d'urto di Rosenbluth

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ros.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \cdot \left\{ \left[F_1(q^2) - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2(q^2) \right] - \frac{q^2}{2M} \left[F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2) \right] \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}$$

Fattori di forma del protone

- Se il protone fosse puntiforme come il muone, κ sarebbe nullo e $F_1(q^2)$ sarebbe uguale a 1 per tutti i valori di q^2 , in modo da riottenere il vertice di Dirac. In questo modo riotteniamo le formule trovate in precedenza per lo scattering elettrone-muone.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[1 - \frac{q^2}{2M^2} \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

- La formula può essere scritta in un altro modo introducendo i fattori di forma elettrico e magnetico del protone:

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} \cdot F_2 \quad ; \quad G_M = F_1 + \kappa \cdot F_2$$

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} G_E = 1 \quad ; \quad \lim_{q^2 \rightarrow 0} G_M = 1 + \kappa = \mu_p$$

(μ_p = momento magnetico del protone)



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[\frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- In pratica la formula è riscritta usando la variabile:

$$Q^2 = -q^2$$

$$\text{N.B. } Q^2 > 0$$



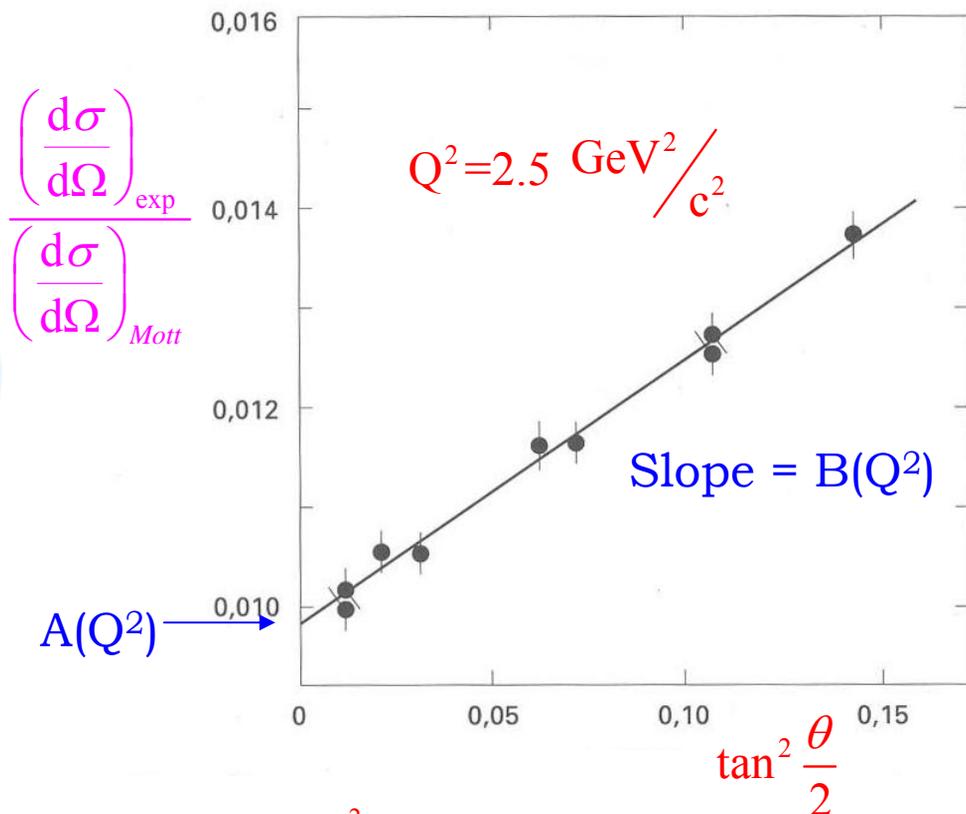
$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ros.}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}} = A(Q^2) + B(Q^2) \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Dove:

$$A = \frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} \quad ; \quad B = \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2$$

Misura dei fattori di forma

- I fattori di forma G_E e G_M possono essere determinati facendo una serie di esperimenti a diversi valori di q^2 e misurando la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ in funzione di θ



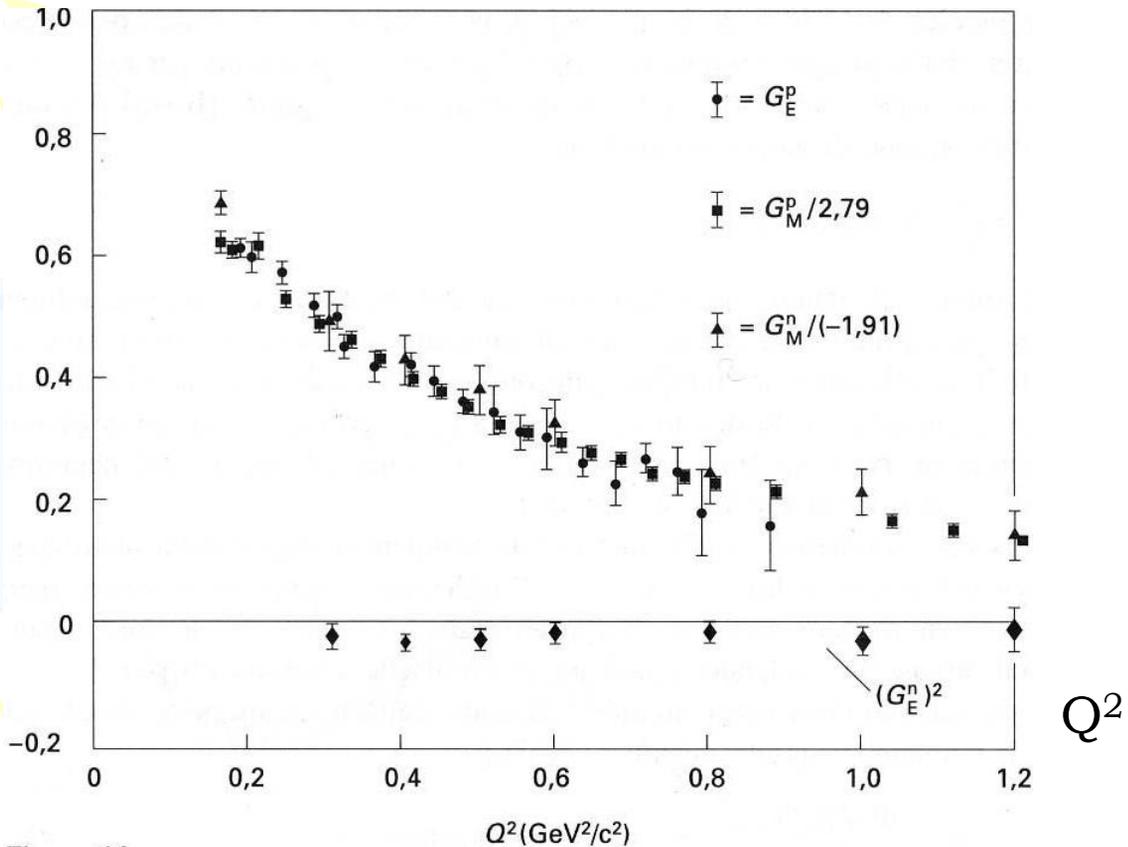
$$A = \frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} ; \quad B = \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2$$

- Il fattore di forma magnetico, ad un dato valore di q^2 , viene determinato direttamente dalla slope, e quindi da questo risultato, e dal valore dell'intercetta, si ricava il fattore di forma elettrico.

Legge di scala dei fattori di forma

- I risultati sperimentali mostrano che i fattori di forma del protone e del neutrone sono legati da una relazione molto semplice:

$$G_E^p(q^2) = \frac{G_M^p(q^2)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(q^2)}{\mu_n} \quad ; \quad G_E^n(q^2) = 0$$



- L'andamento può essere descritto da una formula di tipo dipolo:

$$G(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{m^2}\right)^{-2}$$

dove $m^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$

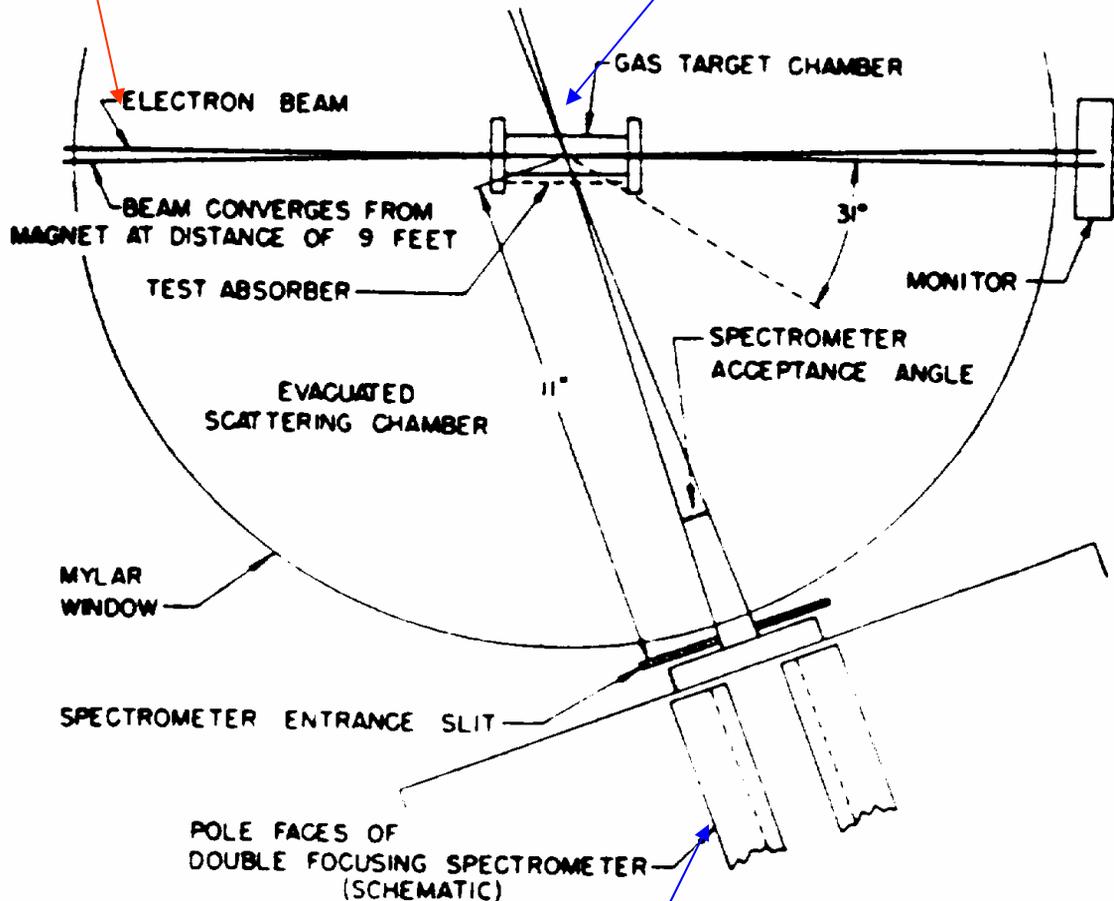
- La formula di dipolo è compatibile con la distribuzione di carica esponenziale:

$$\rho \approx e^{-mr} \Rightarrow \sqrt{r^2} \approx 0.8 \text{ fm}$$

Setup di Hofstadter (1956)

Fascio: elettroni da 188 MeV

Bersaglio: protoni o elio



Spettrometro per misurare l'angolo dell'elettrone diffuso. L'angolo θ varia da 35° a 138°

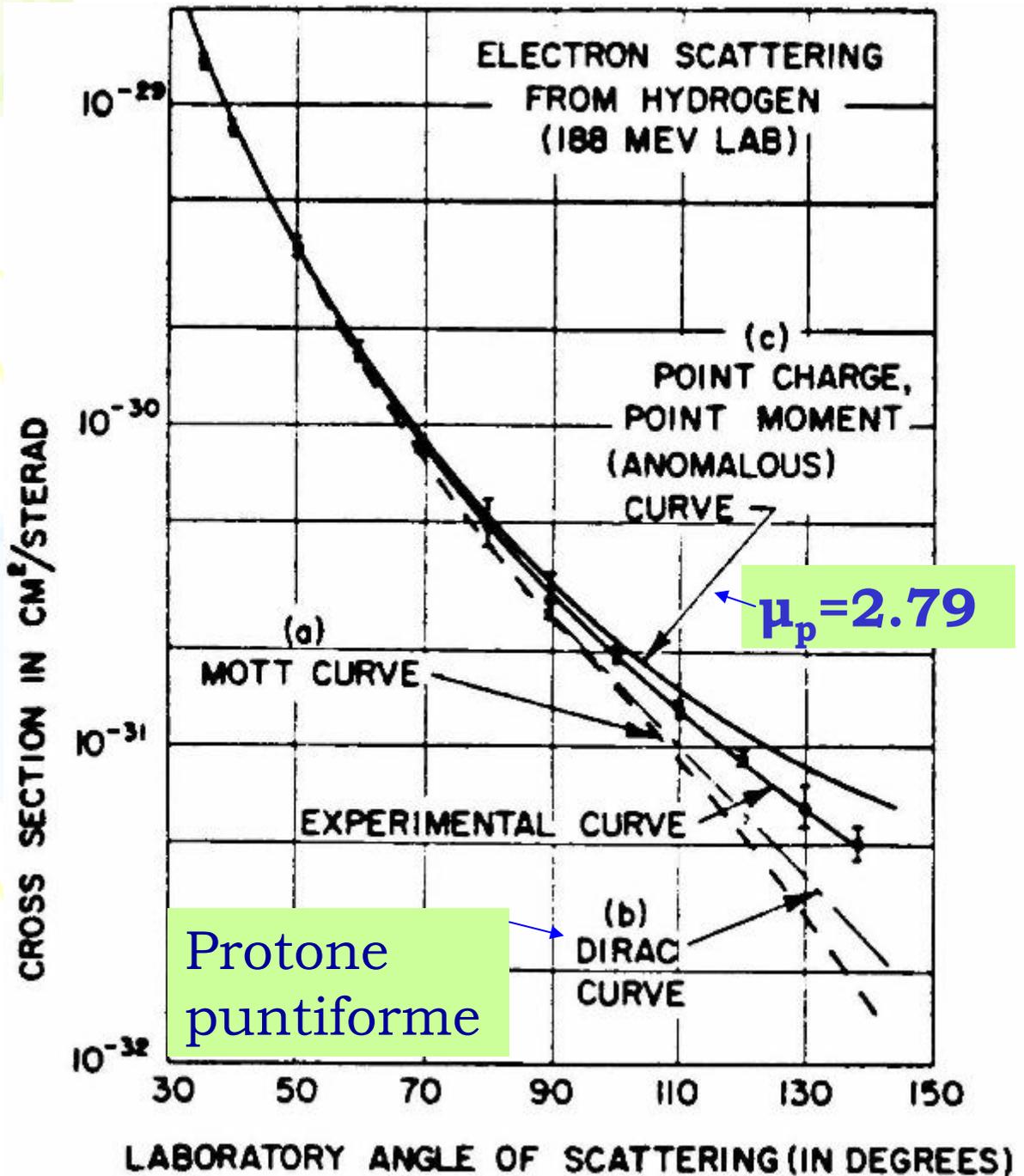
$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

Nello scattering elastico E' e θ non sono variabili indipendenti

$$Q^2 = \frac{4EE'}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Ad angoli diversi corrisponde un Q^2 diverso

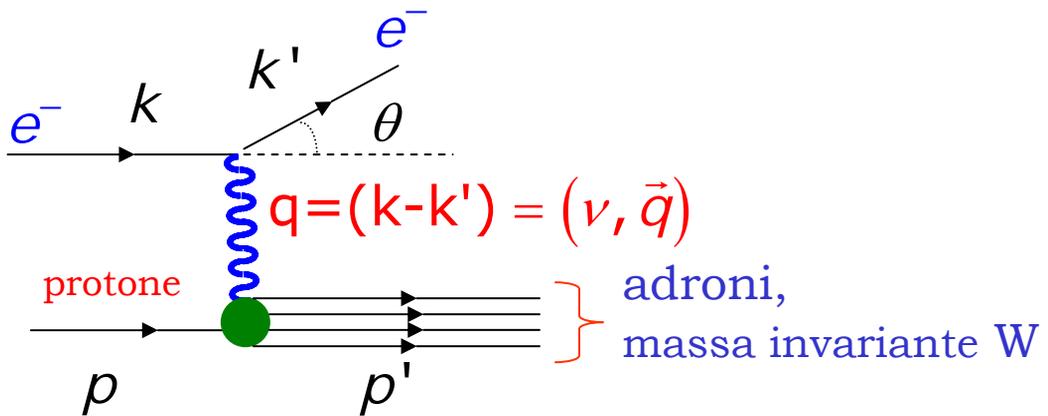
Risultati di Hofstadter



- I dati suggeriscono che il protone ha una struttura. Hofstadter e McAllister ricavarono che il protone ha un raggio medio di:

$$\langle r \rangle = (0.74 \pm 0.24) \times 10^{-13} \text{ cm}$$

Scattering anelastico elettrone-protone

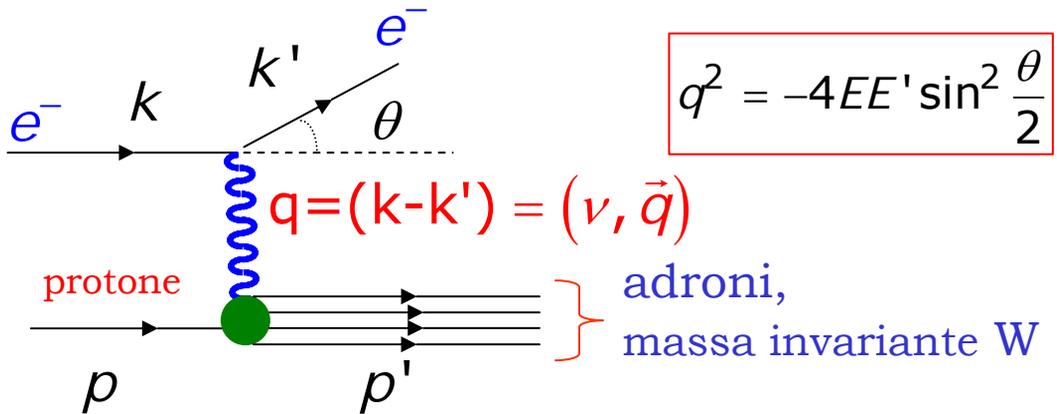


- Nello scattering elastico le particelle dello stato iniziale, elettrone e protone, conservano la propria identità.
- Se aumentiamo il quadrimpulso trasferito, q , dall'elettrone al protone (e quindi l'energia trasferita ν), il protone può essere eccitato in un suo stato risonante, ad esempio la Δ^+ , ritornando poi nel suo stato fondamentale emettendo un pione.



- Aumentando ancora di più il q^2 trasferito, il protone perde completamente la sua identità e vengono prodotti al suo posto molti adroni.
- In ogni caso assumiamo che il meccanismo fondamentale dell'interazione sia lo scambio di un solo fotone.
- Sperimentalmente si misurano soltanto le grandezze relative all'elettrone, ovvero la sua energia e l'angolo di diffusione.
- La sezione d'urto misurata in questo modo viene chiamata sezione d'urto inclusiva.

Relazioni cinematiche



$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$q = (k - k') = (\nu, \vec{q})$$

adroni,
massa invariante W

$$p + k = p' + k' \quad \text{Conservazione del quadrimpulso}$$

$$q = k - k' = p' - p \quad \text{Quadrimpulso trasportato dal fotone}$$

$$q = (\nu, \vec{q}) ; \quad p = (M, 0) \quad \leftarrow \quad \text{Il protone è fermo nel laboratorio}$$

$$p' = p + q \quad \Rightarrow \quad p'^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q$$

- Consideriamo lo scattering elastico. In questo caso il protone rimane un protone, quindi $p'^2 = M^2$

$$M^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q \quad \Rightarrow \quad \nu = -\frac{q^2}{2M}$$

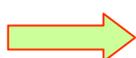
- Nello scattering elastico vi è una relazione tra l'energia trasferita ν , misurata nel laboratorio, ed il quadrimpulso trasferito q^2

- Consideriamo ora lo scattering anelastico, in questo caso ν e q^2 sono variabili indipendenti:

$$p'^2 = W^2 \quad W \text{ è la massa invariante degli adroni prodotti}$$

$$p \cdot q = M\nu \quad \text{N.B. } M \text{ e } \nu \text{ sono valutati nel laboratorio}$$

$$Q^2 = -q^2 \quad \text{È una definizione, in questo modo } Q^2 > 0$$



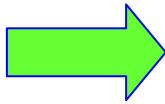
$$Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2$$

Relazioni cinematiche: x e Q^2

- Introduciamo una nuova variabile cinematica, x , che sarà molto importante nello studio dello scattering profondamente anelastico.

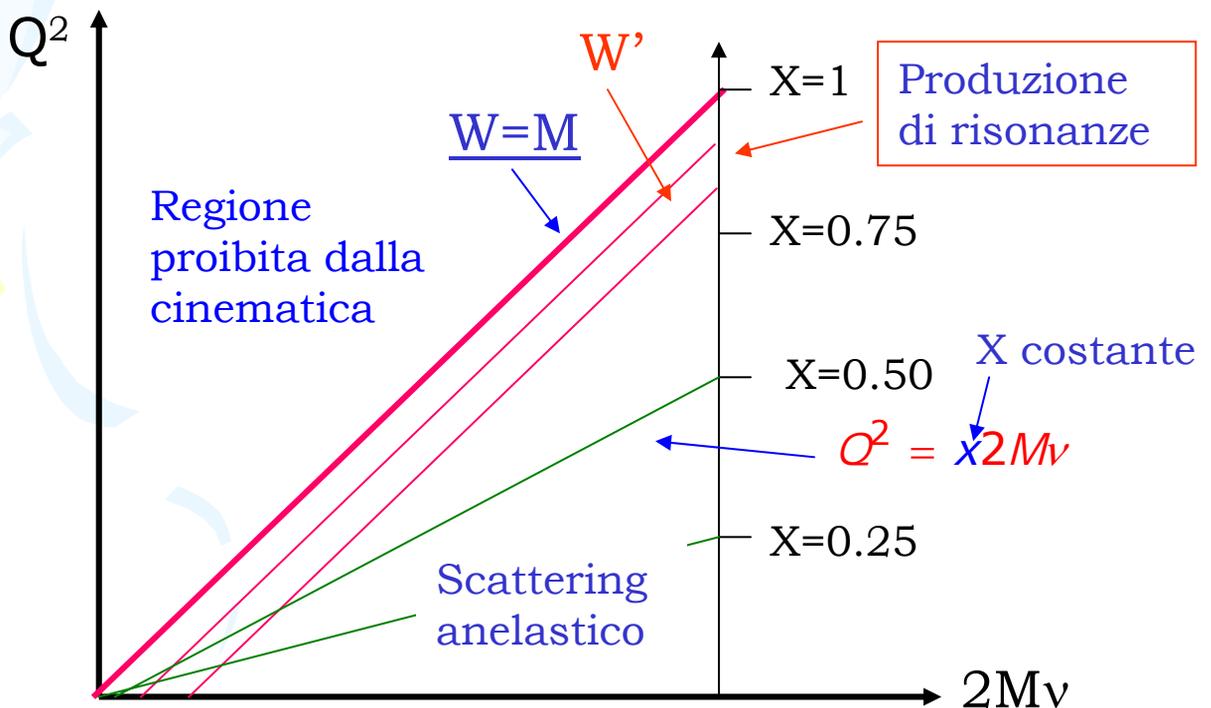
$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

(N.B. nello scattering elastico $x = 1$)



$$Q^2 = x2M\nu$$

- Le regioni nelle quali sia Q^2 che ν sono grandi si chiamano di scattering profondamente anelastico. Queste regioni sono molto importanti perché è dove si rivela la struttura interna del protone, il quale consiste di partoni puntiformi.



$$W'^2 - M^2$$

$$Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2$$

Invarianza di scala

- Consideriamo un fattore di forma di tipo dipolo:

$$F(Q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{\Lambda_{nucleo}^2}\right)^2}$$

- In questa espressione Λ_{nucleo} stabilisce la scala del fenomeno che si sta studiando; il comportamento delle sezioni d'urto, attraverso il fattore di forma, dipende dai valori relativi di Q^2 e della scala Λ_{nucleo}

$$\text{Se } Q^2 \ll \Lambda_{nucleo}^2 \Rightarrow F(Q^2) \rightarrow 1$$

- In questa situazione il fotone ha una lunghezza d'onda molto lunga e non è sensibile ai dettagli della struttura interna del bersaglio; la diffusione avviene come se questi fosse puntiforme.
- All'aumentare di Q^2 la sezione d'urto elastica puntiforme diminuisce attraverso il fattore $1/Q^2$
- Tuttavia, se immaginiamo che ci sia un'altra scala $\Lambda_{nucleone}$, ma $Q^2 \ll \Lambda_{nucleone}^2$, non verrà rivelata nessuna struttura interna del nucleone. Avremo in questo modo una diffusione quasi elastica da parte dei nucleoni costituenti il nucleo. Il quasi elastico si riferisce al fatto che i nucleoni non sono liberi e risentono del moto di Fermi.
- Lo scattering quasi elastico avviene per $x \approx 1/N$, dove N è il numero di costituenti del nucleo.
- Il fattore di forma della sezione d'urto quasi elastica è indipendente da Q^2 , cioè non dipende dalla scala (invarianza di scala; scaling)

Scattering elec. 400 MeV su α

N.B. Q^2 aumenta all'aumentare di θ

$$x' = Q^2 / 2m_p v = 1$$

$$x' = Q^2 / 2(4m_p) v$$

$$x = Q^2 / 2m_\alpha v$$

$$\Rightarrow x' = 4x = 1$$

$$\Rightarrow x = 0.25$$

Il picco anelastico diminuisce poco all'aumentare di Q^2

Il picco elastico diminuisce all'aumentare di Q^2

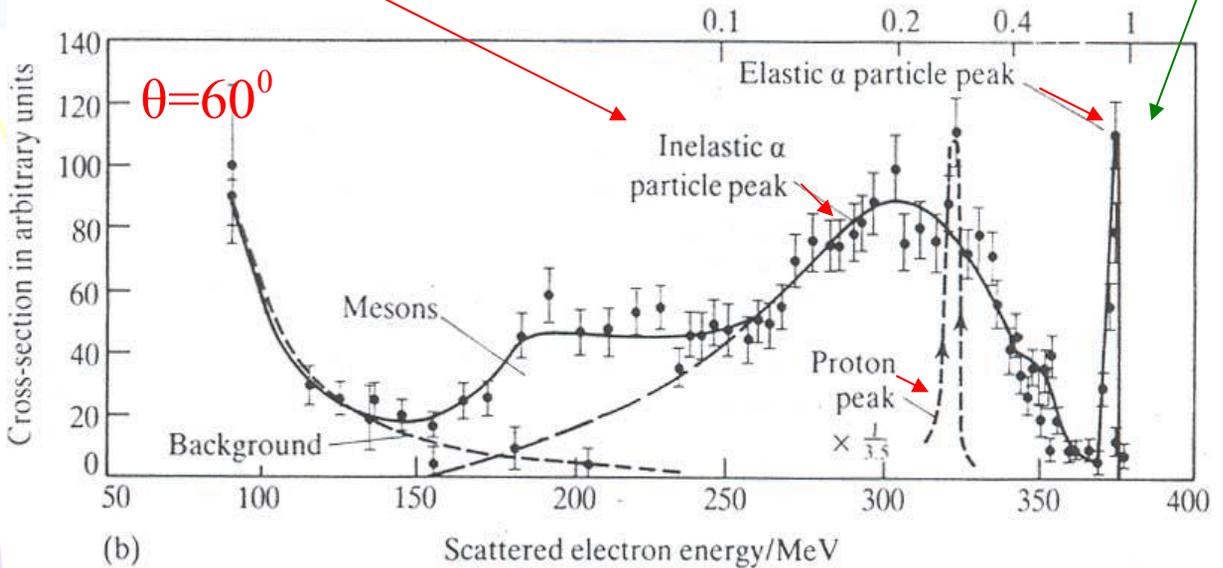
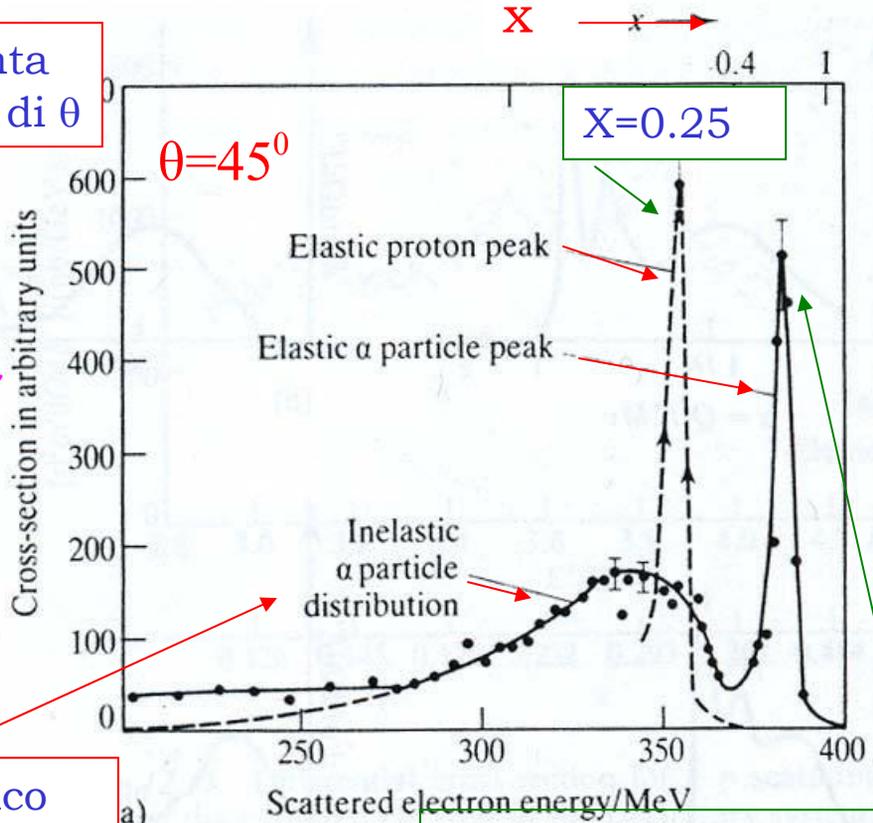
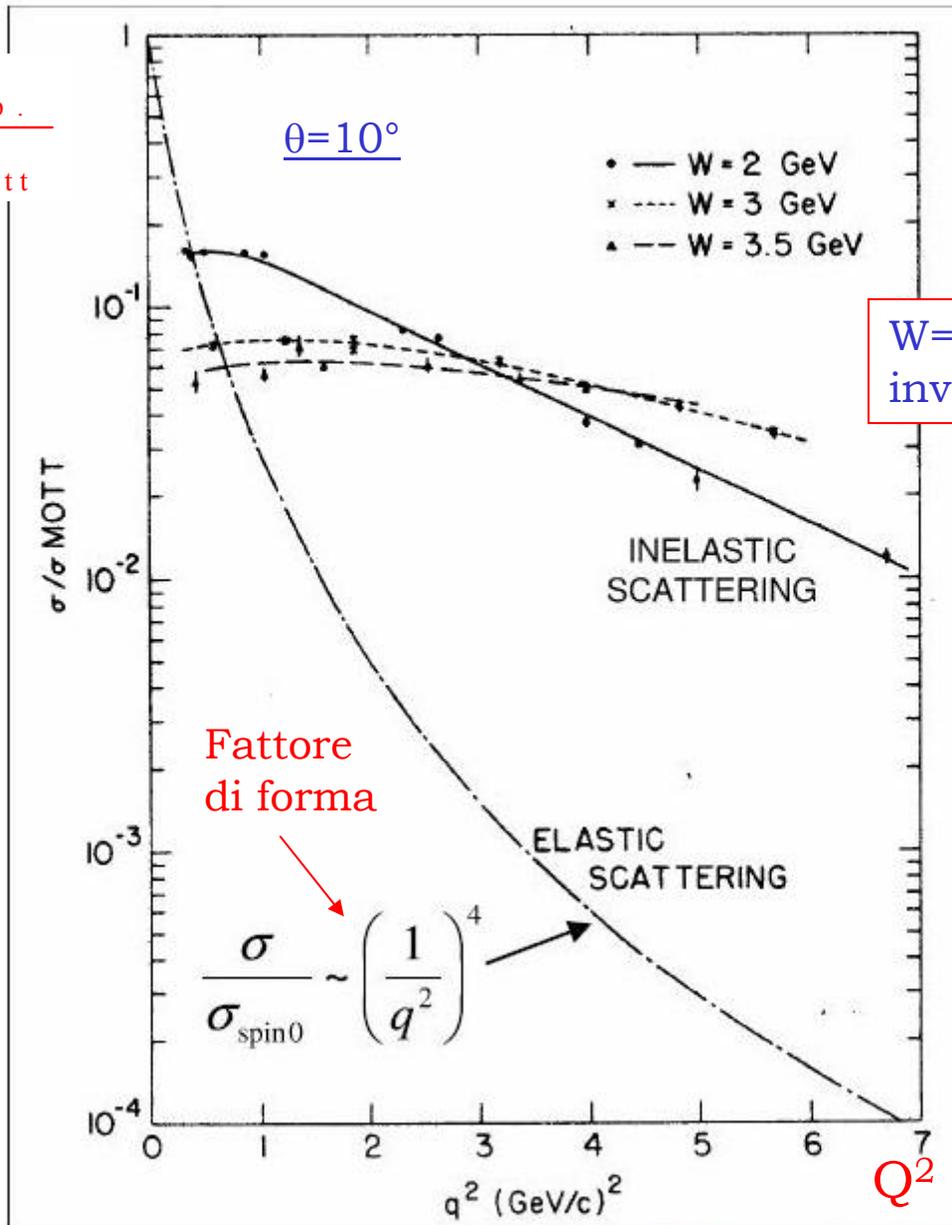


Figure 12.11 Cross-sections for the elastic and inelastic scattering of 400 MeV electrons by ${}^4\text{He}$ nuclei as a function of x . The scattering angle of the electrons in the laboratory system is 45° in part (a) and 60° in part (b). (After Hofstadter R 1956 *Rev Mod Phys* 28 214.)

Confronto tra le sezioni d'urto elastica e anelastica

$$\frac{\sigma_{\text{exp.}}}{\sigma_{\text{Mott}}}$$



M. Breidenbach et al.,
Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 935

- L'energia dell'elettrone incidente varia tra 7 e 17 GeV
- I dati si discostano chiaramente dalla sezione d'urto elastica prevista, indicando l'esistenza di particelle puntiformi all'interno del protone.

Scattering anelastico elettrone-protone: sezione d'urto

- Nello scattering elastico elettrone-muone si ha la formula seguente per la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)$$

- Integrando rispetto all'energia dell'elettrone diffuso si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- Introducendo i fattori di forma elettrico, G_E , e magnetico, G_M , si ottiene la formula di Rosenbluth per la sezione d'urto dello scattering elastico elettrone-protone

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[\frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- In analogia con queste formule, la sezione d'urto anelastica differenziale si può scrivere come:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2(Q^2, \nu) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- Dato che lo scattering è anelastico, non vi è più una relazione tra ν e Q^2 , per cui le due funzioni W_1 e W_2 , che rimpiazzano i fattori di forma, sono funzioni di due variabili indipendenti. **W_1 e W_2 vengono comunemente chiamate funzioni di struttura.**

Scaling di Bjorken

- La sezione d'urto del processo di diffusione può essere scritta come:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \cdot S$$

Dove S rappresenta la struttura del bersaglio.

- Nel caso dello scattering elastico $e-\mu$, dove sia e che μ sono senza struttura, si ha:

$$S_{e\mu \rightarrow e\mu} = \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

dove M è la massa del muone. La δ esprime il fatto che ν e Q^2 non sono variabili indipendenti.

- Nel caso della diffusione anelastica $ep \rightarrow eX$, ν e Q^2 sono variabili indipendenti, ed abbiamo pertanto:

$$S_{ep \rightarrow eX} = W_2(Q^2, \nu) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- La struttura complessa del protone è riflessa dalla presenza di due funzioni di struttura W_1 e W_2 , che per valori di Q^2 inferiori a circa 1 (GeV/c)^2 , sono funzioni sia di Q^2 che di ν .
- Bjorken ipotizzò che, se il protone fosse composto da particelle puntiformi, lo scattering quasi elastico dell'elettrone con queste particelle, doveva esibire un'invarianza di scala, cioè la sezione d'urto doveva essere indipendente da Q^2 , e dipendere solo dal rapporto $x = Q^2/2M\nu$

Linac e^\pm a SLAC

A SLAC, un laboratorio vicino San Francisco, entra in funzione nel 1967 il "mostro", un acceleratore lineare di elettroni da 20 GeV lungo 2 miglia.



Spettrometro per la misura dell'angolo e dell'energia dell'elettrone diffuso

Apparato sperimentale

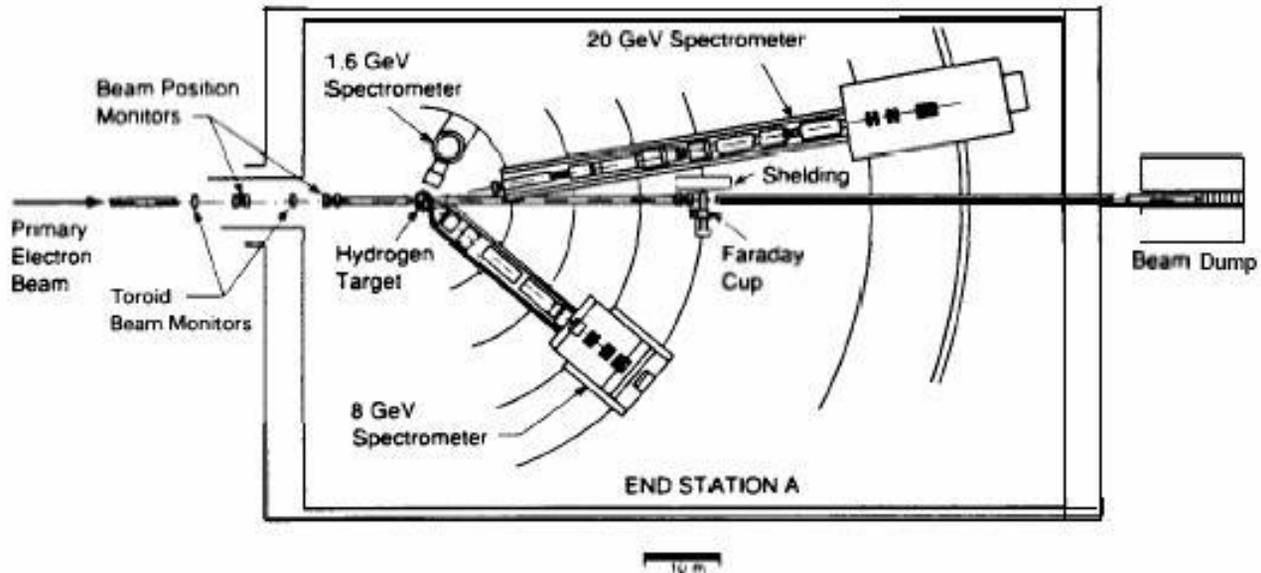


Fig. 14. Layout of spectrometers in End Station A. All three spectrometers can be rotated about the pivot. The 20 GeV spectrometer can be operated from about $1\frac{1}{2}^\circ$ to 25° , the 8 GeV from about 12° to over 90° . The 1.6 GeV spectrometer coverage is from $\sim 50^\circ - 150^\circ$.

Vi erano tre spettrometri per misurare l'angolo e l'energia dell'elettrone diffuso

Nel lavoro di Friedman, Kendal, Taylor et al. del 1969, si riporta la misura della sezione d'urto differenziale anelastica, misurata a $\theta=6^\circ$ e 10° , e l'energia dell'elettrone incidente variava da 7 a 17 GeV. Il momento trasferito Q^2 arrivava fino a 7.4 GeV^2

Sezione d'urto doppio differenziale

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$$

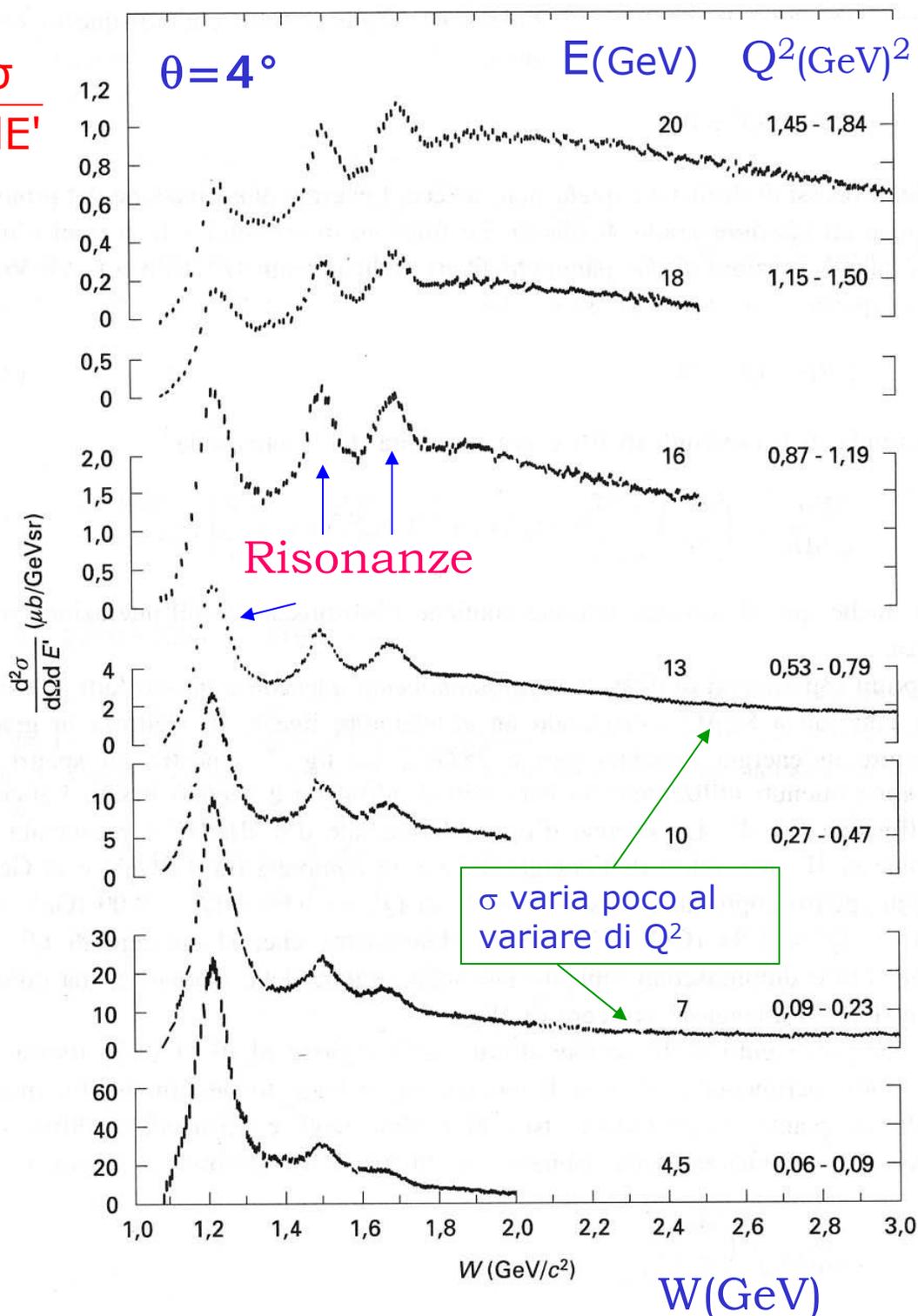
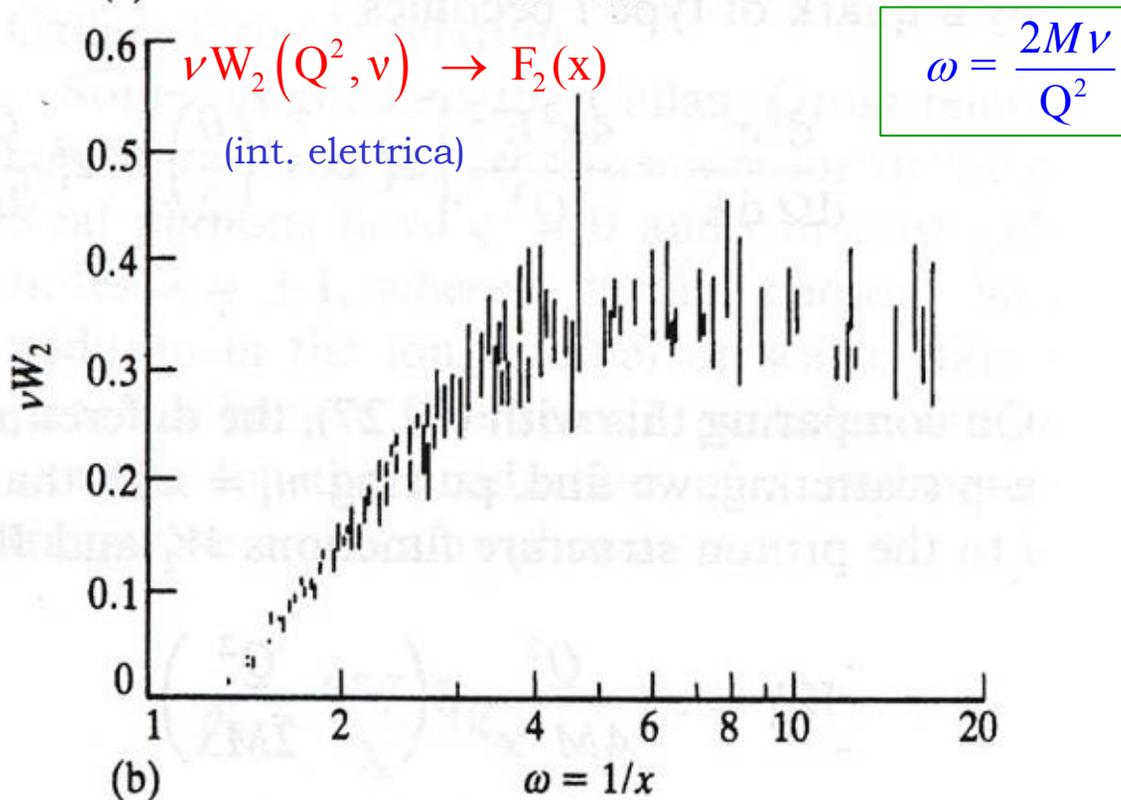
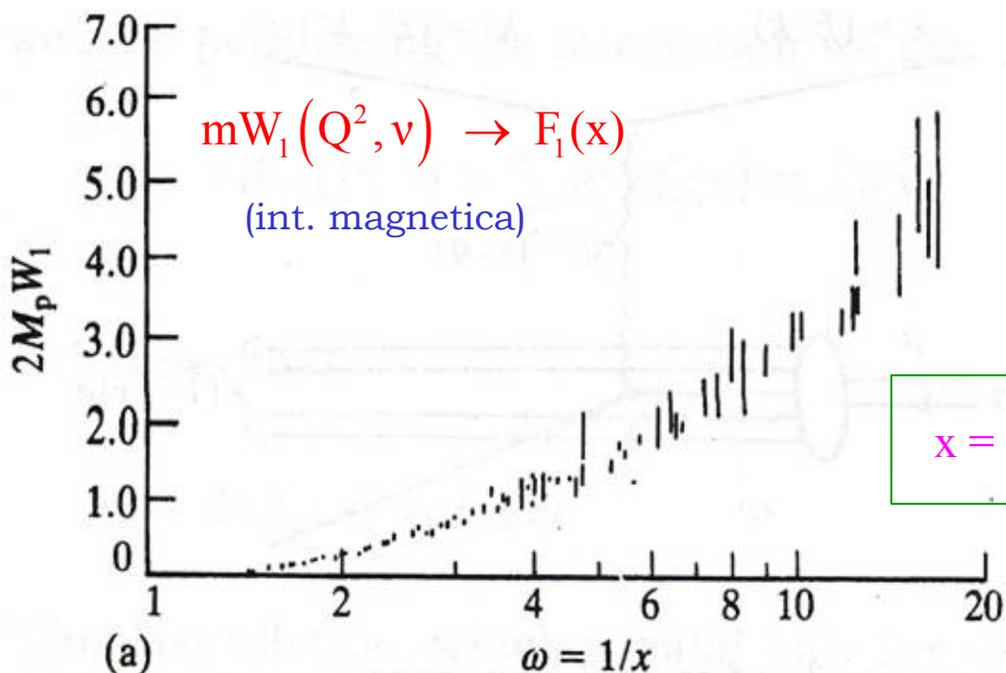


Figura 7.2

La diffusione elettrone-protone: gli spettri di eccitazione misurati nella diffusione profondamente anelastica elettrone-nucleone sono mostrati in funzione della massa invariante W [St75]. Si noti l'uso di differenti scale sull'asse delle ordinate. Le misure sono state effettuate ad un angolo di diffusione fisso $\theta = 4^\circ$. Il valore medio dell'intervallo in Q^2 coperto dalla misura cresce all'aumentare dell'energia del fascio E . Le risonanze (in particolare la prima a $W = 1.232 \text{ GeV}/c^2$) diventano sempre meno pronunciate, mentre la porzione di spettro continuo ($W \gtrsim 2.5 \text{ GeV}/c^2$) diminuisce solo debolmente.

Evidenza dello scaling



Si vede sperimentalmente che F_1 e F_2 sono delle funzioni monotone di una sola variabile

Evidenza dello scaling

$$\nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x)$$

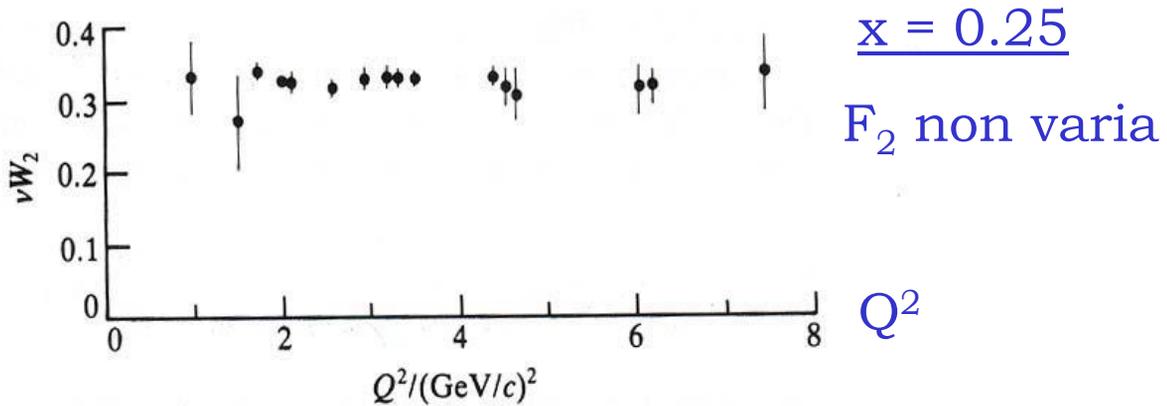


Figure 12.15 The proton structure function νW_2 plotted as a function of Q^2 for the fixed value of $x = 0.25$ and hadron masses greater than 2 GeV. The structure function is independent of Q^2 . (After Friedman J I and Kendall H W 1972 *Ann Rev Nucl Sci* **22** (203).)

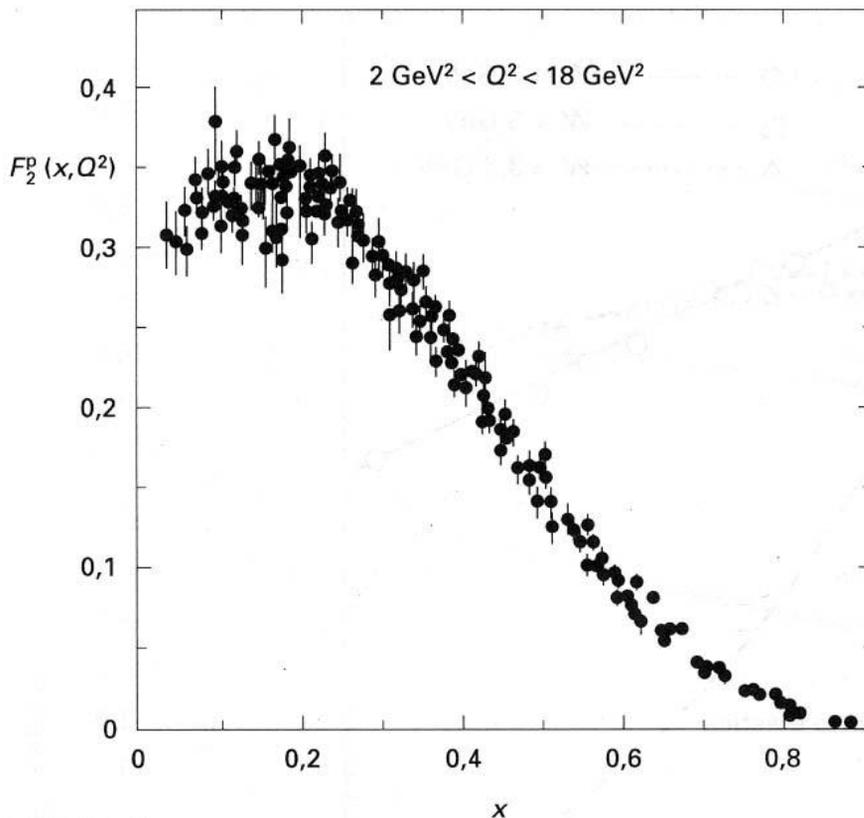


Figura 7.4

La funzione di struttura F_2 del protone in funzione di x , per valori di Q^2 compresi fra 2 $(\text{GeV}/c)^2$ e 18 $(\text{GeV}/c)^2$ [At82].

Interpretazione dello scaling

- La prima interpretazione "fisica" dello scaling di Bjorken fu data da Feynman nel 1969. Feynman ipotizzò che il protone fosse formato da particelle puntiformi chiamate **PARTONI**.
- Feynman postulò che ciascun partone trasportasse una frazione x dell'energia e della quantità di moto del protone.
- Ci sono diversi tipi di partoni. Un partone di tipo i ha il quadrimpulso:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = x \cdot p \quad (P \text{ è il quadrimpulso del protone}) \\ m_i = x \cdot M \quad (M \text{ è la massa del protone}) \end{array} \right.$$

- Si può dimostrare che la frazione "x" del momento del partone è proprio uguale alla variabile "x" di Bjorken:

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (\text{Ricordiamo che } \nu \text{ è l'energia trasferita dall'elettrone al protone nel sistema del laboratorio})$$

- Da questa formula discende immediatamente che, mettendo $m = xM$, abbiamo:

$$\nu = \frac{Q^2}{2xM} = \frac{Q^2}{2m}$$

che è la relazione che lega ν e Q^2 per uno scattering elastico su una particella puntiforme di massa m

Dimostrazione:

- Consideriamo un sistema di riferimento in cui il protone ha una quantità di moto così grande che tutte le masse in gioco e tutti i momenti trasversi possono essere trascurati (infinite momentum frame).
- In questo S.R. il quadrimpulso del protone è:

$$p \equiv (E, \vec{p}) = (p, 0, 0, p)$$

- Il protone è visto come uno sciame di partoni, tutti con impulso trasverso nullo rispetto alla direzione di volo del protone, ed ognuno di essi avente una frazione x della quantità di moto, della massa e dell'energia del protone.

$(xp+q)$ Quadrimpulso acquistato da partone dopo l'urto

$$(xp+q)^2 \approx m^2 \approx 0 \quad (\text{massa del partone}) \Rightarrow x^2 p^2 + 2xp \cdot q + q^2 = 0$$

$$p^2 = M^2 \approx 0 \quad (\text{massa del protone che può essere trascurata})$$

$$\Rightarrow x = -\frac{q^2}{2p \cdot q}$$

$p \cdot q$ è un invariante relativistico e può essere calcolato in qualsiasi sistema di riferimento, ad esempio nel sistema del laboratorio dove il protone è fermo

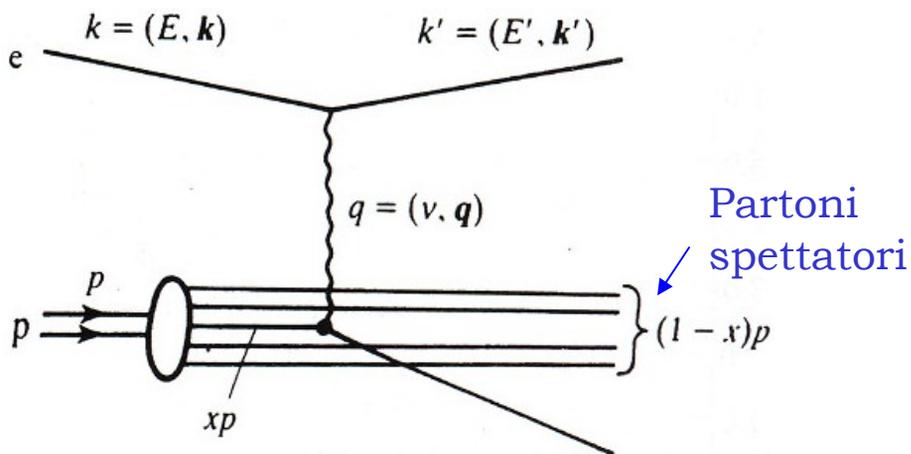
$$p = (M, 0, 0, 0)$$

Mentre per il fotone si ha: $q = (\nu, \vec{q})$ dove $\nu = E - E'$ è l'energia trasferita dall'elettrone al protone nel sistema del laboratorio.

$$\Rightarrow p \cdot q = M\nu \quad \Rightarrow \left[\nu = \frac{p \cdot q}{M} \right]$$

$$\Rightarrow x = -\frac{q^2}{2M\nu} = -\frac{Q^2}{2M\nu} \quad \text{c.v.d.}$$

Scattering elettrone-partone



- Assumendo che i partoni siano particelle puntiformi di spin $\frac{1}{2}$ possiamo scrivere la sezione d'urto differenziale dello scattering elastico elettrone-partone partendo dalla formula dello scattering elettrone-muone.
- Nella formula dobbiamo rimpiazzare α con αe_i , dove e_i è la carica frazionaria del partone.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[e_i^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e_i^2 \frac{Q^2}{2m_i^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

- Se confrontiamo questa formula con quella della sezione d'urto anelastica elettrone-protone:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2(Q^2, \nu) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

abbiamo, ricordando che $m_i = xM$:

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4x^2 M^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right) \quad ; \quad W_2^i = e_i^2 \cdot \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

Relazione di Callan-Gross

- I partoni che non partecipano allo scattering si comportano da "spettatori".
- I contributi dei singoli quark alla sezione d'urto differenziale dello scattering inelastico si sommano incoerentemente (non c'è interferenza, si sommano le sezioni d'urto e non le ampiezze).
- Ogni partone trasporta una frazione x dell'impulso del protone, dove la frazione x può essere diversa da partone a partone. Indichiamo con $f_i(x)$ la probabilità che un partone di tipo i abbia la frazione x dell'impulso del protone.

$$\Rightarrow W_1(Q_2, \nu) = \sum_i \int e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} f_i(x) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) dx$$

$$\Rightarrow MW_1(Q_2, \nu) = \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \equiv F_1(x) \quad [x = Q^2/2M\nu]$$

- analogamente $W_2(Q_2, \nu) = \sum_i \int e_i^2 f_i(x) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) dx$

$$\Rightarrow \nu W_2(Q_2, \nu) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

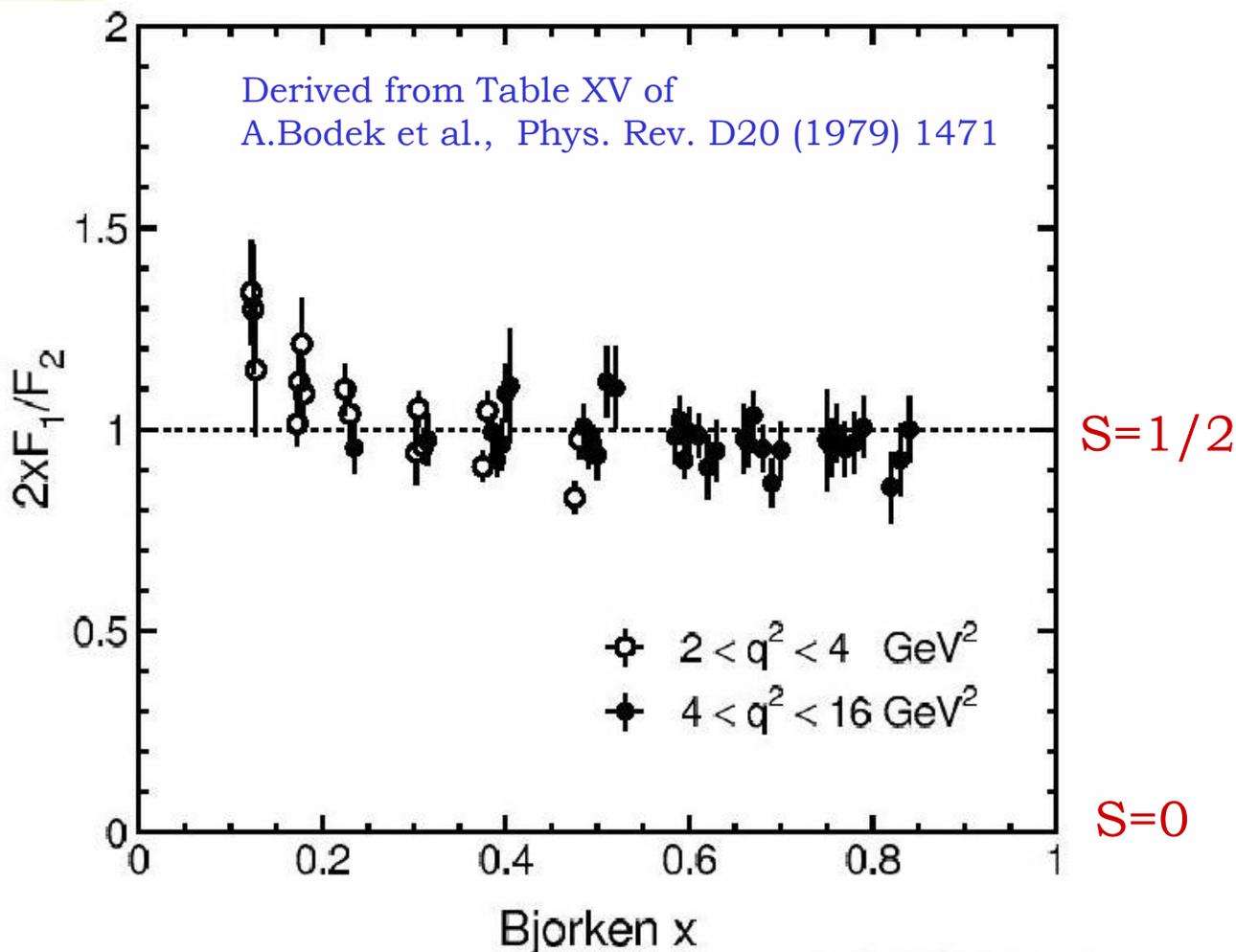
- Confrontando le due relazioni si ha:

$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

Questa si chiama relazione di Callan-Gross ed è valida solo per partoni di spin $1/2$.

Dalla sua verifica sperimentale si ricava che i partoni hanno spin $1/2$

Verifica sperimentale della relazione di Callan-Gross



$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

- I dati supportano la presenza all'interno del protone di particelle puntiformi cariche di spin $1/2$
- Si ricordi che la funzione di struttura F_1 è legata all'interazione magnetica, ed una particella di spin zero non interagisce magneticamente.

Struttura a quark del nucleone

- Lo scaling di Bjorken può essere riassunto nelle relazioni:

$$\begin{cases} MW_1(Q_2, \nu) \rightarrow F_1(x) = \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \\ \nu W_1(Q_2, \nu) \rightarrow F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \end{cases}$$

- I numeri quantici degli adroni derivano dalla loro composizione in quark; tuttavia se aggiungiamo coppie quark-antiquark, i numeri quantici non cambiano. Distinguiamo quindi i quark di valenza dai quark del mare.

- Utilizzando i numeri quantici dei quark u, d e s, possiamo scrivere per F_2 , nello scattering elettrone-protone:

$$F_2^{\text{ep}} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \frac{1}{9} [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\}$$

$u^p(x)$ è la pdf (probability density function) del quark u nel protone, cioè la probabilità che il partone abbia la frazione di impulso del protone compresa tra x e $x+dx$.

- Per lo scattering elettrone-neutrone si può scrivere:

$$F_2^{\text{en}} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \frac{1}{9} [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \frac{1}{9} [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \right\}$$

- I quark u e d formano un doppietto di isospin, quindi per l'invarianza delle interazioni forti per rotazioni nello spazio SU(2) di isospin, ci aspettiamo che:

$$\begin{cases} u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x) \\ d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x) \\ s^p(x) = s^n(x) \equiv s(x) \end{cases}$$

Più vincoli simili per le altre coppie $q\bar{q}$ più pesanti

Quark di valenza e quark del mare

- Per ogni quark possiamo scrivere in generale:

$$q(x) = q_v(x) + q_s(x) \rightarrow \text{sea (mare)}$$

└─┬─> valenza

- Dato che i quark di valenza del protone sono u e d, dobbiamo avere:

$$q_v(x) = 0 \quad \text{per } s, \bar{s}, \bar{u}, \bar{d}$$

quindi nel protone i quark s (e gli altri quark più pesanti) e gli antiquark, devono appartenere al mare, mentre per i quark u e d si ha:

$$u(x) = u_v(x) + u_s(x) \quad ; \quad d(x) = d_v(x) + d_s(x)$$

- Se facciamo la semplificazione che i tre quark leggeri compaiono nel mare con la stessa frequenza e la stessa distribuzione in impulso, abbiamo:

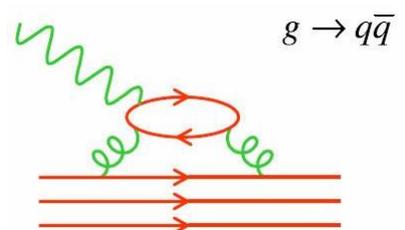
$$u_s(x) = d_s(x) = s_s(x) = \bar{u}_s(x) = \bar{d}_s(x) \equiv s(x)$$

- Con queste parametrizzazioni le funzioni di struttura del protone e del neutrone diventano:

$$F_2^{\text{ep}} = \frac{x}{9} [4 \cdot u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

$$F_2^{\text{en}} = \frac{x}{9} [u_v(x) + 4 \cdot d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

N.B. i quark del mare derivano dal fatto che questi interagiscono tra loro mediante lo scambio di gluoni, i quali a loro volta possono formare delle coppie virtuali quark-antiquark



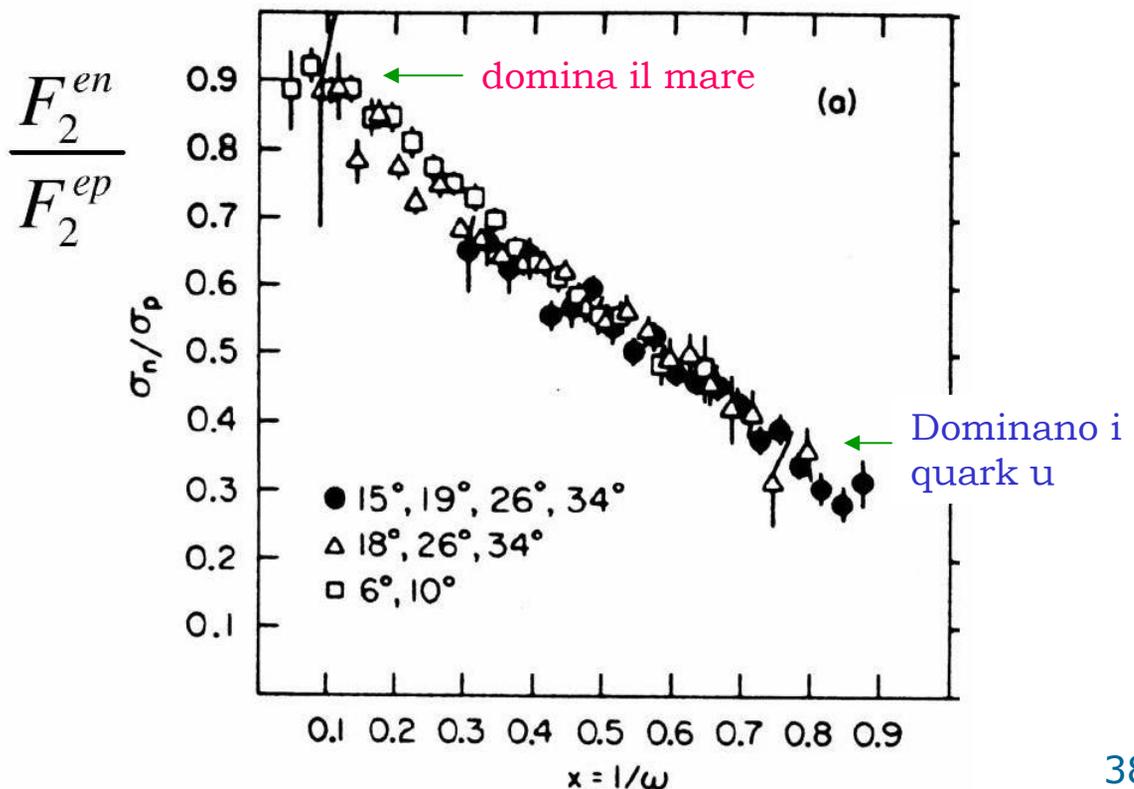
Verifica dell'esistenza dei quark del mare

- Valutiamo il rapporto tra le funzioni di struttura del neutrone e del protone in funzioni di x .
- Consideriamo due casi estremi:
 - a) Quark del mare dominanti, ci aspettiamo che questo avvenga a piccolo x :

$$\frac{F_2^{\text{en}}(x)}{F_2^{\text{ep}}(x)} \rightarrow 1$$

- b) Consideriamo il caso in cui dominano u_v (ricordiamo che u indica la pdf di u nel protone e di d nel neut.)

$$\frac{F_2^{\text{en}}(x)}{F_2^{\text{ep}}(x)} \rightarrow \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v} \rightarrow \frac{1}{4}$$

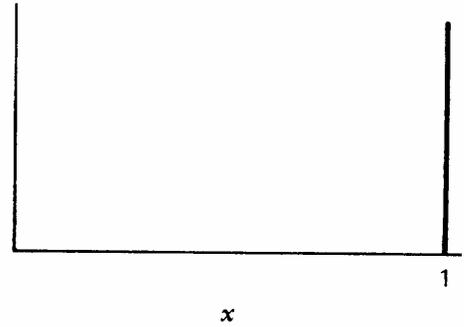


F₂ per diverse composizioni del protone

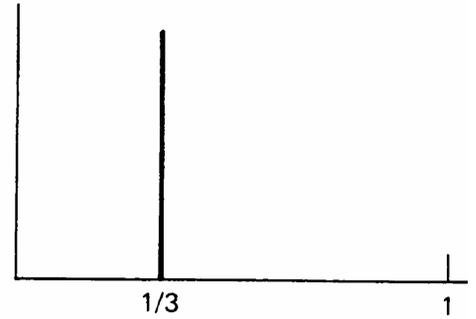
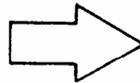
If the Proton is

then $F_2^{eP}(x)$ is

A quark

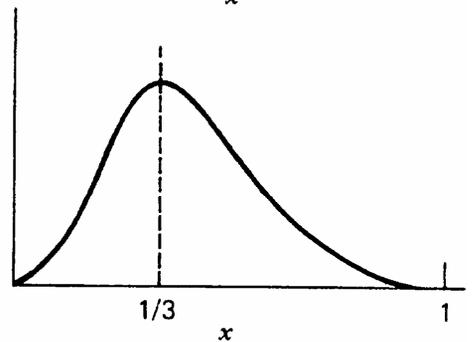
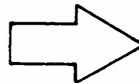


Three valence quarks

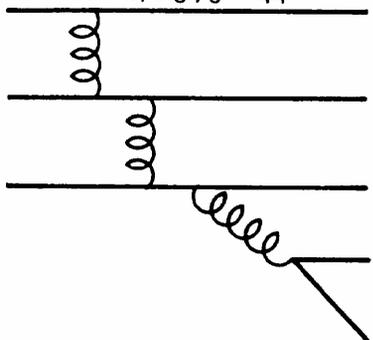
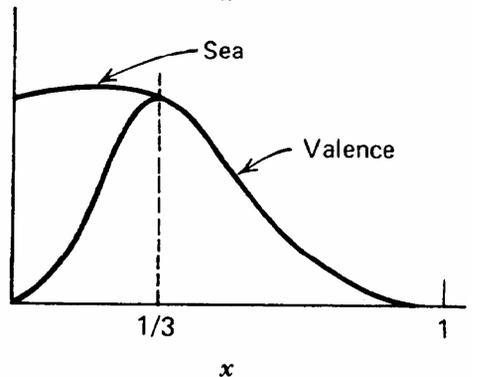


L'interazione tra i quark ridistribuisce l'impulso tra di loro

Three bound valence quarks



Three bound valence quarks + some slow debris, e.g., $g \rightarrow q\bar{q}$



Small x

Verifica della forma di F_2

- Ricordiamo che:

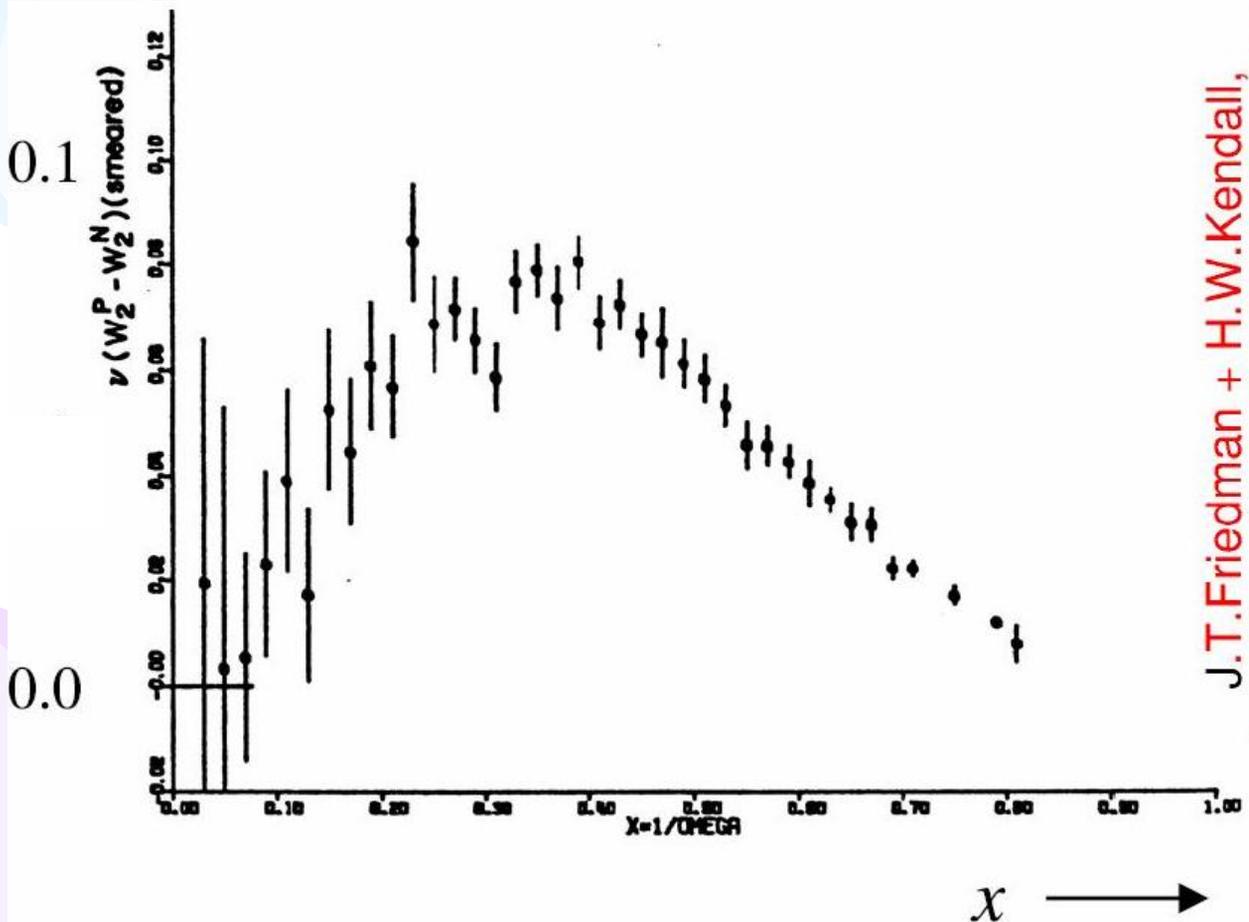
$$F_2^{\text{ep}} = \frac{x}{9} [4 \cdot u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

$$F_2^{\text{en}} = \frac{x}{9} [u_v(x) + 4 \cdot d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

- Sottraendo le due espressioni, togliamo il contributo dei quark del mare:

$$F_2^{\text{ep}}(x) - F_2^{\text{en}}(x) = \frac{x}{3} [u_v(x) - d_v(x)]$$

$$F_2^{\text{ep}}(x) - F_2^{\text{en}}(x)$$



J.T.Friedman + H.W.Kendall,
Ann. Rev. Nucl. Sci. **22** (1972) 203

Integrali delle funzioni di struttura: contributo del gluone

- Ricordiamo la forma di F_2 :

$$F_2^{\text{ep}} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \frac{1}{9} [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\}$$

$$F_2^{\text{en}} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \frac{1}{9} [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \frac{1}{9} [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \right\}$$

- Essa è del tipo $x \cdot f(x)$, quindi dal suo integrale possiamo ricavare la frazione di impulso del protone trasportata dalle particelle cariche al suo interno; in questa valutazione si può trascurare il contributo della frazione di impulso trasportata dai quark s.

$$\int_0^1 F_2^{\text{ep}} dx = \frac{4}{9} \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx \equiv \frac{4}{9} f_u + \frac{1}{9} f_d \quad (\text{protone})$$

$$\int_0^1 F_2^{\text{en}} dx = \frac{4}{9} \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx \equiv \frac{4}{9} f_d + \frac{1}{9} f_u \quad (\text{neutrone})$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_u &= \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx \\ f_d &= \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx \end{aligned} \right.$$

f_u = Frazione dell'impulso del protone trasportata da tutti i quark u e \bar{u} ed analogamente per f_d

- Le misure sperimentali danno:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 F_2^{\text{ep}} dx &= \frac{4}{9} f_u + \frac{1}{9} f_d \approx 0.18 \\ \int_0^1 F_2^{\text{en}} dx &= \frac{4}{9} f_d + \frac{1}{9} f_u \approx 0.12 \end{aligned} \right\}$$



$$\left\{ \begin{aligned} f_u &\approx 0.36 \\ f_d &\approx 0.18 \end{aligned} \right.$$

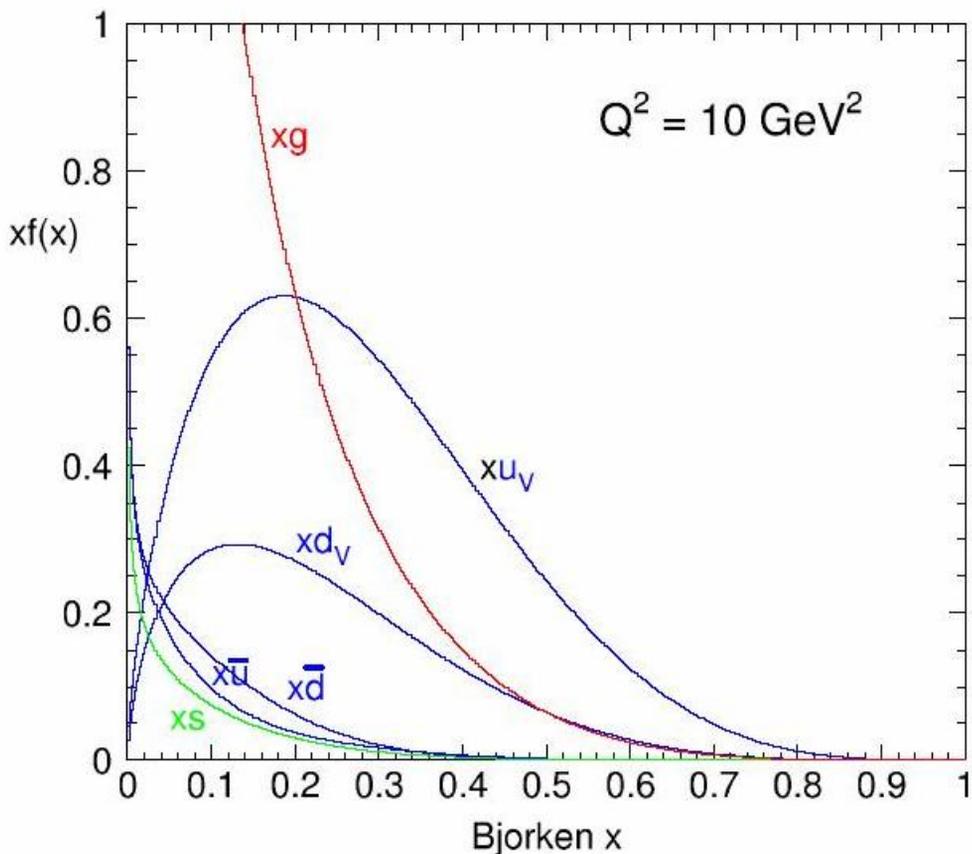
Solo il 50% dell'impulso del protone è trasportato dai quark e antiquark, il resto è trasportato dai gluoni

Sum rules

- Le funzioni di distribuzione di probabilità (pdf) dei quark devono soddisfare alcune regole di somma.
- Ad esempio, per il protone abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad \leftarrow 2 \text{ quark } u \text{ di valenza} \\ \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1 \quad \leftarrow 1 \text{ quark } d \text{ di valenza} \\ \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0 \quad \leftarrow \text{stranezza } 0 \end{array} \right.$$

- Per confermare queste regole di somma, occorre analizzare lo scattering dei neutrini e degli antineutrini, che avviene per interazione debole tramite lo scambio di uno Z. Questo permette di descrivere i quark dagli antiquark.



Interazioni neutrino-nucleone

- A questo punto del corso diamo soltanto alcune formule che riguardano lo scattering neutrino (antineutrino) con il nucleone.
- Consideriamo soltanto le reazioni di corrente carica (scambio di un W); allora la conservazione della carica e del numero leptonico, fa sì che si hanno le reazioni:

$$\begin{cases} \nu_{\mu} d \rightarrow \mu^{-} u & ; \quad \nu_{\mu} \bar{u} \rightarrow \mu^{-} \bar{d} \\ \bar{\nu}_{\mu} u \rightarrow \mu^{+} d & ; \quad \bar{\nu}_{\mu} \bar{d} \rightarrow \mu^{+} \bar{u} \end{cases}$$

- Ricordiamo come abbiamo identificato le funzioni di distribuzioni di probabilità dei quark all'interno del protone e del neutrone:

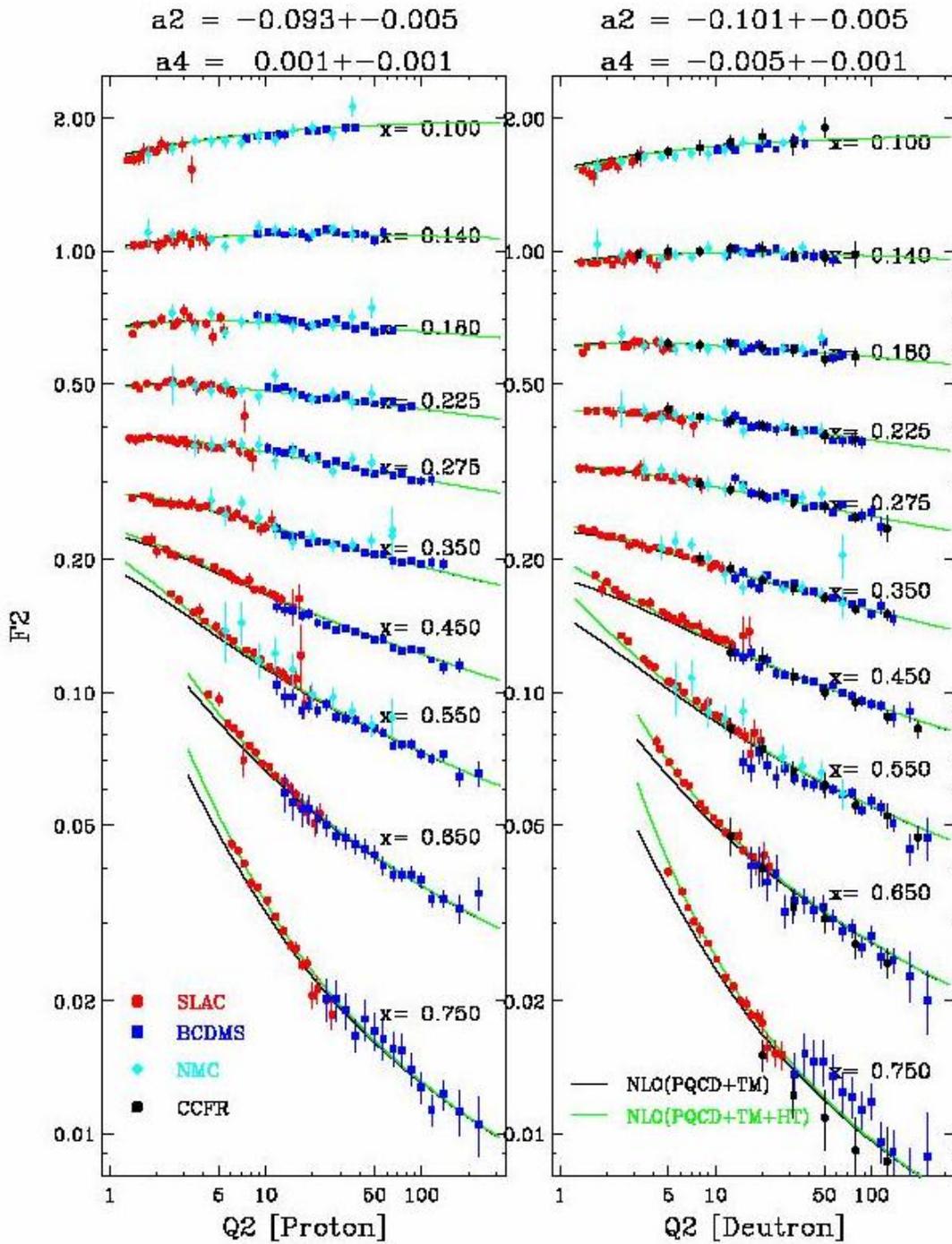
$$\begin{cases} u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x) \\ d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x) \\ s^p(x) = s^n(x) \equiv s(x) \end{cases}$$

- Per semplicità si usano bersagli isoscalari, ovvero con lo stesso numero di neutroni e di protoni. Si tenga presente che il neutrino misura d e \bar{u} , mentre l'antineutrino misura u e \bar{d}

$$\begin{cases} d^p(x) + d^n(x) = d(x) + u(x) \equiv Q(x) \\ \bar{u}^p(x) + \bar{u}^n(x) = \bar{u}(x) + \bar{d}(x) \equiv \bar{Q}(x) \end{cases}$$

- Nell'interazione del neutrino (antineutrino) compare una terza funzione di struttura, F_3 , dovuta all'interferenza tra le correnti vettoriali e assiali.

Violazione dello scaling: $F_2(x, Q^2)$

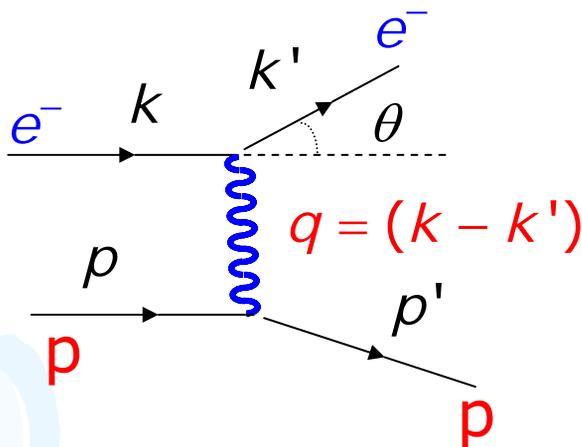


e^-p, μ^-p

$e^-d, \mu^-d, (vd)$

La violazione NON è dovuta ad una dimensione finita dei quark. Essa è dovuta alla continua interazione tra i partoni all'interno del protone.

In un esperimento di scattering di elettrone su protone si utilizza un fascio di elettroni di energia 8 GeV. In un evento si misura un elettrone di energia 3 GeV diffuso a 20°. Calcolare le variabili cinematiche dello scattering, Q^2 , ν e x e dire se lo scattering è elastico oppure anelastico. Si usi 1 GeV per la massa del protone.



$$Q^2 = 2EE'(1 - \cos\theta)$$

$$\nu = E - E' \quad (\text{Nel laboratorio})$$

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

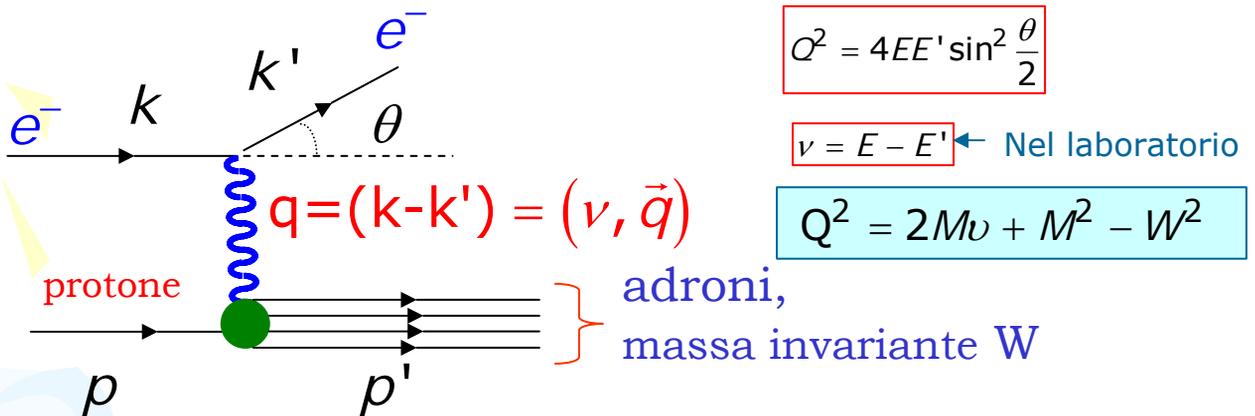
$$Q^2 = 2EE'(1 - \cos\theta) = 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot (1 - \cos 20^\circ) = 2.8944 \text{ GeV}^2$$

$$\nu = E - E' = 8 - 3 = 5 \text{ GeV}$$

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{2.8944}{2 \cdot 1 \cdot 5} = 0.289$$

$x < 1$, quindi lo scattering è anelastico

In un esperimento di scattering di elettroni su protoni si utilizzano elettroni di 13.5 GeV e si posiziona lo spettrometro per rivelare gli elettroni diffusi ad un angolo di 6° rispetto alla linea di volo degli elettroni incidenti. Si trova una risonanza nella sezione d'urto differenziale in corrispondenza di una massa invariante del sistema adronico di 1.5 GeV. Si ricavi quanto vale l'energia dell'elettrone diffuso in corrispondenza di questa massa. Per semplicità nei calcoli si assuma la massa del protone pari a 1 GeV.



Nel nostro caso $W^2 = (1.5)^2 \text{ GeV}^2$, mentre $M^2 = 1 \text{ GeV}^2$. Conosciamo E e θ , con qualche passaggio algebrico possiamo ricavare E' . Definiamo:

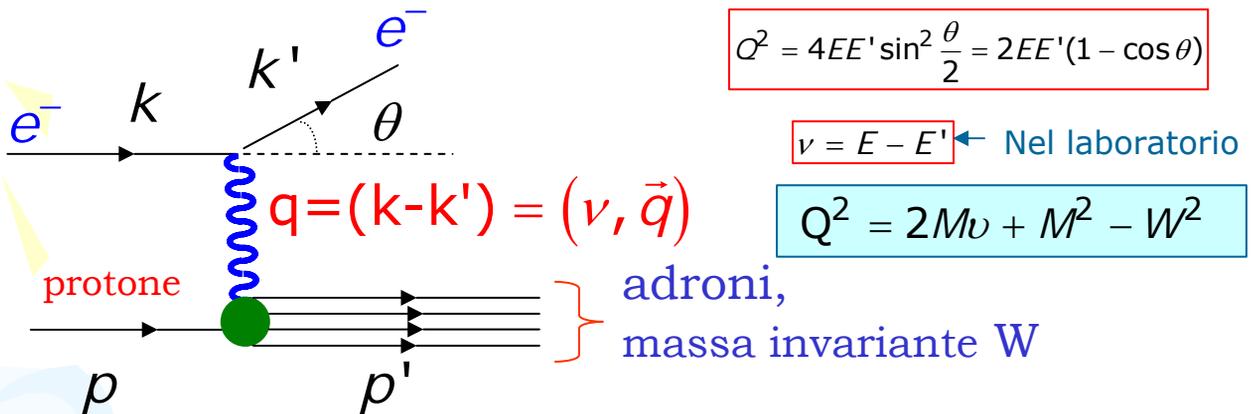
$$\Delta M^2 = M^2 - W^2 = 1 - (1.5)^2 = -1.25 \text{ GeV}^2$$

$$Q^2 = 2M\nu + \Delta M^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} ; \quad 2M(E - E') + \Delta M^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} ;$$

$$2ME + \Delta M^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2ME' ;$$

$$E' = \frac{2ME + \Delta M^2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2M} = \frac{2 \cdot 13.5 - 1.25}{4 \cdot 13.5 \cdot \sin^2 3^\circ + 2} \approx 12.0 \text{ GeV}$$

In un esperimento di scattering di elettroni su protoni si utilizzano elettroni di 7 GeV e si posiziona lo spettrometro per rivelare gli elettroni diffusi ad un angolo di 6° rispetto alla linea di volo degli elettroni incidenti. Si misura un'energia dell'elettrone deflesso pari a 5.13 GeV. Trovare: a) l'energia trasferita ν ; b) il modulo quadro del quadrimpulso trasferito q^2 ; c) la massa invariante W degli adroni prodotti; d) stabilire se lo scattering è elastico o anelastico. Per semplicità nei calcoli si assuma la massa del protone pari a 1 GeV.



a) Ricaviamo ν : $\nu = E - E' = 7 - 5.13 = 1.87$ GeV

b) $q^2 = -Q^2 = -2EE'(1 - \cos \theta) = -2 \cdot 7 \cdot 5.13(1 - \cos 6^\circ) = -0.393$ GeV²

c) $Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2 \Rightarrow W^2 = 2M\nu + M^2 - Q^2 =$
 $= 2 \cdot 1 \cdot 1.87 + 1^2 - 0.393 = 4.347 \Rightarrow W = \sqrt{4.347} = 2.1$ GeV

d) Lo scattering è anelastico perché la massa invariante degli adroni prodotti non è uguale alla massa del protone. Comunque valutiamo anche il valore della variabile x che è uguale a 1 se lo scattering è elastico, altrimenti è minore di 1

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{0.393}{2 \cdot 1 \cdot 1.87} = 0.105$$

Sviluppo in onde parziali

- Cenni allo sviluppo in onde parziali.
- Ampiezza di scattering.
- Diffusione elastica e anelastica.
- Condizione di risonanza.
- Limite unitario della sezione d'urto



CENNI ALLO SVILUPPO IN ONDE PARZIALI

- VOGLIAMO STUDIARE LO SCATTERING (DIFFUSIONE) DI UNA PARTICELLA PROIETTILE CONTRO UNA PARTICELLA BENSACCO.
- PER SEMPLICITA' TUTTE LE PARTICELLE HANNO SPIN ZERO E TRASCURIAMO L'INTERAZIONE COULOMBIANA.
- SIA m_1 LA MASSA DEL PROIETTILE E m_2 LA MASSA DEL BENSACCO
- LA DIFFUSIONE E' DESCRITTA, NELLA MEC. QUANT. NON RELAT., DALLA SEGUENTE EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$$

- LA SOLUZIONE SI PUO' FATTOZZARE NELLE COORDINATE DEL MOTO RELATIVO TRA LE PARTICELLE E NELLE COORDINATE DEL BARICENTRO

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad ; \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad M = m_1 + m_2 \quad ; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- L'EQUAZIONE DEL MOTO DIVENTA:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, \vec{R}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, \vec{R}, t)$$

- UNA SOLUZIONE DEL TIPO:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{R}, t) = u(\vec{r}) \cdot v(\vec{R}) e^{i(E_r + E_R)t/\hbar}$$

SODDISFA L'EQUAZIONE:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 v(\vec{R}) = E_r v(\vec{R}) \quad ; \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 + U(\vec{r}) \right] u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r})$$

- CI INTERESSA SOLO LA PARTE CHE DESCRIVE IL MOTO NEL SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA.
- FACCIAMO L'IPOTESI CHE IL POTENZIALE $U(r)$ SI ANNULLI PER $r \rightarrow \infty$ (ALMENO COME $\frac{1}{r}$) E SIA A SIMMETRIA SFERICA.
- AL TEMPO $t \rightarrow -\infty$, $r \gg R$ (DIMENSIONI DEL SISTEMA), $U(r) \rightarrow 0$.
 \Rightarrow L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}) \Rightarrow \nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0$$

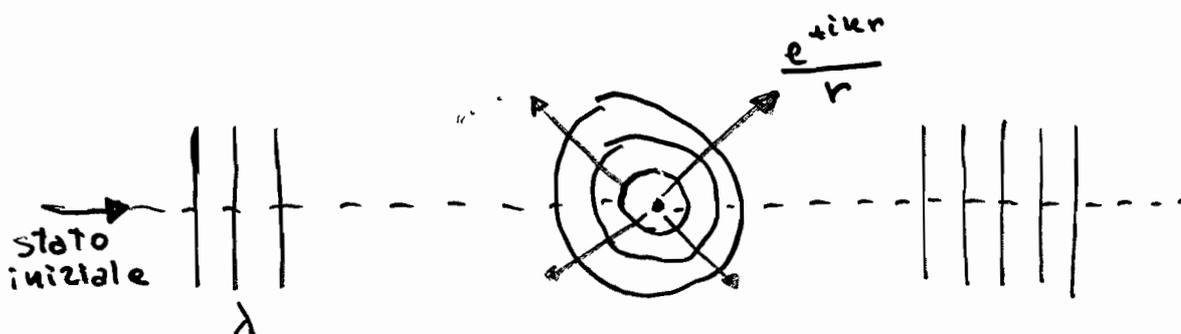
dove: $E_r = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot k^2$

[TENETE PRESENTE CHE L'ENERGIA E_r E' QUELLA DISPONIBILE PER LA PRODUZIONE DI NUOVE PARTICELLE O PER IL PASSAGGIO A STATI ECCITATI DEL SISTEMA]

- SUPPONIAMO CHE LO STATO INIZIALE SIA QUELLO DI PARTICELLA LIBERA AVENTE UN IMPULSO $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, CHE ASSUMIAMO PARALLELO ALL'ASSE Z

$$u_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i k z} \quad V = \text{volume di normalizzazione}$$

- DOPO LA COLLISIONE, IN AGGIUNTA ALL'ONDA PIANA INCIDENTE, BISOGNA AGGIUNGERE UN'ONDA SFERICA EMESSA DAL CENTRO DIFFUSORE



- LA FORMA ASINTOTICA DELLA FUNZIONE D'ONDA DELLO STATO FINALE PUO' ESSERE SCRITTA COME:

$$u_f \rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \left[e^{i k z} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{i k r}}{r} \right]$$

FLUSSO

- IL FLUSSO INCIDENTE È OTTENUTO DALLA CORRENTE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$\phi_i \leftarrow \vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (u_i^* \vec{\nabla} u_i - u_i \vec{\nabla} u_i^*) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = \frac{v}{V} = \rho v \equiv \phi_i$$

- DA NOTARE CHE LA DENSITÀ ρ È DATA DA:

$$\rho = u_i u_i^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ikz} = \frac{1}{V}$$

- PER TROVARE IL FLUSSO DIFFUSO OCCORRE DAPPRIMA TROVARE LA CORRENTE DI PROBABILITÀ ASSOCIATA ALL'ONDA DIFFUSA.

- RICORDIAMO CHE IN COORDINATE POLARI SI HA:

$$P_r \psi = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \psi$$

QUINDI LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_d &= \frac{\hbar}{2imV} |f(\theta, \varphi)|^2 \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\hbar k}{m} |f(\theta, \varphi)|^2 = \frac{1}{r^2} \frac{v}{V} |f(\theta, \varphi)|^2 \end{aligned}$$

- CONSIDERIAMO LE PARTICELLE CHE ATTRAVERSANO LA SUPERFICIE ELEMENARE $dS = r^2 d\Omega$

- IL FLUSSO È: $\mathcal{J}_d \cdot dS = \frac{1}{r^2} \frac{\hbar k}{m} |f(\theta, \varphi)|^2 r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{m} |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$

SEZIONE D'URTO

- DEFINIZIONE DI SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{FLUSSO PER UNITA' DI TEMPO E UNITA' DI ANGOLO SOLIDO}}{\text{FLUSSO INCIDENTE}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{\hbar k}{v_m} |f(\theta, \varphi)|^2}{\frac{\hbar k}{v_m}} = |f(\theta, \varphi)|^2$$

- $f(\theta, \varphi)$ È NOTA COME AMPIEZZA DI SCATTERING
- L'ONDA DIFFUSA È:

$$U_{\text{scat.}} = U_f - U_i = \frac{e^{ikr}}{r} \cdot f(\theta, \varphi)$$

- RICORDIAMO CHE STIAMO CONSIDERANDO LO SCATTERING DI UNA PARTICELLA SENZA SPIN CHE SI MUOVE LUNGO L'ASSE Z, QUINDI LA SUA POSIZIONE NEL PIANO X, Y NON È NOTA (ANCHE SE IN PRATICA VI SONO SEMPRE DEI COLLIMATORI, TUTTAVIA RIMANE SEMPRE UN'INDETERMINAZIONE).
- DA UN PUNTO DI VISTA CLASSICO DIREMMO CHE NON È NOTO IL PARAMETRO D'URTO E QUINDI NON È NOTO IL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO AL CENTRO DIFFUSORE.

⇒ POSSIAMO SVILUPPARE L'ONDA PIANA IN UNA SERIE DI FOURIER DI ONDE SFERICHE. DATO CHE NON CONSIDERIAMO GLI SPIN DELLE PARTICELLE E VI È SIMEETRIA DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE Z, COMPARLIAMO SOLO LE ARMONICHE SFERICHE CHE NON HANNO DIPENDENZA DA φ

Sviluppo in onde sferiche

• ABBIAMO:

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_0^{\infty} e^{\sqrt{4\pi(2l+1)} i^l} J_l(kr) Y_l^0(\theta)$$

↑
funzioni di BESSEL

• CI INTERESSA IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO PER $kr \rightarrow \infty$

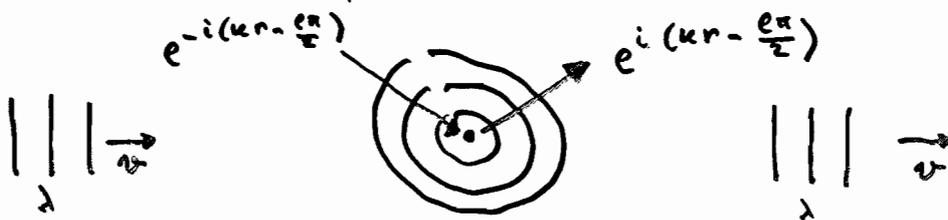
- ABBIAMO: $J_l(kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$

- INOLTRE: $Y_l^0(\theta) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos \theta)$ Polinomi di LEGENDRE

$$e^{ikz} \rightarrow \frac{1}{kr} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) =$$

$$= \frac{1}{kr} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2i}$$

• LA FORMULA MOSTRA CHE L'ONDA PIANA PUO' ESSERE CONSIDERATA COME UNA SOMMA DI ONDE SFERICHE $e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}$, OGNIUNA DI MOMENTO ANGOLARE DEFINITO l e l CONVERGENTI VERSO IL CENTRO DI SCATTERING, INSIEME AD ONDE SFERICHE DIVERGENTI $e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$



- QUESTA SITUAZIONE RAPPRESENTA UN'ONDA PIANA "NON DISTURBATA"
- SE CONSIDERIAMO UN'INTERAZIONE CON IL CENTRO DI DIFFUSORE, IL PRINCIPIO DI CAUSALITA' RICHIEDE CHE SOLO LE ONDE DIVERGENTI VENGANO INFLUENZATE

- IL POTENZIALE DI INTERAZIONE PUO' MODIFICARE LE ONDE DIVERGENTI SOLTANTO IN FASE OPPURE IN AMPIEZZA E FASE
- NEL PRIMO CASO ABBIAMO UNA DIFFUSIONE ELASTICA, CON UNA CERTA DISTRIBUZIONE ANGOLARE, MENTRE NEL SECONDO CASO ABBIAMO IN AGGIUNTA ANCHE UNA DIFFUSIONE ANELASTICA
- LO STATO FINALE PUO' ESSERE SCRITTO COME:

$$u_f(r, \theta) = u_i(r, \theta) + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) \left[(-1)^l \frac{e^{-ikr}}{r} - d_l \frac{e^{ikr}}{r} \right] P_l(\cos\theta)$$

→ LE AMPIEZZE d_l RAPPRESENTANO L'AZIONE DEL POTENZIALE SULLA COMPONENTE l DELL'ONDA SFERICA DIVERGENTE

- L'AZIONE DEL POTENZIALE RISULTA IN UNO SFASAMENTO ED IN UN ASSORBIMENTO DELLO STATO INIZIALE

$$d_l = \eta_l e^{2i\delta_l} ; \quad \eta_l, \delta_l \text{ REALI} ; \quad 0 \leq \eta_l \leq 1$$

- LA DIFFUSIONE E' RAPPRESENTATA DALLO STATO:

$$u_d(r, \theta) = u_f(r, \theta) - u_i(r, \theta) = \frac{i}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_l (2l+1) (1 - d_l) P_l(\cos\theta)$$

AVENTE AMPIEZZA DI DIFFUSIONE:

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) (1 - d_l) P_l(\cos\theta)$$

- LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE VALE:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) (1 - d_l^*)(1 - d_{l'}) P_l \cdot P_{l'}$$

- USANDO LA PROPRIETÀ DI ORTONORMALITÀ DEI POLINOMI DI LEGENDRE:

$$\int P_\ell(\cos\theta) \cdot P_{\ell'}(\cos\theta) d\cos\theta d\varphi = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

SI TROVA LA SEZIONE D'URTO DI DIFFUSIONE

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\theta d\varphi = \frac{1}{4k^2} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1)(1-\alpha_\ell^2)(1-\alpha_{\ell'}^2) \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$\rightarrow \sigma_d = \frac{\pi}{k^2} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) |1-\alpha_\ell|^2 = \frac{\pi \hbar^2}{P_{cm}^2} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) |1-\alpha_\ell|^2$$

(RICORDIAMO CHE $P_{cm}^2 = \hbar^2 k^2$)

SEZIONE D'URTO ELASTICA

- LA DIFFUSIONE ELASTICA È CARATTERIZZATA DA $\eta_\ell = 1$

$$\Rightarrow 1-\alpha_\ell = 1-e^{2i\delta_\ell} = e^{i\delta_\ell} \left[e^{-i\delta_\ell} - e^{i\delta_\ell} \right] = -2i e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell$$

- IN QUESTO CASO L'AZIONE DEL POTENZIALE NON CAMBIA L'AMPIEZZA MA CAMBIA SOLO LA FASE DELL'ONDA DIFFUSA

$$\sigma_{ELASTICA} = \frac{4\pi \hbar^2}{P_{cm}^2} \sum_0^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell \quad \left[\sigma_{max} = \frac{4\pi \hbar^2}{P_{cm}^2} (2\ell+1) \text{ per una data } \ell \right]$$

- QUANDO LA FASE DELLA SINGOLA COMPONENTE È $\delta_\ell = \frac{\pi}{2}$, L'AMPIEZZA DI DIFFUSIONE $f_\ell(\theta)$ È PURAMENTE IMMAGINARIA E LA SEZIONE D'URTO σ_ℓ HA IL VALORE MASSIMO. QUESTA È CHIAMATA CONDIZIONE DI RISONANZA PER L'ONDA PARZIALE ℓ

SEZIONE D'URTO ANELASTICA

- SE $\eta_e < 1$ LA DIFFUSIONE È ANELASTICA PERCHÉ PARTE DEL FLUSSO INCIDENTE È ASSORBITO DAL BERSAGLIO

- IL FLUSSO ASSORBITO DELL'ONDA PARZIALE l È PARI A:

$$\phi_{\text{Ass}} = \phi_i \cdot (1 - |ae|^2)$$

- LA SEZIONE D'URTO DI ASSORBIMENTO (O SEZIONE D'URTO DI REAZIONE) È:

$$\sigma_{\text{Ass}} = \frac{\pi \hbar^2}{p_{\text{cm}}^2} \sum_0^{\infty} l (2l+1) (1 - |\eta_e|^2)$$

QUESTA RAPPRESENTA I PROCESSI IN CUI UNA O ENTRAMBE LE PARTICELLE CAMBIANO NATURA NELLO STATO FINALE.

- N.B. SI PUÒ AVERE DIFFUSIONE ELASTICA SENZA ALCUNI PROCESSI

$$\text{SE } \eta_e = 1 \Rightarrow \sigma_{\text{Ass}} = 0$$

- NON SI PUÒ AVERE DIFFUSIONE ANELASTICA SENZA AVERE ANCHE QUELLA ELASTICA

- LA SEZIONE D'URTO TOTALE È LA SOMMA DEI DUE CONTRIBUTI:

$$\sigma_{\text{TOT}} = \sigma_{\text{EL}} + \sigma_{\text{Ass}} = \frac{\pi \hbar^2}{p_{\text{cm}}^2} \sum_0^{\infty} l (2l+1) \left[(1 - 2 \operatorname{Re}(ae) + |ae|^2) + (1 - |ae|^2) \right]$$

$$\sigma_{\text{TOT}} = \frac{2\pi \hbar^2}{p_{\text{cm}}^2} \sum_0^{\infty} l (2l+1) (1 - \operatorname{Re}(ae))$$

LIMITE DI UNITARIETA'

- LA SEZIONE D'URTO DI UN PROCESSO, NELLO STATO DI MOMENTO ANGOLARE l , NON PUO' SUPERARE IL VALORE CHE CORRISPONDE AL MASSIMO DELLA PROBABILITA' DI DIFFUSIONE

$$\sigma_l \leq \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} \cdot (2l+1) \quad (\text{scattering elastico})$$

TEOREMA OTTICO

- L'AMPIEZZA DI DIFFUSIONE HA UNA PARTE IMMAGINARIA, LEGATA ALLA DIFFUSIONE ELASTICA, E UNA PARTE REALE:

$$f(\theta) = \frac{\hbar}{2p_{cm}} \sum_0^{\infty} (2l+1) [i(1 - \text{Re}(a_l)) + \text{Im}(a_l)] P_l(\cos\theta)$$

- CONSIDERIAMO LA PARTE IMMAGINARIA DELL'AMPIEZZA DI DIFFUSIONE IN AVANTI:

$$\theta \rightarrow 0 ; P_l(\cos\theta) \rightarrow 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \text{Im}(f(\theta)) = \frac{\hbar}{2p_{cm}} \sum_0^{\infty} (2l+1) (1 - \text{Re}(a_l))$$

QUESTO TERMINE E' PROPORZIONALE ALLA SEZIONE D'URTO TOTALE RICAVATA IN PRECEDENZA:

$$\sigma_{TOT} = \frac{2\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_0^{\infty} (2l+1) (1 - \text{Re}(a_l))$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{TOT} = \frac{4\pi\hbar}{p_{cm}} \text{Im}(f(\theta=0))} \leftarrow \text{teorema ottico}$$

N.B. NEL COLLIDER ADROMICI (PP O $P\bar{P}$) SI MISURA LA DIFFUSIONE ELASTICA IN AVANTI, DALLA QUALE RICAVARE σ_{TOT}

Interazioni deboli

- **Decadimento beta.**
- **Violazione della parità nelle int. deboli**
- **Teoria a due componenti del neutrino.**
- **Esperimento di Goldhaber.**
- **Interazione V-A.**
- **Il bosone W.**
- **Angolo di Weinberg.**
- **Decadimento del pione carico.**
- **Decadimento del K carico in muone.**
- **Angolo di Cabibbo.**
- **Organizzazione delle particelle in doppietti di isospin.**
- **Effetto GIM.**
- **Introduzione del quark charm.**
- **Matrice CKM.**

Le interazioni deboli

- Ricordiamo le vite medie di alcuni decadimenti:

$\Delta^{++} \rightarrow p\pi$	$\sim 10^{-23} \text{ s}$	Int. forte
$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\gamma$	$\sim 6 \cdot 10^{-20} \text{ s}$	1 γ , int. e.m.
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	$\sim 10^{-16}$	2 γ , int. e.m.
$\Sigma \rightarrow n\pi$	$\sim 10^{-10} \text{ s}$	} <u>Int. deboli</u>
$\pi^- \rightarrow \mu^- \nu_\mu$	$\sim 10^{-8} \text{ s}$	
$\mu^- \rightarrow e^- \nu_e \nu_\mu$	$\sim 10^{-6} \text{ s}$	
$n \rightarrow p e^- \nu_e$	$\sim 15 \text{ min}$	

Int. deboli

N.B. le interazioni deboli si osservano solo quando le int. forti e le int. e.m. sono proibite.

- Occorre spiegare l'enorme intervallo delle vite medie che va da 10^{-12} s fino ad un quarto d'ora.
- Le interazioni deboli sono anche caratterizzate da sezioni d'urto estremamente piccole ($\sim 10^{-39} \text{ cm}^2$)

$$\sigma(\nu_\mu + N \rightarrow N + \pi + \mu) = 10^{-38} \text{ cm}^2 \text{ a } 1 \text{ GeV}$$

$$\sigma(\pi + N \rightarrow N + \pi) = 10^{-26} \text{ cm}^2 \text{ a } 1 \text{ GeV}$$

- Le interazioni deboli violano molte leggi di conservazione (parità, coniugazione di carica, stranezza, etc.)
- Per via della loro "debolezza", le int. deboli si possono osservare nella materia "normale" solo nel decadimento β . Tuttavia esse sono alla base del funzionamento delle stelle e quindi, senza di loro, non sarebbe possibile la nostra esistenza.

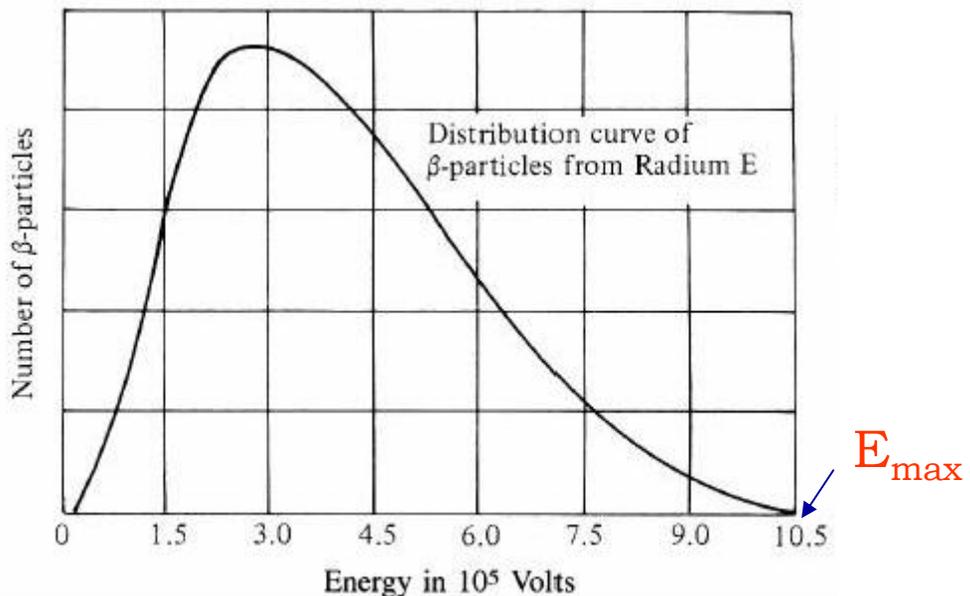


Decadimento β

- Gran parte delle conoscenze relative ai processi base del decadimento β è basata sui decadimenti β dei nuclei



- l'esistenza del decadimento β^+ fu stabilita nel 1934 da Curie e Joliot
- Nel 1919 Chadwick scoprì che l'elettrone nel decadimento β aveva uno spettro continuo.



- L'energia massima dello spettro corrisponde abbastanza bene al Q della reazione ($Q = M(A, Z) - M(A, Z+1)$), mentre per il resto dello spettro vi è una violazione della conservazione dell'energia.
- C'è inoltre anche una violazione della quantità di moto e del momento angolare.

“Creazione” del neutrino

- Per ristabilire le leggi di conservazione, Pauli ipotizzò nel 1930 l'esistenza di una particella neutra di massa molto piccola: il neutrone (ribattezzato poi da Fermi neutrino).

December 1930: public letter sent by W. Pauli to a physics meeting in Tübingen

Zürich, Dec. 4, 1930

Dear Radioactive Ladies and Gentlemen,

...because of the “wrong” statistics of the N and ${}^6\text{Li}$ nuclei and the continuous β -spectrum, I have hit upon a desperate remedy to save the law of conservation of energy. Namely, the possibility that there could exist in the nuclei electrically neutral particles, that I wish to call neutrons, which have spin $\frac{1}{2}$ and obey the exclusion principle The mass of the neutrons should be of the same order of magnitude as the electron mass and in any event not larger than 0.01 proton masses. The continuous β -spectrum would then become understandable by the assumption that in β -decay a neutron is emitted in addition to the electron such that the sum of the energies of the neutron and electron is constant.

..... For the moment, however, I do not dare to publish anything on this idea

So, dear Radioactives, examine and judge it. Unfortunately I cannot appear in Tübingen personally, since I am indispensable here in Zürich because of a ball on the night of 6/7 December.

W. Pauli

NOTES

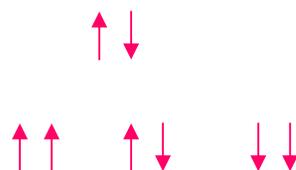
- Pauli's neutron is a light particle \Rightarrow not the neutron that will be discovered by Chadwick one year later
- As everybody else at that time, Pauli believed that if radioactive nuclei emit particles, these particles must exist in the nuclei before emission

- Questa lettera è molto importante per la fisica ... ed anche interessante da un punto di vista sociologico 😊
- La prima teoria sul decadimento β fu fatta da Fermi nel 1934
- Il neutrino fu scoperto da Reines e Cowan “soltanto” nel 1958
- Esistono tre tipi di neutrini, e di recente sono state osservate delle oscillazioni di neutrino che comportano che il neutrino debba avere una massa diversa da zero 4

Il decadimento β nucleare

- I decadimenti β nucleari vengono distinti in transizioni permesse ed in transizioni proibite.
- Quelle permesse rappresentano la situazione più comune e sono caratterizzate dal fatto che l'elettrone ed il neutrino emessi NON trasportano momento angolare orbitale, sono emessi cioè in onda s ($l=0$). Questo è giustificabile dal fatto che l'elettrone ed il neutrino hanno in genere energie dell'ordine del MeV.
- Le transizioni con $l=1$ si chiamano prime proibite, $l=2$ secondo proibite e così via, ed hanno una vita media considerevolmente più lunga rispetto a quelle permesse.
- Dato che e e ν hanno spin $\frac{1}{2}$, il cambiamento di spin del nucleo può essere 0 o 1. Le transizioni con $\Delta J=0$ si chiamano di Fermi mentre quelle con $\Delta J=1$ sono di Gamow-Teller

transizioni	ΔJ nucleo	Stato leptonic
Fermi	$\Delta J=0$	singoletto
Gamow-Teller	$\Delta J=1$ $\Delta J_z=0, \pm 1$	tripletto

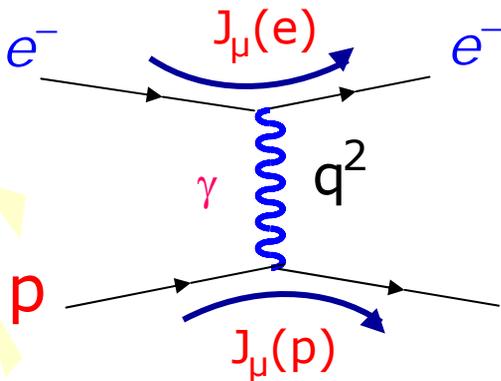


- Poiché e - ν hanno $l=0$, non c'è cambiamento nel momento angolare orbitale del nucleo, quindi la sua parità non cambia. Avviene solo uno spin flip del nucleone per le transizioni di G.T.

Fermi: $0^+ \rightarrow 0^+, \Delta \bar{J} = 0$ $^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}^* e^- \bar{\nu}_e$ $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^* e^+ \nu_e$	Gamow T. $1^+ \rightarrow 0^+, \Delta \bar{J} = 1$ $^{12}\text{B} \rightarrow ^{12}\text{C} e^- \bar{\nu}_e$
	Miste $\frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2}, \Delta \bar{J} = 0, 1$ $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$

Teoria di Fermi del decadimento β

- Nel 1934 Fermi fece la prima teoria del decadimento β ; egli prese come modello la descrizione fatta dalla QED dello scattering elettrone-protone:

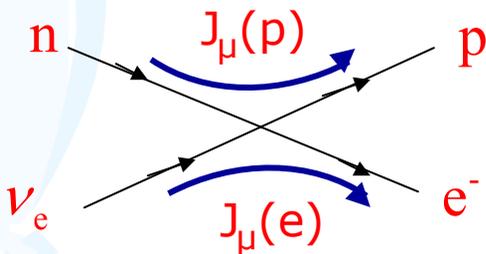


L'elemento di matrice è proporzionale a:

$$M_{fi} \approx -\frac{1}{q^2} J_\mu(e) J^\mu(p)$$

$$M_{fi} \approx (\bar{u}_e \sqrt{\alpha} \gamma^\mu u_e) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} (\bar{u}_p \sqrt{\alpha} \gamma^\nu u_p)$$

- Il decadimento β $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ è equivalente a: $n + \nu \rightarrow p + e^-$
- Fermi ipotizzò un'interazione puntiforme del tipo:



$$n + \nu \rightarrow p + e^-$$

➔ Non c'è il propagatore

- interazione tra due correnti (cariche): adronica e leptonica

$$M_{fi} \approx G (\bar{u}_p \gamma^\mu u_n) (\bar{u}_e \gamma_\mu u_\nu)$$

Interazione vettore-vettore

- La costante G è nota come costante di Fermi ed è collegata al quadrato della "carica debole".

- \bar{u}_p crea un protone (oppure distrugge un antiprotone)
- u_n distrugge un neutrone (crea un antineutrone)
- \bar{u}_e crea un elettrone (distrugge un positrone)
- u_ν distrugge un neutrino (crea un antineutrino)

Decadimento β nucleare

- La probabilità di transizione o tasso di decadimento per unità di tempo si trova applicando la regola d'oro di Fermi:

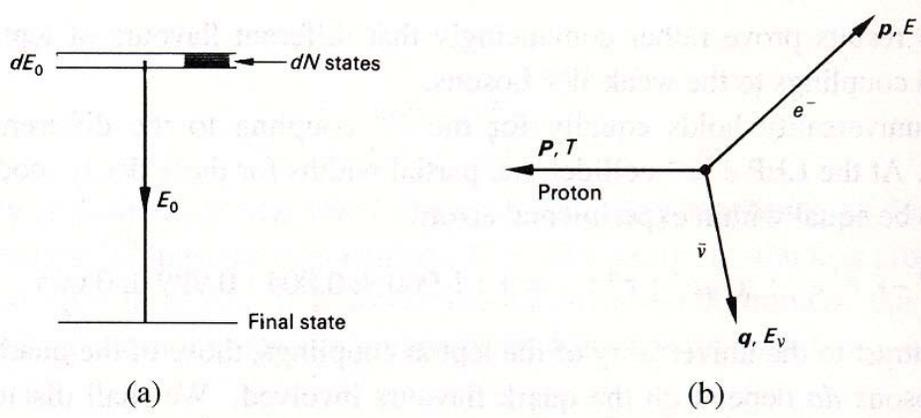
$$W = \frac{2\pi}{\hbar} G^2 |M|^2 \frac{dN}{dE_0}$$

$$\frac{dN}{dE_0} : \text{spazio delle fasi}$$

$|M|^2$ è il quadrato dell'elemento di matrice. Esso si calcola integrando su tutti gli angoli delle particelle finali, sommando sugli spin finali e mediando sugli spin iniziali. Esso è una costante dell'ordine dell'unità.

decadimenti di Fermi: $J_{\text{leptoni}}=0 \Rightarrow |M|^2 \approx 1$

decadimenti di Gamow-Teller: $J_{\text{leptoni}}=1 \Rightarrow |M|^2 \approx 3$



- E_0 è l'energia disponibile nello stato finale (è uguale al Q della reazione). Lo spread in energia dE_0 deriva dal fatto che l'energia dello stato iniziale non è completamente determinata a causa della vita media finita.

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{p} = 0$$

$$T + E_\nu + E = E_0$$

- Trascuriamo la massa dell'elettrone. E_0 è dell'ordine di 1 MeV. L'energia cinetica del protone è dell'ordine di 10^{-3} MeV e può essere trascurata. Il protone serve solo ad assicurare la conservazione della quantità di moto.

$q_\nu = E_0 - E_e$ L'energia è suddivisa solo tra l'elettrone ed il neutrino

Spazio delle fasi

- Il numero di stati disponibili per un elettrone di impulso compreso tra p e $p+dp$, confinato nel volume V , dentro l'elemento di angolo solido $d\Omega$, vale:

$$\frac{Vd\Omega}{(2\pi)^3\hbar^3} p^2 dp$$

- Normalizzando la funzione d'onda al volume unitario, integrando sull'intero angolo solido, ed ignorando gli effetti dello spin sulle distribuzioni angolari, si ottiene il fattore dello spazio delle fasi per l'elettrone e per il neutrino:

$$\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3\hbar^3} \quad ; \quad \frac{4\pi q_\nu^2 dq_\nu}{(2\pi)^3\hbar^3}$$

- Consideriamo i due fattori indipendenti in quanto tra q e p non vi è correlazione perché è un processo a tre corpi, dove il protone assorbe l'impulso risultante di q e p . L'impulso del protone è fissato e quindi non c'è il fattore dello spazio delle fasi del protone.

- Il numero di stati finali è: $dN = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^6\hbar^6} p^2 q_\nu^2 dp dq_\nu$

- Per un dato valore dell'energia dell'elettrone, l'energia del neutrino è fissata e quindi anche il suo impulso:

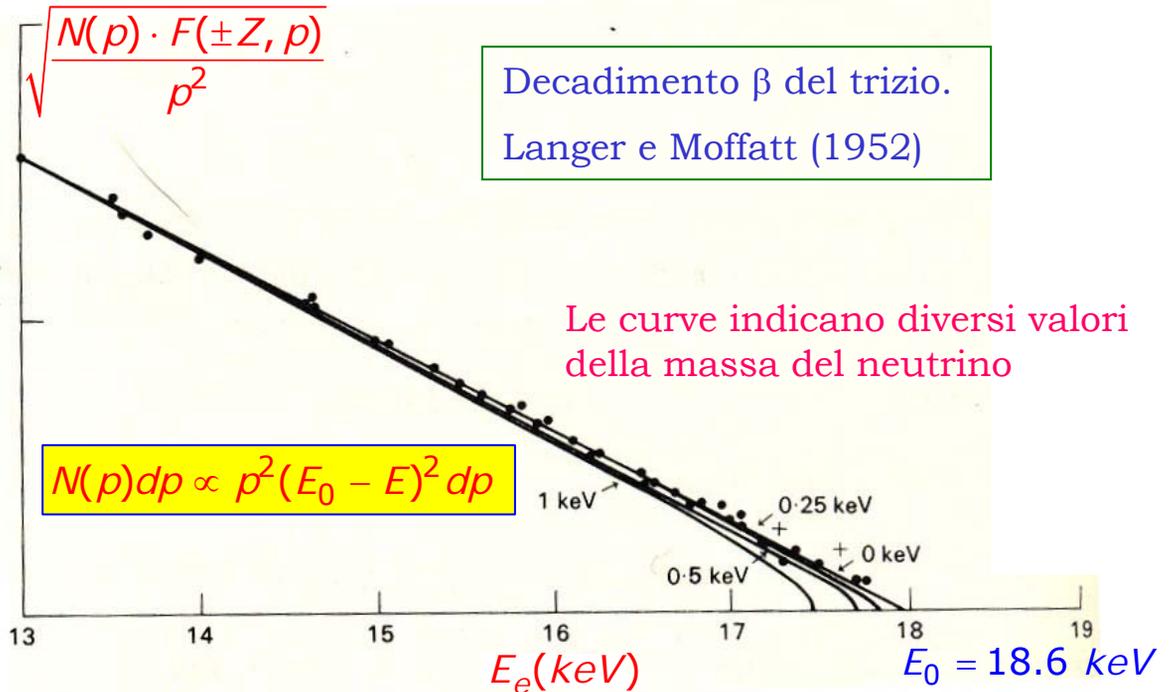
$$q_\nu \equiv E_\nu = (E_0 - E) \quad ; \quad \Rightarrow dq_\nu = dE_0$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dE_0} = \frac{dN}{dq_\nu} = \frac{1}{4\pi^4\hbar^6} p^2 (E_0 - E)^2 dp$$

- Una volta che abbiamo integrato la probabilità di transizione W su tutto l'angolo solido, M^2 è uguale ad una costante, pertanto lo spettro di energia dell'elettrone è dato dalla forma dello spazio delle fasi:

$$N(p)dp \propto p^2 (E_0 - E)^2 dp$$

Kurie plot



- Se si plotta $(N(p)/p^2)^{1/2}$ versus l'energia dell'elettrone, si ottiene una linea retta che incrocia l'asse delle ascisse a $E=E_0$. Questo viene chiamato plot di Kurie.
- Sperimentalmente occorre includere un fattore di correzione $F(Z, p)$ che tenga conto dell'interazione Coulombiana tra l'elettrone ed il nucleo.
- Nel caso in cui il neutrino avesse massa, il suo effetto è di modificare la distribuzione nel modo seguente:

$$N(p)dp \propto p^2(E_0 - E)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu}{E_0 - E}\right)^2} dp$$

- Il plot di Kurie si modifica in modo tale che la curva interseca l'asse delle ascisse a $E=E_0 - m_\nu$. Questo è il modo in cui si cerca di misurare la massa del neutrino-e. Purtroppo in quella regione ci sono pochissimi eventi ed è difficile fare la misura, per cui si è riuscito a mettere solo un limite superiore.

$$m_{\nu_e} \leq 10 \text{ eV}$$

Regola di Sargent

- La rate di decadimento totale si ottiene integrando lo spettro $N(p)dp$. Questo può essere fatto analiticamente, tuttavia in molti casi l'elettrone è relativistico e si può usare l'approssimazione $p \approx E$. In questo caso si ottiene una formula molto semplice:

$$N \propto \int_0^{E_0} E^2 (E_0 - E)^2 dE \propto E_0^5$$

- La rate di decadimento è proporzionale alla quinta potenza dell'energia disponibile nel processo. Questa è la regola di Sargent.

- Considerando tutti i fattori numerici del processo, si ottiene:

$$W = \frac{G^2 |M|^2 E_0^5}{60\pi^3 (\hbar c)^6 \hbar} \quad (\text{per } E_0 \gg m_e)$$

- La costante di Fermi G può essere ricavata, come vedremo più avanti, dalla misura della vita media di alcuni decadimenti β (e con alcune considerazioni teoriche, vedi angolo di Cabibbo), oppure in maniera più precisa dalla vita media del muone

- Dal PDG si ottiene: $\frac{G}{(\hbar c)^3} = 1.16637(1) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

- Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\frac{1}{\tau} = W = \frac{1.11}{10^4} |M|^2 E_0^5 \text{ s}^{-1} \quad (E_0 \text{ in MeV})$$

- Ad esempio, se $E_0 \approx 100 \text{ MeV}$ come nel decadimento del muone e $M^2=1$, si ha:

$$\tau_\mu = \frac{1}{W} \approx 10^{-6} \text{ s} \quad (\tau_\mu = 2.2 \mu\text{s})$$

N.B. è la dipendenza da E_0^5 che spiega il grande intervallo di variabilità delle vite medie dei decadimenti deboli.

Misura della costante di Fermi

- La rate di decadimento si può scrivere in un altro modo rispetto alla regola di Sargent, esplicitando la massa del protone m , ed inglobando i termini relativi allo spazio delle fasi ed alla correzione Coulombiana $F(\pm Z, p)$ in una funzione adimensionale $f(\pm Z, E_0/m_e)$ calcolabile analiticamente.

$$\frac{1}{\tau} = W = \frac{(mc^2)^5}{2\pi^3 \hbar (\hbar c)^6} G^2 |M|^2 f(\pm Z, E_0)$$

E_0 (MeV) $\text{MeV}^2 \cdot \text{fm}^6$
↓

decadimento	transizione	τ (s)	W	p_e^{max}	$f \tau$	$g^2 M_{if} ^2$
$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	890	1.29	1.18	$1.61 \cdot 10^3$	$4.25 \cdot 10^{-8}$
${}^3_1H \rightarrow {}^3_2He e^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	$5.60 \cdot 10^8$	0.53	0.14	$1.63 \cdot 10^3$	$4.20 \cdot 10^{-8}$
${}^{14}_8O \rightarrow {}^{14}_7N^* e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	102	2.32	2.26	$4.51 \cdot 10^3$	$1.52 \cdot 10^{-8}$
${}^{34}_{17}Cl \rightarrow {}^{34}_{16}S e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	2.21	4.97	4.94	$4.54 \cdot 10^3$	$1.51 \cdot 10^{-8}$
${}^6_2He \rightarrow {}^6_3Li e^- \bar{\nu}$	$0^+ \rightarrow 1^+$	1.15	4.02	3.99	$1.17 \cdot 10^3$	$5.85 \cdot 10^{-8}$
${}^{13}_5B \rightarrow {}^{13}_6C e^- \bar{\nu}$	$\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-$	$2.51 \cdot 10^{-3}$	13.4	13.4	$1.11 \cdot 10^3$	$6.17 \cdot 10^{-8}$

• Nonostante la grande variazione della vita media, dovuta alla forte dipendenza dell'integrale f da p_e^{max} , il prodotto $G^2 M^2$ è approssimativamente lo stesso in tutti i decadimenti.

• Si osserva tuttavia una piccola differenza in funzione del tipo di transizione: Fermi pure, Gamow-Teller pure oppure miste.

• Per estrarre da questi dati il valore della costante di Fermi si considera il rapporto:

$$G^2 |M|^2 = \frac{\text{costante}}{f \cdot \tau} \quad (\text{costante} = \frac{2\pi^3}{m^5})$$

• Se consideriamo una transizione pura di Fermi, si ottiene:

$$\frac{G}{(\hbar c)^3} = 1.140(2) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

leggermente diverso dal valore quotato dal PDG. La ragione la vedremo più avanti (angolo di Cabibbo)

Generalizzazione del decadimento β di Fermi

- Non c'è nessuna ragione a priori perché la corrente debole debba essere una corrente vettoriale.
- La Lagrangiana più semplice che sia invariante di Lorentz e non contenga derivate dei campi è:

$$L_i = \sum_r C_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) (\bar{\psi}_e O_r \psi_\nu) + \underbrace{\sum_r C_r (\bar{\psi}_n O_r^\dagger \psi_p) (\bar{\psi}_\nu O_r^\dagger \psi_e)}_{\text{Hermitiano coniugato}}$$

- I C_r sono delle costanti che determinano l'intensità dell'interazione. Gli operatori O_r sono:

$$O_S = 1 \quad \text{scalare} \quad ; \quad O_A = \gamma^\mu \gamma_5 \quad \text{vettore assiale}$$

$$O_V = \gamma^\mu \quad \text{vettore} \quad ; \quad O_P = i\gamma_5 \quad \text{pseudoscalare}$$

$$O_T = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad \text{Tensore antisimmetrico}$$

- Oggi sappiamo che le interazioni deboli non conservano la parità, questo implica che devono esserci nella Lagrangiana dei termini pseudoscalari. Per fare questo è sufficiente costruire altri 5 operatori $O'_r = O_r \gamma_5$

- Quindi per ogni termine del tipo: $C_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) (\bar{\psi}_e O_r \psi_\nu) + \text{h.c.}$ aggiungiamo alla Lagrangiana un termine del tipo:

$$C'_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) (\bar{\psi}_e O_r \gamma_5 \psi_\nu) + \text{h.c.}$$

questo termine connette stati con parità diversa.

- La lagrangiana completa si può scrivere come:

$$L_i = \sum_r C_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) \left[\bar{\psi}_e O_r \left(1 + \frac{C'_r}{C_r} \gamma_5 \right) \psi_\nu \right] + \text{h.c.}$$

N.B. L'elemento di matrice M_{fi} si ricava dalla Lagrangiana

Determinazione dei C_r

- Dall'analisi della forma della Lagrangiana, risulta che nel termine pseudoscalare, l'elemento di matrice viene moltiplicato per il $\beta (=v/c)$ del nucleone, quindi questo termine può essere trascurato.
- Inoltre, dallo studio delle correlazioni degli spin dell'elettrone e del neutrino, risulta che ai decadimenti di Fermi ($\Delta J = 0$) possono contribuire solo i termini vettoriali o scalari, mentre ai decadimenti di Gamow-Teller possono contribuire solo i termini assiali o tensoriali.
- I coefficienti C_r si determinano sperimentalmente osservando la forma dello spettro dell'elettrone del decadimento β e la sua correlazione angolare con la direzione del neutrino.
- Se consideriamo solo i decadimenti β permessi ($\Delta I = 0$), non c'è cambiamento di parità, quindi possiamo ignorare nella Lagrangiana i termini che contengono γ_5 . Possiamo riscrivere la Lagrangiana separando i contributi dei decadimenti di Fermi da quelli di Gamow-Teller:

$$L_i = \sum_{i=S,V} C_i (\bar{\psi}_p O_i \psi_n) (\bar{\psi}_e O_i \psi_\nu) + \sum_{j=T,A} C_j (\bar{\psi}_p O_j \psi_n) (\bar{\psi}_e O_j \psi_\nu)$$

- Lo spettro in energia dell'elettrone (n^-) e del positrone (n^+) nel decadimento β si può scrivere come:

$$\frac{dn_{\pm}}{dE_e} = \frac{P_e E_e}{2\pi^3} (E_0 - E)^2 \left[|M_F|^2 (C_S^2 + C_V^2) + |M_{GT}|^2 (C_T^2 + C_A^2) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2me}{Ee} (|M_F|^2 C_S C_V + |M_{GT}|^2 C_T C_A) \right]$$

M_F e M_{GT} sono gli elementi di matrice di Fermi e Gamow-Teller e E_0 è la massima energia possibile dell'elettrone.

- Da questa espressione si nota come non ci sia interferenza tra le transizioni di Fermi e quelle di Gamow-Teller, mentre c'è interferenza tra i termini S e V ed i termini A e T.
- Dato che sono osservate transizioni pure di Fermi o di Gamow-Teller, non possiamo avere:

$$C_S = C_V = 0 \quad \text{oppure} \quad C_A = C_T = 0$$

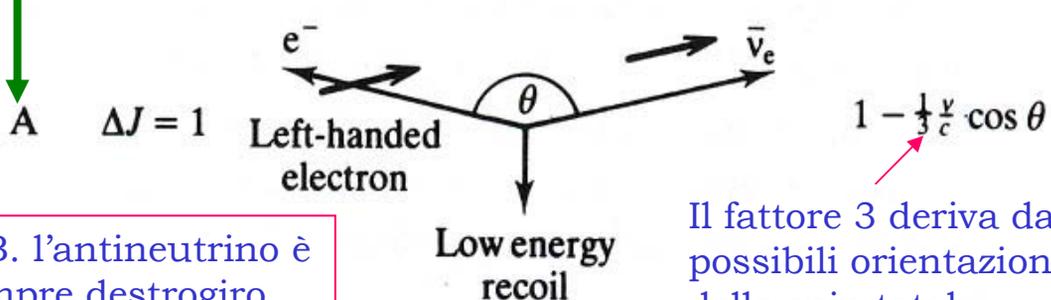
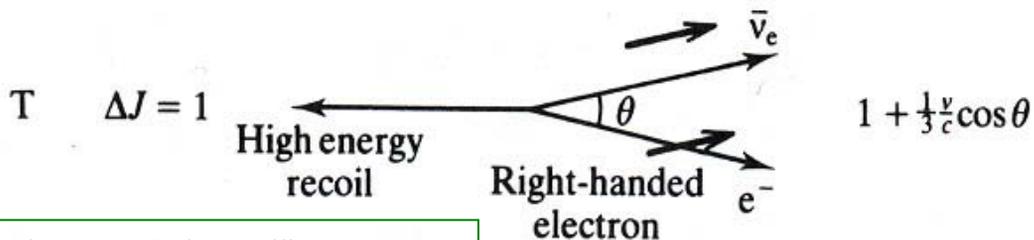
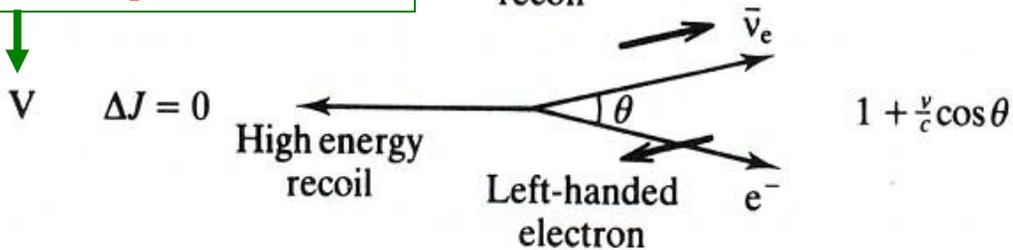
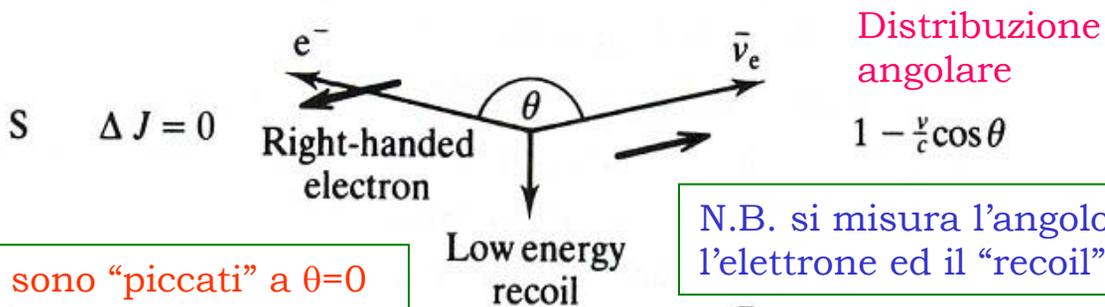
Determinazione dei C_r

- Analizzando lo spettro (Kurie plot) per le transizioni pure di Fermi o di Gamow-Teller, si può determinare il rapporto:

$$\frac{C_S \cdot C_V}{C_S^2 + C_V^2} = 0.00 \pm 0.15 \quad ; \quad \frac{C_T \cdot C_A}{C_T^2 + C_A^2} = 0.00 \pm 0.02$$

quindi i dati suggeriscono che (Michel, 1957) C_S o C_V sono zero e che C_T o C_A sono zero.

- Per decidere quale termine è nullo si analizza la correlazione tra la direzione dell'elettrone e quella del neutrino.



Misura di C_V e C_A

- Utilizzando le semplificazioni ottenute, lo spettro dell'elettrone si può riscrivere nel modo seguente:

$$\frac{dn}{dE_e} = \frac{P_e E_e}{2\pi^3} (E_0 - E)^2 \left[C_V^2 |M_F|^2 + C_A^2 |M_{GT}|^2 \right]$$

- integrando su tutto lo spettro si ottiene il numero di conteggi per unità di tempo, che è inversamente proporzionale alla vita media τ

$$n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi^3} \left[C_V^2 |M_F|^2 + C_A^2 |M_{GT}|^2 \right] \underbrace{\int_{m_e}^{E_0} P_e E_e (E_0 - E)^2 dE_e}_{m^5 \cdot f}$$

N.B. per rendere f adimensionale, si normalizzano le energie alla massa m , che può essere la massa dell'elettrone oppure quella del protone. **N.N.B.** f tiene conto anche della correzione Coulombiana dell'energia, che è diversa per elettrone e positrone

- Abbiamo detto che: $|M_F|^2 \approx 1$; $|M_{GT}|^2 \approx 3$
- I parametri C_V e C_A si ricavano dalla misura delle vite medie di alcuni decadimenti β nucleari. In realtà si preferisce misurare il tempo di dimezzamento piuttosto che la vita media

$$N(t_2) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau}} \Rightarrow t_2 = \tau \cdot \ln 2$$

- Dai decadimenti puri di Fermi (ad esempio $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^*$ si ottiene:

$$C_V = \frac{G}{(\hbar c)^3} = 1.140(2) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} = \frac{10^{-5}}{M_p^2} \quad (\hbar = c = 1)$$

- Dal decadimento del neutrone (decadimento misto) si ottiene:

$$\frac{1}{f \cdot t} = \left[C_V^2 + 3 \cdot C_A^2 \right] \frac{m^5}{2\pi^3 \ln 2} = (1080 \pm 16)^{-1} \text{ s}^{-1}$$

- Si confronta con il dec. dell' ^{14}O (2 protoni che decadono)

$$\frac{(ft)^{14}\text{O}}{(ft)_n} = \frac{C_V^2 + 3 \cdot C_A^2}{2C_V^2} = \frac{3100 \pm 20}{1080 \pm 16} \Rightarrow \left| \frac{C_A}{C_V} \right| = 1.25 \pm 0.2$$

- dai neutroni polarizzati si ricava che il segno di C_A è negativo 15

τ - θ puzzle

- Vi erano due particelle strane, aventi la stessa massa e la stessa vita media, che decadevano in due stati finali con parità diverse:

$$\theta \rightarrow \pi \pi \quad ; \quad \tau \rightarrow \pi \pi \pi$$

- Parità del mesone θ ($K \rightarrow \pi \pi$):

I pioni hanno spin zero, quindi per la conservazione di J, lo spin del K deve essere uguale al momento angolare orbitale relativo del sistema di due pioni.

La parità del sistema di conseguenza è uguale a: $\eta = (-1)^l$

$$\Rightarrow J^P = 0^+, 1^-, 2^+, 3^- \dots \quad (\text{spin parity naturale})$$

Se consideriamo il decadimento del K neutro in $2\pi^0$, che sono due bosoni identici, la funzione d'onda deve essere simmetrica, quindi sono permessi solo i pari:

$$\Rightarrow J^P = 0^+, 2^+ \dots \Rightarrow \text{spin pari del K e parità positiva}$$

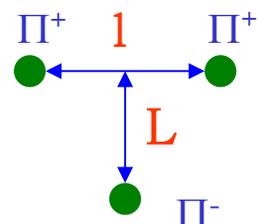
- Parità del mesone τ ($K \rightarrow \pi \pi \pi$):

Si può trattare il sistema come un di-pione (ad esempio due pioni con la stessa carica con in aggiunta il terzo pione).

Chiamiamo l il momento angolare relativo dei due pioni e chiamiamo L il momento del terzo pione rispetto alla coppia di pioni.

La parità del sistema di tre pioni è:

$$\eta = (-1)^3 \cdot (-1)^l \cdot (-1)^L = -(-1)^L$$



N.B. l deve essere pari perché i due pioni della stessa carica sono due particelle identiche.

(il pione ha parità intrinseca negativa)

τ - θ puzzle

- Lo spin totale J del sistema di 3 pioni deva cadere nell'intervallo:

$$|L - I| \leq J \leq |L + I|$$

quindi abbiamo le seguenti combinazioni:

I	L	J^P
0	0	0^-
0	1	1^+
0	2	2^-
2	0	2^-
2	1	$1^+, 2^+, 3^+$
2	2	$0^-, 1^-, 2^-, 3^-, 4^-$

$$\eta = -(-1)^L$$

Per determinare qual'è l'assegnazione giusta degli spin occorre studiare la distribuzione angolare dei decadimenti in funzione delle diverse assegnazioni di J (sviluppo in onde parziali e Dalitz plot)

- Da queste si deduce che la combinazione deve essere:

$$J^P = 0^- \quad \text{oppure} \quad 1^+ \quad \text{ma non} \quad 1^-$$

Includendo anche gli effetti dello spazio delle fasi, risulta che:

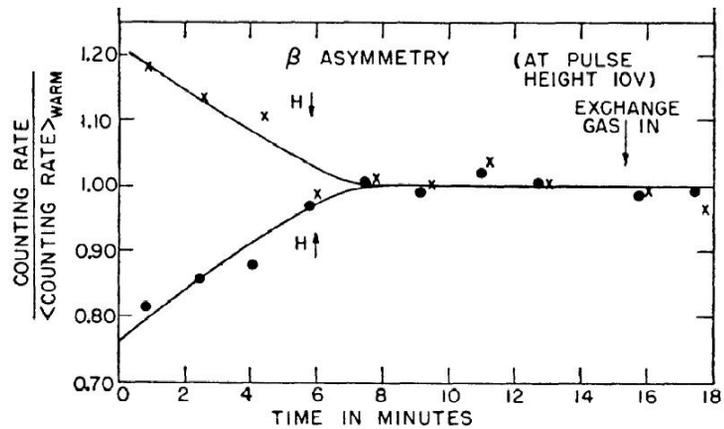
$$J^P = 0^- \quad (\text{N.B. il K ha spin } 0)$$

- Quindi il τ aveva parità negativa mentre il θ aveva parità positiva, da qui il puzzle che fu risolto da T.D.Lee e C.N.Yang che ipotizzarono che le interazioni deboli non conservassero la parità e suggerirono alcuni metodi per verificarlo.

Esperimento di Madame Wu



C.S. Wu (1913-1997)



Phys. Rev., 105, 1413 (1957)

One day in the early spring of 1956, Prof. T.D. Lee came up to my little office, explaining: "...the violation should also be observed in the space distribution of the beta-decay of polarized nuclei..."

This was a golden opportunity for a beta-decay physicist to perform a crucial test, and how could I let it pass? ...That spring, my husband, Chia-Liu Yuan, and I had planned to attend a conference in Geneva and then proceed to the Far East. Both of us had left China in 1936, exactly twenty years earlier. Our passages were booked on the Queen Elizabeth before I suddenly realized that I had to do the experiment immediately, before the rest of the Physics community recognized the importance of this experiment and did it first. So I asked Chia-Liu to let me stay and go without me. On Christmas eve I told Professor Lee that the observed asymmetry was reproducible and huge.

• Anche questa lettera è fondamentale per la fisica ... e per capire la sociologia dei fisici e dei ricercatori in generale!

• R.L.Garwin, L.M.Lederman, M.Weinrich

Phys. Rev., 105, 1415 (1957)

• J.I.Friedman, V.L.Telegdi

Phys. Rev., 106, 1290 (1957)

(violazione della parità nel decadimento del pione)

Equazione di Weyl: teoria a due componenti del neutrino

- Nel 1929, subito dopo la pubblicazione dell'equazione di Dirac, Weyl presentò una teoria molto semplice ed elegante per le particelle senza massa di spin $\frac{1}{2}$, per le quali l'elicità risulta essere un buon numero quantico.
- Al tempo della pubblicazione questa teoria suscitò un interesse limitato perché non si conoscevano particelle senza massa di spin $\frac{1}{2}$
- Tuttavia, anche dopo l'introduzione del neutrino da parte di Pauli, lo stesso Pauli rifiutò la teoria di Weyl perché violava la simmetria di parità.
- Solo dopo il 1957 la teoria di Weyl ricevette il giusto credito.
- **Ripartiamo dall'equazione di Dirac nello spazio dei momenti:**

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p_\mu) = 0$$

se mettiamo $m=0$ e ricordiamo che $\gamma^0=\beta$ e $\gamma^i = \beta\alpha^i$, abbiamo:

$$(\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p})\psi(p_\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\beta E - \beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\psi(p_\mu)$$

$$\Rightarrow H\psi(p) \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\psi(p) = E\psi(p)$$

- Per studiare l'equazione di Weyl è preferibile usare la rappresentazione di Weyl (o rappresentazione chirale), in cui γ^5 è diagonale, invece della rappresentazione che abbiamo già visto di Dirac-Pauli.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Equazione di Weyl

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \psi = E \psi$$

- Lo spinore ψ a 4 componenti si può scrivere come:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \chi \text{ e } \varphi \text{ sono spinori a 2 componenti}$$

L'equazione di Weyl diventa:
$$\begin{pmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

- Le equazioni si disaccoppiano:
$$\begin{cases} -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi = E \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi = E \varphi \end{cases}$$

- Dato che il neutrino non ha massa, ne consegue che $E^2 = P^2$. Per ognuna delle due equazioni si avranno due soluzioni, una con energia positiva e l'altra con energia negativa.

- Le soluzioni con energia positiva corrispondono ai neutrini mentre quelle a energia negativa corrispondono agli antineutrini

- Ricordiamo che $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ è il proiettore di elicità

- soluzioni a energia positiva: $E = |\vec{p}|$

$$\Rightarrow \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi = -\chi \quad ; \quad \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \varphi = \varphi$$

(neutrino levogiro ; neutrino destrogiro)

- soluzioni a energia negativa: $E = -|\vec{p}|$

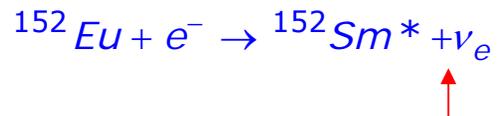
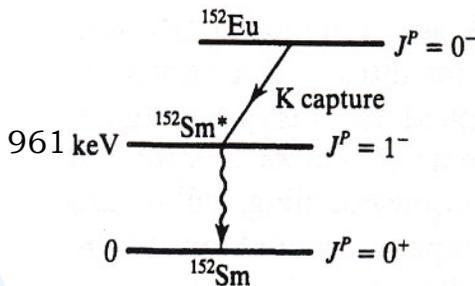
$$\Rightarrow \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi = \chi \quad ; \quad \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \varphi = -\varphi$$

(antineutrino destrogiro ; antineutrino levogiro)

N.B. l'equazione viola la parità perché il neutrino levogiro ed il neutrino destrogiro sono descritti da spinori diversi (χ e φ) disaccoppiati

Misura dell'elicità del neutrino

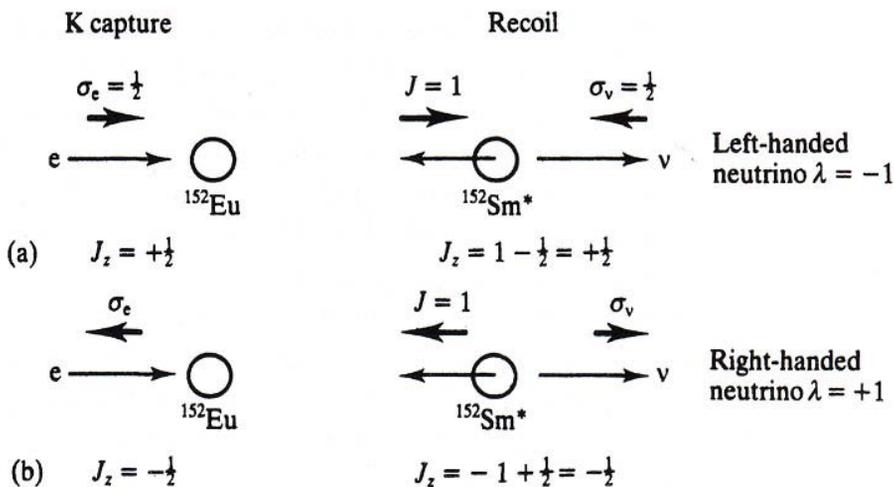
- Nel 1958 Goldhaber, Grodzins e Sunyar realizzarono un esperimento molto ingegnoso per la misura dell'elicità del neutrino.
- Si prende uno stato metastabile di ^{152}Eu che, attraverso una cattura elettronica K, decade nel 24% dei casi in uno stato eccitato di $^{152}\text{Sm}^*$, il quale decade a sua volta nello stato fondamentale emettendo un fotone di 961 keV.



Decadimento a due corpi: $E_\nu = 840 \text{ keV}$

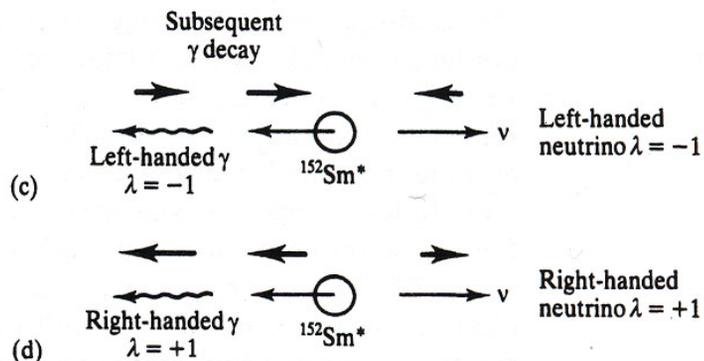
N.B. l'impulso del neutrino è circa uguale a quello del fotone!!

- In base alla conservazione del momento angolare si può definire l'elicità del neutrino:



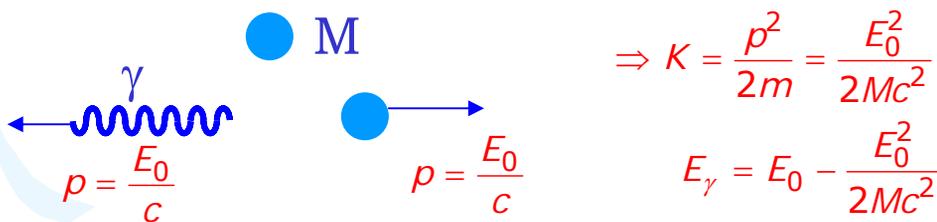
- infine vediamo la polarizzazione dei fotoni emessi nella direzione di volo del Samario.

N.B. il fotone ha la stessa elicità del neutrino



Misura dell'elicità del neutrino

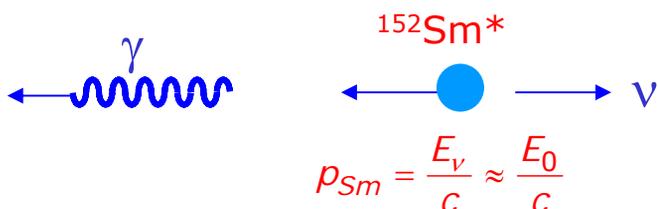
- La vita media del $^{152}\text{Sm}^*$ è di circa 10^{-14} s, quindi il decadimento avviene quando ancora il Samario è in "volo", pertanto il fotone "ricorda" il momento angolare del $^{152}\text{Sm}^*$.
- In particolare il fotone emesso nella direzione di rinculo ha la stessa elicità del nucleo di $^{152}\text{Sm}^*$ e quindi la stessa elicità del neutrino.
- L'elicità del fotone si misura esaminando la trasmissione dei fotoni attraverso il ferro magnetizzato. Il processo dominante nell'interazione con la materia per fotoni di 961 keV è lo scattering Compton, la cui sezione d'urto dipende dagli spin.
- La trasmissione maggiore (ovvero la sezione d'urto minore) si ha quando lo spin del fotone è parallelo a quello dell'elettrone
- Va tenuto presente che solo i fotoni emessi in direzione opposta a quella del neutrino hanno la stessa elicità, quindi occorre selezionare solo questi fotoni.
- Se si emette un fotone da uno stato avente energia di eccitazione E_0 , bisogna fornire un impulso E_0/c al nucleo che rincula e di conseguenza l'energia del fotone è ridotta della quantità $E_0^2/2Mc^2$ (M =massa del nucleo) (N.B. questa formula approssimata è valida perché $Mc^2 \gg E_0^2$)



- Quando un fotone viene assorbito occorre fornirgli un'energia aggiuntiva per tener conto del rinculo del nucleo: $E_\gamma = E_0 + \frac{E_0^2}{2Mc^2}$
- In genere l'energia persa $E_0^2/2Mc^2$ è più grande della larghezza del livello, per cui un nucleo non può riassorbire il fotone che esso emette (assorbimento risonante) a meno che non venga fornita al fotone l'energia che manca.

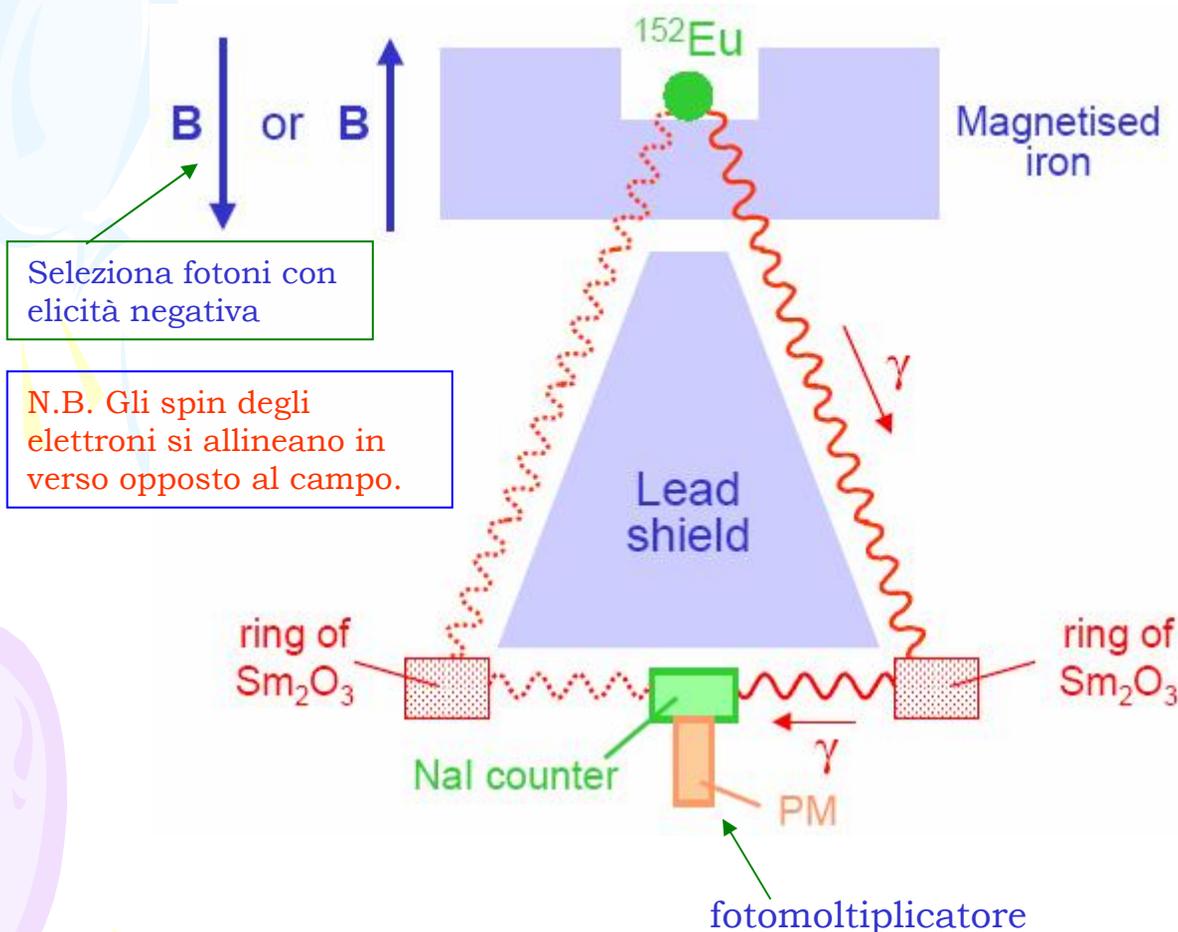
Esperimento di Goldhaber

- Nell'esperimento di Goldhaber i fotoni emessi nella direzione del rinculo del Samario acquistavano energia per effetto Doppler ed avevano così l'energia giusta per fare assorbimento risonante da parte di un anello di ossido di Samario che circondava un rivelatore di fotoni.



L'agitazione termica fa sì che la risonanza avvenga in pratica

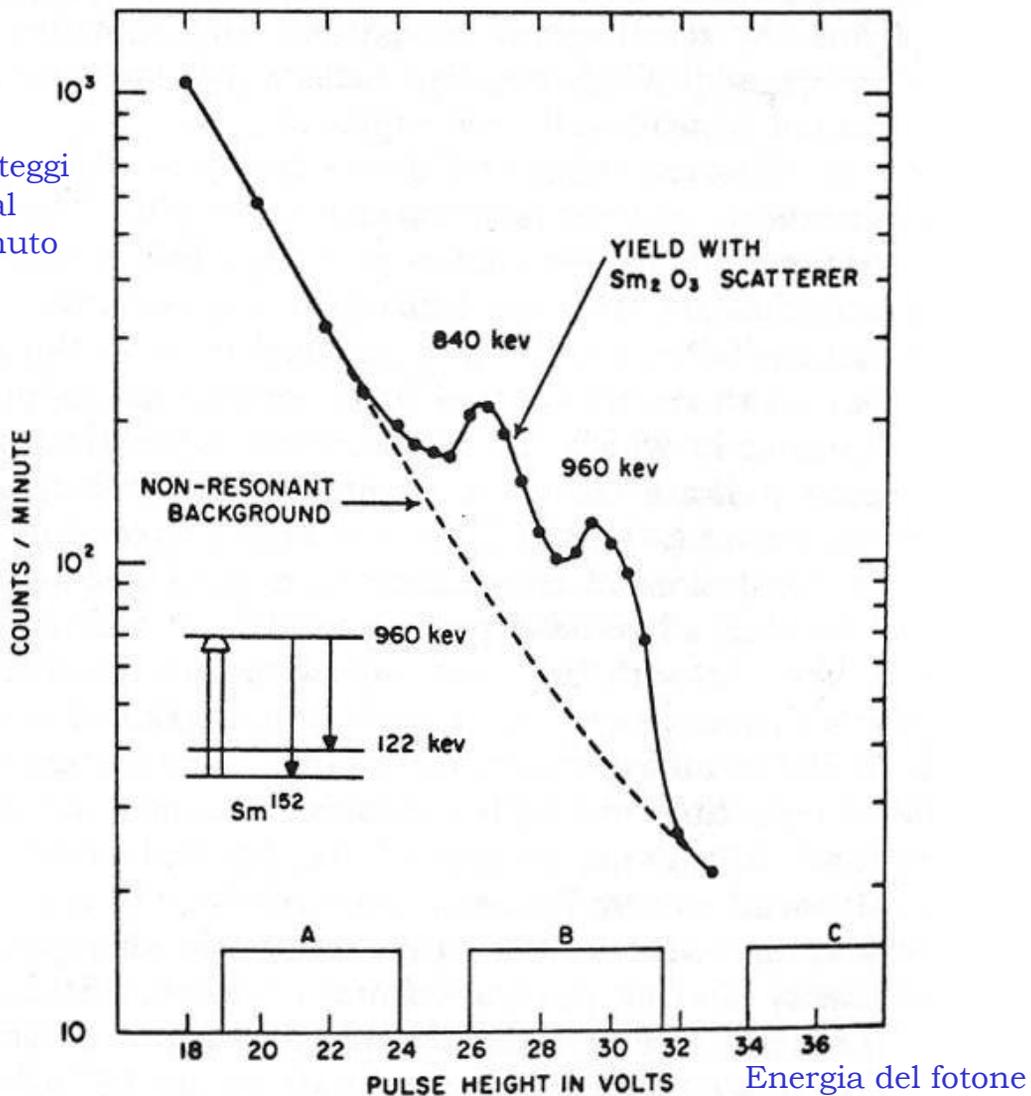
- Nel ferro magnetizzato gli spin degli elettroni hanno una direzione preferenziale, pertanto esso lascia "passare" più facilmente i fotoni che hanno lo spin allineato con quello degli elettroni. Il campo B poteva essere invertito.



Elicità del neutrino

- Risultati dell'esperimento:

Conteggi
al
minuto



- La presenza del picco risonante (anzi, dei due picchi) si ottenne per una configurazione del campo magnetico corrispondente a fotoni levogiri, pertanto anche i neutrini sono levogiri.
- L'elicità dell'antineutrino è stata misurata studiando il decadimento di neutroni polarizzati, e risulta che gli antineutrini sono destrogiri.

il neutrino è levogiro

L'antineutrino è destrogiro

Interazione V-A

- Ricapitoliamo quanto abbiamo verificato sperimentalmente fino a qui sulle interazioni deboli:

1. Nelle interazioni di Fermi compare solo il termine vettoriale ($O_i = \gamma^\mu$) mentre in quelle di Gamow-Teller compare solo quello assiale ($O_j = i\gamma^\mu\gamma^5$)
2. **Il neutrino ha elicità negativa**
3. Le interazioni deboli violano la parità, quindi nella Lagrangiana occorre introdurre dei termini pseudoscalari. Questo si fa con la sostituzione:

$$C_i \rightarrow (C_i + C_i' \gamma^5) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(il fattore $1/\sqrt{2}$ si inserisce per riottenere il valore di $G \cdot C_V$ (costante di Fermi) trovato in precedenza)

- Possiamo riscrivere la Lagrangiana di Fermi, includendo in essa la violazione della parità, nel modo seguente:

$$L_i = \sum_{i=V,A} \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_p O_i \psi_n) \left[\bar{\psi}_e O_i (C_i + C_i' \gamma^5) \psi_\nu \right]$$

- Dai risultati sull'elicità del neutrino si trova che: $C_i = 1$; $C_i' = -1$
- Facciamo comparire esplicitamente la costante di Fermi:

$$\Rightarrow L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left\{ C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right] + C_A (\bar{\psi}_p i \gamma^\mu \gamma^5 \psi_n) \left[\bar{\psi}_e i \gamma_\mu \gamma^5 (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right] \right\}$$

- utilizzando le proprietà di anticommutazione delle matrici γ si ha:

$$\Rightarrow L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma^5) \psi_n \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right]$$

Interazione V-A

- Ricordiamo che da una transizione pura di Fermi si misura il prodotto $G \cdot C_V$. Se confrontiamo questo numero con la misura di G determinata in un decadimento puramente leptonic, come ad esempio il decadimento del muone, dove non compare il termine C_V , si trova che le misure sono in buon accordo, quindi da ciò si deduce che:

$$C_V = 1 \quad \Rightarrow \quad C_A = -1.26 \pm 0.02$$

- C_A non è uguale a 1 perché le interazioni forti modificano la corrente assiale degli adroni, mentre lasciano invariata la parte vettoriale della corrente debole, come vedremo più avanti. Infatti se prendiamo altri decadimenti deboli adronici, oltre a quello del neutrone, abbiamo:

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \Rightarrow \frac{C_A}{C_V} = -0.72 \quad ; \quad \Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e \Rightarrow \frac{C_A}{C_V} = +0.34$$

- Tuttavia se ignoriamo gli effetti delle interazioni forti sulla corrente assiale, possiamo porre:

$$C_A = -C_V = -1$$

(nelle interazioni dei neutrini con i quark si può verificare che questa assunzione è giusta anche per i quark)

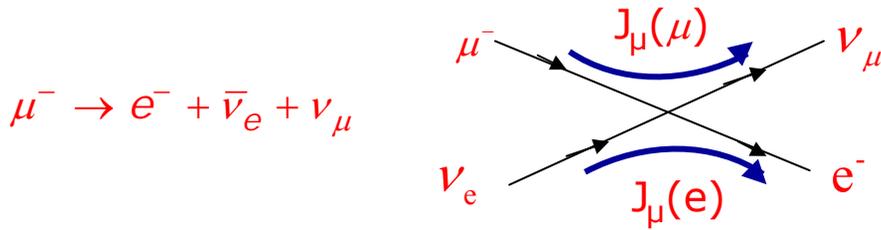
- Pertanto possiamo riscrivere la Lagrangiana nel modo seguente:

$$L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right]$$

- Questa è la cosiddetta interazione V-A. A parte il fattore $(1 - \gamma^5)$, essa è la stessa Lagrangiana proposta originariamente da Fermi.
- Il fattore $(1 - \gamma^5)$ è molto importante perché, come vedremo, seleziona solo una determinata elicità (chiralità) dei fermioni che partecipano all'interazione debole.

Interazione universale di Fermi

- Consideriamo il decadimento del muone



- La lagrangiana si può scrivere come:

$$L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \psi_\mu \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\rho (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \right]$$

- Si tratta di un'interazione V-A pura, vale a dire che le correnti vettoriali e assiali hanno la stessa intensità ma segno opposto.
- Dal calcolo della vita media del muone, tenendo conto dello spazio delle fasi, si ottiene:

$$\frac{1}{\tau_\mu} = W = \frac{G^2 m_\mu^5}{192 \pi^3}$$

$$m_\mu = 105.658369 (9) \text{ MeV}$$

$$\tau_\mu = (2.19703 (4)) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

- Dai valori misurati della massa e della vita media del mu, si ha:

$$G = (1.4358 (1)) \cdot 10^{-62} \text{ J} \cdot \text{m}^3$$

- Dalle misure dei decadimenti β puri di Fermi ($0 \rightarrow 0$), si misura:

$$G \cdot C_V = (1.4116 (8)) \cdot 10^{-62} \text{ J} \cdot \text{m}^3$$

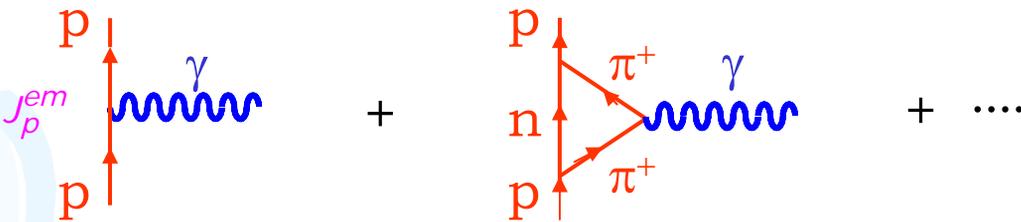
confrontando i due valori si trova $C_V = 0.98$ (vedi angolo di Cabibbo)

- Dalla somiglianza dei due valori misurati per G discende l'universalità delle interazioni deboli, vale a dire un'unica costante di accoppiamento per tutti i tipi di interazioni deboli. Questa situazione è simile all'universalità delle interazioni elettromagnetiche, nelle quali compare un'unica costante di accoppiamento, la carica elettrica e .

N.B. Il grande range delle vite medie è un effetto cinematico

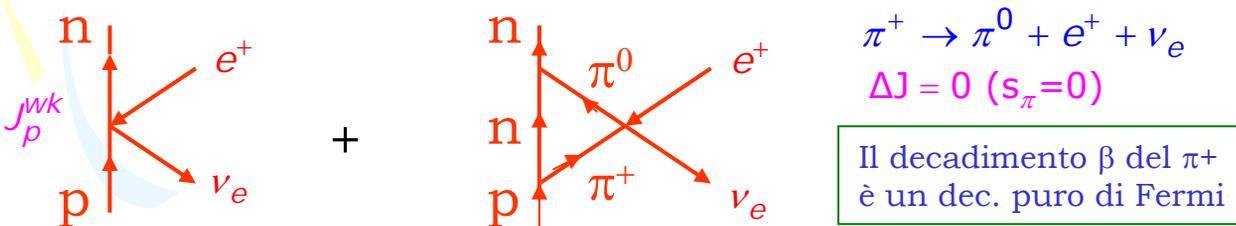
Ipotesi della corrente vettoriale conservata

- Dato che protone e neutrone sono oggetti composti soggetti all'interazione forte, ci si aspetta che la loro costante di accoppiamento debole venga modificata rispetto a quella dell'accoppiamento puramente leptonic. Infatti $C_A \approx -1.26$ ed è quasi una sorpresa che $C_V \approx 1$
- La situazione fu chiarita da Gerstein e Zeldovitch ed indipendentemente da Feynman e Gell-Mann con l'ipotesi della Corrente Vettoriale Conservata (CVC)
- Prendiamo un protone che interagisce e.m. con un fotone:



- ci si aspetta che l'accoppiamento del protone con il fotone sia modificato dall'emissione del π^+ . Questo non succede perché l'accoppiamento del π^+ con il fotone è lo stesso di quello del protone con il fotone, quindi $\delta_\mu J^\mu(em) = 0$ (corrente conservata).

- Prendiamo ora l'interazione debole:



- la CVC dice che la parte vettoriale della corrente adronica è esattamente analoga alla corrente e.m. e pertanto si conserva.
- Questo vuol dire che l'accoppiamento del π^+ con la corrente leptonica è uguale a quella del protone, in modo tale che la corrente del protone non viene rinormalizzata.

(La CVC è il primo indizio dell'unificazione delle interazioni e.m. con le interazioni deboli)

(Esiste anche la PCAC – corrente assiale parzialmente conservata)

Ipotesi Corrente-Corrente

- Il decadimento del neutrone è descritto dal prodotto di due correnti:

$$J_n^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \quad \text{Corrente del neutrone se } C_A = -1$$

$$J_e^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \quad \text{Corrente dell'elettrone}$$

- Il decadimento del muone è descritto da prodotto di due correnti leptoniche, quella dell'elettrone e quella del muone

$$J_\mu^\rho = \bar{\psi}_\mu \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\mu} \quad \text{Corrente del muone}$$

- Queste sono correnti cariche, perché c'è un cambiamento della carica tra la particella iniziale e quella finale della corrente

- Questa descrizione fu generalizzata da Feynman e Gell-Mann per includere tutti i processi deboli (in realtà solo quelli a corrente carica perché all'epoca non si conoscevano ancora processi deboli a corrente neutra, vedi Modello Standard).

- Si definisce una corrente debole che è la somma di tutte le correnti leptoniche:

$$J_l^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} + \quad \text{le corrispondenti correnti per gli altri leptoni, con uguali ampiezze per via dell'universalità leptonica}$$

ed una corrente adronica:

$$J_h^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n + \quad \text{gli altri termini per le particelle strane}$$

- quindi tutte le ampiezze dei processi deboli sono della forma:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu \cdot J_\mu^\dagger$$

Per via della conservazione della carica deve comparire una corrente carica di innalzamento della carica ed una di abbassamento

- N.B. Nella formulazione moderna, si preferisce definire la corrente introducendo il fattore $\frac{1}{2} (1 - \gamma^5)$ invece del vecchio $(1 - \gamma^5)$, allora:

$$\mathcal{M} = 4 \frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu \cdot J_\mu^\dagger$$

Richiamo dell'eq. di Dirac

- Ricordiamo la rappresentazione di Dirac-Pauli delle matrici γ

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In questa rappresentazione è β ad essere diagonale e non γ^5

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Hu \equiv (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u = Eu \quad (\text{eq. di Dirac nella sua forma originale})$$

$$\Rightarrow Hu \equiv \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

spinori a due componenti

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_B = (E - m)u_A \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_A = (E + m)u_B \end{cases}$$

Per $E > 0$ si prende: $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$ ($s=1,2$)
dove: $\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u_B^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)}$$

$$\Rightarrow u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Per } E > 0}$$

Fattore di normalizzazione

- Per le due soluzioni ad energia negativa si procede in modo analogo:

$$u_B^{(s)} = \chi^{(s)} \Rightarrow u_A^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - m} \chi^{(s)} = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^{(s)}$$

$$\Rightarrow u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Per } E < 0}$$

$u^{(3,4)}(-p) \equiv v^{(2,1)}(p)$

- Le soluzioni $u(1,2)$ ad energia positiva descrivono gli elettroni e le $u(3,4)$, ad energia negativa, descrivono i positroni

$$[\text{Parità: } \psi(x) \rightarrow \psi'(-x) = \gamma^0 \psi]$$

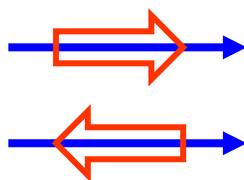
Operatore di elicità

- Gli autostati dell'equazione di Dirac ad energia definita hanno una doppia degenerazione (esistono cioè due stati che hanno la medesima energia), questo vuol dire che deve esistere un altro osservabile che commuti con l'Hamiltoniana (e quindi con l'operatore della quantità di moto visto che parliamo di una particella libera) che permetta di distinguere i due stati.
- Guardando la forma dell'Hamiltoniana si può vedere che l'operatore seguente gode di questa proprietà:

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \text{ operatore di spin ; } \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \text{ versore della quantità di moto}$$

- La componente dello spin nella direzione della quantità di moto, $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ è pertanto un buon numero quantico che può essere usato per distinguere le due soluzioni.
- Questo numero quantico viene chiamato elicità dello stato. I suoi due autovalori sono:

$$h = \begin{cases} +1 & \text{→} \\ -1 & \text{←} \end{cases}$$


- Se scegliamo la direzione dell'asse z in modo che punti nella direzione della quantità di moto, $\vec{p}=(0,0,p)$, abbiamo:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi^{(s)} = \sigma_3 \chi^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \chi^{(s)} = h \chi^{(s)}$$

quindi lo spinore $\chi^{(s)}$ è autostato dell'elicità con autovalore ± 1 (N.B. a volte si inserisce il fattore $\frac{1}{2}$ nella definizione dell'elicità)

Relazione tra elicità e γ^5

- La matrice γ^5 applicata ad uno spinore di Dirac gode della seguente proprietà:

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \end{pmatrix} u(p) \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

(rap. di Dirac)

- Può essere verificata facendo il calcolo esplicito:

$$\gamma^5 u^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} ; \quad \gamma^5 u^{(3,4)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \chi \end{pmatrix}$$

(nella verifica si tenga presente che: $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \cdot \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} = 1$)

- Se la particella ha massa nulla oppure $E \gg m$, si ha $E=p$, quindi :

$$\gamma^5 u(p) = (\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) u(p)$$



γ^5 coincide con l'operatore elicità per particelle di massa nulla

- Si può ora verificare che l'operatore $\frac{1}{2} (1-\gamma^5)$ agisce come un proiettore di elicità:

$$\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } u(p) \text{ ha elicità } +1 \\ u(p) & \text{se } u(p) \text{ ha elicità } -1 \end{cases} \quad (\text{per } m=0)$$

- Ricordiamo la forma della corrente debole:

$$J_l^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \quad ; \quad J_l^{\mu \dagger} = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_e$$

- Ne consegue che nelle interazioni deboli partecipano solo stati con un'elicità definita; in particolare solo neutrini levogiri e, come vedremo, antineutrini destrógiri. Nel limite di alta energia vengono selezionati, anche per i fermioni massivi, solo gli stati levogiri.

N.B. per un antiparticella di massa nulla si ha:

$$\gamma^5 v(p) = -(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) v(p)$$

Autostati chirali

- Si possono ora definire gli autostati chirali (dal greco chiros, mano, cioè stati che distinguono la mano destra dalla mano sinistra). Questi stati coincidono con gli stati aventi elicità definita solo per particelle senza massa. Questo perché l'elicità è un buon numero quantico solo per una particella senza massa che si muove alla velocità della luce, mentre per una particella massiva si può sempre trovare un sistema di riferimento in cui l'elicità cambia segno.
- Questi autostati vengono chiamati levogiri e destrogiri; essi hanno elicità ± 1 solo per particelle a massa nulla oppure, con buona approssimazione, per particelle con $E \gg m$.

Definizione:

$$u_L(p) \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} u(p) \quad ; \quad v_L(p) \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} v(p)$$

$$u_R(p) \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} u(p) \quad ; \quad v_R(p) \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} v(p)$$

← antiparticelle

- Per gli spinori aggiunti ricordiamo che γ^5 è hermitiano ($\gamma^5 = \gamma^{5\dagger}$) e anticommuta con le altre matrici γ ($\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$), quindi:

$$\bar{u}_L = u_L^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^0 = u^\dagger \gamma^0 \frac{1+\gamma^5}{2} = \bar{u} \frac{1+\gamma^5}{2}$$

$$\bar{v}_L(p) \equiv \bar{v}(p) \frac{1-\gamma^5}{2} \quad ; \quad \bar{u}_R(p) \equiv u(p) \frac{1-\gamma^5}{2} \quad ; \quad \bar{v}_R(p) \equiv \bar{v}(p) \frac{1+\gamma^5}{2}$$

- Vediamo alcune proprietà del proiettore:

$$\left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} [1 - 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2] = \frac{1-\gamma^5}{2} \quad \text{un proiettore applicato due volte da sempre lo stesso risultato}$$

$$\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^\mu \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} = \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}$$

- Ricordiamo un esempio di corrente debole: (vertice W-e- ν)

$$J_\mu = \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} e \quad (\text{distrugge un elettrone e crea un neutrino})$$

$$J_\mu = \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} e = \bar{\nu} \frac{(1+\gamma^5)}{2} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} e = \bar{v}_L \cdot \gamma_\mu \cdot e_L$$

Abbiamo ottenuto una corrente puramente vettoriale tra due particelle levogire (alla fine aveva ragione Fermi ☺)

Simmetria chirale

- Come abbiamo visto la corrente vettoriale debole (carica) accoppia soltanto elettroni levogiri con neutrini levogiri, mentre la corrente elettromagnetica non distingue la "chiralità" delle particelle coinvolte.
- Tuttavia anche per la QED si possono fare intervenire gli autostati chirali:

$$u = \frac{1 - \gamma^5}{2} u + \frac{1 + \gamma^5}{2} u = u_L + u_R \quad (\text{anche } \bar{u} = \bar{u}_L + \bar{u}_R)$$

$$\Rightarrow J_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e = -(\bar{e}_L + \bar{e}_R)\gamma_\mu(e_L + e_R) = -\bar{e}_L\gamma_\mu e_L - \bar{e}_R\gamma_\mu e_R$$

- questo succede perché i termini in "croce" sono nulli:

$$\bar{e}_L\gamma_\mu e_R = \bar{e} \frac{1 + \gamma^5}{2} \gamma_\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} e = \bar{e}\gamma_\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \frac{1 + \gamma^5}{2} e = 0$$

$$\text{perché: } (1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5) = 1 - (\gamma^5)^2 = 1 - 1 = 0$$

- quindi l'interazione elettromagnetica conserva la chiralità dei fermioni coinvolti. Ciò accade perché essa è di tipo vettoriale. Si può dimostrare che anche una corrente assiale conserva la chiralità.

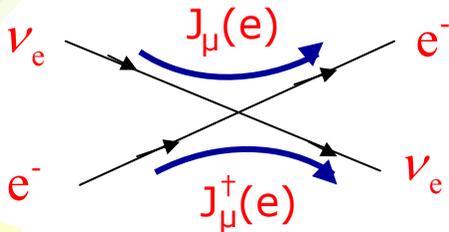
- Vediamo invece cosa accade per un termine scalare, come appare nei termini di massa della Lagrangiana:

$$m\bar{e}e = m\bar{e} \left[\frac{1 - \gamma^5}{2} + \frac{1 + \gamma^5}{2} \right] e = m \left[\bar{e} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right)^2 e + \bar{e} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right)^2 e \right] = m(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)$$

- I termini di massa mescolano stati con chiralità diversa, quindi essi rompono la simmetria chirale. Questo ha causato non pochi problemi nella prima versione della teoria unificata delle interazioni elettrodeboli di Glashow dove tutti i fermioni e bosoni erano rigorosamente a massa nulla. Il problema fu risolto da Weimberg e Salam introducendo nella teoria il meccanismo di Higgs della rottura spontanea di una simmetria di gauge locale.

Violazione dell'unitarietà

- Consideriamo il processo: $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$
- nella teoria di Fermi è rappresentata dal grafico seguente:



$$\mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_{\nu_e} \right] \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_e \right]$$

- Utilizzando questo elemento di matrice e considerando che ad alte energie la massa dell'elettrone è trascurabile, si ottiene:

$$\sigma(\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-) = \frac{G^2}{\pi} s \quad \text{s è il quadrato dell'energia del centro di massa}$$

- In unità naturali σ ha le dimensioni di $[M]^{-2}$, G ha le dimensioni di $[M]^{-2}$, quindi per far tornare le dimensioni occorre moltiplicare per s
- Dal formalismo dello sviluppo in onde parziali si trova la massima sezione d'urto in uno scattering elastico che sia compatibile con la conservazione dell'unitarietà
- Se ignoriamo lo spin delle particelle, si ha che la massima sezione d'urto possibile è:

$$\sigma_{el}^{max} = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} (2l+1) = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} = \frac{4\pi}{p_{cm}^2} \quad (\hbar=1) \quad \text{Scattering in onda S per particelle puntiformi}$$

[ad alte energie neutrino ed elettrone sono levogiri, $\longrightarrow J=0$ (onda S)]

- Quindi: $\frac{G^2}{\pi} s \leq \frac{4\pi}{p_{cm}^2}$; ricordiamo che: $s = (p_\nu + p_e)^2$

- Nel laboratorio $s=2m_e E_0$, mentre nel centro di massa:

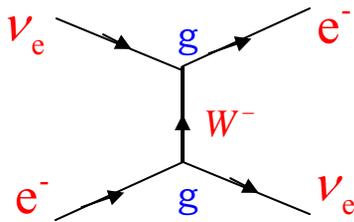
$$s = (2p_{cm})^2 \Rightarrow p_{cm}^2 = \frac{s}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{G^2}{\pi} s \leq \frac{16\pi}{s} \Rightarrow \sqrt{s} \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{G}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{1.67 \cdot 10^{-5}}} \approx 870 \text{ GeV}$$

Considerando anche gli spin, la sezione d'urto di Fermi viola l'unitarietà quando $\sqrt{s} \approx \sqrt{G} \approx 300 \text{ GeV}$

Bosone vettore intermedio

- Il comportamento divergente della sezione d'urto può essere evitato se, analogia con la QED, si introduce un bosone vettore intermedio come propagatore delle interazioni deboli.
- Il diagramma dello scattering diventa:



Il propagatore di un bosone massivo di spin 1 è del tipo:

$$\frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2}}{M_W^2 - q^2}$$

- L'elemento di matrice lo possiamo scrivere come:

$$\mathcal{M} = \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_{\nu_e} \right] \frac{1}{M_W^2 - q^2} \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_e \right]$$

- g è una costante di accoppiamento adimensionale
- i fattori $\sqrt{2}$ e $1/2$ vengono introdotti per ottenere la definizione convenzionale di g
- Dato che il range delle interazioni deboli è estremamente piccolo (dell'ordine di 10^{-3} fm) allora la massa del bosone intermedio deve essere molto grande.
- Per processi deboli in cui il q^2 trasferito è piccolo, tipo il decadimento β o il decadimento del muone, si ha che $q^2 \ll M_W^2$, quindi si può trascurare rispetto alla massa del W nell'espressione del propagatore.

- confrontando l'elemento di matrice di Fermi:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_p \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_n \right] \left[\bar{u}_e \gamma_\mu (1-\gamma^5) u_\nu \right]$$

con quello in cui c'è il bosone W , si ottiene:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

Massa del bosone W

- Dalla relazione precedente si ricava la massa del bosone W

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad \longrightarrow \quad M_W = \sqrt{\frac{g^2 \sqrt{2}}{8G}}$$

- se facciamo l'ipotesi che $g \approx e$, abbiamo:

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137} \quad \Rightarrow \quad g^2 \approx e^2 = \frac{4\pi}{137} ; \quad G = \frac{10^{-5}}{M_p^2}$$

- Mettendo tutto insieme si ottiene: $M_W = \sqrt{\frac{4\pi \sqrt{2}}{8 \cdot 10^{-5}}} \cdot M_p \approx 37.4 \text{ GeV}$

- in realtà: $e = g \sin(\theta_w) \quad \Rightarrow \quad M_W \approx \frac{37.4}{\sin(\theta_w)} = 80.425 \pm 0.038 \text{ GeV}$

(θ_w è l'angolo weak noto anche come angolo di Weinberg)

Le interazioni deboli sono "deboli" non a causa della costante di accoppiamento piccola, bensì a causa dell'alto valore della massa del bosone W.

- Dato che $g \approx e$ e non è necessario introdurre una nuova carica per comprendere le interazioni deboli.

- Si ha una nuova scala di massa: la scala di Fermi, pari alla massa del bosone W $\approx 100 \text{ GeV}$

- Questo è un caso simile all'elettromagnetismo:

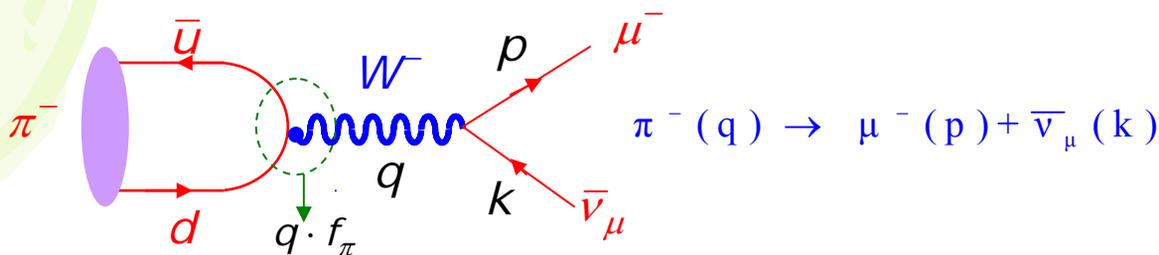
$$\vec{F} = e\vec{E} + e_m \vec{v} \times \vec{B} \quad (e=e_m \Rightarrow \text{unificazione})$$

- gli effetti magnetici diventano importanti quando v è grande e divengono confrontabili a quelli elettrici

- Quando vi è l'unificazione di due fenomeni viene introdotta in genere una nuova scala; nel caso dell'elettromagnetismo si tratta della velocità della luce.

È la scala che determina l'accoppiamento relativo delle forze

Decadimento del pione



- L'ampiezza è della forma: $\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\dots)^\mu (\bar{u}(p)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)v(k))$

$(\dots)^\mu$ rappresenta la corrente debole dei quark

- se i quark fossero liberi si potrebbe scriverla come:

$$(\dots)^\mu = (\bar{u}_d \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{u}})$$

ma questo non è corretto perché i quark \bar{u} e d non sono liberi ma sono legati per formare il mesone π^-

- Tuttavia:

- \mathcal{M} è un invariante di Lorentz, quindi $(\dots)^\mu$ deve essere un vettore oppure un vettore assiale
- Il π^- ha spin zero quindi il quadrimpulso q^μ è il solo quadrivettore disponibile per costruire $(\dots)^\mu$

$$\Rightarrow (\dots)^\mu = q^\mu \cdot f(q^2) = q^\mu \cdot f_\pi$$

f è funzione solo di q^2 perché è il solo scalare che si può costruire

$$\Rightarrow q^2 = m_\pi^2 \Rightarrow f(m_\pi^2) \equiv f_\pi \quad (f_\pi \text{ è una costante})$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} (p^\mu + k^\mu) f_\pi (\bar{u}(p)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)v(k)) \quad (q^\mu = p^\mu + k^\mu)$$

- memento: eq. di Dirac $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$; $(\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0$

$$\Rightarrow \bar{u}(p)\gamma^\mu p_\mu = m_\mu \bar{u}(p) \quad ; \quad \gamma^\mu k_\mu v(k) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} f_\pi \cdot m_\mu \cdot (\bar{u}(p)\gamma_\mu(1 - \gamma^5)v(k))$$

Decadimento del pione

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} f_\pi \cdot m_\mu \cdot (\bar{u}(p)\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(k))$$

- Nel sistema del centro di massa del pione, la probabilità di transizione per unità di tempo vale:

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\pi} \overline{\mathcal{M}^2} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} (2\pi)^4 \delta(q-p-k)$$

Conservazione del quadrimpulso

Somma sugli spin finali e media su quelli iniziali Spazio delle fasi del muone Spazio delle fasi del neutrino

- il pione ha spin zero, quindi non va fatta la media sugli spin iniziali, mentre la somma sugli spin del muone e del neutrino viene fatta usando il meccanismo della "tracciologia" delle matrici γ

$$\overline{\mathcal{M}^2} = \frac{G^2}{2} f_\pi^2 m_\mu^2 \cdot \text{Tr}[(\not{p} + m_\mu)(1-\gamma^5)\not{k}(1+\gamma^5)] = 4G^2 f_\pi^2 m_\mu^2 (p \cdot k)$$

- nel centro di massa del pione si ha: $\vec{k} = -\vec{p}$, quindi:

$$p \cdot k = E\omega - \vec{k} \cdot \vec{p} = E\omega + k^2 = \omega(E + \omega)$$

- mettendo tutto insieme si ha:

$$\Gamma = \frac{G^2 f_\pi^2 m_\mu^2}{(2\pi)^2 2m_\pi} \int \frac{d^3p d^3k}{E\omega} \omega(E + \omega) \delta(m_\pi - E - \omega) \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{p})$$

- L'integrazione in d^3p viene presa in considerazione dalla $\delta^{(3)}$, e dato che non c'è nessuna dipendenza angolare, rimane solo l'integrazione in $d\omega$

- Il risultato finale è il seguente:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

N.B. in realtà quello che abbiamo calcolato è la larghezza parziale di decadimento del pione in muone-neutrino, ma dato che, come vedremo, questo è il canale largamente dominante, allora essa è circa uguale alla larghezza totale e quindi all'inverso della vita media

$$\Gamma_{tot} = \sum \Gamma_{parz.} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\Gamma_{tot}}$$

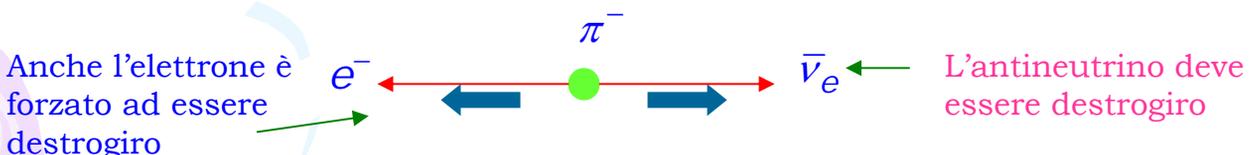
Decadimento del pione

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2}{8\pi} f_\pi^2 m_\pi m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

- Se prendiamo il valore di G misurato nel decadimento β o nel decadimento del muone ed assumiamo che $f_\pi = m_\pi$ (quanto meno per far tornare l'analisi dimensionale) si ritrova la vita media del pione: $2.6 \cdot 10^{-8}$ s
- Questo non è un test stringente della teoria perché la scelta $f_\pi = m_\pi$ non è giustificata. Tuttavia si può fare un test quantitativo confrontando il B.R. del decadimento in muone con quello in elettrone: $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$. I calcoli sono assolutamente identici, occorre soltanto sostituire la massa del muone con quella dell'elettrone.

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 1.2 \times 10^{-4}$$

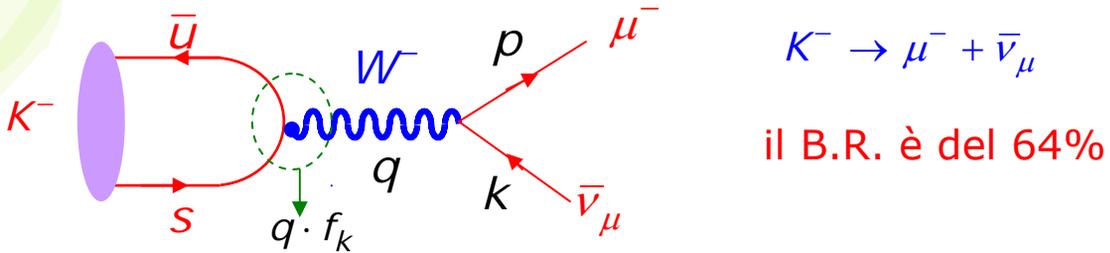
- Il valore numerico ottenuto sostituendo il valore delle masse coincide con quello ottenuto dal rapporto dei B.R. misurati.
- Il pione preferisce il decadimento in mu piuttosto che in elettrone. Questo non è quello che ci si aspetterebbe da un punto di vista cinematico perché lo spazio delle fasi favorisce l'elettrone e non il muone. D'altra parte la costante di accoppiamento è la stessa per l'elettrone e per il muone (universalità delle interazioni deboli). La spiegazione risiede nell'elicità delle due particelle.
- Il pione ha spin zero; nel decadimento si deve conservare il momento angolare, quindi:



- Questo è lo stato di elicità "sbagliato" dell'elettrone, perché nel limite di massa nulla esso sarebbe levogiro (e non si potrebbe avere il decadimento).
- Dato che il mu ha una massa maggiore dell'elettrone è più facile che vada nello stato di elicità sbagliato.

Decadimento del K

- Consideriamo ora il decadimento del K⁻



- L'elemento di matrice è analogo a quello del decadimento del π^- :

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} (p^\mu + k^\mu) f_k (\bar{u}(p) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(k)) = \frac{G}{\sqrt{2}} f_k m_\mu \bar{u}(p) (1 - \gamma^5) v(k)$$

- Facendo gli stessi calcoli fatti per il π^- si ha:

$$\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu) = \frac{G^2}{8\pi} f_k^2 m_k m_\mu^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_k^2} \right)^2$$

- Dato che il π ed il K appartengono allo stesso ottetto di SU(3), se questa fosse una simmetria esatta allora il π ed il K sarebbero la stessa particella ed avrebbero le stesse proprietà, ad esempio $f_\pi = f_k$
- Dato che la simmetria è rotta, le due grandezze sono diverse, ma non troppo (infatti: $f_\pi = 130$ GeV, $f_k = 160$ GeV)
- Se facciamo il rapporto K/ π , assumendo $f_\pi = f_k$, si ha:

$$\frac{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \frac{m_k}{m_\pi} \left(\frac{1 - \left(\frac{m_\mu}{m_k}\right)^2}{1 - \left(\frac{m_\mu}{m_\pi}\right)^2} \right)^2 = 17.67$$

- mentre il valore sperimentale è: $\frac{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = 1.336 \pm 0.004$

- La discrepanza non può essere spiegata con la differenza tra f_π e f_k dovuta alla rottura della simmetria SU(3).

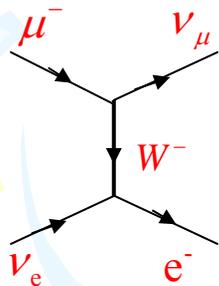
Decadimento del K

- La discrepanza si può spiegare con una diversa costante di accoppiamento della corrente adronica con cambio di stranezza.
- Chiamiamo G_s la costante di accoppiamento di Fermi con il quark s e con G_d la costante di accoppiamento con il quark d.

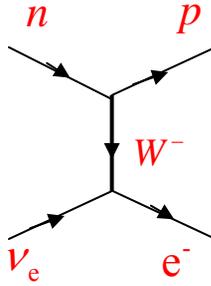
$$1.336 \pm 0.004 = \frac{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = (17.67) \cdot \frac{G_s^2}{G_d^2} \left(\frac{160}{130} \right)^2 \leftarrow \frac{f_K}{f_\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{G_s}{G_d} = 0.223$$

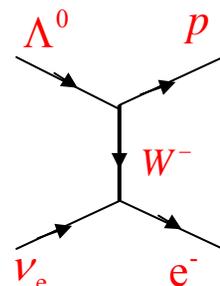
- Questo comporta una rottura dell'universalità delle interazioni deboli.
- Una spiegazione di questo fenomeno che salvava l'universalità delle interazioni deboli fu dovuta a Cabibbo (1963).
- consideriamo alcuni decadimenti deboli:



Decadimento del muone



Decadimento del neutrone



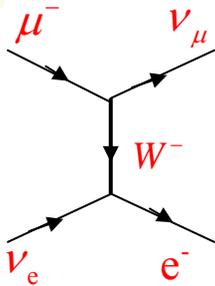
Decadimento della Λ^0

$$\left(\begin{array}{l} \Delta S = 1 \\ \Delta I = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

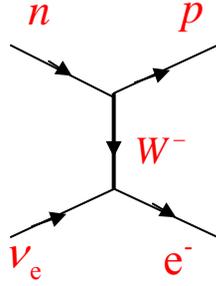
- In tutti e tre i casi c'è un cambiamento di carica nelle correnti. Nei primi due non cambia la stranezza ($\Delta S=0$) mentre nel terzo ($\Delta S=1$), nella corrente cambia anche la stranezza.
- Da notare che la corrente adronica con $\Delta S=0$ è leggermente più "piccola" di quella leptonica ($C_V=0.98$) mentre essa è circa 20 volte più grande di quella adronica con cambiamento di stranezza

Decadimento β dei quark

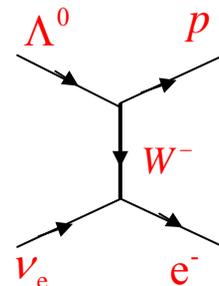
- Esaminiamo i decadimenti deboli adronici, tenendo presente che gli adroni non sono particelle elementari:



Decadimento del muone

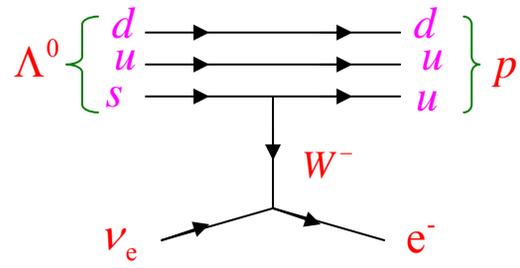
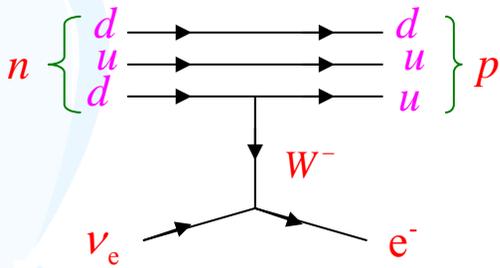


Decadimento del neutrone



Decadimento della Λ^0

- Ad un livello più fondamentale il decadimento β riguarda i quark costituenti gli adroni:



Al vertice del W si deve conservare la carica elettrica. Il W si accoppia solo con gli stati chirali levogiri dei quark e destrogiri degli antiquark

- La struttura della corrente dei quark è la seguente:

$$J_{\mu}^{q \rightarrow q'} = (\bar{u}_{q'} \gamma_{\mu} (1 - \gamma^5) u_q)$$

ed applicando la nozione di universalità si ha:

$$\mathcal{M}_{d \rightarrow u} = \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_u \gamma^{\mu} \frac{1 - \gamma^5}{2} u_d \right] \frac{1}{M_w^2 - q^2} \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_e} \gamma_{\mu} \frac{1 - \gamma^5}{2} u_e \right]$$

$$\mathcal{M}_{s \rightarrow u} = \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_u \gamma^{\mu} \frac{1 - \gamma^5}{2} u_s \right] \frac{1}{M_w^2 - q^2} \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_e} \gamma_{\mu} \frac{1 - \gamma^5}{2} u_e \right]$$

dove g è la stessa costante di accoppiamento dovunque.

Struttura a doppietti

- Nel 1962 Schwartz, Lederman e Steimberger trovarono che nell'interazione di un fascio di neutrini, ottenuto dai decadimenti dei pioni e dei K, con un bersaglio si otteneva:



- Questo esperimento dimostrava l'esistenza di un secondo tipo di neutrino, distinto da quello prodotto nel decadimento β , ed associato al muone.
- Si introduce così la conservazione del numero leptonico separatamente per ciascun leptone. Viene così spiegata anche l'assenza del decadimento del muone in elettrone+fotone.
- I leptoni vengono organizzati in doppietti:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^{-} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu} \\ \mu^{-} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau} \\ \tau^{-} \end{pmatrix} \quad + \text{ le relative antiparticelle}$$

[A rigore, come vedremo più avanti studiando il Modello Standard, nel doppietto dovrebbero andarci solo lo stato chirale levogiro dei fermioni]

- Le interazioni deboli cariche (cioè con uno scambio del W) fanno passare da un componente del doppietto all'altro, ma mai da un doppietto all'altro (conservazione del numero leptonico)

N.B. se i neutrini avessero massa (come sembra) questa cosa non sarebbe più vera (oscillazione di neutrini)

- Per quanto riguarda i quark la situazione è meno chiara perché si osservano transizioni del quark d verso il quark u e del quark s verso il quark u, quindi non è chiaro quale sia il doppietto di quark coinvolto in questa transizione.

[Da notare che non si osservano transizioni tra il quark d ed il quark s (corrente debole neutra con cambiamento di sapore (FCNC). Questo fu spiegato da Glashow-Iliopoulos e Maiani (GIM) nel 1970.]

Angolo di Cabibbo

- La soluzione fu trovata da Cabibbo nel 1963, egli propose che gli autostati di massa, che sono anche gli autostati dell'interazione forte, non fossero anche autostati dell'interazione debole.
- Ricordiamo che sperimentalmente si osservano particelle con una massa definita ed una vita media definita, cioè si osservano (misurano) solo gli autostati di massa.
- L'autostato dell'interazione debole è una combinazione lineare degli autostati di massa:

$$d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c$$

- quindi si può costruire un doppietto di isospin debole (stessa algebra dell'isospin forte ma non ha nulla a che vedere con questo)

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}$$

Il W accoppia lo stato d' con il quark u

- La struttura di Cabibbo della corrente adronica di "innalzamento della carica" (che fa passare cioè dalla componente inferiore del doppietto a quella superiore) è del tipo:

$$J_{\mu}^{+}(q) \approx g(\bar{u}, \bar{d} \cos \theta_c + \bar{s} \sin \theta_c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix} = g(\bar{u}d \cos \theta_c + \bar{u}s \sin \theta_c)$$

↑
quark

- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \frac{1}{2}\tau_+$ è l'operatore di innalzamento della carica per un doppietto di isospin debole.

- In maniera succinta si può scrivere:

$$J_{\mu}^{+}(q) \approx g\bar{q}_L \tau_+ q_L \quad , \quad \text{dove } q_L = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}$$

si considerano solo le componenti levogire dei quark

Angolo di Cabibbo

- Nella teoria di Cabibbo tutte le particelle, quark e leptoni, trasportano una carica debole g , ma i quark sono mescolati in modo tale che:

$$J_{\mu}^{+}(q) \propto g \cos \theta_c \quad \text{per le correnti in cui } \Delta S=0$$

$$J_{\mu}^{+}(q) \propto g \sin \theta_c \quad \text{per le correnti in cui } \Delta S=1$$

- quindi abbiamo:

$$\Gamma(\mu^{-} \rightarrow e^{-} \bar{\nu}_e \nu_{\mu}) \propto g^4 \quad \text{puramente leptonica}$$

$$\Gamma(n \rightarrow p e^{-} \bar{\nu}_e) \propto g^4 \cos^2 \theta_c \quad \Delta S = 0 \quad \text{semi-leptonica}$$

$$\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow p e^{-} \bar{\nu}_e) \propto g^4 \sin^2 \theta_c \quad \Delta S = 1 \quad \text{semi-leptonica}$$

- Quindi si ha: $\frac{\Gamma(\Lambda^0 \rightarrow p e^{-} \bar{\nu}_e)}{\Gamma(n \rightarrow p e^{-} \bar{\nu}_e)} = \tan^2 \theta_c$

I dati sono consistenti con un angolo di Cabibbo pari a $\theta_c \approx 13^{\circ}$

- I processi proporzionali a $\cos^2 \theta_c$ si chiamano "Cabibbo favoriti" mentre quelli proporzionali a $\sin^2 \theta_c$ si chiamano "Cabibbo soppressi"

- Da notare che $\cos 13^{\circ} = 0.974$ e sperimentalmente si era trovato $C_V \approx 0.98$.

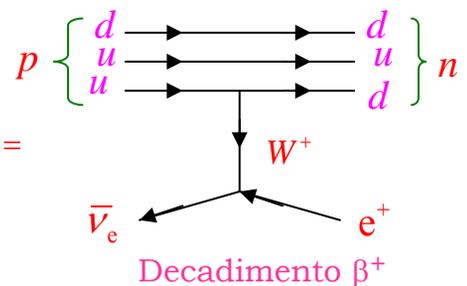
- Nel caso di: $\frac{\Gamma(K^{-} \rightarrow \mu^{-} \bar{\nu}_{\mu})}{\Gamma(\pi^{-} \rightarrow \mu^{-} \bar{\nu}_{\mu})} \Rightarrow \frac{G_S}{G_D} = 0.223 = \tan \theta_c \Rightarrow \theta_c = 12.57^{\circ}$

- La corrente di "abbassamento" J^{-} (con lo scambio del W^{+}) si scrive:

$$J_{\mu}^{-}(q) \approx g(\bar{u}, \bar{d} \cos \theta_c + \bar{s} \sin \theta_c) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix} = g(\bar{d} u \cos \theta_c + \bar{s} u \sin \theta_c)$$

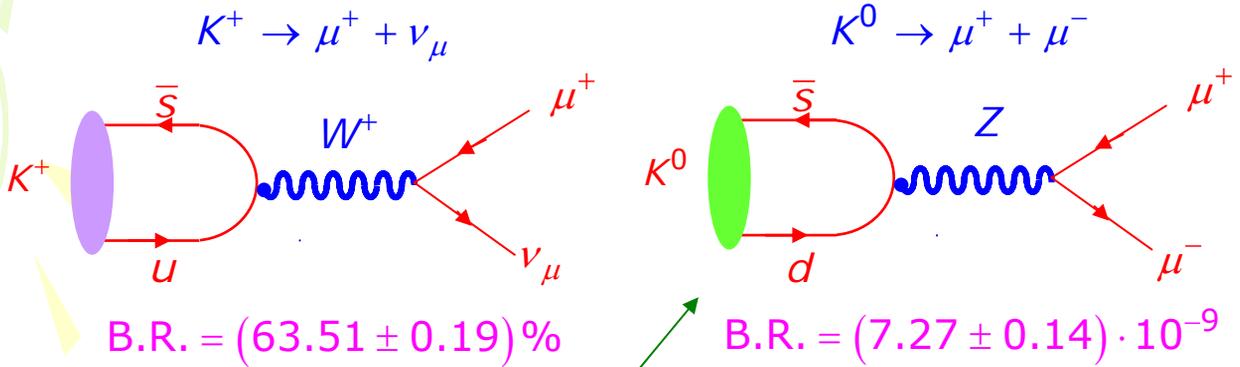
- ovvero in forma compatta: $J_{\mu}^{-}(q) \approx g \bar{q}_L \tau_{-} q_L$

$$\left(\frac{1}{2} \tau_{-} = \frac{1}{2} (\tau_1 - i \tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$



Assenza delle FCNC

- Sperimentalmente si osserva che non esistono correnti neutre in cui cambia il sapore dei quark. Per illustrare questa affermazione esaminiamo due decadimenti del K, uno riguardante il K carico ed un altro il K neutro.



N.B. in realtà questo grafico non esiste. Vi è una regola empirica che dice che, al primo ordine, $\Delta S = \Delta Q$. In questo caso abbiamo $\Delta S = 1$; $\Delta Q = 0$

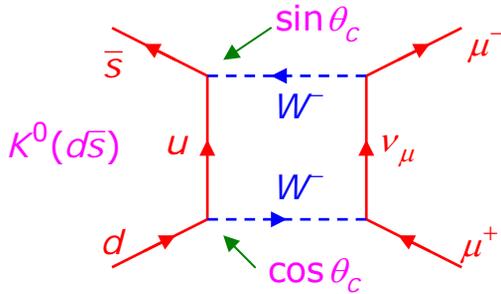
- Il W^\pm è un bosone carico (positivo e negativo) che agisce da mediatore nelle interazioni deboli di corrente carica.
- Sempre per ragioni attinenti alla violazione dell'unitarietà, questa volta nella produzione di coppie di W ($u\bar{u} \rightarrow W^+W^-$) occorre introdurre un altro bosone, neutro, che viene chiamato Z, responsabile delle interazioni deboli con corrente neutra. (Studieremo meglio questa cosa nella trattazione del Modello Standard, teniamo presente però fin da ora che l'accoppiamento dello Z è diverso rispetto a quello del W).
- Alla luce di questo fatto, dovremmo aspettarci che il secondo processo esista e sia comparabile al primo, mentre non è così.
- Da un punto di vista formale, la corrente neutra che cambia la stranezza si può scrivere nel modo seguente (omettendo tutti i fattori $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ e le costanti di accoppiamento):

$$\begin{aligned}
 J_\mu^0(q) &\approx g\bar{q}\tau_3q \approx \bar{u}u - \bar{d}'d' & \text{dove } \tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } q = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow J_\mu^0(q) &\approx \underbrace{\bar{u}u - \bar{d}d \cos^2 \theta_c - \bar{s}s \sin^2 \theta_c}_{\Delta S = 0} - \underbrace{(\bar{s}d + \bar{d}s) \sin \theta_c \cos \theta_c}_{\Delta S = 1}
 \end{aligned}$$

L'ultimo termine dovrebbe essere il responsabile del decadimento, con ampiezza proporzionale a $\sin\theta_c \cos\theta_c$

Effetto GIM (il quark charm)

- In realtà il decadimento del K^0 avviene, nel Modello Standard, tramite un diagramma a box di ordine superiore con lo scambio di due W :



$$K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

L'ampiezza è proporzionale a $\sin\theta_c \cos\theta_c$

- Il calcolo di questo diagramma conduce ad un B.R. del decadimento di gran lunga superiore a quello misurato. La soluzione del dilemma fu proposta nel 1970 da Glashow, Iliopoulos e Maiani (GIM).
- Essi introdussero un nuovo quark, il charm, avente la stessa carica elettrica del quark u , e suggerirono che esso appartenesse ad un secondo doppietto di isospin debole:

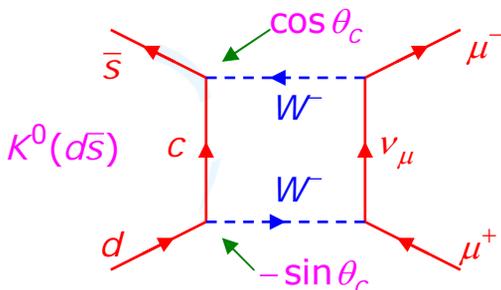
$$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \cos \theta_c - d \sin \theta_c \end{pmatrix}$$

Il W connette s' con c

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

Gli autostati dell'interazione debole (d', s') sono connessi agli autostati di massa (d, s) da una trasformazione unitaria

- Nel decadimento del K^0 interviene un secondo diagramma di Feynman dove occorre sostituire il quark c al quark u :

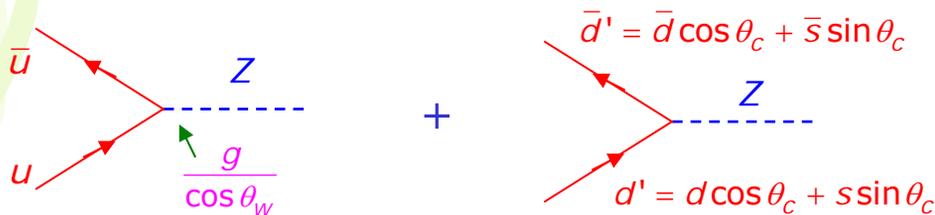


l'ampiezza è proporzionale a $-\sin\theta_c \cos\theta_c$

N.B. se la massa del quark c fosse uguale a quella del quark u , le due ampiezze si annullerebbero completamente.

Dal B.R. misurato del decadimento, G.I.e M. predissero che la massa del quark c doveva essere nel range 1-3 GeV

Accoppiamenti dello Z

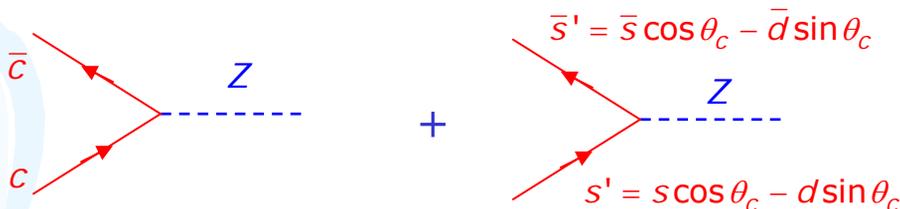


(N.B. il vertice è più complicato rispetto a quello del W; θ_w = angolo di Weinberg)

- Abbiamo visto che a questi due grafici corrisponde la corrente:

$$J_\mu^0(q) \approx \bar{u}u - \bar{d}'d' \approx \underbrace{\bar{u}u - \bar{d}d \cos^2 \theta_c - \bar{s}s \sin^2 \theta_c}_{\Delta S = 0} - \underbrace{(\bar{s}d + \bar{d}s) \sin \theta_c \cos \theta_c}_{\Delta S = 1}$$

- Si possono aggiungere ora i grafici con i quark c ed s'



- Sommando il contributo di questi due grafici ai precedenti, si ottiene:

$$J_\mu^0(q) \approx \bar{u}u - \bar{d}'d' + \bar{c}c - \bar{s}'s' =$$

$$\approx \underbrace{\bar{u}u + \bar{c}c - (\bar{d}d + \bar{s}s) \cos^2 \theta_c - (\bar{d}d + \bar{s}s) \sin^2 \theta_c}_{\Delta S = 0} + \underbrace{(\bar{s}d + \bar{d}s - \bar{s}d - \bar{d}s) \sin \theta_c \cos \theta_c}_{\Delta S = 1}$$

$$\Rightarrow J_\mu^0(q) \approx \bar{u}u - \bar{d}d - \bar{s}s + \bar{c}c$$

- Con l'introduzione del quark c sono scomparse le correnti neutre con cambiamento della stranezza. Come si vede dalla struttura della corrente, lo Z si accoppia solo a quark-antiquark dello stesso sapore, pertanto non ci sono FCNC (correnti neutre con cambiamento di sapore)

Matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)

- Nel 1973 Kobayashi e Maskawa volevano introdurre la violazione di CP nel Modello Standard. Per fare ciò nell'Hamiltoniana doveva comparire un numero complesso (ricordate che se $H^* \neq H$ allora viene violata la time reversal T, mentre CPT si suppone essere sempre valida?)
- La cosa più semplice è quella di introdurre una fase nella matrice di mescolamento dei quark.
- Una matrice $N \times N$, unitaria, possiede:

$$\frac{1}{2}N(N-1) \quad \text{parametri reali (gli angoli di eulero)}$$

$$\frac{1}{2}(N-1)(N-2) \quad \text{angoli di fase non banali (cioè che non si possono eliminare ridefinendo la fase dei quark)}$$

- Con $N=2$ non si può introdurre nessuna fase, quindi K. e M. proposero, nel 1973, che doveva esistere una terza famiglia di quark, perché con $N=3$ si hanno 3 angoli di mixing ed 1 fase:

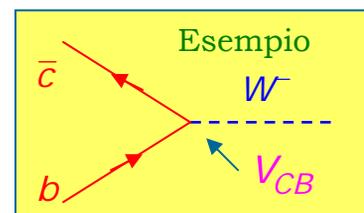
$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} & + \text{le relative antiparticelle} \end{matrix}$$

$$\text{dove: } \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Autostati dell'interazione debole

Matrice CKM di mescolamento dei quark

Autostati di massa



- La matrice CKM è unitaria e può essere parametrizzata in vari modi. I suoi parametri vanno determinati sperimentalmente.

Matrice CKM

- Come abbiamo detto la matrice CKM può essere scritta in varie forme, ad esempio:

1. In termini di 3 angoli ed una fase:

Presa dal PDG2004

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

I quattro parametri reali sono: δ , θ_{12} , θ_{23} e θ_{13} . Si intende $s=\sin$, $c=\cos$, ed i numeri si riferiscono alle generazioni dei quark, vale a dire $s_{12}=\sin\theta_{12}$.

- Come abbiamo visto, in termini di accoppiamento con i quark (è la migliore per capire la "fisica")

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}$$

- in termini di sviluppo in serie del seno dell'angolo di Cabibbo (θ_{12})
Questa rappresentazione utilizza il fatto che $s_{12} \gg s_{23} \gg s_{13}$

Rappresentazione di "Wolfenstein"

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Qui $\lambda=\sin\theta_{12}$, mentre A , ρ , η sono tutti reali e vicini a 1.

Questa rappresentazione va molto bene per mettere in relazione la violazione di CP con dei processi specifici ed i loro rate di decadimento.

Matrice CKM

- Vediamo ora quanto valgono i vari elementi della matrice, presi dal PDG2004

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9739 - 0.9751 & 0.221 - 0.227 & (3 - 5) \times 10^{-3} \\ 0.221 - 0.227 & 0.9730 - 0.9744 & (3.9 - 4.4) \times 10^{-2} \\ (0.5 - 1.4) \times 10^{-2} & (3.7 - 4.3) \times 10^{-2} & 0.9990 - 0.9992 \end{pmatrix}$$

- Osservando i valori numerici della matrice si possono mettere in evidenza alcune cose:
 - La matrice CKM è quasi diagonale (gli elementi fuori diagonale sono piccoli)
 - Più ci allontaniamo da una famiglia, più piccolo risulta l'elemento di matrice (ad esempio $V_{ub} \ll V_{ud}$)
 - Usando i punti 1. e 2. risulta che alcuni decadimenti sono preferiti rispetto ad altri, ad esempio:

$$\begin{array}{ll} c \rightarrow s \text{ over } c \rightarrow d & D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \text{ over } D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \text{ (exp. find 3.8\% vs 0.15\%)} \\ b \rightarrow c \text{ over } b \rightarrow u & B^0 \rightarrow D^- \pi^+ \text{ over } B^0 \rightarrow \pi^- \pi^+ \text{ (exp. find } 3 \times 10^{-3} \text{ vs} \end{array}$$

1×10^{-5})

- Poiché la matrice è supposta essere una matrice unitaria, allora ci sono molti vincoli tra i vari elementi, ad esempio:

$$V_{ud}^* V_{ud} + V_{cd}^* V_{cd} + V_{td}^* V_{td} = 1$$

$$V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} = 0$$

finora i risultati sperimentali sono consistenti con una matrice CKM unitaria, tuttavia si continuano a cercare deviazioni da questa ipotesi come un segnale di nuova fisica rispetto a quanto previsto dal Modello Standard.

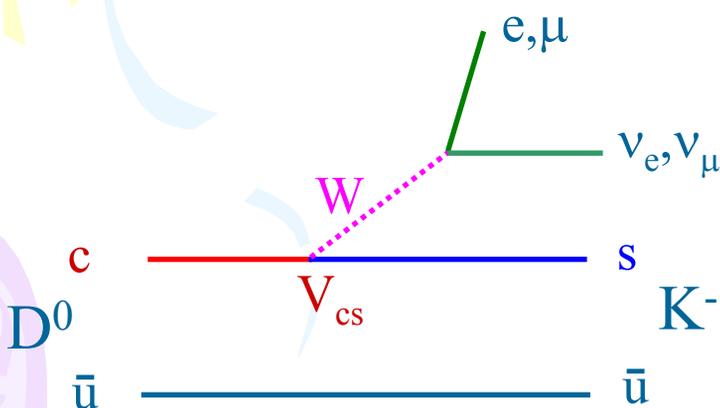
Misura degli elementi della matrice CKM

- Al momento non c'è nessuna teoria in grado di predire gli elementi della matrice CKM, questi devono essere misurati sperimentalmente.
- Il modo più "pulito" di farlo è quello di utilizzare dei decadimenti o dei processi in cui intervengono dei leptoni, in questo modo la matrice CKM interviene solo ad un vertice. Ad esempio:

V_{ud} : neutron decay:	$n \rightarrow p e \bar{\nu}$	$d \rightarrow u e \bar{\nu}$
V_{us} : kaon decay:	$K^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$	$s \rightarrow u e \bar{\nu}$
V_{bu} : B-meson decay:	$B^- \rightarrow (\rho^0 \text{ or } \pi^0) e^- \bar{\nu}_e$	$b \rightarrow u e \bar{\nu}$
V_{bc} : B-meson decay:	$B^- \rightarrow D^0 e^- \bar{\nu}_e$	$b \rightarrow c e \bar{\nu}$
V_{cs} : charm decay:	$D^0 \rightarrow K^- e^+ \bar{\nu}_e$	$c \rightarrow s e \bar{\nu}$
V_{cd} : neutrino interactions:	$\nu_\mu d \rightarrow \mu^- c$	$d \rightarrow c$

$$D^0 = c\bar{u} ; B^- = \bar{u}b$$

Modello "Spettatore" del decadimento $D^0 \rightarrow K^- e^+ \bar{\nu}_e$



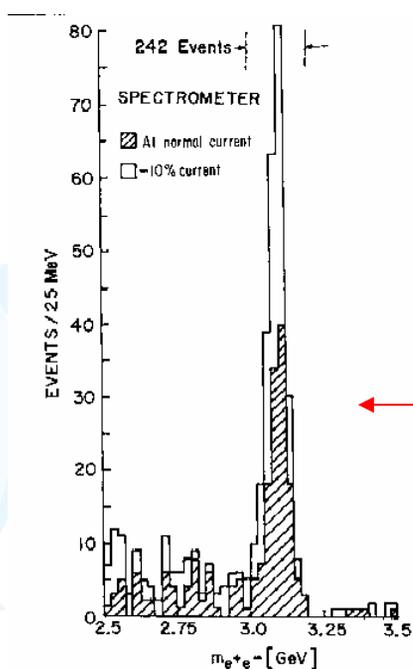
Si chiama modello "spettatore" perché solo un quark partecipa al decadimento, mentre gli altri stanno "intorno e guardano".

$$\begin{aligned} \text{Ampiezza} &\propto V_{cs} \\ \text{Decay rate} &\propto |V_{cs}|^2 \end{aligned}$$

N.B. per i neutrini massivi esiste una matrice analoga alla CKM chiamata matrice PMNS. Se i neutrini non avessero massa essa sarebbe diagonale.

Scoperta della J/Ψ

- A novembre 1974 ci fu la "rivoluzione di novembre" con la scoperta di una risonanza molto strana, perché la sua vita media era più grande di circa mille volte rispetto a quanto ci si sarebbe aspettato.
- La scoperta fu fatta in maniera indipendente dal gruppo di Ting a Brookhaven e da quello di Richter a Slac, e poi successivamente anche ad Adone a Frascati.



Brookhaven

Ting cercò un picco nella massa invariante delle coppie e^+e^- prodotte nella collisione di protoni da 28 GeV su un bersaglio di berillio:



Si trovò un picco molto stretto a ≈ 3.1 GeV

Ting chiamò questa risonanza J

PDG 2004

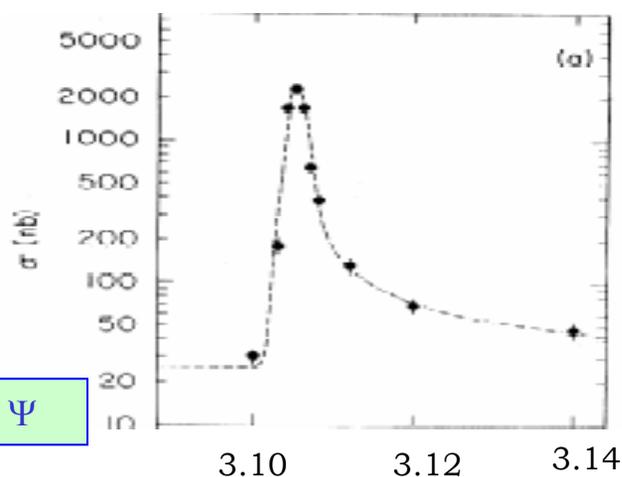
$$m_{J/\Psi} = 3096.911 \pm 0.011 \text{ MeV}$$

SLAC

Richter et al. utilizzarono il collider e^+e^- Spearm e misurano la sezione d'urto del processo $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$ in funzione dell'energia del centro di massa.

Anche qui si trovò un picco a ≈ 3.1 GeV

Richter chiamò la sua risonanza Ψ

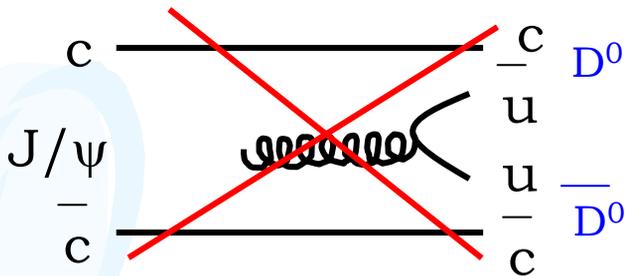
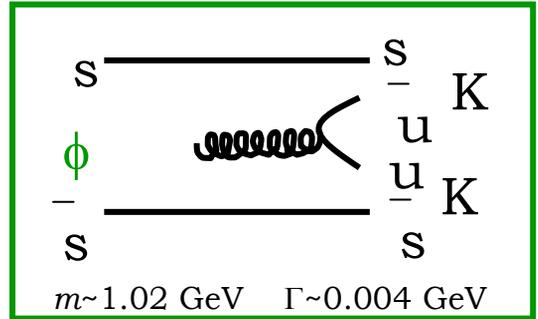
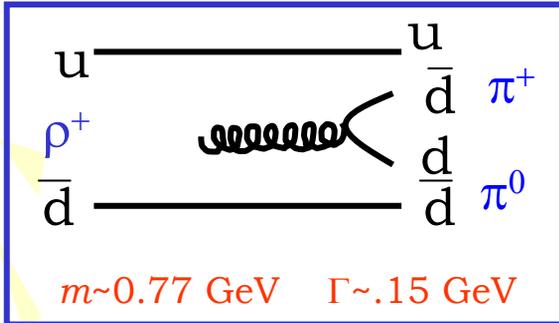


Tutti gli altri ora la chiamano J/Ψ

Cosa aveva di strano la J/ψ

$$\Gamma_{tot}^{J/\psi} = 91.0 \pm 3.2 \text{ keV} \Rightarrow \tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \approx 7 \cdot 10^{-21} \text{ s}$$

Ci si aspettava una vita media tipica delle interazioni forti (10^{-23})

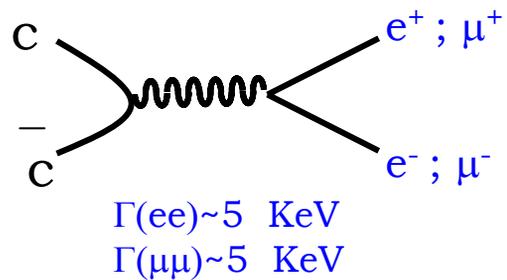
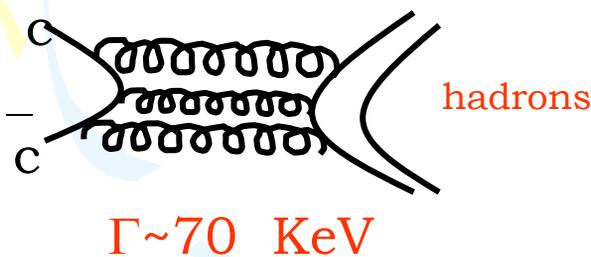


• Nel caso della J/ψ questo tipo di decadimento non è possibile perché:

$$m_{D^0} = 1864.6 \pm 0.5 \text{ MeV}$$

$$m_{J/\psi} < 2m \cdot D_0$$

• Allora il decadimento avviene attraverso i diagrammi con lo scambio di tre gluoni, soppressi dalla regola di OZI, e diventa dello stesso ordine di grandezza dei decadimenti elettromagnetici



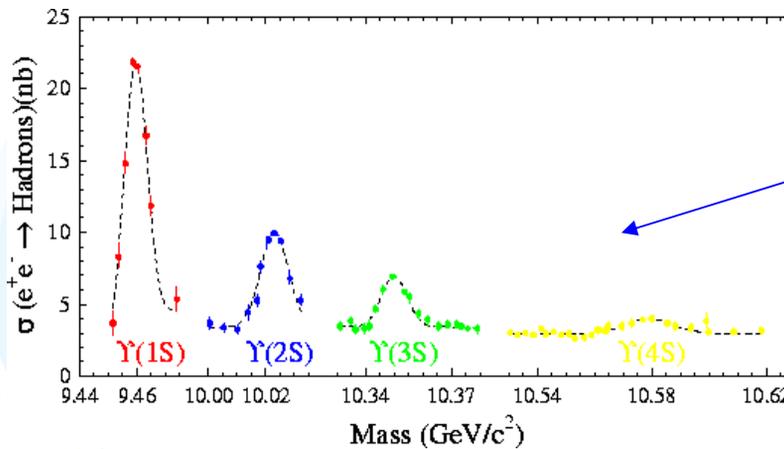
• Naturalmente tutto ciò era possibile solo se i quark costituenti la risonanza avevano un nuovo numero quantico la cui violazione non era permessa dalle interazioni forti.

• Il fatto che il decadimento non fosse di tipo debole indicava che la risonanza stessa non trasportava questo numero quantico, da qui l'ipotesi che la J/ψ fosse un mesone composto da charm-anticharm

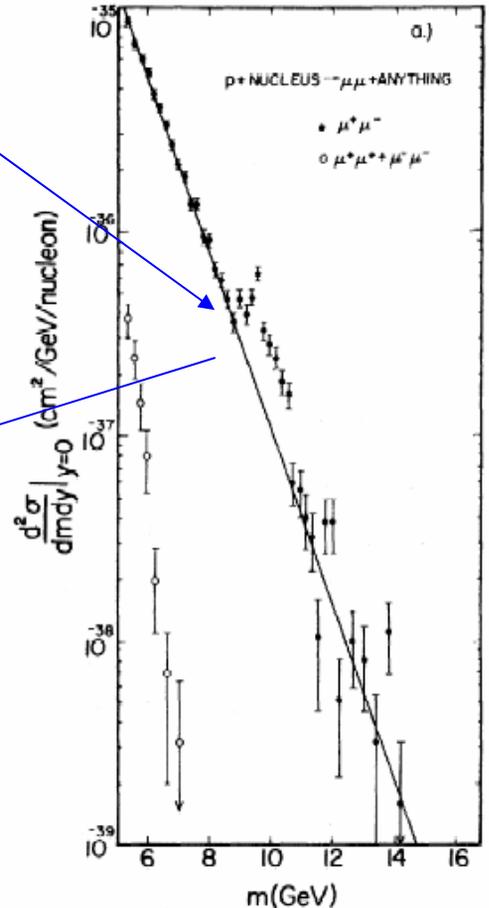
Scoperta della Upsilon (Υ)

- Nel 1977 al Fermilab di Chicago furono scoperte altre risonanze di massa comprese tra 9 e 10.5 GeV, che esibivano le stesse caratteristiche della J/Ψ , ovvero una vita media troppo lunga rispetto a quella aspettata. Questo era l'indice della presenza di un nuovo numero quantico: la bellezza.

Si cercavano risonanze nella massa invariante di coppie di muoni prodotte dalla reazione:



Si trovarono diversi picchi. La $Y(1s)$, $Y(2)$ e $Y(3s)$ sono sotto soglia per decadere in coppie di mesoni con beauty.



- Nel 1975 a Slac fu scoperto il terzo leptone, il tau

$$m_\tau = 1776.99 \pm 0.39 \text{ MeV}$$

- Nell 1994 a FNAL fu scoperto il quark top

$$m_t = 174 \pm 5 \text{ GeV}$$

- Ed infine, sempre a FNAL, nel 2000 è stati rivelato in maniera diretta il neutrino tau.

La vita media del muone è $2.197 \mu\text{s}$. Calcolare quella del leptone tau, tenendo presente che il branching ratio del tau che va in elettrone e due neutrini è 18%. La massa del muone è di 105.7 MeV e quella del tau è di 1784 MeV.

Occorre applicare la regola di Sargent: la probabilità di transizione è proporzionale alla massa alla quinta. Per gli stessi canali di decadimento, la costante di proporzionalità è la stessa per il muone e per il tau.

$$W_{\mu} = \Gamma_{\mu} = \frac{1}{\tau_{\mu}} = A \cdot m_{\mu}^5$$

$$W_{\tau}(\tau^{-} \rightarrow e^{-}\nu_e\nu_{\tau}) = B.R.\Gamma_{\tau} = \frac{B.R.}{\tau_{\tau}} = A \cdot m_{\tau}^5$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_{\tau}}{\tau_{\mu}} = B.R. \frac{m_{\mu}^5}{m_{\tau}^5} \Rightarrow \tau_{\tau} = B.R. \frac{m_{\mu}^5}{m_{\tau}^5}$$

$$\tau_{\tau} = 2.197 \cdot 10^{-6} \cdot 0.18 \cdot \left(\frac{105.7}{1784}\right)^5 = 2.887 \cdot 10^{-13}$$

Il B.R. del seguente decadimento $\Sigma^- \rightarrow \Lambda + e^- + \bar{\nu}_e$ è $5.7 \cdot 10^{-5}$.

Assumendo che l'elemento di matrice del decadimento sia simile a quello del decadimento β del neutrone, stimare l'ordine di grandezza della vita media della Σ^- . Si ricorda che la vita media del neutrone è di 886 s, $m_n - m_p = 1.29$ MeV ; $m_{\Sigma^-} - m_{\Lambda} = 81$ MeV.

Occorre applicare la regola di Sargent: la probabilità di transizione è proporzionale alla differenza di massa alla quinta. Per gli stessi canali di decadimento si assume che la costante di proporzionalità sia la stessa per il neutrone e per la Σ^- .

$$W_n = \Gamma_n = \frac{1}{\tau_n} = A \cdot (m_n - m_p)^5$$

$$W_{\Sigma^-}(\Sigma^- \rightarrow \Lambda e^- \bar{\nu}_e) = B.R. \times \Gamma_{\Sigma^-} = \frac{B.R.}{\tau_{\Sigma^-}} = A \cdot (m_{\Sigma^-} - m_{\Lambda})^5$$

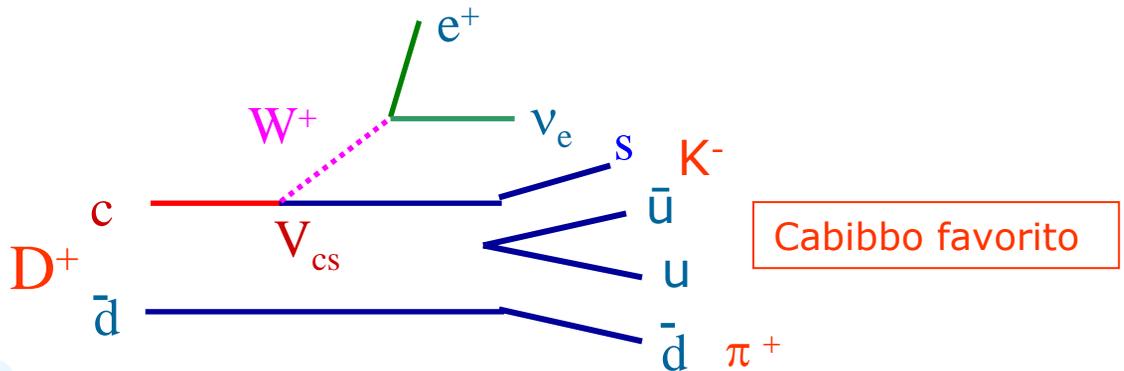
$$\Rightarrow \frac{\tau_{\Sigma^-}}{\tau_n} = B.R. \frac{(m_n - m_p)^5}{(m_{\Sigma^-} - m_{\Lambda})^5} \Rightarrow \tau_{\Sigma^-} = \tau_n B.R. \frac{(m_n - m_p)^5}{(m_{\Sigma^-} - m_{\Lambda})^5}$$

$$\tau_{\Sigma^-} = 886 \times 5.7 \cdot 10^{-5} \times \left(\frac{1.29}{81} \right)^5 = 52 \text{ ps}$$

Il valore misurato della vita media del Σ^- è 148 ps, che differisce di un fattore 3 rispetto alla nostra stima. La differenza può essere imputata all'assunzione che l'elemento di matrice del decadimento del neutrone e della Σ^- sia lo stesso.

Classificare i seguenti decadimenti semileptonici del mesone D^+ (1869) composto dal quark c e dall'antiquark d , in termini di decadimenti Cabibbo favoriti, Cabibbo soppressi oppure decadimenti proibiti al primo ordine delle interazioni deboli, e spiegare perché:

a) $D^+ \rightarrow K^- + \pi^+ + e^+ + \nu_e$ SI NO



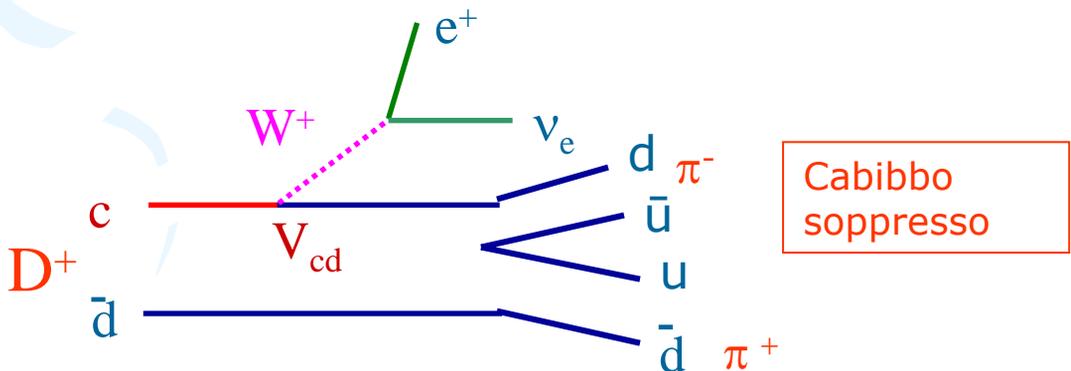
b) $D^+ \rightarrow K^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$ SI NO :

In questo caso il quark c dovrebbe decadere in un antiquark s , e questo non è possibile.

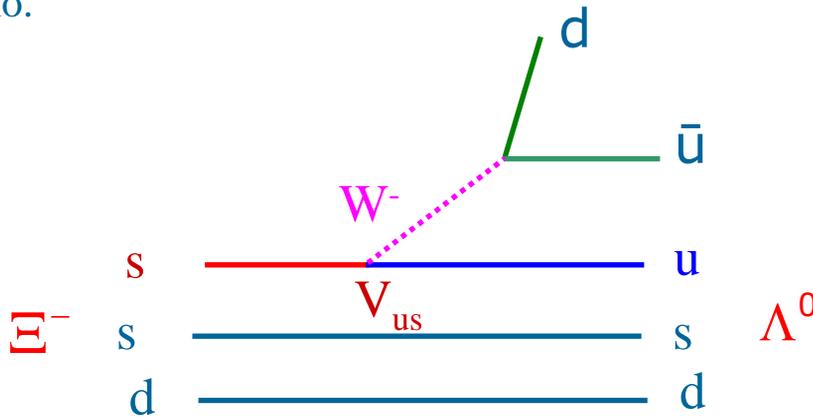
c) $D^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ SI NO

Nel decadimento del quark c può venire emesso solo un W^+ e non un W^- (vedere il prossimo grafico di Feynman)

d) $D^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$ SI NO :

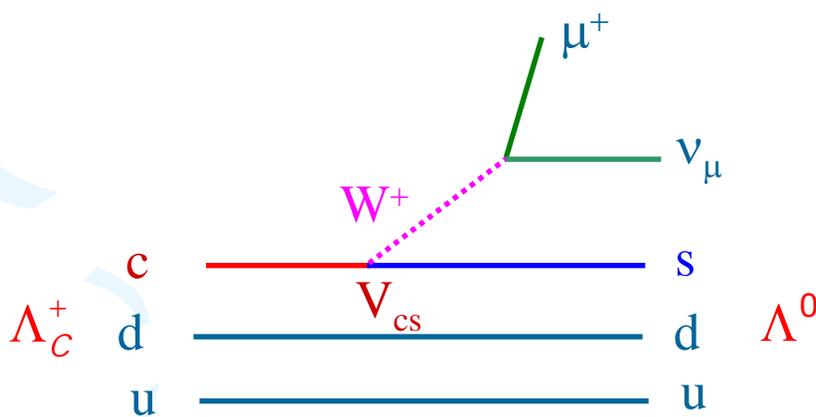


Disegnare il diagramma di Feynman, nel Modello Spettatore, del decadimento $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$ (per il pione si indichi soltanto i quark) ed indicare quale elemento della matrice CKM interviene nel decadimento. Dire se il decadimento è Cabibbo favorito o no.

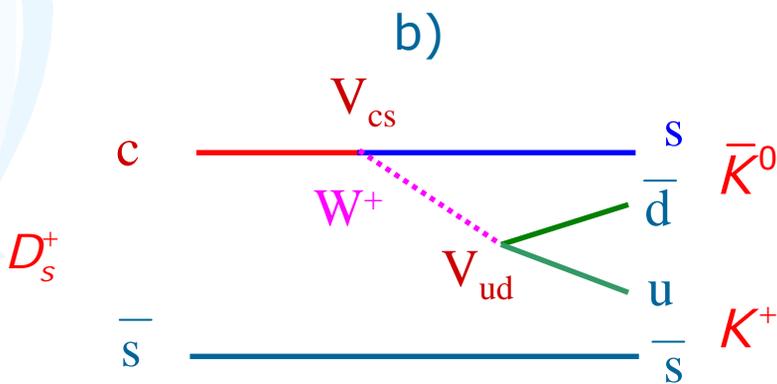
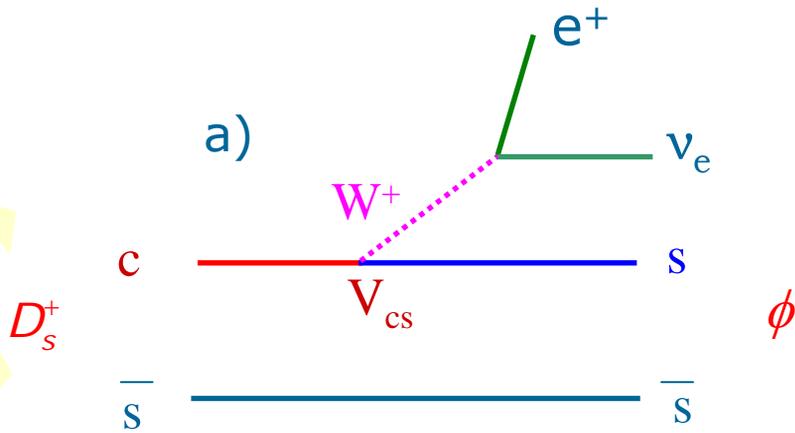


Si ha una transizione di un quark s in un quark u , quindi il processo è Cabibbo soppresso.

Disegnare il diagramma di Feynman, nel Modello Spettatore, del decadimento $\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda^0 + \mu^+ + \nu_\mu$ ed indicare quale elemento della matrice CKM interviene nel decadimento. Si ricorda che il barione Λ_c ha numero quantico charm=1



Disegnare il diagramma di Feynman, nel Modello Spettatore, dei seguenti decadimenti del mesone D_s^+ a) ; $D_s^+ \rightarrow \phi + e^+ + \nu_e$
 b) $D_s^+ \rightarrow K^+ + \bar{K}^0$ (per i mesoni si indichi soltanto i quark) ed indicare quali elementi della matrice CKM intervengono nel decadimento.



Il sistema dei K neutri e violazione di CP

- Il sistema dei K neutri.
- Autostati di CP: K_0^1 e K_0^2 .
- Oscillazioni di stranezza.
- Esperimento di Cronin e Fitch sulla violazione di CP.
- Violazione diretta e indiretta.
- Introduzione dei K_0^S e K_0^L .
- Decadimenti semileptonici del K_0^L .
- Definizione operativa della carica positiva.
- Violazione diretta di CP.
- Introduzione del parametro ϵ' .
- Cenni alla violazione di CP nel sistema dei B0.
- Triangolo di Unitarietà.

I mesoni K neutri

- I mesoni K sono i mesoni dotati di stranezza più leggeri: $M_{K^-} = 493.677 \pm 0.016$ MeV; $M_{K^0} = 497.648 \pm 0.027$ MeV
- I K appaiono come doppietti di isospin forte per quanto concerne le interazioni forti:

$$\begin{pmatrix} K^+ = u\bar{s} \\ K^0 = d\bar{s} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{K}^0 = \bar{d}s \\ K^- = \bar{u}s \end{pmatrix}$$

- Questi sono gli autostati di massa e sono anche gli autostati delle interazioni forti, cioè quelli che vengono prodotti nei processi in cui intervengono le interazioni forti.

- Ad esempio: $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ (produzione associata)

- La produzione del \bar{K}^0 richiede un processo più esotico:

$$\pi^- + p \rightarrow \bar{\Sigma}^- + \bar{K}^0 + p + n \quad (\text{oppure } \pi^+ + p \rightarrow +\bar{K}^0 + K^+ + p)$$

- Dato che la soglia della prima reazione è più bassa di quella della seconda, si può avere un fascio puro di K^0 senza contaminazione da parte dei \bar{K}^0

- I K non sono stabili, quindi decadono in particelle di massa più bassa, ma dato che essi sono le particelle strane più leggere, il decadimento deve essere per forza mediato dalle interazioni deboli.
- Studiando proprio i decadimenti dei K (carichi e neutri) si è trovato che essi violavano la conservazione della parità.
- Le interazioni deboli violano separatamente sia C che P, mentre sembrano conservare la simmetria combinata CP
- Quindi sembra ragionevole assumere che gli autostati del K che partecipano alle interazioni deboli siano autostati di CP e non autostati di stranezza, che intervengono nelle interazioni forti.

Autostati di CP

- I K^0 e \bar{K}^0 sono autostati di stranezza ma non di CP

$$P | K^0 \rangle = - | K^0 \rangle ; P | \bar{K}^0 \rangle = - | \bar{K}^0 \rangle \quad (\text{parita' intrinseca negativa})$$

$$CP | K^0 \rangle = -C | K^0 \rangle = - | \bar{K}^0 \rangle ; CP | \bar{K}^0 \rangle = -C | \bar{K}^0 \rangle = - | K^0 \rangle$$

- tuttavia le seguenti combinazioni lineari sono autostati di CP con autovalori +1 e -1

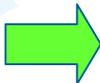
$$| K_1^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| K^0 \rangle - | \bar{K}^0 \rangle) \quad (\text{CP}=+1)$$

$$| K_2^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| K^0 \rangle + | \bar{K}^0 \rangle) \quad (\text{CP}=-1)$$

-
- Si tenga presente che questa definizione non è univoca, perché dipende dalla fase arbitraria che interviene nell'applicazione dell'operatore coniugazione di carica. Se si parte da un'altra definizione rispetto a quella adottata dal Burcham, si ottiene:

$$C | K^0 \rangle = - | \bar{K}^0 \rangle \Rightarrow CP | K^0 \rangle = -C | K^0 \rangle = | \bar{K}^0 \rangle$$

$$C | \bar{K}^0 \rangle = - | K^0 \rangle \Rightarrow CP | \bar{K}^0 \rangle = -C | \bar{K}^0 \rangle = | K^0 \rangle$$


$$| K_1^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| K^0 \rangle + | \bar{K}^0 \rangle) \quad (\text{CP}=+1)$$

$$| K_2^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| K^0 \rangle - | \bar{K}^0 \rangle) \quad (\text{CP}=-1)$$

In ogni caso l'autovalore di CP del K_1 è +1 mentre quello del K_2 è -1

- Occorre notare che K_1 non è l'antiparticella di K_2 , infatti:

$$C | K_1^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (C | K^0 \rangle - C | \bar{K}^0 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (| \bar{K}^0 \rangle - | K^0 \rangle) \neq | K_2^0 \rangle$$

Questo implica che K_2 e K_1 possono avere masse e vite medie diverse

Decadimenti dei K_1 e K_2

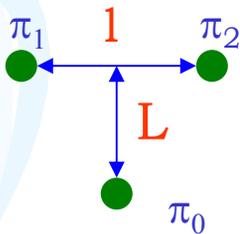
- Abbiamo visto, τ - θ puzzle che i K possono decadere sia in stati con due pioni che con tre pioni, quindi dobbiamo determinare l'autovalore di CP per questi stati per assegnarli a K_1 e K_2

Stato a due pioni: $\pi^0\pi^0$ e $\pi^+\pi^-$

- sia l il momento angolare orbitale relativo, la parità dello stato è $(-1)^l$
- dato che il π^0 è l'antiparticella di sé stessa e che π^+ e π^- sono antiparticelle, allora la coniugazione di carica è equivalente all'operazione di parità: $C(\pi_1\pi_2) = (-1)^l$

$$\Rightarrow CP(\pi_1\pi_2) = +1$$

Stato a tre pioni: $\pi^0\pi^0\pi^0$ e $\pi^+\pi^-\pi^0$



Dato che lo spin del K è nullo, allora $l=L$

Il Q della reazione è piccolo, circa 90 MeV, quindi molto probabilmente $l=L=0$

La statistica di Bose per il sistema $\pi^0\pi^0\pi^0$ richiede che l sia pari, quindi $l=2$ è altamente soppresso da effetti di momento angolare

- Quindi in ogni caso il sistema è in uno stato di onda S
- Dall'argomento precedente, lo stato $\pi_1\pi_2$ ha $CP=+1$. Il π^0 ha $C=+1$ e $P=-1$, quindi la combinazione del π^0 con il sistema $\pi_1\pi_2$ dà uno stato con un CP complessivo pari a -1

$$\begin{aligned} \Rightarrow |K_1^0\rangle &\rightarrow \pi\pi & (CP = +1) \\ |K_2^0\rangle &\rightarrow \pi\pi\pi & (CP = -1) \end{aligned}$$

- Il Q della prima reazione è molto più grande della seconda (c'è un pione in meno), quindi il rate di decadimento (Γ) del K_1 è molto più grande di quello del K_2



$$\tau_{K_2} \gg \tau_{K_1}$$

$$\tau_{K_2} = 0.5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

$$\tau_{K_1} = 0.9 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

Oscillazioni di stranezza

- Il fatto che il K^0 ed il \bar{K}^0 siano sovrapposizioni quantistiche di due stati aventi diversa massa, dà luogo ad un fenomeno molto importante ed interessante, noto come oscillazioni di stranezza, nell'evoluzione temporale degli autostati delle interazioni forti (K^0 e \bar{K}^0).
- Supponiamo che al tempo $t=0$ produciamo un fascio di K^0 , ad esempio attraverso il processo $\pi^-p \rightarrow \Lambda^0 K^0$

Si tenga presente che:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_2^0\rangle - |K_1^0\rangle)$$

- Al tempo t la funzione d'onda del K^0 è:

$$|\Psi(t)\rangle = |K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0(t)\rangle + |K_2^0(t)\rangle)$$

- Per una particella instabile di massa m e vita media $\tau=1/\Gamma$, la dipendenza dal tempo della funzione d'onda, espressa nel sistema di riferimento della particella dove $E=m$, è uguale a:

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(0)\rangle e^{-imt} \cdot e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$$

- questo è consistente con la legge di decadimento esponenziale per particelle instabili:

$$N(t) = |\Psi(t)|^2 = |\Psi(0)|^2 e^{-\Gamma t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- dato che gli stati K_1 e K_2 sono due stati distinti per le interazioni deboli, essi possono avere masse e vite medie diverse, che chiamiamo m_1, Γ_1 e m_2, Γ_2 (ricordiamo che $\Gamma = 1/\tau$)

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K_1^0(0)\rangle \cdot e^{-im_1 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_1 t} + |K_2^0(0)\rangle \cdot e^{-im_2 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_2 t} \right)$$

Oscillazioni di stranezza

- Al tempo t l'intensità dei K^0 nel fascio vale:

$$I(K^0) = \left| \langle K^0 | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle K^0 | K_1^0(t) \rangle + \langle K^0 | K_2^0(t) \rangle \right) \right|^2$$

$$\bullet \langle K^0 | K_1^0(0) e^{-(im_1 + \Gamma_1/2)t} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle K^0 | K^0 \rangle e^{-(im_1 + \Gamma_1/2)t}$$

$$\bullet \langle K^0 | K_2^0(0) e^{-(im_2 + \Gamma_2/2)t} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle K^0 | K^0 \rangle e^{-(im_2 + \Gamma_2/2)t}$$

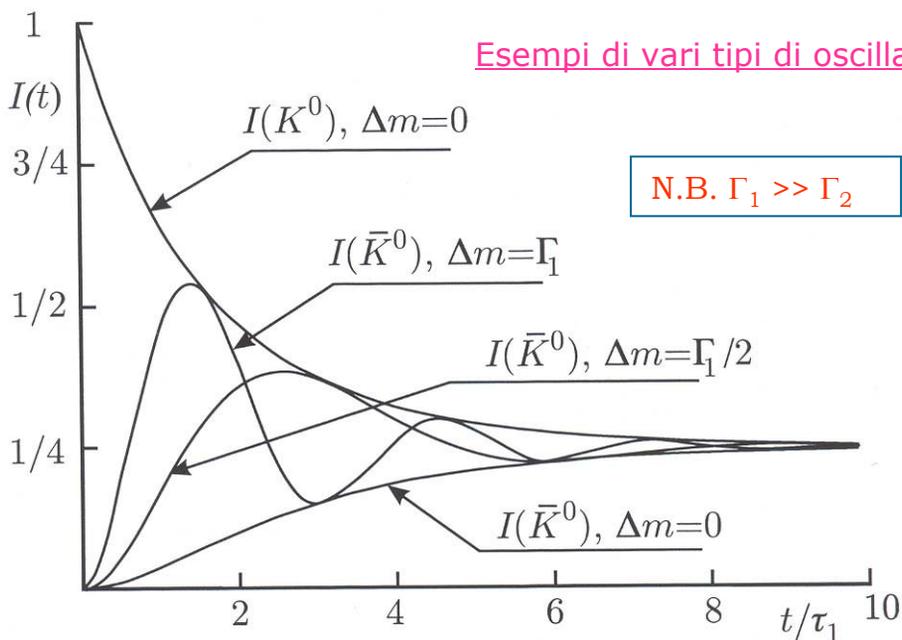
$$\Rightarrow \langle K^0 | \Psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle K^0 | K^0 \rangle \left[e^{-im_1 t} \cdot e^{-\frac{\Gamma_1}{2} t} + e^{-im_2 t} \cdot e^{-\frac{\Gamma_2}{2} t} \right]$$

$$\Rightarrow \left| \langle K^0 | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left| \langle K^0 | K^0 \rangle \right|^2 \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \cdot e^{i(m_2 - m_1)t} + e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \cdot e^{i(m_1 - m_2)t} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} + 2e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \cos(\Delta m t) \right] \quad \boxed{\Delta m = m_2 - m_1}$$

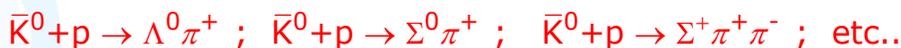
- Per i \bar{K}^0 ho: $I(\bar{K}^0) = \left| \langle \bar{K}^0 | \Psi(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t} \cos(\Delta m t) \right]$

- Le intensità dei K^0 e \bar{K}^0 oscillano con la frequenza $\Delta m/2\pi$.
Dalla misura della frequenza si ricava la differenza di massa Δm



Oscillazioni di stranezza

- Per misurare la frequenza di oscillazione occorre misurare l'intensità dei K^0 o dei \bar{K}^0 in funzione del tempo, ovvero in funzione della distanza dal punto di produzione del fascio dei K^0 .
- La cosa migliore è misurare l'intensità dei \bar{K}^0 , in quanto inizialmente il fascio è costituito interamente da K^0 .
- Per individuare la presenza di \bar{K}^0 nel fascio si utilizza il diverso tipo di interazione che questi hanno nell'interazione con la materia. Ricordiamo che il K^0 ha stranezza +1 mentre il \bar{K}^0 ha stranezza -1 quindi, poiché nella materia (cioè un bersaglio interposto nel fascio) non ci sono barioni con stranezza $S=+1$, il K^0 fa principalmente degli scattering elastici o delle reazioni di scambio carica, ad esempio $K^0+p \rightarrow K^++n$.
- Il \bar{K}^0 ha invece stranezza -1, quindi può produrre dei barioni con stranezza -1, ad esempio:



- Misurando quindi la produzione di iperoni strani in funzione della distanza dalla produzione del fascio, si ricava l'intensità del fascio di K^0 e da qui si ricava Δm

$$I(\bar{K}^0) = |\langle \bar{K}^0 | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}t} \cos(\Delta m t) \right]$$

- Dato che $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ (la componente K_1 decade subito, si ha:

$$I(\bar{K}^0) \approx \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_2 t} - 2e^{-\frac{\Gamma_1}{2}t} \cos(\Delta m t) \right] = \frac{1}{4} \quad \text{per } \tau_1 \ll t \ll \tau_2$$

- sperimentalmente si misura: $|\Delta m \cdot \tau_1| = 0.477 \pm 0.002$
- dalla quale si ricava Δm . Il segno è stato ricavato da altri esperimenti di rigenerazione dei K ed è tale che $m_2 > m_1$.

$$\Delta m = (0.535 \pm 0.002) \cdot 10^{-10} \hbar = (3.52 \pm 0.01) \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

Transizioni con $\Delta S=2$

- L'oscillazione di stranezza è dovuta al fatto che il K^0 ed il \bar{K}^0 possono decadere in stati finali comuni, ad esempio:

$$K^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \leftarrow \bar{K}^0 \quad \text{oppure} \quad K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \leftarrow \bar{K}^0$$

- quindi possiamo avere transizioni da K^0 a \bar{K}^0 attraverso uno stato intermedio a due o tre pioni.



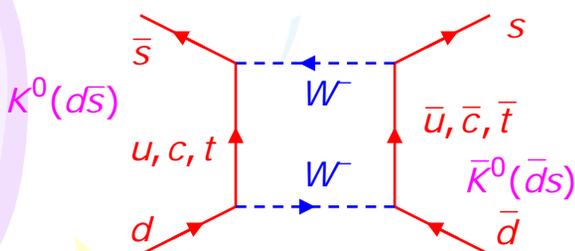
- Questo è possibile perché K^0 e \bar{K}^0 sono due particelle neutre, l'una antiparticella dell'altra, ma che sono particelle distinte (al contrario del π^0 che è l'antiparticella di se stesso) perché possiedono dei numeri quantici, in questo caso la stranezza, che li distinguono l'uno dall'altro.

- Le interazioni deboli non distinguono la stranezza, e quindi si possono avere transizioni da uno stato all'altro mediate dalle interazioni deboli. Queste transizioni sono del secondo ordine e sono caratterizzate da $\Delta S=2$.

- Per quanto riguarda le interazioni forti K^0 e \bar{K}^0 sono due stati ortogonali, mentre le interazioni deboli connettono i due stati.

$$\langle \bar{K}^0 | K^0 \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \bar{K}^0 | H_{st} | K^0 \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \bar{K}^0 | H_{weak} | K^0 \rangle \neq 0$$

- A livello di quark, la transizione $\Delta S=2$ avviene tramite un diagramma a box di questo tipo:



Da questo diagramma si può calcolare Δm .

$$\Delta m \approx \frac{G^2}{4\pi^2} f_k^2 m_c^2 \cos^2 \theta_c \sin^2 \theta_c$$

un calcolo fatto da Gaillard, Lee e Rosner, prima del 1974, utilizzando i vari valori misurati, predisse $m_c \approx 1.5$ GeV.

Rigenerazione dei K_1

- Nel 1955 Pais e Piccioni suggerirono che l'esistenza degli stati K_1 e K_2 dovrebbero dar luogo al fenomeno noto come rigenerazione dei K_1 .
- Supponiamo di produrre un fascio puro di K^0 e di farlo avanzare nel vuoto. Inizialmente il fascio consiste in una miscela paritaria di K_1 e K_2

$$|\Psi(0)\rangle = |K^0(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1^0(0)\rangle + |K_2^0(0)\rangle)$$

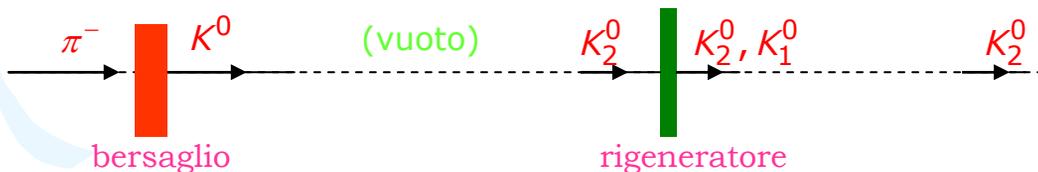
- Scegliamo ora dei tempi $t \gg \tau_1$; la componente a corta vita media K_1 , che decade in due pioni, sarà tutta decaduta e la funzione d'onda sarà:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |K_2^0(0)\rangle \cdot e^{-im_2 t} e^{-\frac{1}{2}\Gamma_2 t} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} |K_2^0(0)\rangle \cdot e^{-\Gamma_2 t}$$

Cioè il fascio consiste soltanto della componente a lunga vita media K_2 , il quale ricordiamo è composto da:

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

- Supponiamo ora di interporre nel fascio un blocco di materiale:



- Il K^0 ed il \bar{K}^0 hanno interazioni forti diverse con la materia, in particolare il \bar{K}_0 ha una sezione d'urto maggiore e quindi esso verrà assorbito maggiormente nel blocco.

Rigenerazione dei K_1

- Indichiamo con f e \bar{f} la frazione di K^0 e \bar{K}^0 rimanenti nel fascio dopo il passaggio attraverso il blocco:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(f|K^0\rangle + \bar{f}|\bar{K}^0\rangle)$$

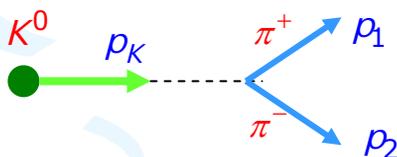
- In termini degli stati K_1 e K_2 abbiamo:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{2} [f(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) + \bar{f}(|K_2^0\rangle - |K_1^0\rangle)] = \\ &= \frac{1}{2} [(f - \bar{f})|K_1^0\rangle + (f + \bar{f})|K_2^0\rangle] \end{aligned}$$

- Dato che $f = \bar{f}$ ne consegue che lo stato a corta vita media è stato rigenerato dalla presenza del materiale lungo la linea di fascio.

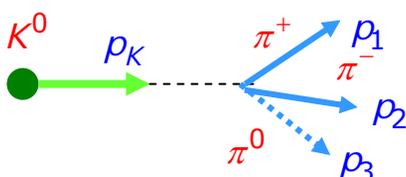
- Questo fenomeno può essere verificato sperimentalmente cercando dei decadimenti dei K in due pioni lungo la linea del fascio e subito dopo il rigeneratore.

N.B. per essere sicuri che i due pioni derivano dal decadimento del K, bisogna verificare che la loro massa invariante sia uguale alla massa del K e la somma delle loro quantità di moto sia uguale a quella del K.



$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &= p_K^2 = m_K^2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_K \end{aligned}$$

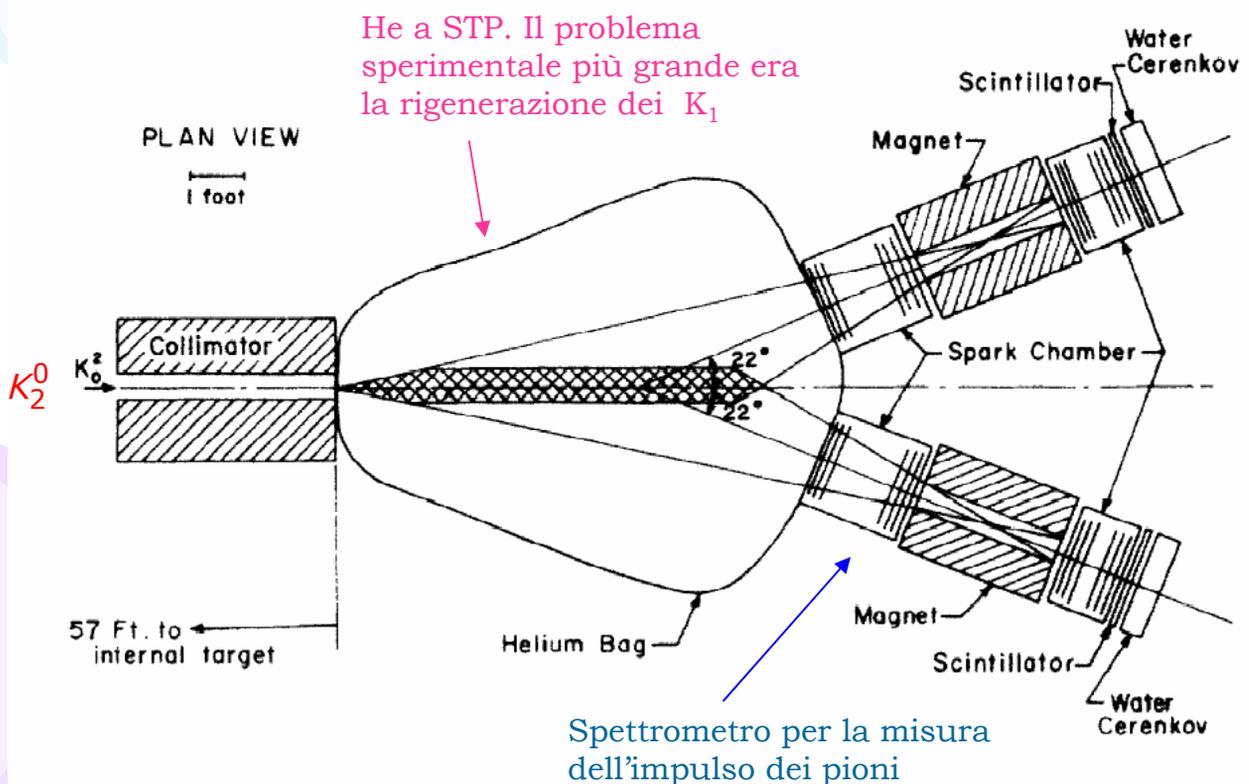
Se nel decadimento è presente un terzo pione che non viene rivelato, queste relazioni non sono più vere:



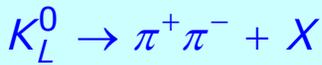
$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &\neq p_K^2 \Rightarrow \neq m_K^2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &\neq \vec{p}_K \end{aligned}$$

Esperimento di Christenson, Cronin, Fitch, Turlay 1964- AGS -Brookhaven

- Nel 1963 Cronin, Fitch et al., realizzarono un esperimento che rivelava i decadimenti in due pioni in un fascio di K_2 .
- I K^0 erano prodotti bombardando un bersaglio di Be con un fascio primario di protoni da 30 GeV, ottenendo K^0 di impulso ≈ 1 GeV/c
- La componente a corta vita media aveva una lunghezza di decadimento ($\gamma\beta c\tau_1$) di circa 6 cm.
- I K^0 venivano fatti decadere lungo un tubo a vuoto di 15 m, prima di raggiungere l'esperimento
- Lo scopo dell'esperimento era quello di mettere un limite superiore al B.R. del decadimento del K_2 in due pioni.
- Invece l'esperimento osservò i decadimenti del K_2 in due pioni che rappresentò la prima chiara evidenza della violazione di CP nelle interazioni tra particelle.

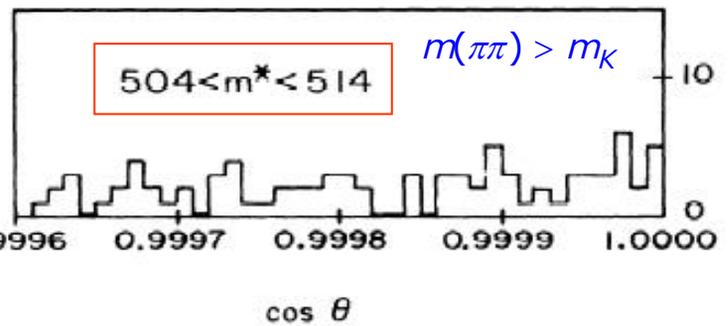
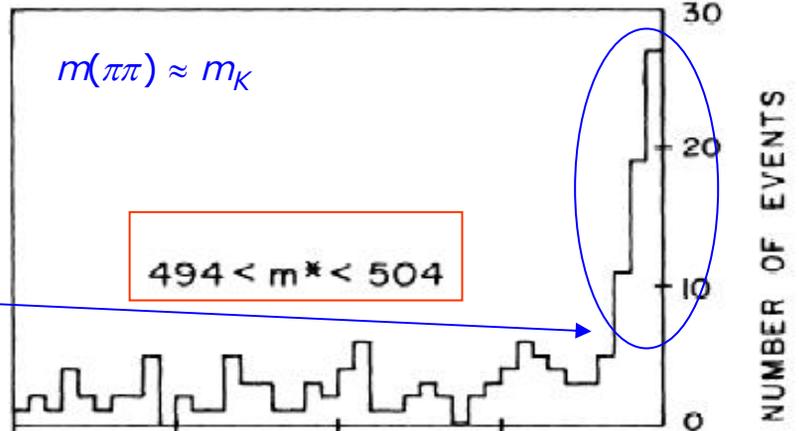
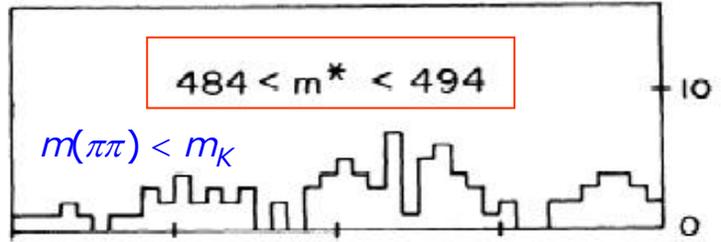


Risultati dell'esperimento

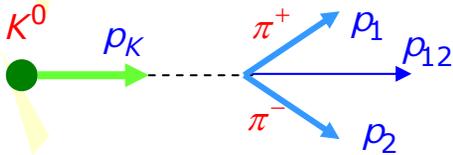


$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

θ è l'angolo tra \vec{p}_{12} e \vec{p}_K

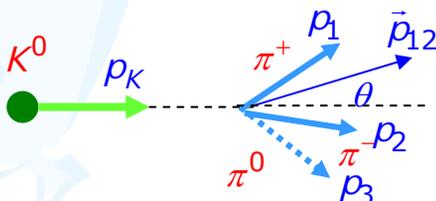


Se $X = 0$, allora:



$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_K \Rightarrow \cos \theta = 1$$

Se $X \neq 0$, allora:



$$\vec{p}_{12} \neq \vec{p}_K \Rightarrow \cos \theta < 1$$

- La calibrazione dell'apparato fu controllata mettendo un rigeneratore di tungsteno immediatamente prima dell'esperimento
- Gli eventi in figura con $\cos \theta > 0.99999$ hanno una massa invariante di 499.1 ± 0.8 MeV
- Gli eventi del picco, dopo la sottrazione del fondo, sono 45 ± 9 su un totale di 22700 decadimenti del K_2



$$R = \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{all charged})} = (2.0 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}$$

La normalizzazione è fatta rispetto a tutti i decadimenti carichi del K_L

$$[\text{B.R. } K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0 = 21\%]$$

Violazione di CP

- Lo stato K_2 , il quale ha $CP = -1$, non può decadere in 2π se CP viene conservata nelle interazioni deboli.
- L'esperimento del 1963 di Christenson, Cronin, Fitch e Turlay dimostrò che il K_2 decade in due pioni (n.b. la pubblicazione dei risultati è del 1964)
- Come prima cosa, questo portò ad un cambiamento dei nomi, lo stato a corta vita media (dove predomina la componente $CP = +1$) fu chiamato K_S^0 (K Short) e lo stato a lunga vita media (predomina $CP = -1$) fu chiamato K_L^0 (K Long).
- Il risultato trovato da Cronin fu:

$$R = \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{all charged})} = (2.0 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Oggi: B.R. } \Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = (2.090 \pm 0.025) \cdot 10^{-3}$$

Non possiamo più identificare K_S con K_1 e K_L con K_2

- Al contrario della violazione della parità, la violazione di CP pose maggiori problemi teorici per essere incorporata nelle varie teorie.
- L'esistenza della transizione $K_L \rightarrow \pi\pi$ può essere spiegata in due modi: violazione indiretta di CP e violazione diretta di CP.

Violazione indiretta:

Si suppone che le interazioni deboli non violino CP, ma che lo stato K_L sia una sovrapposizione lineare degli stati K_1 e K_2 , e che il decadimento osservato in 2 pioni sia dovuto alla componente K_1 presente nel K_L

Violazione diretta:

In questo caso si suppone che l'interazione debole violi direttamente la simmetria CP connettendo due stati con autovalore diverso di CP. In questo caso la violazione di CP dovrebbe essere osservabile anche in altri processi.

Violazione indiretta di CP

- Per tener conto della violazione di CP nel decadimento del K_L si ipotizza che gli autostati dell'Hamiltoniana debole, K_S e K_L , non siano autostati di CP, ma siano una sovrapposizione lineare di questi ultimi (K_1 e K_2). Questo meccanismo viene chiamato violazione indiretta di CP, perché la violazione avviene attraverso il mescolamento degli stati, e non direttamente nell'elemento di matrice.

$$|K_S^0\rangle = \frac{|K_1^0\rangle + \varepsilon |K_2^0\rangle}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}} \quad ; \quad |K_L^0\rangle = \frac{|K_2^0\rangle + \varepsilon |K_1^0\rangle}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}}$$

- ε è un piccolo numero complesso che misura il grado di violazione di CP indotto dal mescolamento degli stati del K^0

- I due stati K_S e K_L non sono autostati di CP:

$$CP |K_S^0\rangle = \frac{CP |K_1^0\rangle + \varepsilon CP |K_2^0\rangle}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}} = \frac{|K_1^0\rangle - \varepsilon |K_2^0\rangle}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2}} \neq |K_S^0\rangle$$

(e lo stesso dicasi per il K_L)

- K_S e K_L non sono nemmeno ortogonali tra di loro. La mancanza di ortogonalità era aspettata in quanto entrambi hanno gli stessi canali di decadimento, ad esempio il canale in due pioni.

$$\begin{aligned} \langle K_L^0 | K_S^0 \rangle &= \frac{1}{1 + |\varepsilon|^2} \left(\langle K_2^0 | + \varepsilon^* \langle K_1^0 | \right) \left(|K_1^0\rangle + \varepsilon |K_2^0\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{1 + |\varepsilon|^2} \left(\varepsilon \langle K_2^0 | K_2^0 \rangle + \varepsilon^* \langle K_1^0 | K_1^0 \rangle \right) = \frac{\varepsilon + \varepsilon^*}{1 + |\varepsilon|^2} = \frac{2\text{Re}(\varepsilon)}{1 + |\varepsilon|^2} \end{aligned}$$

La mancanza di ortogonalità è una misura del grado di violazione di CP

- Il decadimento osservato del K_L in due pioni è dovuto quindi al decadimento in due π della sua componente K_1 . In linea di principio è anche possibile il decadimento del K_S in tre pioni dovuto alla sua componente K_2 , ma il B.R. è molto piccolo ($3.2 \cdot 10^{-7}$) perché prevale il decadimento molto più rapido in due pioni.

Violazione indiretta di CP

- In genere la violazione di CP viene parametrizzata attraverso un rapporto di ampiezze dei decadimenti del K_S e K_L in una coppia di pioni carichi ed una coppia di pioni neutri:

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_S^0 \rangle} = |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}}$$

H è l'Hamiltoniana responsabile della transizione tra lo stato iniziale e lo stato finale

$$\eta_{00} = \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | H | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | H | K_S^0 \rangle} = |\eta_{00}| e^{i\phi_{00}}$$

- Se la violazione di CP nel decadimento del K_L fosse dovuta unicamente al mescolamento degli stati K_1 e K_2 , allora il decadimento del K_L in due pioni carichi o due pioni neutri sarebbe dovuto unicamente alla componente K_1 , quindi si deve necessariamente avere:

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | H | \varepsilon K_1^0 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_1^0 \rangle} = \varepsilon \quad \text{e} \quad \eta_{00} = \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | H | \varepsilon K_1^0 \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | H | K_1^0 \rangle} = \varepsilon$$

- I valori misurati di questi parametri sono i seguenti (PDG 2004):

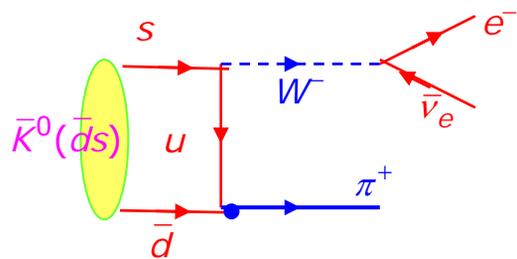
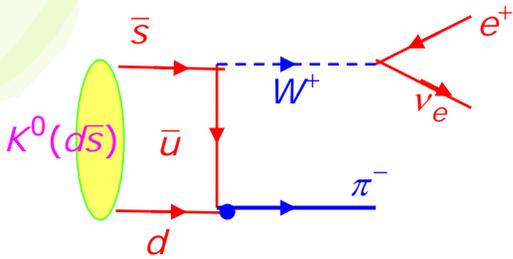
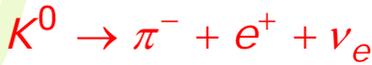
$$|\eta_{+-}| = (2.286 \pm 0.014) \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \phi_{+-} = 43.4^\circ \pm 0.7^\circ$$

$$|\eta_{00}| = (2.276 \pm 0.014) \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \phi_{00} = 43.7^\circ \pm 0.8^\circ$$

$$\left| \frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}} \right| = 0.9950 \pm 0.0008 \quad ; \quad \phi_{00} - \phi_{+-} = 0.2^\circ \pm 0.4^\circ$$

- I dati sono consistenti con l'ipotesi del mescolamento degli stati K_1 e K_2 .
- Tuttavia l'accordo è solo al livello del per cento, quindi non è esclusa la violazione diretta di CP, ma questa, se esiste, deve essere al livello del per mille rispetto alla violazione indiretta.
- Ciò vuol dire cercare degli effetti al livello di 10^{-6} nei decadimenti dei K. Questo è il motivo per cui la violazione diretta è stata osservata sperimentalmente soltanto nel 2002.

Decadimenti semileptonici dei K^0



B.R. ($K_L^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu_\mu$) = $(38.81 \pm 0.27)\%$ ← I due stati finali sono sommati

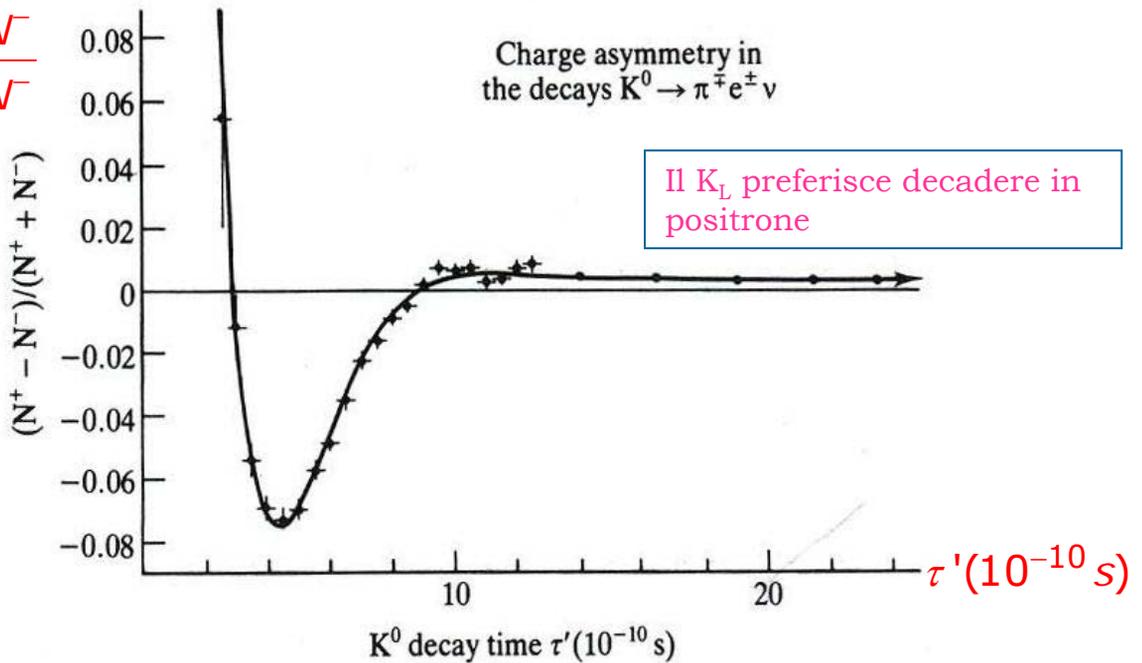
B.R. ($K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu$) = $(27.19 \pm 0.25)\%$ ← Effetto spazio delle fasi

- I due stati finali sono l'uno il CP coniugato dell'altro.
- Si tenga presente che dalla carica del leptone si può capire se il decadimento proviene da un K^0 oppure da un \bar{K}^0 .
- Se CP fosse conservata, il K_L avrebbe lo stesso rate di decadimento in entrambi gli stati finali perché il K_L sarebbe una miscela equiprobabile di K^0 e \bar{K}^0 .
- Da un punto di vista sperimentale, si parte con un fascio composto inizialmente soltanto da K^0 e sfruttando il fatto che c'è un'oscillazione di stranezza in funzione del tempo, si misura la variazione, in funzione del tempo, del numero di decadimenti in cui compare un positrone (N^+) rispetto a quelli in cui compare un elettrone (N^-).
- Si aspetta un tempo sufficientemente lungo in modo che non vi sia più la componente K_S e rimanga soltanto il K_L ; se non vi fosse la violazione di CP, vi sarebbero un identico numero di decadimenti in positrone ed in elettrone.
- Si misura quindi, in funzione del tempo, l'asimmetria di carica definita nel modo seguente:

$$\delta_I = \frac{N(K_L^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) - N(K_L^0 \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{N^+ + N^-} = \frac{2\text{Re}(\varepsilon)}{1 + |\varepsilon|^2}$$

Definizione operativa del segno della carica elettrica

$$\frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-}$$



- Dalla curva si vede che il K_L decade più spesso in un positrone che in un elettrone per una frazione pari a:

$$\delta_l = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} = (0.327 \pm 0.012)\%$$

- Per la prima volta esiste un processo che distingue tra materia e antimateria e fornisce una definizione operativa del segno della carica.

La carica positiva è quella trasportata dal leptone prodotto di preferenza nel decadimento del K_L

- La violazione di CP tratta in modo diverso materia e antimateria e potrebbe spiegare perché nell'universo oggi abbiamo solo materia e nessuna antimateria (almeno per quanto ne sappiamo al momento).

Violazione diretta di CP

- è possibile avere dei valori di η_{+-} e η_{00} diversi da zero anche in assenza del mescolamento degli stati K_S e K_L ($\varepsilon=0$), se l'Hamiltoniana debole è in grado di connettere stati con un diverso autovalore di CP. Questo meccanismo è noto come violazione diretta di CP.
- Occorre quindi valutare l'elemento di matrice seguente:

$$\langle \pi\pi | H_w | K_L^0 \rangle \quad \text{oppure} \quad \langle \pi\pi | H_w | K_S^0 \rangle$$

- è utile scomporre lo stato di 2 pioni in termini delle componenti di isospin totale. Il pione ha isospin 1, quindi il sistema di due pioni può avere isospin totale 0, 1 oppure 2.
- Se consideriamo la funzione d'onda totale del sistema dei due pioni, abbiamo:

$$\psi = \varphi(\text{spaziale}) \cdot \chi(\text{spin}) \cdot \xi(\text{sapore})$$

- I pioni sono dei bosoni, quindi la funzione d'onda totale deve essere simmetrica. Abbiamo già visto che la parte spaziale è simmetrica, la parte di spin non c'è in quanto i pioni hanno spin zero, quindi anche la parte di sapore deve essere simmetrica, ciò implica che l'isospin totale deve essere pari, quindi $I=0$ oppure 2.

- Utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan si ha:

$$\langle \pi^+ \pi^- | = \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 2 | + \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 0 | \quad ; \quad \langle \pi^0 \pi^0 | = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 2 | - \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 0 |$$

$$\text{dove: } \langle \pi^+ \pi^- | = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \pi_1^+ \pi_2^- | + \langle \pi_1^- \pi_2^+ |) \quad (\text{stato simmetrizzato})$$

- Vi sono quattro ampiezze che descrivono il decadimento del K_S e del K_L in due pioni:

$$\langle 0 | H_w | K_S^0 \rangle \quad ; \quad \langle 2 | H_w | K_S^0 \rangle$$

$$\langle 0 | H_w | K_L^0 \rangle \quad ; \quad \langle 2 | H_w | K_L^0 \rangle$$

- H_w è l'Hamiltoniana responsabile del decadimento.

Violazione diretta di CP

- Il K ha isospin $\frac{1}{2}$, quindi in un caso vi è una transizione con $\Delta I = \frac{1}{2}$ e nell'altro caso si ha $\Delta I = \frac{3}{2}$. Le due transizioni possono avere un fattore di fase diverso, quindi vi sarà uno sfasamento nella composizione degli stati finali a due pioni che dipende dall'isospin totale. Indichiamo gli sfasamenti relativi a $I=0$ e $I=2$ come δ_0 e δ_2 rispettivamente, avremo allora:

$$\langle \pi^+ \pi^- | = \sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\delta_2} \langle 2 | + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\delta_0} \langle 0 |$$

$$\langle \pi^0 \pi^0 | = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\delta_2} \langle 2 | - \sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\delta_0} \langle 0 |$$

- Definiamo le ampiezze relative al decadimento del K^0 nel modo seguente:

$$A_0 = \langle 0 | H_w | K^0 \rangle \quad \text{e} \quad A_2 = \langle 2 | H_w | K^0 \rangle$$

- Se assumiamo l'invarianza per CPT, da questi possiamo ricavare le ampiezze relative al decadimento del K^0 , ricordando che:

$$\text{CP} | K^0 \rangle = - | \bar{K}^0 \rangle \quad \Rightarrow \quad \text{CPT} | K^0 \rangle = - \langle \bar{K}^0 |$$

$$\text{CPT} \langle 0 | = | 0 \rangle \quad ; \quad \text{CPT} \langle 2 | = | 2 \rangle \quad \text{I due pioni hanno CP}=1$$

- Se assumiamo che l'Hamiltoniana debole sia invariante per CPT si ha:

$$A_0 = \langle 0 | H_w | \bar{K}^0 \rangle \quad \xrightarrow{\text{CPT}} \quad - \langle K^0 | H_w | 0 \rangle = -A_0^*$$

$$A_2 = \langle 2 | H_w | \bar{K}^0 \rangle \quad \xrightarrow{\text{CPT}} \quad - \langle K^0 | H_w | 2 \rangle = -A_2^*$$

- Si elimina una fase totale scegliendo A_0 reale.
- Ricordiamo l'espressione di K_S e K_L in termini di K^0 e \bar{K}^0 :

$$| K_S^0 \rangle = \frac{(1 + \varepsilon) | K^0 \rangle - (1 - \varepsilon) | \bar{K}^0 \rangle}{\sqrt{2(1 + |\varepsilon|^2)}} \quad ; \quad | K_L^0 \rangle = \frac{(1 + \varepsilon) | K^0 \rangle + (1 - \varepsilon) | \bar{K}^0 \rangle}{\sqrt{2(1 + |\varepsilon|^2)}}$$

- Si possono esprimere le transizioni del K_S e del K_L in due pioni attraverso le ampiezze A_0 , A_2 ed il termine ε che esprime la violazione di CP.

Violazione diretta di CP

- Ricordiamo come viene parametrizzata la violazione di CP:

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_S^0 \rangle} = |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}} \quad \eta_{00} = \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | H | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | H | K_S^0 \rangle} = |\eta_{00}| e^{i\phi_{00}}$$

- Occorre quindi calcolare le quattro ampiezze. Utilizzando le definizioni precedenti si ottiene:

$$\langle \pi^+ \pi^- | H_W | K_L^0 \rangle = \text{costante} \cdot \left(\varepsilon (\text{Re} A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2} A_0 e^{i\delta_0}) + \text{Im} A_2 e^{i\delta_2} \right)$$

$$\langle \pi^+ \pi^- | H_W | K_S^0 \rangle = \text{costante} \cdot \left(\text{Re} A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2} A_0 e^{i\delta_0} + \varepsilon \text{Im} A_2 e^{i\delta_2} \right)$$

$$\langle \pi^0 \pi^0 | H_W | K_L^0 \rangle = \text{costante} \cdot \left(\varepsilon (\sqrt{2} \text{Re} A_2 e^{i\delta_2} - A_0 e^{i\delta_0}) + \sqrt{2} \text{Im} A_2 e^{i\delta_2} \right)$$

$$\langle \pi^0 \pi^0 | H_W | K_S^0 \rangle = \text{costante} \cdot \left(\sqrt{2} \text{Re} A_2 e^{i\delta_2} - A_0 e^{i\delta_0} + \varepsilon \sqrt{2} \text{Im} A_2 e^{i\delta_2} \right)$$

dove: $\text{costante} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}$; quindi si ottiene:

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_S^0 \rangle} = \frac{\varepsilon \text{Re} A_2 e^{i\delta_2} + \varepsilon \sqrt{2} A_0 e^{i\delta_0} + \text{Im} A_2 e^{i\delta_2}}{\text{Re} A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2} A_0 e^{i\delta_0} + \varepsilon \text{Im} A_2 e^{i\delta_2}} =$$

$$\approx \frac{\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Im} \left(\frac{A_2}{A_0} \right) e^{i(\delta_2 - \delta_0)}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re} \left(\frac{A_2}{A_0} \right) e^{i(\delta_2 - \delta_0)}} \approx$$

$$\approx \left\{ \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{Im}(A_2)}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{Re}(A_2)}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \right\} \approx$$

$$\approx \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{Im}(A_2)}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} = \varepsilon + \varepsilon'$$

- In maniera simile si ottiene: $\eta_{00} \approx \varepsilon - \sqrt{2} \frac{\text{Im}(A_2)}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} = \varepsilon - 2\varepsilon'$



$$\varepsilon' = \frac{\text{Im}(A_2)}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}$$

Violazione diretta di CP

- Quindi possiamo definire i parametri che descrivono la violazione di CP nei K neutri nel modo seguente:

$$\eta_{+-} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | H | K_S^0 \rangle} = \varepsilon + \varepsilon' \quad \eta_{00} = \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | H | K_L^0 \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | H | K_S^0 \rangle} = \varepsilon - 2\varepsilon'$$

- Ricordiamo che se la violazione di CP è dovuta solo al mescolamento dei K_1 e K_2 (violazione indiretta), allora η_{+-} e η_{00} devono essere uguali, quindi $\varepsilon' = 0$.
- La violazione diretta di CP implica invece l'esistenza del parametro ε' diverso da zero.
- Fin dalla scoperta della violazione di CP nel 1964 sono stati realizzati diversi esperimenti volti alla misura di ε' , tuttavia questa misura è molto impegnativa da un punto di vista sperimentale perché si tratta di misurare un parametro dell'ordine di 10^{-6} .
- La procedura sperimentale consiste nel misurare un doppio rapporto di larghezze parziali, in modo tale che molti errori sistematici si cancellano:

$$R = \left| \frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}} \right|^2 = \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) / \Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) / \Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}$$

$$R^{-1} = \left| \frac{\eta_{+-}}{\eta_{00}} \right|^2 = \frac{|\varepsilon + \varepsilon'|^2}{|\varepsilon - 2\varepsilon'|^2} \approx 1 + 6 \operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)$$

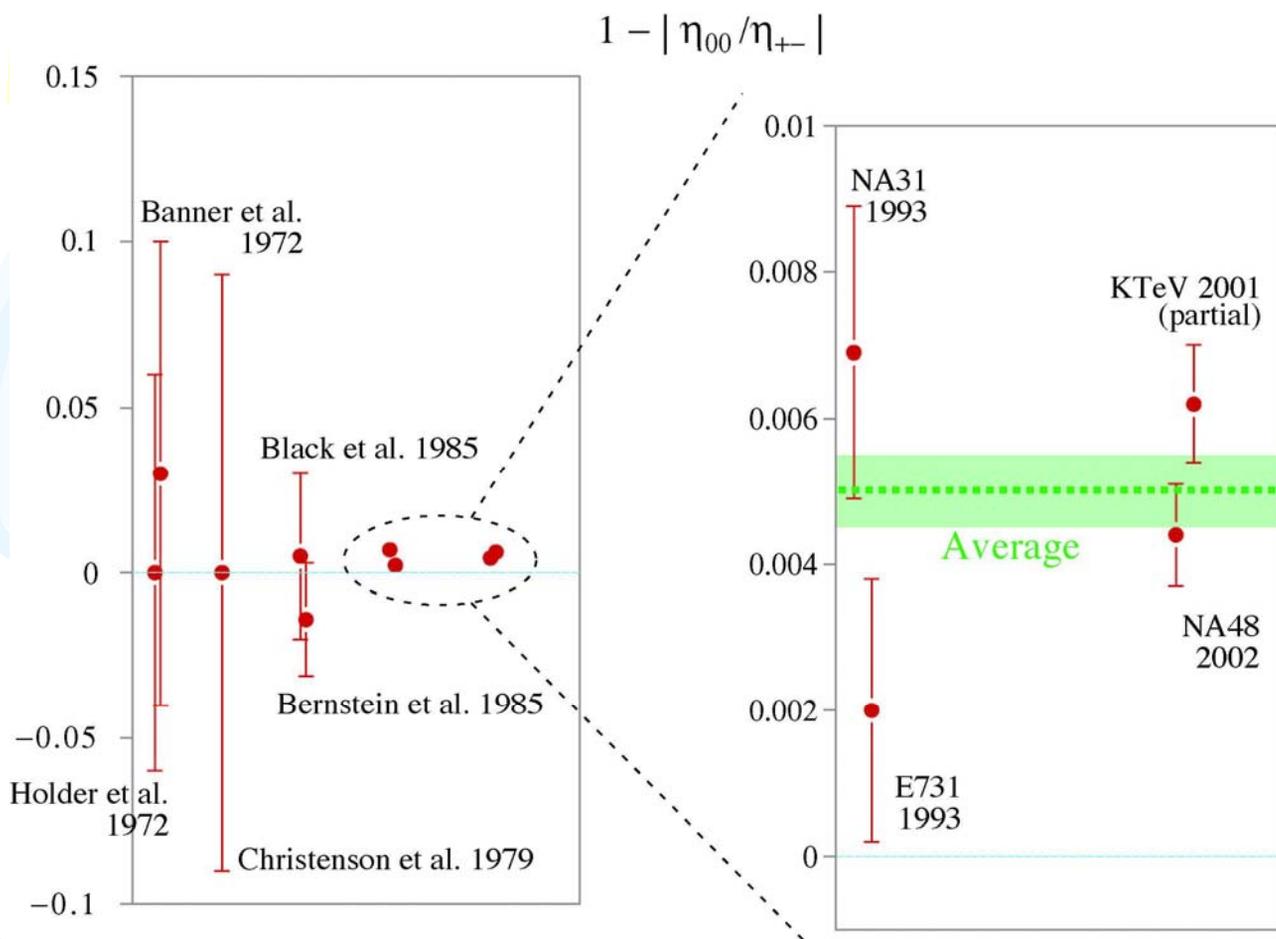
- L'esistenza della violazione diretta di CP implica che questa può essere osservata anche in altri decadimenti oltre a quello dei K neutri, ad esempio nei decadimenti dei K carichi.

Misura della violazione diretta di CP

$$R = \left| \frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}} \right|^2 = \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) / \Gamma(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) / \Gamma(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}$$

- Un valore di R diverso da 1 è la prova dell'esistenza della violazione diretta di CP.

Questa misura ha richiesto quasi 30 anni di esperimenti prima di essere realizzata.



$$\left| \frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}} \right| = 0.9950 \pm 0.0008$$



$$\Re\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) = (1.67 \pm 0.26) \cdot 10^{-3}$$

Violazione di CP nei B^0

- Nel 1999-2001 la violazione di CP è stata osservata anche nel decadimento dei mesoni contenenti un quark b
- Ricordiamo la tecnica usata per misurare la violazione di CP nei K:
 1. Si ottiene un fascio puro di K_2 (questo è possibile per via della grande differenza nella vita media tra i due autostati di CP K_1 e K_2 , quindi è sufficiente avere un lungo tunnel di decadimento per la componente K_1)
 2. Si cercano decadimenti del K_2 nello stato con autovalore di CP sbagliato.
- La stessa tecnica non si può utilizzare per studiare la violazione di CP nel B, perché la vita media dei due autostati di CP è circa la stessa e quindi non c'è modo di separare le due componenti "aspettando abbastanza".
- Occorre quindi utilizzare un altro "trucco". Si studia l'evoluzione temporale della coppia $B^0\bar{B}^0$ e si cercano degli osservabili che dipendono dalla violazione di CP. Ad esempio si cercano delle differenze nel rate di decadimento del B^0 e del \bar{B}^0 in alcuni stati finali che hanno lo stesso autovalore di CP

$$B.R.(B^0 \rightarrow f) \neq B.R.(\bar{B}^0 \rightarrow f)$$

- Se l'ampiezza di decadimento contiene una fase che cambia segno per via dell'applicazione di CP, allora:

$$A = |A| e^{i\phi} \xrightarrow{CP} \bar{A} = |A| e^{-i\phi}$$

- Ma questo non è sufficiente per avere la violazione di CP, perché:

$$A^* A = |A| e^{-i\phi} |A| e^{i\phi} = \bar{A}^* \bar{A} = |A| e^{i\phi} |A| e^{-i\phi} = |A|^2$$

- Per avere violazione di CP dobbiamo avere:
 - a) due ampiezze
 - b) due fasi (fase debole, fase forte)
 - c) solo una fase cambia segno sotto CP (fase debole)

Violazione di CP nei B^0

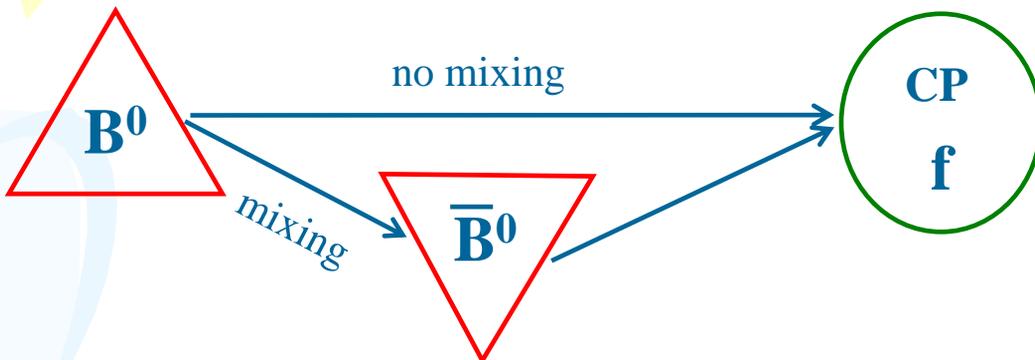
- In questo modo abbiamo per le due ampiezze del B^0 e del \bar{B}^0 :

$$A = A_1 + A_2 = |A_1| e^{i\phi_W} e^{i\phi_s} + |A_2| \quad \bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = |A_1| e^{-i\phi_W} e^{i\phi_s} + |A_2|$$

$$A^* A = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2 |A_1| |A_2| \cos(\phi_s + \phi_W)$$

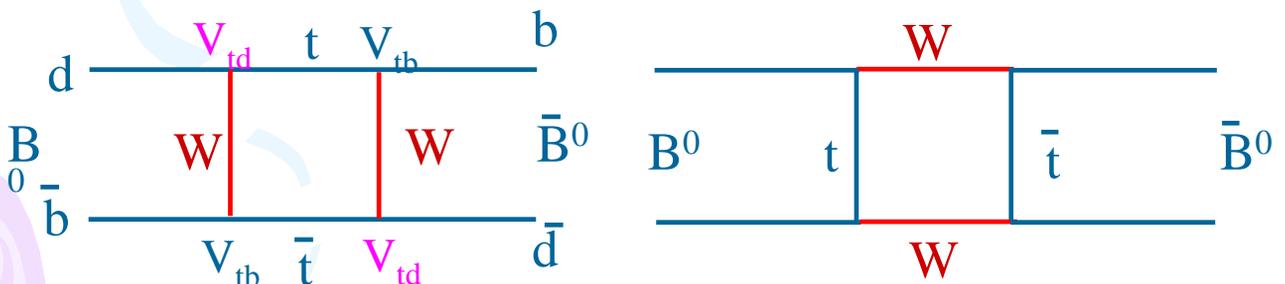
$$\bar{A}^* \bar{A} = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2 |A_1| |A_2| \cos(\phi_s - \phi_W)$$

- Per misurare la differenza di fase occorre ricorrere ad un fenomeno di interferenza, ad esempio il decadimento del B^0 in uno stato f con CP definita, che può avvenire direttamente oppure dal \bar{B}^0 ottenuto attraverso il mescolamento B^0 - \bar{B}^0 :



- Il mescolamento dei B^0 è un fenomeno simile alle oscillazioni di stranezza, reso più semplice dal fatto che le vite medie dei due stati (B_S, B_L) sono dello stesso ordine di grandezza.

- Un B^0 può oscillare in un \bar{B}^0 attraverso i seguenti diagrammi a box:



- L'accoppiamento ai vertici si ottiene attraverso la matrice CKM

Matrice CKM e violazione di CP

- Ricordiamo la forma della matrice CKM:

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}$$

- Riscriviamo la matrice CKM nella formulazione di Wolfstein, utile per descrivere la violazione di CP:

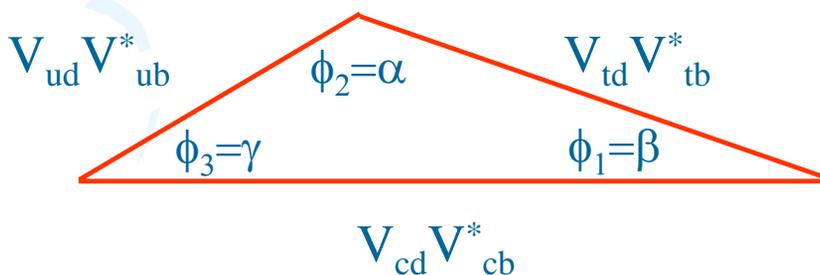
$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ \underbrace{A\lambda^3(1 - \rho - i\eta)}_{V_{td}} & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

V_{td} fornisce la fase debole necessaria per la violazione di CP nei decadimenti dei mesoni B

- Poiché la matrice CKM è unitaria, dobbiamo avere:

$$V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} = 0$$

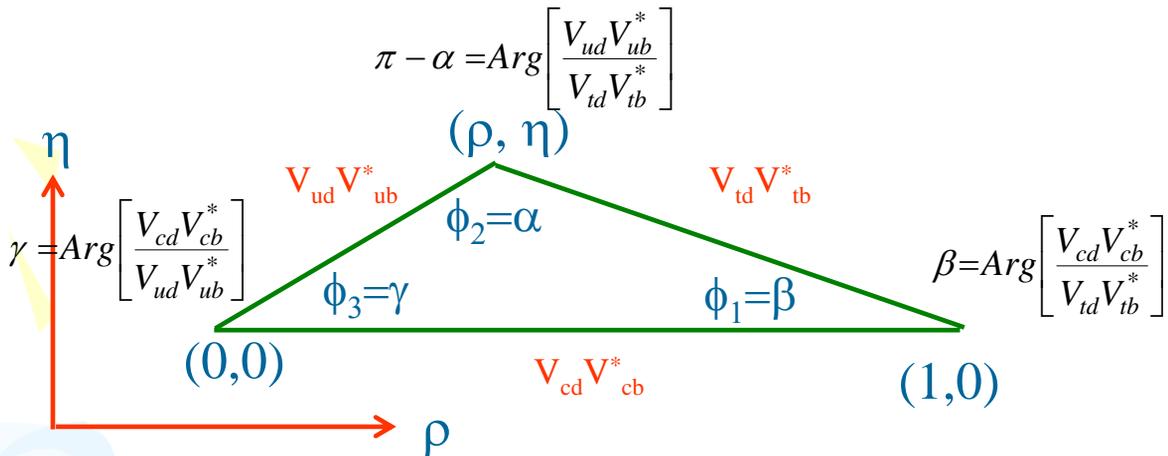
- Questa relazione può essere rappresentata da un triangolo nel piano complesso:



- Un altro modo di verificare la violazione di CP nel sistema dei B è di verificare che l'area di questo triangolo è diversa zero.

Triangolo di unitarietà

- È conveniente normalizzare tutti i lati del triangolo di unitarietà rispetto alla base del triangolo ($V_{cd}V_{cb}^* = A\lambda^3$).
- Nel piano (ρ, η) il triangolo diventa:



Nel 1999 gli esperimenti Babar e Belle trovarono il valore di $\sin 2\beta$ diverso da zero, e fu la prima evidenza della violazione di CP nel sistema dei B

- Misurando in maniera indipendente tutti gli angoli ed i lati del triangolo, si può controllare sperimentalmente se il triangolo si "chiude". Se così non fosse sarebbe un'evidenza di una nuova fisica non prevista dal Modello Standard.

Teorie di gauge e Modello Standard

- Teorie di gauge.
- Invarianza di gauge locale: QED. Modello di Glashow-Weinberg-Salam.
- Rottura spontanea di una simmetria discreta.
- Teorema di Goldstone.
- Meccanismo di Higgs.
- Angolo di mixing debole θ_w .
- Massa dei bosoni. Massa dei fermioni.
- Bosone di Higgs.
- Struttura a doppietti delle particelle nel Modello Standard.
- Relazione di Gell-Mann Nishijima per l'isospin debole e l'ipercarica debole.
- Numeri quantici per leptoni e quark.
- Interazioni nel modello $SU(2)_L \times U(1)_Y$.
- Introduzione dei W carichi.
- Introduzione del fotone e dello Z .
- Accoppiamento del fotone.
- Accoppiamento vettoriale e assiale dello Z .
- Cenni alla rinormalizzazione ed al running delle costanti di accoppiamento.



TEORIE DI GAUGE

- INVARIANZA DI GAUGE GLOBALE

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{i q \Lambda} \Psi(x)$$

\Rightarrow CONSERVAZIONE DELLA CARICA Q

- FACCIAMO UNA TRASFORMAZIONE NELLA QUALE IL PARAMETRO Λ SIA UNA FUNZIONE DELLO SPAZIO TEMPO

$$\Lambda = \Lambda(x)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i q \Lambda(x)} \Psi(x)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = e^{-i q \Lambda(x)} \bar{\Psi}(x)$$

- PRENDIAMO LA LAGRANGIANA DI DIRAC DI UNA PARTICELLA LIBERA

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$$

- QUESTA NON È INVARIANTE PER UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE LOCALE

- TERMINE DI MASSA

$$m \bar{\Psi}' \Psi' = m \bar{\Psi} e^{-i q \Lambda(x)} \cdot e^{+i q \Lambda(x)} \Psi(x) = m \bar{\Psi} \Psi \quad \text{OK}$$

- $$\partial_\mu \Psi \rightarrow \partial_\mu \Psi' = \partial_\mu (e^{iq\Lambda(x)} \Psi(x)) = e^{iq\Lambda(x)} \partial_\mu \Psi(x) + \underline{+ iq e^{iq\Lambda(x)} \Psi(x) \cdot \partial_\mu \Lambda(x)}$$

- PER CONSERVARE L'INVARIANZA SI INTRODUCE LA DERIVATA COVARIANTE

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iq A_\mu(x) \quad (\text{sostituzione minimale})$$

- A_μ È UN CAMPO VETTORIALE CHE, ATTRAVERSO LA TRASFORMAZIONE DI GAUGE, SI TRASFORMA COME:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x)$$

- LA DERIVATA COVARIANTE È INVARIANTE PER UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE

$$D_\mu \Psi \rightarrow e^{iq\Lambda(x)} D_\mu \Psi$$

- $$D_\mu \Psi \equiv (\partial_\mu + iq A_\mu(x)) \Psi(x) \rightarrow (\partial_\mu + iq A_\mu(x) - iq \partial_\mu \Lambda(x)) e^{iq\Lambda(x)} \Psi(x)$$

$$= e^{iq\Lambda(x)} \partial_\mu \Psi(x) + iq \cancel{\partial_\mu \Lambda(x)} e^{iq\Lambda(x)} \Psi(x) + iq A_\mu(x) e^{iq\Lambda(x)} \Psi(x) - iq \cancel{\partial_\mu \Lambda(x)} e^{iq\Lambda(x)} \Psi(x)$$

$$= e^{iq\Lambda(x)} (\partial_\mu + iq A_\mu(x)) \Psi(x) = e^{iq\Lambda(x)} D_\mu \Psi(x)$$

- LA LAGRANGIANA SI SCRIVE COME:

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$$

LA QUALE È INVARIANTE PER UNA TRASP. DI GAUGE LOCALE

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + i q A_\mu) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi =$$

$$= i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - q A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = \mathcal{L}_{\text{free}} - J^\mu A_\mu$$

$$(J^\mu = q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi : \text{corrente e.m.})$$

↑
termine di
int. e.m.

- PER COMPLETEZZA OCCORRE AGGIUNGERE ALLA LAGRANGIANA IL TERMINE CINETICO DI A_μ

$$\mathcal{L}_{\text{free}} (\text{FOTONE}) = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad [F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]$$

- N.B. SE IL FOTONE AVESSSE MASSA, BISOGNEREBBE AGGIUNGERE ALLA LAGRANGIANA UN TERMINE DEL TIPO:

$$\frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$$

IL QUALE ROMPEREBBE L'INVARIANZA DI GAUGE LOCALE

$$A_\mu A^\mu \rightarrow (A_\mu - \partial_\mu \Lambda) (A^\mu - \partial^\mu \Lambda) \neq A_\mu A^\mu$$

SIMMETRIA SU(2) E CAMPI DI YANG-MILLS

- CONSIDERIAMO UN DOPPIETTO DI SU(2)

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \psi_1 \text{ e } \psi_2 \text{ SONO DUE SPINORI}$$

- LA LAGRANGIANA SI PUO' SCRIVERE COME:

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \quad [\bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1 \ \bar{\psi}_2)]$$

- RICHIEDIAMO CHE LA LAGRANGIANA SIA INVARIANTE PER UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE LOCALE (INFINITESIMA)

$$\Psi(x) \rightarrow [1 - i g \vec{\Lambda}(x) \cdot \vec{I}] \Psi(x)$$

$$\vec{I} = (I_1, I_2, I_3) \text{ SONO GLI OPERATORI DI ISOSPIN}$$

$$[I_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k$$

- INTRODUCIAMO LA DERIVATA COVARIANTE

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu \quad (g = \text{costante di accoppiamento})$$

- $\vec{W}_\mu(x) \rightarrow \vec{W}_\mu(x) + \partial_\mu \vec{\Lambda}(x) + g \vec{\Lambda}(x) \times \vec{W}_\mu(x)$

- IL TERMINE CINETICO E': $L_W = -\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu}$

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu$$

↑ self coupling dei bosoni di gauge

- N.B. anche qui i bosoni devono avere masse nulle

MODELLO DI GLASHOW-WEINBERG-SALM

- NEL MODELLO LE PARTICELLE SONO CLASSIFICATE COSÌ:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L ; e^-_R ; \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L ; u_R ; d'_R$$

↑
doppietto di isospin debole

- GLASHOW INTRODUSSE ANCHE L'IPERCARICA DEBOLE

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$$

	I	I_3	Q	Y
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
e^-_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e^-_R	0	0	-1	-2
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$
d'_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$
u_R	0	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$
d'_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

- IL DOPIETTO DI ISOSPIN DEBOLE PUO' ESSERE RUOTATO NELLO SPAZIO DI $SU(2)_L$ E LA LAGRANGIANA DEVE ESSERE INVARIANTE
- ANCHE TRASFORMAZIONI DELLA SIMMETRIA $U(1)_Y$ DEVONO LASCIARE LA LAGRANGIANA INVARIANTE

⇒ GRUPPO DI SIMMETRIA DEL MODELLO: $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

- LA LAGRANGIANA LIBERA SI SCRIVE COME:

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R$$

- FACCIAMO UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE LOCALE INFINE

$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\Psi_L(x) \rightarrow [1 - i g \vec{\Lambda}(x) \cdot \vec{I}] \Psi_L(x)$	$\Psi_L(x) \rightarrow [1 - i \frac{g'}{2} \lambda(x) Y] \Psi_L(x)$
$\Psi_R(x) \rightarrow \Psi_R(x)$	$\Psi_R(x) \rightarrow [1 - i \frac{g'}{2} \lambda(x) Y] \Psi_R(x)$

- $\vec{\Lambda}(x)$ E' UN VETTORE NELLO SPAZIO DELL'ISOSPIN DEBOLE

- OCCORRE INTRODURRE LA DERIVATA COVARIANTE

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu + i \frac{g'}{2} Y B_\mu$$

$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu + \partial_\mu \Lambda(x) + g \vec{\Lambda}(x) \times \vec{W}_\mu$	$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu$
$B_\mu \rightarrow B_\mu$	$B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu \lambda(x)$

- TERMINE CINETICO: $-\frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu [i \partial_\mu - g \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{g'}{2} Y B_\mu] \Psi_L + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu [i \partial_\mu - \frac{g'}{2} Y B_\mu] \Psi_R - \frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

- N.B. NON CI SONO TERMINI DI MASSA PER I BOSONI DI GAUGE PERCHÉ ROMPONO LA SIMMETRIA DI GAUGE LOCALE

- C.T.B. non c'è un $\bar{\Psi} \Psi$ perché $\bar{\Psi} \Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R$

ROTTURA SPONTANEA DI UNA SIMMETRIA DISCRETA

- LAGRANGIANA DI UN CAMPO SCALARE

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad [\text{eq. del moto}]$$

(particelle di spin 0 e massa m)

- CONSIDERIAMO ORA:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{1}{4} \lambda \varphi^4$$

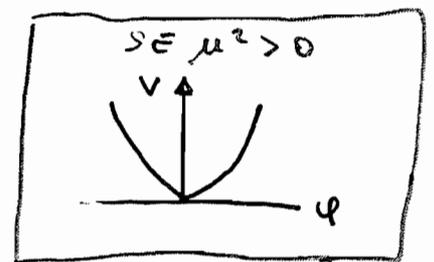
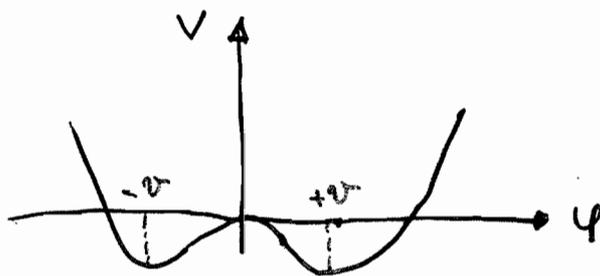
- μ e λ sono costanti, con $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$
- LA LAGRANGIANA HA SIMMETRIA DI RIFLESSIONE
- SE $\mu^2 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2$ NON PUO' ESSERE IL TERMINE DI MASSA
- U.B. IL CALCOLO DELLE AMPIEZZE DI SCATTERING CON LA TECNICA DEI DIAGRAMMI DI FEYNMAN E' UN METODO PERTURBATIVO DOVE I CAMPI SONO TRATTATI COME FLUTTUAZIONI INTORNO AD UNO STATO DI MINIMA ENERGIA: LO STATO FONDAMENTALE (IL VUOTO)
- FINORA LO STATO FONDAMENTALE ERA BANALE, $\varphi = 0$.
- NEL CASO PRESENTE $\varphi = 0$ NON E' LO STATO FONDAMENTALE

- CONSIDERIAMO LA LAGRANGIANA COME UN TERMINE CINETICO $T = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)$ PIÙ UN TERMINE DI ENERGIA POTENZIALE V

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$$

- I MINIMI CORRISPONDONO A:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi (\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 \quad \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi = \pm v \quad ; \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \end{cases}$$



- POSSIAMO SCEGLIERE $\phi = v$ E INTRODURRE $\chi(x)$

$$\phi(x) = v + \chi(x)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) (\partial^\mu \chi) - \lambda v^2 \chi^2 - 2\lambda v \chi^3 - \frac{1}{4} \lambda \chi^4 + \frac{1}{4} \lambda v^4$$

\uparrow termine di massa $\swarrow \searrow$ self-interaction \uparrow è una costante

- $m_\chi = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$

- POTEVAMO ANCHE SCEGLIERE DI SVILUPPARE $\phi(x)$ INTORNO A $-v$
- SEBBENE LA LAGRANGIANA ABBAIA UNA SIMMETRIA PER RIFLESSIONE, LO STATO FONDAMENTALE NON HA QUESTA SIMMETRIA QUANDO NE SCEGLIAMO UNO ROMPIAMO LA SIMMETRIA. QUESTA È LA ROTTORE SPONTANEA DI SIMMETRIA.

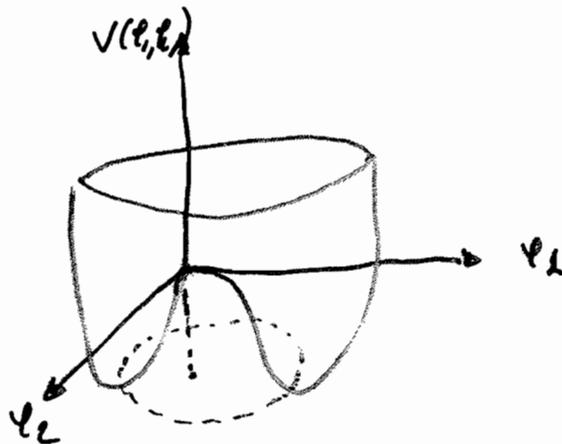
ROTTURA SPONTANEA DI UNA SIMMETRIA CONTINUA: TEOREMA DI GOLDSTONE

- CAMPO SCALARE COMPLESSO $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2)$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2$$

- LA LAGRANGIANA È INVARIANTE PER U(1) $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\alpha} \varphi$

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2} \mu^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{4} \lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$



- LA CONDIZIONE DI MINIMO SI HA SUL CERCHIO

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2 \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

- SCEGLIAMO COME MINIMO INIZIALE AL QUALE FARE LO SVILUPPO PERTURBATIVO

$$\varphi_1 = v \quad ; \quad \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1(x) = v + \chi_1(x)$$

$$\varphi_2(x) = \chi_2(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \chi_1(x) + i\chi_2(x))$$

(

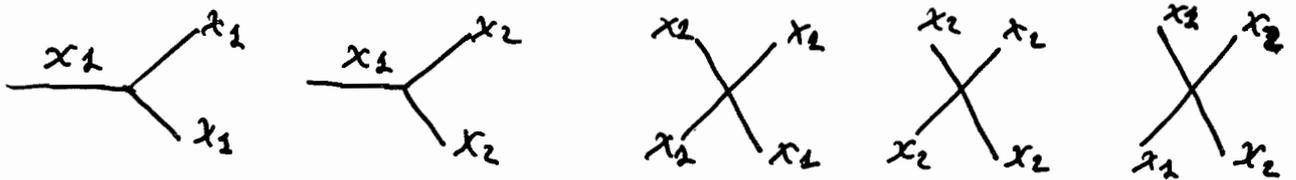
- LA LAGRANGIANA DIVENTA

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_1) (\partial^\mu \chi_1) - \lambda v^2 \chi_1^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_2) (\partial^\mu \chi_2) \right] -$$

$$- \left[\lambda v (\chi_1^3 + \chi_1 \chi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\chi_1^4 + \chi_2^4 + 2\chi_1^2 \chi_2^2) \right] + \frac{\lambda}{4} v^4$$

$$\Rightarrow m_{\chi_1} = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} > 0 \quad \text{OK}$$

- IL TERZO TERMINE RAPPRESENTA LE SELF-INTERACTIONS



- IL SECONDO TERMINE RAPPRESENTA UN CAMPO SCALARE CON MASSA NULLA (BOSONE DI GOLDSTONE)

- POTETE "MUOVERVI" LUNGO I MINIMI SENZA SPRECARE ENERGIA
- TEOREMA DI GOLDSTONE: LA ROTURA SPONTANEA DI UNA SIMMETRIA CONTINUA GENERA UNO (O PIU') BOSONI SCALARI A MASSA NULLA.

IL MECCANISMO DI HIGGS

- IL MECCANISMO DI HIGGS CORRISPONDE ALLA ROTTONA SPONTANEA DELLA SIMMETRIA DI UNA LAGRANGIANA CHE È INVARIANTE PER UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE LOCALE

⇒ TEOREMA DI GOLDSTONE + BOSONI DI GAUGE

- CONSIDERIAMO LA LAGRANGIANA SEGUENTE:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - iqA_\mu)\psi^*(\partial^\mu + iqA^\mu)\psi - \mu^2\psi^*\psi - \lambda(\psi^*\psi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

LA QUALE È INVARIANTE PER LA TRASFORMAZIONE DI GAUGE UCL:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\Lambda(x)}\psi(x)$$

- SE $\mu^2 < 0$ ⇒ BISOGNA SVILUPPARE IL CAMPO ψ INTORNO AD UN MINIMO $\neq \psi=0$, AD ESEMPIO:

$$\psi_1 = v + \chi_1(x)$$

$$\psi_2 = \chi_2(x)$$

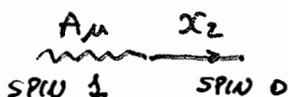
- LA LAGRANGIANA DIVENTA:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_1)(\partial^\mu \chi_1) - \lambda v^2 \chi_1^2 \right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_2)(\partial^\mu \chi_2) \right] + \frac{1}{2}q^2 v^2 A_\mu A^\mu - qv A_\mu \partial^\mu \chi_2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{termini di interazione}$$

• ANALIZZIAMO LA LAGRANGIANA:

- CAMPO SCALARE χ_1 CON MASSA $m_{\chi_1} = \sqrt{2}g v$
- BOSONE DI GOLDSTONE χ_2 PRIVO DI MASSA
- IL BOSONE DI GAUGE A_μ HA ACQUISITO UN TERMINE DI MASSA
 $m_A = gv$

• TUTTAVIA IL TERMINE $A_\mu \partial^\mu \chi_2$, CHE SEMBREREBBE PERMETTERE AL BOSONE A_μ DI TRASFORMARSI IN χ_2 NENTR' SI PROPAGA, GETTA DEI DUBBI SU QUESTA INTERPRETAZIONE



• ANALIZZIAMO I GRADI DI LIBERTA' DELLA LAGRANGIANA

- PRIMA DELLA ROTTURA SPONTANEA DELLA SIMMETRIA
 - 2 CAMPI SCALARI REALI φ_1 e φ_2
 - 2 STATI DI ELICITA' DI A^μ (SPIN 1, MASSA ZERO)
 - \Rightarrow 4 GRADI DI LIBERTA'

- DOPO LA ROTTURA SPONTANEA DELLA SIMMETRIA (SCEGLIENDO CIOE' UN PARTICOLARE STATO DI VUOTO)
 - 2 CAMPI SCALARI REALI χ_1 e χ_2
 - 3 STATI DI ELICITA' DI A^μ (SPIN 1, MASSA $\neq 0$)
 - \Rightarrow 5 GRADI DI LIBERTA'

\Rightarrow NON VA BENE

- PER TROVARE LA VIA D'USCITA A QUESTO PROBLEMA, OCCORRE RICORDARSI CHE È SEMPRE POSSIBILE FARE UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE LOCALE
- CARIANDO LA PARAMETRIZZAZIONE DI $\varphi(x)$ UTILIZZANDO IL "MODULO" E LA "FASE"

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[v + H(x) e^{i \frac{\theta(x)}{v}} \right]$$

- $H(x)$ e $\theta(x)$ sono campi reali

- FACCIAMO UNA TRASFORMAZIONE DI GAUGE IN MODO DA ELIMINARE IL CAMPO $\theta(x)$

$$\varphi'(x) = e^{i q \Lambda(x)} \varphi(x)$$

$$\Rightarrow (v + H'(x)) e^{i \frac{\theta'(x)}{v}} = e^{i q \Lambda(x)} \cdot (v + H(x)) e^{i \frac{\theta(x)}{v}}$$

$$\Rightarrow H'(x) = H(x)$$

$$\theta'(x) = \theta(x) + q v \Lambda(x)$$

- SE SCEGLIAMO $\Lambda(x) = -\frac{1}{q v} \theta(x)$
- IL BOSONE DI GOLDSTONE CONNETTE I VARI STATI DI VUOTO CHE SONO DEGENERI IN ENERGIA. CON L'INVARIANZA DI GAUGE ABBIAMO "TOLTO" QUESTO GRADO DI LIBERTÀ NON VOLOTO.

CON LA NUOVA PARAMETRIZZAZIONE IL CAMPO θ NON DOVREBBE APPARIRE ESPPLICITAMENTE NELLA LAGRANGIANA

- IN QUESTA NUOVA "GAUGE UNITARIA" A_μ DIVENTA:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q\nu} \partial_\mu \theta(x)$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\nu + H(x)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \lambda \nu^2 H^2 \right] + \frac{1}{2} q^2 \nu^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} q^2 A_\mu A^\mu H^2 + \\ + q^2 \nu A_\mu A^\mu H - \lambda \nu H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\lambda \nu^4}{4}$$

\mathcal{L} NON DIPENDE DA θ COME CI ASPETTAVAMO: IL BOSONE DI GOLDSTONE È SCOMPARSO. È STATO "MANGIATO" DAL BOSONE DI GAUGE CHE È INGRASSATO ED HA ACQUISITO MASSA.

- LA LAGRANGIANA DESCRIVE OLA UN BOSONE SCALARE H (HIGGS) DI MASSA $m_H = \sqrt{2\lambda\nu^2}$ ED UN BOSONE DI GAUGE VETTORIALE A_μ , DI MASSA $m_A = q\nu$

- GLI ALTRI TERMINI DELLA LAGRANGIANA DESCRIVONO LE INTERAZIONI TRA I CAMPI E LE SELF-INTERACTIONS

.N.B. QUESTO È IL MECCANISMO DI HIGGS ABELIANO, CIOÈ VALIDO PER UN GRUPPO DI SIMMETRIA COMMUTATIVO

MECCANISMO DI HIGGS E MODELLO DI GWS

- STUDIAMO LA ROTTA SONTANEA DI SIMMETRIA PER IL GRUPPO (NON ABELIANO) $SU(2) \times U(1)$. PARTIAMO DALLA LAGRANGIANA SEGUENTE E STUDIAMO $SU(2)$:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

- φ E' UN DOPPIETTO DI $SU(2)$ DI CAMPI COMPLESSI

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

- LA LAGRANGIANA E' INVARIANTE PER UNA TRASFORMAZIONE GLOBALE DI $SU(2)$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i \frac{\Lambda_\tau \tau_\tau}{2}} \varphi \quad (\tau=1, 2, 3)$$

AFFINCHE' LO SIA ANCHE PER UNA LOCALE OCCORRE INTRODURRE LA DERIVATA COVARIANTE

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \frac{\tau_\tau}{2} W_\mu^\tau$$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \left[1 + \vec{\Lambda}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \right] \varphi(x)$$

$$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}'_\mu = \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\Lambda} - \vec{\Lambda} \times \vec{W}_\mu$$

- IL POTENZIALE E'

$$V(\varphi) = \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

- LA LAGRANGIANA SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu \varphi + i g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \varphi \right)^\dagger \left(\partial^\mu \varphi + i g \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{W}^\mu \varphi \right) - V(\varphi) - \frac{1}{4} \vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu}$$

- CONSIDERIAMO IL CASO $\mu^2 < 0$ E $\lambda > 0$
IL MINIMO DEL POTENZIALE SI HA PER:

$$\varphi^\dagger \varphi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \varphi^\dagger \varphi &= (\varphi_a^* \ \varphi_b^*) \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \varphi_a^* \varphi_a + \varphi_b^* \varphi_b \\ &= \frac{1}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) = \frac{v^2}{2} \end{aligned}$$

- SCEGLIAMO UN MINIMO, ROMPIAMO LA SIMMETRIA DELLO STATO FONDAMENTALE

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = 0 \quad ; \quad \varphi_3^2 = v^2$$

- LO STATO DI VUOTO CHE ABBIAMO SCELTO È:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

FACCIAMO LO SVILUPPO PERTURBATIVO INTORNO A QUESTO STATO, SCEGLIENDO UNA GAUGE OPPORTUNA TALE CHE SI ABBIAMO:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

- IN QUESTO MODO TRE CAMPI SCALARI SONO STATI ELIMINATI DALLA TRASFORMAZIONE DI GAUGE E SONO RIMASTI CON UN SOLO

- POSSIAMO RISCRIVERE LA LAGRANGIANA IN TERMINI DEL CAMPO DI HIGGS H

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \lambda v^2 H^2 \right] + \frac{g^2 v^2}{8} \left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2 \right]$$

+ higher order terms + termine cinetico per i \vec{W}

- QUESTA LAGRANGIANA DESCRIVE UN CAMPO DI HIGGS SCALARE DI MASSA

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{(-2\mu^2)} = \text{???? GeV}$$

E TRE BOSONI DI GAUGE MASSIVI DI MASSA

$$m_W = \frac{1}{2} g v$$

- I TRE BOSONI DI GAUGE SI SONO MANGIATI I TRE CAMPI DI GOLDSTONE ACQUISTANDO MASSA
- OCCORRE ESTENDERE QUESTI CONCETTI ALL'INTERA SIMMETRIA $SU(2) \otimes U(1)$

$SU(2)_L \times U(1)$

- LA LAGRANGIANA ELETTRODEBOLE INVARIANTE PER LA TRASFORMAZIONE DI GAUGE LOCALE È:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left[i \partial_\mu - g \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{g'}{2} Y B_\mu \right] \Psi_L + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \left[i \partial_\mu - \frac{g'}{2} Y B_\mu \right] \Psi_R$$

+ termini cinetici per \vec{W} e B

- INTRODUCIAMO NELLA LAGRANGIANA QUATTRO CAMPI SCALARI REALI φ_i :

$$\mathcal{L} = D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

$$D_\mu = \left[i \partial_\mu - g \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu - \frac{g'}{2} Y B_\mu \right]$$

- SIAMO INTERESSATI AL CASO IN CUI $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$
- SEGUIAMO WEINBERG ED ARRANGIAMO I QUATTRO CAMPI φ_i IN UN DOPPIETTO DI ISOSPIN DEBOLE CON IPERCARICA DEBOLE $Y=1$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i \varphi_2 \\ \varphi_3 + i \varphi_4 \end{pmatrix}$$

- φ^+ HA CARICA ELETTRICA $Q=1$ E φ^0 HA $Q=0$

- SEGUIAMO IL MINIMO DEL POTENZIALE TALE CHE

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

E SVILUPPIAMO $\varphi(x)$ INTORNO A QUESTO PUNTO, CON UN'OPPORTUNA SCELTA DELLA GAUGE

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

- LA LAGRANGIANA DIVENTA:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 - \lambda v^2 H^2 \right] + \frac{g^2 v^2}{8} (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) + \\ + \frac{v^2}{8} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W^{3\mu} - g' B^\mu) + \text{higher order term} + \text{t.cin}$$

- DA QUI SI VEDE CHE I CAMPI W_μ^1 E W_μ^2 HANNO UN TERMINE DI MASSA "CONVENZIONALE", MENTRE I CAMPI W_μ^3 E B_μ SONO MESCOLATI
- DOBBIAMO RIDURRE QUESTI DUE CAMPI IN MODO TALE CHE IL TERMINE DI MASSA SIA DIAGONALE NEI NUOVI DUE CAMPI

$$\frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$$

↑ matrice di massa, va diagonalizzata
UNO DEI DUE AUTOVALORI E' ZERO

$$\frac{1}{8} v^2 [g^2 (W_\mu^3)^2 - 2gg' W_\mu^3 B^\mu + g'^2 B_\mu^2] = \frac{v^2}{8} [g W_\mu^3 - g' B_\mu]^2 + \\ + 0 \cdot [g' W_\mu^3 + g B_\mu]^2$$

$$\Rightarrow A_\mu = \frac{g' W_\mu^3 + g B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{con } m_A = 0$$

$$Z_\mu = \frac{g W_\mu^3 - g' B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{con } m_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}$$

- SE INTRODUCIAMO

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_w ; \quad \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos \theta_w ; \quad \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \sin \theta_w$$

$$\rightarrow A_\mu = \cos \theta_w B_\mu + \sin \theta_w W_\mu^3$$

$$Z_\mu = -\sin \theta_w B_\mu + \cos \theta_w W_\mu^3$$

- RISULTA ANCHE

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_w$$

- LA ROTTAZIONE SPONTANEA DELLA SIMMETRIA $SU(2)_L \otimes U(1)$ HA DATO ORIGINE AL SEGUENTE SPETTRO DI MASSE:

- 1 BOSONE DI HIGGS, $m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{2}\mu^2$

- 2 BOSONI CARICHI W^\pm , $m_W = \frac{1}{2} g v$

- 1 BOSONE NEUTRO Z , $m_Z = m_W / \cos \theta_w$

- 1 BOSONE NEUTRO A MASSA NULLA (FOTONE)

N.B. $Q \psi_0 = (I_3 + \frac{Y}{2}) \psi_0 = 0 \Rightarrow$ LA CARICA DEL MINIMO SCELTO È NULLA, QUINDI LA SIMMETRIA $U(1)^{em}$ NON È ROTTA ED IL FOTONE RIMANE A MASSA NULLA

MASSA DEI BOSONI

- DALL'ANALISI DEL DECADIMENTO DEL μ SI RICAVA LA RELAZIONE

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

- DATO CHE $m_W = \frac{1}{2} v g \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{G} \sqrt{2}}$

- IL VALORE DI ASPETTATIVA DEL VOTO DIPENDE SOLO DALLA COSTANTE DI FERMI.

- USANDO IL VALORE $G = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \Rightarrow v \approx 246 \text{ GeV}$

- DATO CHE $g \sin \theta_W = e$

$$m_W = \left(\frac{\pi \alpha}{G \sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin \theta_W} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

- $\sin \theta_W$ DEVE ESSERE MISURATO SPERIMENTALMENTE. LA PRIMA MISURA FU FATTA CON IL DEEP INELASTIC SCATTERING DEI NEUTRINI NEGLI ANNI '70

$$\sin^2 \theta_W \approx 0.23 \Rightarrow m_W \approx 80 \text{ GeV}, m_Z \approx 90 \text{ GeV}$$

- N.B. LA MASSA DEL BOSONE DI HIGGS NON È PREVISTA DAL MODELLO STANDARD PERCHÉ DIPENDE DAL PARAMETRO INCOGNITO λ CHE COMPARE NEL POTENZIALE $V(\varphi)$

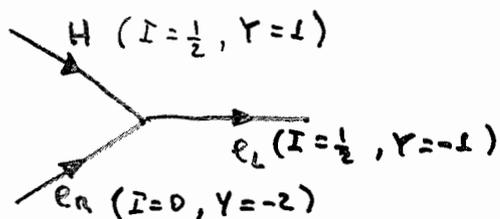
MASSA DEI FERMIONI

- IL TERMINE DI MASSA DEI FERMIONI $-m\bar{e}e$ NON PUO' ESSERE MESSO ESPLICITAMENTE NELLA LAGRANGIANA PERCHE' ROMPE LA SIMEETRIA $SU(2)_L \times U(1)$

$$-m\bar{e}e = -m\bar{e} \left[\frac{1}{2}(1-\gamma^5) + \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \right] e = -m(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)$$

- RICORDIAMO CHE

	I	I ₃	Y		
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	e_R
e_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1		
e_R	0	0	-2		



IL BOSONE DI HIGGS HA I NUMERI QUANTICI GIUSTI PER ACCOPPIARSI A e_L E e_R

- AGGIUNGIAMO ALLA LAGRANGIANA IL TERMINE INVARIANTE PER TRASFORMAZIONE DI GAUGE

$$\mathcal{L} = -g_e [\bar{L} \varphi e_R + \bar{e}_R \bar{\varphi} L] \quad \text{dove } L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L; \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$(\bar{\nu}_e \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = (\bar{\nu}_e \varphi^+ + \bar{e}_L \varphi^0)$$

$g_e =$ costante di accoppiamento

- FACCIAMO LA SOLITA ROTTA SOSPONTANEA DELLA SIMMETRIA

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}$$

- LA LAGRANGIANA DIVENTA

$$\mathcal{L} = \frac{-g_e v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) - \frac{g_e}{\sqrt{2}} (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) H$$

↑
TERMINI DI MASSA

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}$$

↑
ACCOPIAMENTO DELL'ELETTRONE
CON IL BOSONE DI HIGGS

$$\mathcal{L} = -m_e \bar{e} e - \left(\frac{m_e}{v}\right) \bar{e} e H$$

N.B. LA COSTANTE DI ACCOPIAMENTO E' PROPORZIONALE ALLA MASSA,

- PER GENERARE LE MASSE DEI QUARK SI INTRODUCHE IL DOPIETTO CONIUGATO

$$\tilde{\psi} = i\tau_2 \psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{\psi}^0 \\ -\psi^- \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = -g_d \bar{L}_q \psi_{dR} - g_u \bar{L}_q \tilde{\psi} \cdot u_R + \text{Hermitiano coniugato}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -m_d \bar{d} d - m_u \bar{u} u - \frac{m_d}{v} \bar{d} d H - \frac{m_u}{v} \bar{u} u H$$

MODELLO STANDARD

- RICORDIAMO I PUNTI SALIENTI DEL MODELLO STANDARD
 - LE PARTICELLE SONO ORGANIZZATE IN DOPIETTI DI ISOSPIN DEBOLE:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L$$

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$$

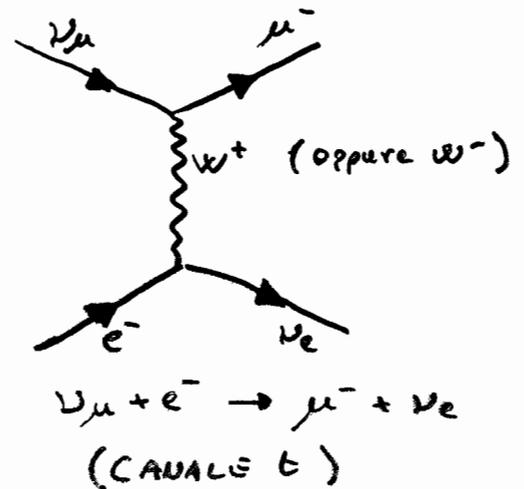
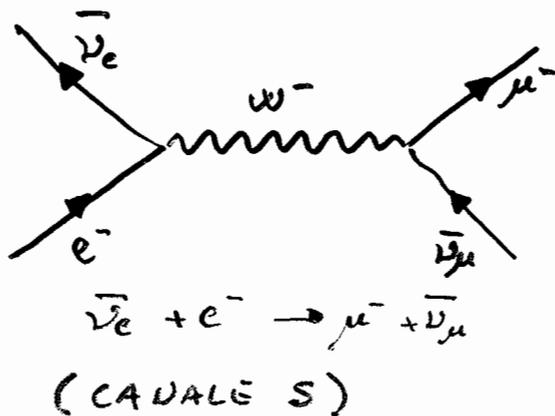
- IL PEDICE "L" RICORDA CHE QUESTA ORGANIZZAZIONE RIGUARDA SOLO GLI STATI CHIRALI LEVOGIRI, PERCHÉ IL W SI ACCOPPIA SOLO CON QUESTI STATI PER VIA DEL FATTORE $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ PRESENTE NELLA LAGRANGIANA
- GLI STATI DESTROGIRI COSTITUISCONO UN SINGOLETTO DI ISOSPIN DEBOLE

$$\bar{e}_R, \bar{\mu}_R, \bar{\tau}_R, u_R, d'_R, c_R, s'_R, t_R, b'_R$$

- IL NEUTRINO DESTROGIRO NON VIENE PRESO IN CONSIDERAZIONE PERCHÉ, ANCHÉ SE ESISTESSE, NON SI ACCOPPIEREBBE A NULLA (LE COSE CAMBIANO SE I NEUTRINI AVESSERO MASSA)
- PER LE ANTI PARTICELLE OCCORRE PRENDERE IN CONSIDERAZIONE GLI STATI CON CHIRALITÀ OPPOSTA, VALE A DIRE DOPIETTI DESTROGIRI E SINGOLETTI LEVOGIRI

ACCOIPIAMENTI DEL W

- IL W (CARICO) SI ACCOPPIA ALLE PARTICELLE DEL DOPIETTO PRODUCENDOLE ENTRAMBE (CANALE S) OPPURE INDUCENDO UNA TRANSIZIONE NELL'ALTRA PARTICELLA (CANALE t)



- N.B. NEL CANALE S LA CARICA DEL BOSONE W È UNIVOCAMENTE PERCHÉ I DUE VERTICI SONO TEMPORALMENTE SEPARATI, MENTRE NEL CANALE t NON LO SONO (IL TIME ORDER PRODUCT TIENE CONTO AUTOMATICAMENTE DI QUESTA COSA) QUINDI SI PUÒ AVERE LO SCAMBIO DI UN W⁺ OPPURE DI UN W⁻; AI FINI DEL CALCOLO LA COSA È PERFETTAMENTE ANALOGA
- IL W SI ACCOPPIA AD UNA CORRENTE CARICA IN QUANTO SI HA UNA TRANSIZIONE TRA I DUE STATI DEL DOPIETTO DI ISOSPIN DEBOLLE, LA CUI CARICA DIFFERISCE DI UNO.
- L'ELEMENTO DI MATRICE SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$M = \frac{g}{\sqrt{2}} (J^\mu)^\dagger \frac{1}{M_W^2 - q^2} \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu)$$

CORRENTI CARICHE

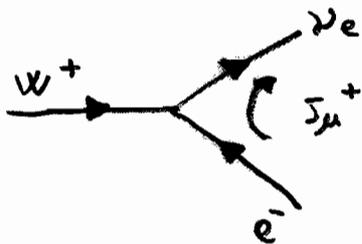
- CORRENTE DI INNALZAMENTO DELLA CARICA PER L'ELETTRONE

$$J_e^\mu = \bar{u}(\nu) \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u(e)$$

- LA CORRISPONDENTE CORRENTE DI INNALZAMENTO DELLA CARICA DEI QUARK SI SCRIVE:

$$J_q^\mu = \bar{u}(u) \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u(d')$$

- QUINDI LA CORRENTE CARICA DI INNALZAMENTO HA LA FORMA:



$$J_{\mu}^+ = \bar{u}(\nu_e) \gamma_{\mu} \frac{1-\gamma^5}{2} u(e)$$

- COME ABBIAMO GIÀ VISTO, L'OPERATORE $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ È IL PROIETTORE DELLO STATO CHIRALE LEVOGIRO PER LE PARTICELLE E DELLO STATO CHIRALE DESTROGIRO PER LE ANTIPARTICELLE, I QUALI COINCIDONO RISPETTIVAMENTE CON GLI STATI AVENTI ELICITÀ NEGATIVA E POSITIVA PER PARTICELLE DI MASSA NULLA

$$\frac{1-\gamma^5}{2} u \equiv u_L \quad ; \quad \frac{1-\gamma^5}{2} \bar{v} \equiv \bar{v}_R$$

$$\bar{u}_L = \bar{u} \frac{1+\gamma^5}{2} \quad ; \quad \bar{v}_R = \bar{v} \frac{1+\gamma^5}{2}$$

- RICORDIAMO INOLTRE CHE:

$$\gamma_{\mu} \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma_{\mu} \frac{1-\gamma^5}{2}$$

CORRENTI CARICHE

- QUINDI LA CORRENTE CARICA SI PUO' SCRIVERE COME:

$$J_{\mu}^{+} = \bar{\nu} \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma_{\mu} \frac{1-\gamma^5}{2} e = \bar{\nu}_L \gamma^{\mu} e_L$$

⇒ ABBIAMO OTTENUTO UNA CORRENTE PURAMENTE VETTORIALE CHE SI ACCOPPIA SOLTANTO ALLE COMPONENTI LEVOGIRE DELLE PARTICELLE



- RICORDIAMO LA CORRENTE ELETTROMAGNETICA:

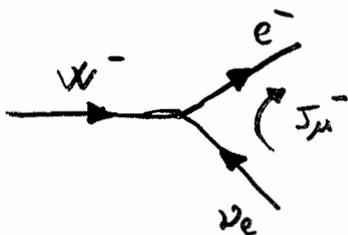
$$J_{\mu}^{e.m.} = -\bar{e} \gamma_{\mu} e$$

$$J_{\mu}^{e.m.} = -(\bar{e}_R \gamma_{\mu} e_R + \bar{e}_L \gamma_{\mu} e_L)$$

UNA CORRENTE VETTORIALE NON MESCOLO GLI STATI LEVOGIRI CON QUELLI DESTROGIRI



- CONSIDERIAMO ORA LA CORRENTE DI ABBASSAMENTO DELLA CARICA:



$$J_{\mu}^{-} = \bar{e} \gamma_{\mu} \frac{1-\gamma^5}{2} \nu =$$

$$= \bar{e} \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma_{\mu} \frac{1-\gamma^5}{2} \nu = \bar{e}_L \gamma_{\mu} \nu_L$$

N.B. INDICO GLI SPINORI DIRETTAMENTE CON IL NOME DELLA PARTICELLA SENZA DISTINGUERE TRA U E V

CORRENTI DEBOLI

- IN MANIERA COMPATTA, LE DUE CORRENTI CARICHE DI INNALZAMENTO E DI ABBASSAMENTO, SI POSSONO SCRIVERE NEL MODO SEGUENTE:

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{J}_\mu^\pm = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \tau^\pm \chi_L$$

$$\tau^\pm = \frac{1}{2} (\tau_1 \pm i \tau_2) \quad ; \quad \bar{\chi}_L = (\bar{\nu}_e \quad \bar{e})$$

- SE ORA RICHIEDIAMO CHE LE INTERAZIONI DEBOLI SIANO INVARIANTI PER ROTAZIONI NELLO SPAZIO DELL'ISOSPIN DEBOLE, OCCORRE INTRODURRE UNA TERZA CORRENTE DI ISOSPIN CHE CONSERVI LA CARICA:

$$\mathcal{J}_\mu^3 = \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau_3 \chi_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_\mu \nu_e - \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu e \quad ; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- QUESTA CORRENTE NON PUO' ESSERE ASSOCIATA DIRETTAMENTE ALLA CORRENTE DEBOLE NEUTRA (SCAMBIO DELLO Z) PERCHE' \mathcal{J}_μ^3 SI ACCOPPIA SOLO ALLE COMPONENTI LEVOGIRE, MENTRE LO Z SI ACCOPPIA ANCHE A QUELLE DESTROGIRE
- PER CERCARE DI RISOLVERE IL PROBLEMA GLASHOW PROPOSE DI TRATTARE SIMULTANEAMENTE LE INTERAZIONI ELETTROMAGNETICHE (CHE SONO DESCRITTE DA UNA CORRENTE NEUTRA) E LE INTERAZIONI DEBOLI
- N.B. IN QUESTO DISCORSO C'E' UN "GLITCH" LOGICO, NEL 1961 NON SI CONOSCEVA LO Z NE' TANTO MENO LE SUE INTERAZIONI

CORRENTI NEUTRE

- NEL 1961 GLASHOW SUGGERÌ L'INTRODUZIONE DI UNA CORRENTE DI IPERCARICA DEBOLE

$$J_{\mu}^Y = \bar{\Psi} \gamma_{\mu} Y \Psi$$

DOVE L'IPERCARICA DEBOLE Y È COLLEGATA ALLA TERZA COMPONENTE DELL'ISOSPIN DEBOLE ATTRAVERSO UNA RELAZIONE ANALOGA A QUELLA DI GELL-MANN - NISHIJIMA

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$$

QUINDI:

$$\bar{J}_{\mu}^{em} = \bar{J}_{\mu}^3 + \frac{1}{2} \bar{J}_{\mu}^Y$$

- LA CORRENTE E.M. È UNA COMBINAZIONE DELLA CORRENTE DI IPERCARICA DEBOLE E DELLA TERZA COMPONENTE DELLA CORRENTE DI ISOSPIN DEBOLE
- L'IPERCARICA DEBOLE Y È IL GENERATORE DELLA SIMMETRIA DEL GRUPPO $U(1)_Y$, QUINDI L'UNIFICAZIONE DELLE INTERAZIONI DEBOLI E DELLE INTERAZIONI ELETTROMAGNETICHE HA RIVELATO L'ESISTENZA DI UN GRUPPO DI SIMMETRIA PIÙ GRANDE:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

NUMERI QUANTICI

- ASSEGNAMO I NUMERI QUANTICI ALLA PRIMA FAMIGLIA DI PARTICELLE:

	I	I_3	Q	$Y = 2(Q - I_3)$
ν_e	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	-1
e_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e_R	0	0	-1	-2
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$
d'_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$
u_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$
d'_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

N.B. I MEMBRI DI UNO STESSO DOPIETTO HANNO LA STESSA IPERCARICA

- LA CORRENTE DI IPERCARICA LA POSSIAMO SCRIVERE NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{aligned}
 J_\mu^Y &= 2 J_\mu^{em} - 2 J_\mu^3 = \\
 &= -2 (\bar{e}_R \delta_\mu e_R + \bar{e}_L \delta_\mu e_L) - (\bar{\nu}_L \delta_\mu \nu_L - \bar{e}_L \delta_\mu e_L) = \\
 &= -2 (\bar{e}_R \delta_\mu e_R) - 1 (\bar{\chi}_L \delta_\mu \chi_L) \\
 &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\
 &\quad \text{ipercarica} \qquad \qquad \text{ipercarica}
 \end{aligned}$$

- PER I QUARK ABBIAMO:

$$J_\mu^Y = \frac{4}{3} (\bar{u}_R \delta_\mu u_R) - \frac{2}{3} (\bar{d}'_R \delta_\mu d'_R) + \frac{1}{3} (\bar{u}_L \delta_\mu u_L + \bar{d}'_L \delta_\mu d'_L)$$

LE INTERAZIONI NEL M.S.

- ABBIAMO VISTO CHE PER PRESERVARE L'INVARIANZA DI GAUGE DELLA SIMMETRIA $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ DEL MODELLO DI GWS, È NECESSARIO INTRODURRE 3 BOSONI VETTORI \vec{W} ASSOCIATI ALL'ISOSPIN DEBOLE E UN BOSONE VETTORE B ASSOCIATO ALL'IPERCARICA
- L'INTERAZIONE HA LA FORMA:

$$-i \left(g \vec{J}_\mu \cdot \vec{W}_\mu + \frac{g'}{2} J_\mu^Y B^\mu \right)$$

g E g' SONO DUE COSTANTI DI ACCOPPIAMENTO

- \vec{J}_μ E \vec{W}^μ SONO DEI VETTORI NELLO SPAZIO DELL'ISOSPIN DEBOLE

- $\vec{J}_\mu \cdot \vec{W}^\mu = J_\mu^1 \cdot W^{\mu 1} + J_\mu^2 \cdot W^{\mu 2} + J_\mu^3 \cdot W^{\mu 3}$

- IN TERMINI DELLE CORRENTI CARICHE $J_\mu^\pm = J_\mu^1 \pm i J_\mu^2$ ABBIAMO:

$$\vec{J}_\mu \cdot \vec{W}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} J_\mu^+ W^{\mu +} + \frac{1}{\sqrt{2}} J_\mu^- W^{\mu -} + J_\mu^3 \cdot W^{\mu 3}$$

DOVE: $W^{\mu \pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^{\mu 1} \mp i W^{\mu 2})$

- $W^{\mu \pm}$ DESCRIVONO BOSONI CARICHI MASSIVI W^\pm , MENTRE $W^{\mu 3}$ E B^μ SONO CAMPI NEUTRI

- NEL MODELLO DI GWS LA SIMMETRIA $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ È "ROTTA" ED I CAMPI NEUTRI SI MESCOLANO PER DAR LUOGO AD UNA COMBINAZIONE PRIVA DI MASSA (IL FOTONE) ED AD UNA COMBINAZIONE ORTOGONALE MASSIVA (LO Z)

$$- A_\mu = B_\mu \cdot \cos \theta_w + W_\mu^3 \cdot \sin \theta_w$$

$$- Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_w + W_\mu^3 \cdot \cos \theta_w$$

- θ_w È L'ANGOLO DI WEINBERG (ANGOLO WEAK)

$$W_\mu^3 = A_\mu \sin \theta_w + Z_\mu \cos \theta_w$$

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta_w - Z_\mu \sin \theta_w$$

- IN TERMINI DEI CAMPI A_μ E Z_μ , L'INTERAZIONE DI CORRENTE NEUTRA DIVENTA:

$$-i \left(g \bar{J}_\mu^3 W^\mu + \frac{g'}{2} \bar{J}_\mu^Y B^\mu \right) = -i \left(g \sin \theta_w \bar{J}_\mu^3 + g' \cos \theta_w \frac{\bar{J}_\mu^Y}{2} \right) A^\mu -$$

$$-i \left(g \cos \theta_w \bar{J}_\mu^3 - g' \sin \theta_w \frac{\bar{J}_\mu^Y}{2} \right) Z^\mu$$

- IL PRIMO TERMINE SI PUÒ IDENTIFICARE CON L'INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA

$$-i e \bar{J}_\mu^{em} \cdot A^\mu$$

$$(RICORDANDO CHE $\bar{J}_\mu^{em} = \bar{J}_\mu^3 + \frac{1}{2} \bar{J}_\mu^Y$)$$

- LE DUE ESPRESSIONI SONO CONSISTENTI SE:

$$\boxed{g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = e}$$

$$\Rightarrow \left| e = \frac{g g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \right.$$

ANGOLO DI WEINBERG

- L'ANGOLO DI MIXING DEBOLE DIPENDE DIRETTAMENTE DALLE COSTANTI DI ACCOPPIAMENTO DI $SU(2)_L$ E $U(1)_Y$

$$g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = e$$

$$\Rightarrow \tan \theta_w = \frac{g'}{g}$$

- IL MODELLO DI GWS NON PREDICE IL VALORE DI θ_w CHE DEVE ESSERE RICAUATO PER VIA SPERIMENTALE.
- NATURALMENTE, AFFINCHÉ IL MODELLO SIA VALIDO, TUTTI I FENOMENI ELETTRODEBOLI DEVONO ESSERE DESCRITTI DA UN UNICO ANGOLO θ_w
- MOLTE DELLE VERIFICHE SPERIMENTALI DEL MODELLO SONO CONSISTITE NELLA MISURA DELL'ANGOLO θ_w E NEL CONFRONTO TRA QUESTI VALORI.

ATTENZIONE

- ESISTONO DUE DEFINIZIONI DELL'ANGOLO DI WEINBERG:

— MASSE : $\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_w$

— ACCOPPIAMENTI : $g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w = e$

- A LIVELLO "ALBERO" (LIVELLO FONDAMENTALE) LE DUE DEFINIZIONI COINCIDONO, MA LE CORREZIONI RADIATIVE MODIFICANO IN MANIERA DIVERSA LE DUE ESPRESSIONI, QUINDI OCCORRE SPECIFICARE LO SCHEMA DI RINORMALIZZAZIONE ADOTTATO (QUESTO HA CAUSATO QUALCHE PICCOLO PROBLEMA IN PIÙ AI TEMPI DI LEP)

INTERAZIONE DELLO Z

- ESAMINIAMO ORA L'INTERAZIONE DELLO Z. RIPRENDIAMO IL TERMINE SCRITTO IN PRECEDENZA:

$$-i \left(g \cos \theta_w J_\mu^3 - g' \sin \theta_w \frac{J_\mu^Y}{2} \right) Z^\mu$$

- RICORDIAMO ANCHE LA RELAZIONE TRA LE VARIE CORRENTI NEUTRE:

$$J_\mu^Y = 2 J_\mu^{em} - 2 J_\mu^3$$

$$\Rightarrow = -i \left(g \cos \theta_w J_\mu^3 - g' \sin \theta_w (J_\mu^{em} - J_\mu^3) \right) Z^\mu =$$

$$= -i \left(g \cos \theta_w J_\mu^3 - g' \sin \theta_w J_\mu^{em} + g' \sin \theta_w J_\mu^3 \right) Z^\mu =$$

$$= -i \left[g \frac{\cos^2 \theta_w}{\cos \theta_w} J_\mu^3 - g' \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} J_\mu^{em} + g' \frac{\sin^2 \theta_w}{\cos \theta_w} J_\mu^3 \right] Z^\mu =$$

$$= -i \frac{g}{\cos \theta_w} \left[J_\mu^3 - \sin^2 \theta_w J_\mu^{em} \right] Z^\mu \equiv -i \frac{g}{\cos \theta_w} J_\mu^{N.C.} Z^\mu$$

- ABBIAMO COSI' RICAVALO UNA CORRENTE DEBOLE NEUTRA CHE SI ACCOPPIA CON LO Z:

$$J_\mu^{N.C.} = J_\mu^3 - \sin^2 \theta_w J_\mu^{em}$$

↑
SI ACCOPPIA
SOLO AGLI
STATI LEVOGIRI

↑
SI ACCOPPIA SIA AGLI STATI
LEVOGIRI CHE DESTROGIRI
(CARICHI)

⇒ LO Z SI ACCOPPIA SIA AGLI STATI LEVOGIRI CHE AGLI STATI DESTROGIRI. L'ACCOPPIAMENTO DIPENDE DAI NUMERI QUANTICI DELLE PARTICELLE COINVOLTE

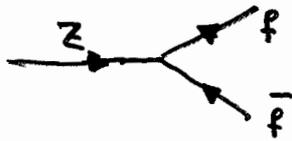
M.B. SI VEDE CHE LO Z SI ACCOPPIA SOLO A NEUTRINI LEVOGIRI

DETERMINAZIONE DI C_V E C_A

- LA CORRENTE DEBOLLE SI PUO' SCRIVERE IN TERMINI DEGLI ACCOPPIAMENTI ASSIALI E VETTORIALI

$$J_\mu^{NC}(f) = \bar{u}_f \gamma_\mu \frac{1}{2} (C_V^f - C_A^f \gamma^5) u_f$$

(per le correnti cariche $C_V = C_A = 1$)



- L'ACCOPPIAMENTO DELLO Z CON $f\bar{f}$, UTILIZZANDO L'ESPRESSIONE APPENA TROVATA, SI PUO' SCRIVERE:

$$-i \frac{g}{\cos \theta_w} (J_\mu^3 - \sin^2 \theta_w J_\mu^{em}) Z^\mu =$$

$$= -i \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{u}_f \gamma_\mu \left[\frac{1-\gamma^5}{2} I_3^f - Q^f \sin^2 \theta_w \right] u_f \cdot Z^\mu$$

- GLI ACCOPPIAMENTI VETTORIALI E ASSIALI SONO DATI DAI COEFFICIENTI DEI TERMINI:

$$\bar{u}_f \gamma_\mu u_f \quad \text{E} \quad \bar{u}_f \gamma_\mu \gamma^5 u_f$$

QUINDI ABBIAMO:

$$C_V^f = I_3^f - 2 Q^f \sin^2 \theta_w$$

$$C_A^f = I_3^f$$

N.B. LA CORRENTE NEUTRA NON E' DEL TIPO V-A, QUINDI LO Z SI ACCOPPIA SIA A PARTICELLE LEVOGHE CHE DESTROGHE

ACCOUPLAMENTI C_V E C_A

FERMIONE	I_3^f	Q^f	C_A^f	C_V^f
ν_e	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_L^-	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w$
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$
d_L'	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$
e_R^-	0	-1	0	$2 \sin^2 \theta_w$
u_R	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$
d_R'	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$

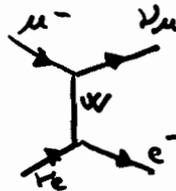
$$C_V^f = I_3^f - 2 Q^f \sin^2 \theta_w \quad ; \quad C_A^f = I_3^f$$

- NELL'ACCOUPLAMENTO COMPARE $\sin^2 \theta_w$, CHE È LA GRANDEZZA CHE VIENE MISURATA SPERIMENTALMENTE
- NEGLI ACCOUPLAMENTI DELLE PARTICELLE DESTROGIRE NON C'È IL TERMINE ASSIALE PERCHÉ QUESTE PARTICELLE INTERAGISCONO SOLO TRAMITE L'INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA CHE È DI TIPO VETTORIALE
- IL NEUTRINO DESTROGIRE HA SIA C_V CHE C_A UGUALE A ZERO E QUINDI NON COMPARE NELLA TABELLA
- LE CORREZIONI RADIATIVE MODIFICANO QUESTI ACCOUPLAMENTI AL LIVELLO DEL PER CENTO. A LEP SONO STATI MISURATI GLI ACCOUPLAMENTI DELLO Z CON UN ERRORE DI QUESTO ORDINE DI GRANDEZZA ED È STATO POSSIBILE QUINDI VERIFICARE LA PRECISIONE DELLE CORREZIONI RADIATIVE DEL MODELLO STANDARD

RELAZIONE TRA G E CORRENTI NEUTRI

- DAL CONFRONTO DELLA TEORIA DI FERMI CON IL MODELLO DI GWS PER LE CORRENTI CARICHE (VEDI DECADIMENTO DEL MUONE) SI TROVA LA RELAZIONE:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 M_W^2}$$



$$q^2 \ll M_W^2$$

$$M^{CC} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu \right) \frac{1}{M_W^2} \left(\frac{g}{\sqrt{2}} J_\mu^\dagger \right)$$

- IN MANIERA ANALOGA, IN UN PROCESSO CON CORRENTI NEUTRE, DOVE $q^2 \ll M_Z^2$, SI PUO' SCRIVERE:

$$M^{NC} = \left(\frac{g}{\cos\theta_W} J_\mu^{NC} \right) \frac{1}{M_Z^2} \left(\frac{g}{\cos\theta_W} J_\mu^{NC} \right)$$

- PER LE CORRENTI NEUTRE DI SOLITO SI SCRIVE L'AMPIEZZA NEL MODO SEGUENTE (FACENDO ATTENZIONE ALLA NORMALIZZAZIONE):

$$M^{NC} = \frac{4G}{\sqrt{2}} \rho J_\mu^{NC} \cdot J_\mu^{NC}$$

DAL CONFRONTO SI PUO' IDENTIFICARE $\rho \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 M_Z^2 \cos^2\theta_W}$

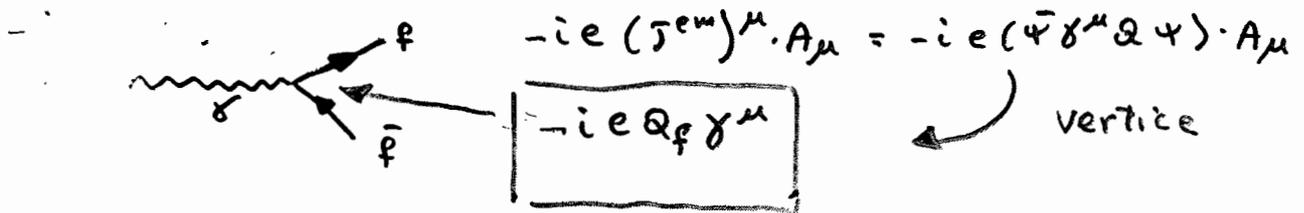
- IL PARAMETRO ρ SPECIFICA L'INTENSITA' RELATIVA DELLE CORRENTI DEBOLI NEUTRE E DI QUELLE CARICHE. DAL CONFRONTO SI TROVA:

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2\theta_W}$$

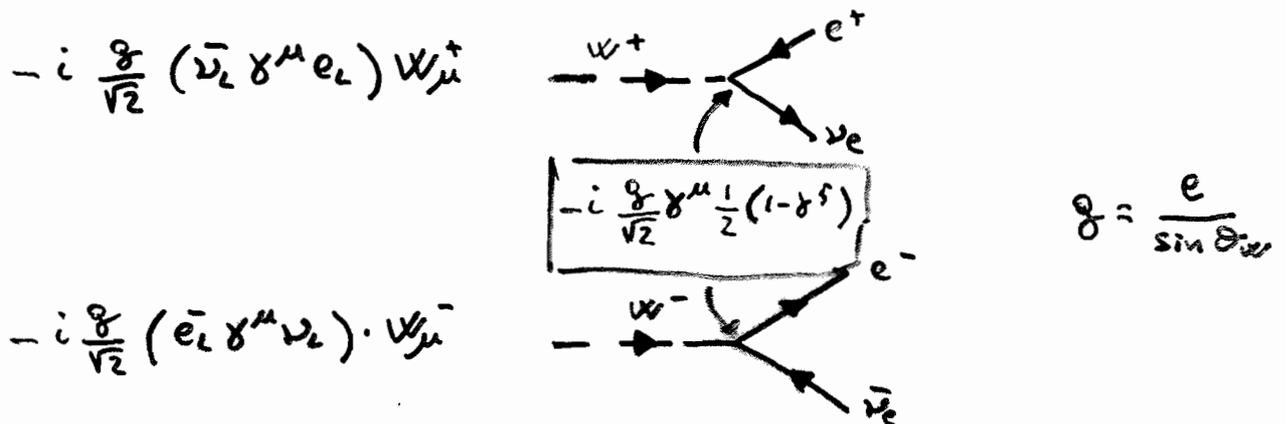
- NEL MS, A LIVELLO ALBERO, $M_W = M_Z \cos\theta_W \Rightarrow \rho = 1$
- LE CORREZIONI RADIATIVE, O LA PRESENZA DI NUOVA FISICA NON PREVISTA DAL MODELLO STANDARD, RENDONO $\rho \neq 1$

REGOLE DI FEYNMAN

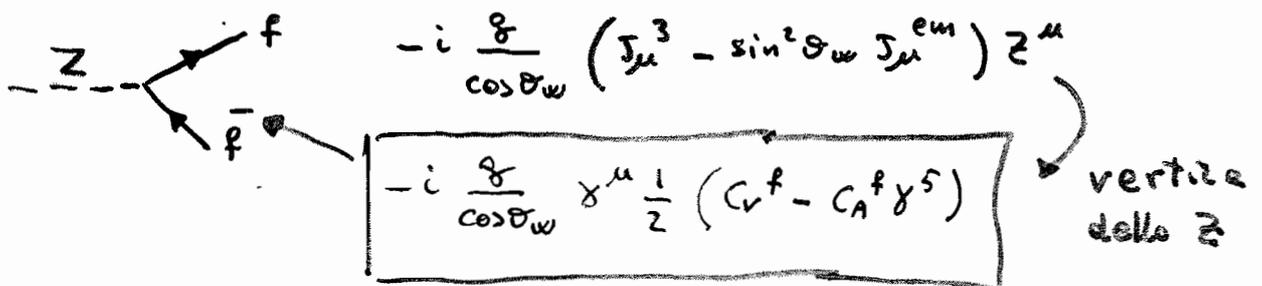
- INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA



- INTERAZIONI DEBOLI DI CORRENTE CARICA



- INTERAZIONI DEBOLI DI CORRENTE NEUTRA



C_V E C_A DETERMINANO L'INTENSITA' DELL'ACCOPIAMENTO DELLO Z CON I FERMIONI. IL LORO VALORE E' INDICATO IN UNA TABELLA PRECEDENTE.

Verifica del Modello Standard

- Scoperta delle correnti deboli neutre in camera a bolle.
- Asimmetrie avanti-indietro nel processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.
- Produzione dello Z e del W al collider SPPS.
- Il collider e^+e^- LEP.
- Misura della massa e delle larghezze parziali e totale dello Z.
- Misura del numero di famiglie di neutrini leggeri.
- Produzione di coppie di W al LEP.
- Verifica dell'esistenza del vertice triplo di bosoni di gauge.

Correnti neutre

- Il Modello Standard prevede l'esistenza di correnti deboli neutre (scambio dello Z) che hanno un'intensità dello stesso ordine di grandezza di quello delle correnti cariche.
- Ricordiamo che i processi di corrente neutra erano già stati cercati nell'ambito dei decadimenti dei K, ad esempio:



in questi due decadimenti si può pensare che la coppia di leptoni abbia origine dal decadimento di uno Z virtuale.

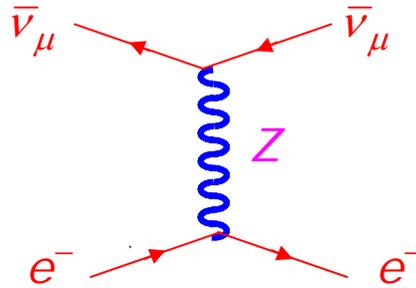
- Sperimentalmente si osserva che questi decadimenti sono altamente soppressi. A livello albero non si osservano correnti neutre con violazione di stranezza.
- La ricerca di correnti neutre fu quasi abbandonata, anche perché se risulta possibile lo scambio di uno Z, lo è altrettanto quello di un fotone e quest'ultimo maschera completamente il contributo dello Z, data la diversa intensità delle interazioni deboli e di quelle elettromagnetiche a basse energie.
- La ricerca delle correnti neutre riprese vigore dalla previsione del Modello Standard dell'esistenza dello Z e dal fatto che nel 1970 Veltmann e 't Hooft dimostrarono che la teoria era rinormalizzabile.
- Gli unici processi di corrente neutra in cui è possibile isolare lo scambio dello Z da quello del fotone riguardano l'interazione dei neutrini, nei quali il fotone non partecipa.
- La scoperta delle correnti neutre fu fatta al CERN nel 1973 da A. Lagarrigue e collaboratori utilizzando la camera a bolle Gargamelle riempita di freon (CF_3Br). La camera era esposta ad un fascio di neutrini e antineutrini derivanti dal decadimento in volo di pioni, quindi erano principalmente neutrini muonici.
- Lo scopo dell'esperimento era quello di trovare degli stati finali senza muoni. I muoni derivano da processi di corrente carica.
- L'esperimento dimostrò l'esistenza delle correnti deboli neutre, e quindi dello Z, e permise la prima misura dell'angolo di Weinberg: $\sin^2\theta_W$ tra 0.3 e 0.4.

Correnti neutre

- Primo evento di corrente neutra: Gargamelle (1973)



Questo processo può avvenire soltanto con lo scambio di uno Z nel canale t

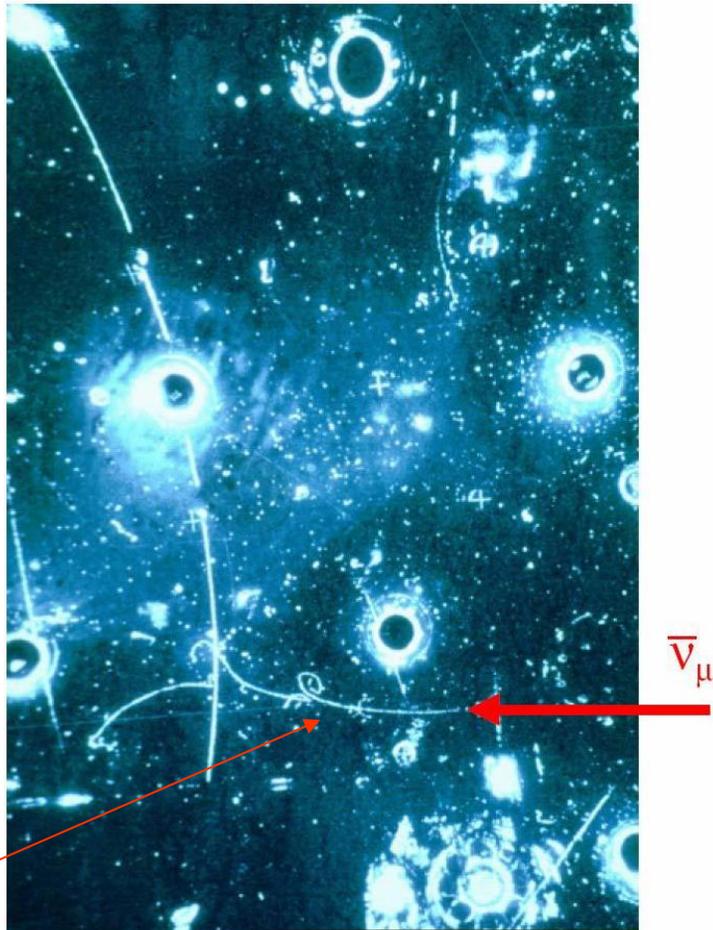


- Al CERN furono osservati 3 eventi di questo tipo su $1.4 \cdot 10^6$ beam pulse (cicli di accelerazione), con circa 10^9 antineutrini per ciclo. La presa dati durò circa due anni.

- La sezione d'urto del processo è molto piccola: $\frac{\sigma}{E_{\nu}} \approx 10^{-42} \text{ cm}^2 \cdot \text{GeV}^{-1}$

Si osserva un elettrone che parte dal “nulla” in mezzo alla camera a bolle

L'elettrone si riconosce dalla sua perdita di energia per bremsstrahlung (e con la susseguente produzione di coppie da parte del fotone).



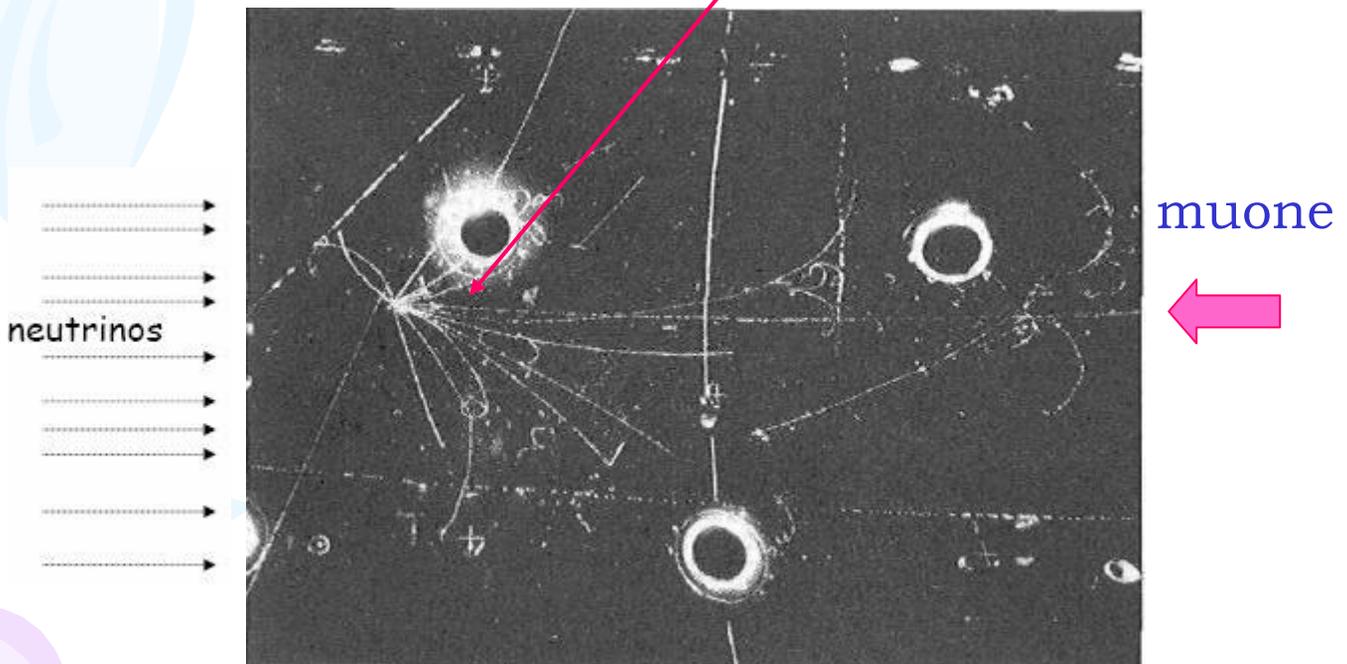
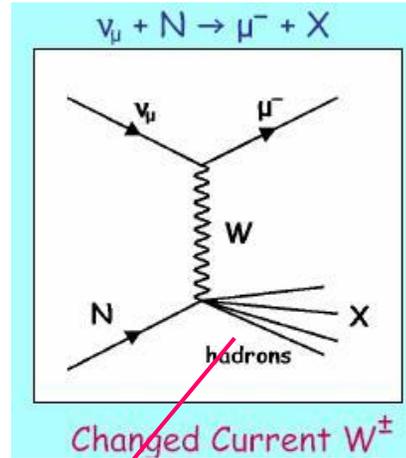
elettrone

Correnti cariche "adroniche"

- Nelle correnti deboli cariche si ha lo scambio di un W. Queste sono identificate sperimentalmente dalla presenza di un muone nello stato finale.
- Il segno della carica del muone dipende se lo scattering è dovuto ad un neutrino oppure a un antineutrino.

$$\bar{\nu}_{\mu} + N \rightarrow \mu^{+} + \text{adroni}$$

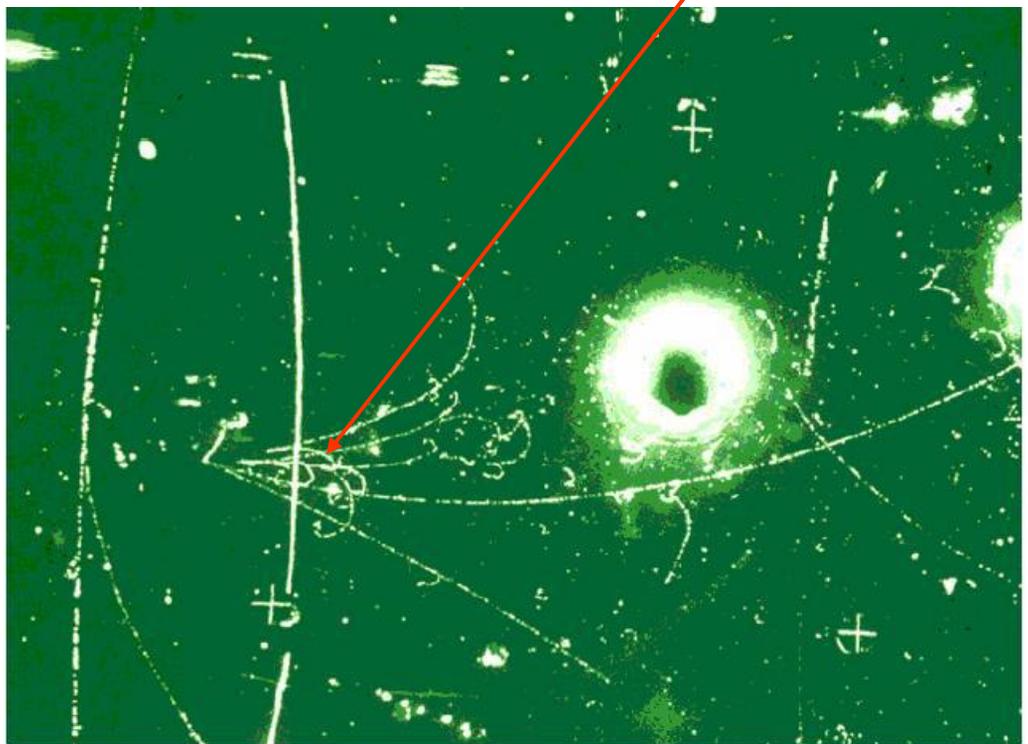
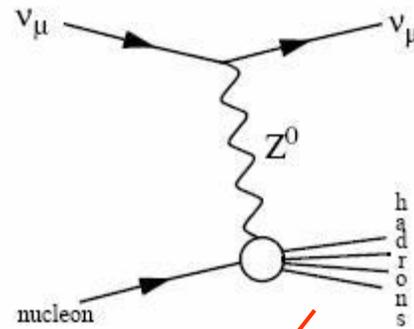
$$\nu_{\mu} + N \rightarrow \mu^{-} + \text{adroni}$$



- Nell'accoppiamento del W non compare ovviamente l'angolo di Weimberg, ma è importante misurare questi eventi insieme alle correnti neutre per eliminare molti effetti sistemati nella misura della sezione d'urto degli eventi con corrente neutra.

Correnti neutre "adroniche"

- Nello stesso esperimento furono anche osservate correnti neutre attraverso lo scattering del neutrino (o antineutrino) con un nucleone:



N.B. Non ci sono muoni nello stato finale

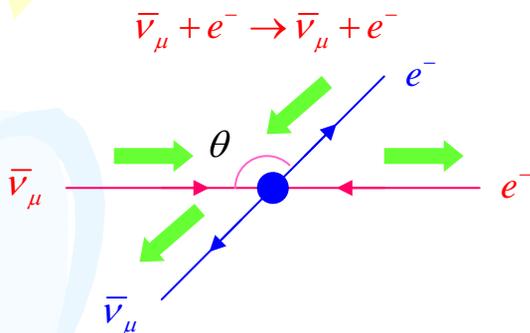
- Furono esaminati 83mila fotogrammi di eventi di interazioni di neutrini e 207mila fotogrammi di eventi di antineutrini (per avere grosso modo lo stesso errore statistico). Furono trovati:

Neutrini: 102 eventi corrente neutra e 428 eventi di corrente carica

Antineutrini: 64 eventi di corrente neutra e 148 eventi di cor. car.

Interazione di neutrini e antineutrini

- La sezione d'urto di neutrini e antineutrini sono diverse a causa della diversa elicità delle due particelle. Consideriamo ad esempio l'interazione di neutrini e antineutrini su elettroni o positroni. Supponiamo che i neutrini abbiano energia abbastanza elevata (ad esempio maggiore di 1 GeV) da poter trascurare la massa degli elettroni. In queste condizioni gli elettroni sono levogiri ed i positroni destrorgi.
- Consideriamo gli urti nel centro di massa del sistema, si possono avere le seguenti combinazioni:



Lo stato iniziale ha $J_z = 1$

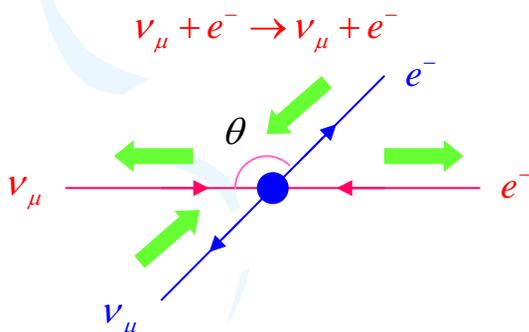
Quando $\theta=180$, $J_z=-1$, quindi questa configurazione non è possibile, quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar{\nu}_\mu e^-) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu_\mu e^+) = \frac{G^2 s}{16\pi^2} (1 + \cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow \sigma(\bar{\nu}_\mu e^-) = \sigma(\nu_\mu e^+) = \frac{G^2 s}{3\pi}$$

• Lo spin totale è 1, ma contribuisce alla sezione d'urto soltanto la proiezione $J_z=1$, quindi questo da un fattore 1/3 rispetto alla configurazione con lo spin totale uguale a zero.

• Lo stesso discorso è valido per la sezione d'urto neutrino su positrone



Lo stato iniziale ha $J_z = 0$

In questo caso la sezione d'urto differenziale è isotropa, quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu_\mu e^-) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\bar{\nu}_\mu e^+) = \frac{G^2 s}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \sigma(\nu_\mu e^-) = \sigma(\bar{\nu}_\mu e^+) = \frac{G^2 s}{\pi} \approx \frac{2G^2 mE}{\pi}$$

• Lo stesso discorso è valido per la sezione d'urto antineutrino su positrone

$$\Rightarrow \frac{\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-)}{\sigma(\nu_\mu e^-)} = \frac{\sigma(\nu_\mu e^+)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu e^+)} = \frac{1}{3}$$

Misura di $\sin^2 \theta_w$

- Dal confronto tra la sezione d'urto degli eventi con corrente carica e quelli con corrente neutra si può ricavare $\sin^2 \theta_w$
- Infatti ricordiamo che l'accoppiamento vettoriale dello Z con i fermioni dipende da $\sin^2 \theta_w$:

$$C_V^f = I_3^f - 2Q^f \sin^2 \theta_w \quad ; \quad C_A^f = I_3^f$$

- Sperimentalmente si misura il rapporto tra la sezione d'urto delle interazioni con corrente neutra e quella con corrente carica. In questo modo non occorre conoscere il flusso dei neutrini che è lo stesso in entrambi i casi.
- Se si ignorano gli effetti dello scattering dei neutrini (e antineutrini) sugli antiquark del mare presenti nei nucleoni (è una correzione dell'ordine del 10-20%), si hanno le seguenti predizioni:

$$R_\nu = \left(\frac{NC}{CC} \right)_\nu = \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{20}{27} \sin^4 \theta_w$$

$$R_{\bar{\nu}} = \left(\frac{NC}{CC} \right)_{\bar{\nu}} = \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{20}{9} \sin^4 \theta_w$$

- I dati di Gargamelle, una volta tenuto conto degli eventi di fondo (dovuti ad esempio ai neutroni prodotti dalle interazioni dei neutrini con le pareti della camera a bolle e che davano poi eventi che simulavano la corrente neutra nella camera a bolle) davano come risultato:

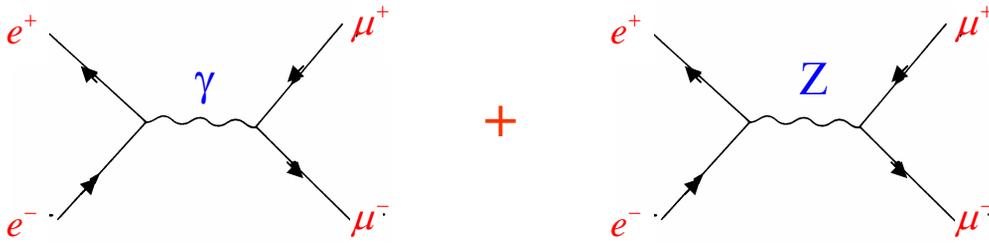
$$\sin^2 \theta_w = 0.3 \div 0.4$$

- Esperimenti successivi di scattering di neutrini e antineutrini muonici, basati su rivelatori "elettronici" e che preferiscono misurare lo scattering elastico su elettrone, in modo da eliminare le incertezze legate alla composizione del nucleone, danno come risultato: $\sin^2 \theta_w = 0.231 \pm 0.010$.

- Vedremo che a LEP si è raggiunta una precisione tale nella determinazione di $\sin^2 \theta_w$ da verificare le correzioni radiative di questo parametro.

Interferenza elettrodebole nel processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ viene descritto, all'ordine più basso, dai due seguenti diagrammi di Feynman:



- Per il calcolo della sezione d'urto occorre sommare le ampiezze dei due diagrammi:

$$\sigma \propto |A_\gamma + A_Z|^2 = |A_\gamma|^2 + |A_Z|^2 + 2\text{Re}(A_\gamma \cdot A_Z^*)$$

- Questo processo fu studiato in particolare al collider Petra del laboratorio Desy di Amburgo a cavallo degli anni 80.
- Ad esempio, per un'energia del centro di massa di $\sqrt{s}=34$ GeV, il valore dei tre termini vale approssimativamente:

$$|A_\gamma|^2 \approx 0.1 \text{ nb} \quad ; \quad |A_Z|^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ nb} \quad ; \quad 2\text{Re}(A_\gamma \cdot A_Z^*) \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ nb}$$

- Come si vede il termine di interferenza dà un contributo significativo; questo si manifesta sperimentalmente come una asimmetria nella sezione d'urto differenziale del processo, che è funzione dell'energia del centro di massa (si ricorda che le interazioni e.m. non violano la parità mentre quelle deboli la violano).

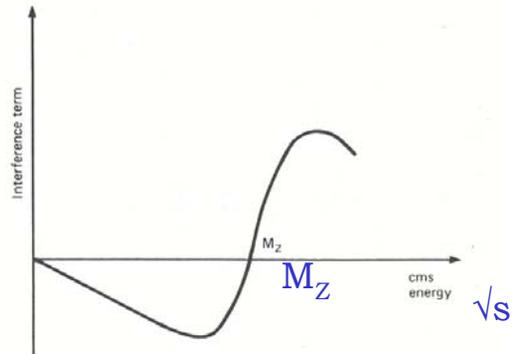
- Viene pertanto definita operativamente l'asimmetria avanti/indietro nel modo seguente:

$$A(s) = \frac{N_F - N_B}{N_F + N_B}$$

Dove N_F e N_B sono il numero di eventi che presentano un muone positivo nell'emisfero in avanti e all'indietro (definito rispetto alla direzione di volo del positrone incidente)

Interferenza elettrodebole nel processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Il termine di interferenza, e quindi l'asimmetria, dipende da \sqrt{s} . Alla massa dello Z si annulla e poi cambia segno.

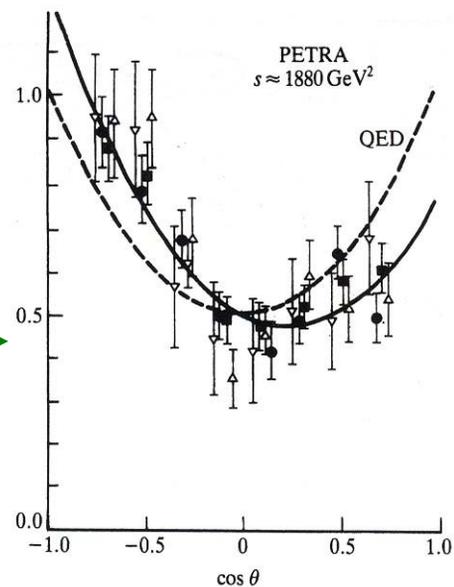


- Per energie del centro di massa tali che $\sqrt{s} \ll M_Z$ come quelle di Petra l'asimmetria avanti/indietro ha la seguente dipendenza dalle costanti di accoppiamento dello Z con i fermioni:

$$A(s) = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = -\frac{3s}{4\sqrt{2}\pi\alpha} C_A^e C_A^\mu$$

Distribuzione angolare della reazione $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ a $\sqrt{s} \approx 43$ GeV. Il best fit alla distribuzione angolare da l'asimmetria di:

$$A(s) = \frac{N_F - N_B}{N_F + N_B} = -0.18 \pm 0.2$$



- L'asimmetria avanti/indietro dipende solo dall'accoppiamento assiale che non contiene l'angolo di Weimberg ($C_A = I_3$). Tuttavia dalla misura della sezione d'urto (totale e/o differenziale) confrontata con quella di QED (scambio solo del fotone) si può determinare l'angolo di Weimberg. Da questi dati si trova:

$$\sin^2 \theta_w = 0.210 \pm 0.019 \text{ (stat.)} \pm 0.013 \text{ (syst.)}$$

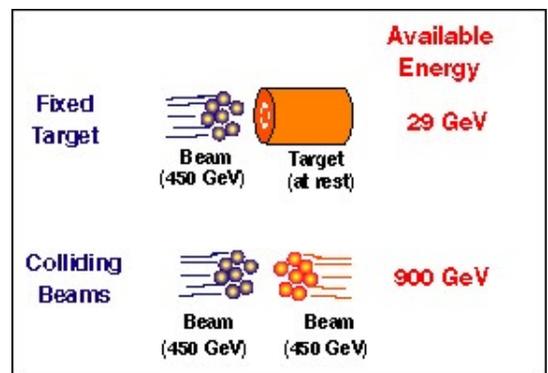
- Prendendo il valore di $\sin^2 \theta_w$ e di M_Z misurato da altri esperimenti, si può misurare CA^2 (assumendo l'universalità leptonica) e controllare se il valore misurato è in accordo con le previsioni del MS ($C_A = I_3 = -1/2$)

Scoperta del W e dello Z

- La scoperta delle correnti neutre fu una grande evidenza in favore del Modello Standard, infatti nel 1976 Glashow, Weimberg e Salam vinsero il premio Nobel per il MS.
- Tuttavia la prova definitiva in favore del Modello sarebbe l'osservazione dei bosoni mediatori dell'interazione: il W e lo Z.
- Ricordiamo qual'era il valore della massa del W e dello Z prevista dal Modello Standard alla fine degli anni 70:

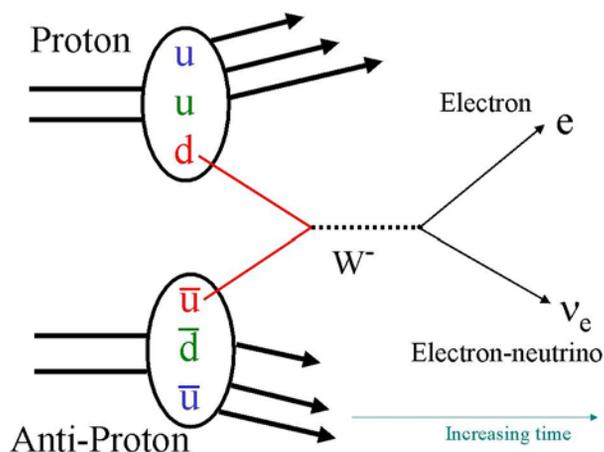
$$M_W = \sqrt{\frac{g^2 \sqrt{2}}{8G}} \approx \frac{37.4}{\sin \theta_W} = \frac{37.4}{\sqrt{0.23}} \approx 78 \text{ GeV} \quad ; \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \approx 89 \text{ GeV}$$

- Nel 1976 entrò in funzione al CERN l'SPS, un acceleratore di protoni fino ad un'energia di 450 GeV. Tuttavia l'energia nel centro di massa non era sufficiente per produrre il W o lo Z. (Al Fermilab negli stessi anni c'era un acceleratore di protoni con prestazioni leggermente superiori (500 GeV) ma comunque altrettanto inadeguato.



- Rubbia propose di trasformare l'SPS in un collisore protone-antiprotone sul modello dei collisori e+e-. L'idea non fu accolta favorevolmente perché non c'era modo di accumulare abbastanza antiprotoni da assicurare una luminosità sufficiente per produrre qualche W o Z in un tempo ragionevole.
- Il problema fu risolto da Simon van der Meer che propose il raffreddamento stocastico per ridurre l'emittanza degli antiprotoni ed aumentare così la luminosità.
- Nel 1978 parte il progetto SppS (270 + 270 GeV).
- Nel 1982-83 furono prodotti i primi W e Z rivelati nei detector UA1 (Rubbia) e UA2.
- **1984: premio Nobel a Rubbia e van der Meer**

Scoperta del W e dello Z



(nel caso dello Z
sostituite il
neutrino con un
positrone)

- Protone e antiprotone non sono particelle elementari ma sono particelle composte; oltre ai quark di valenza, ci sono i quark e antiquark del mare ed i gluoni.
- L'urto avviene tra un partone del protone ed un partone dell'antiprotone. Come abbiamo visto i partoni non hanno un impulso definito ma esiste una distribuzione di probabilità che il partone abbia una certa frazione dell'impulso del protone.
- Questo vuol dire che l'energia del centro di massa non è definita, ed inoltre nel sistema del laboratorio il centro di massa non è fermo, ma ha un impulso longitudinale (ovvero nella direzione dei fasci). L'impulso trasverso si può assumere sia nullo (approssimazione di infinite momentum frame).
- Assumendo che in media un quark di valenza abbia un terzo dell'impulso del protone, si ha che in media l'energia del centro di massa dell'urto partone-partone sia grosso modo un sesto dell'energia del centro di massa del sistema protone-antiprotone; quindi con un'energia nel centro di massa di 540 GeV, nell'urto partone-partone si hanno circa 90 GeV, sufficienti per produrre il W o lo Z.
- Tuttavia per il calcolo della luminosità occorre conoscere le funzioni di distribuzioni dei partoni all'interno dei protoni e antiprotoni, le quali sono anche funzione dell'energia del protone. Questo fa sì che le previsioni teoriche siano affette da un errore "sistematico" legato alla conoscenza delle pdf.
- Un calcolo plausibile dava per la sezione d'urto i valori:

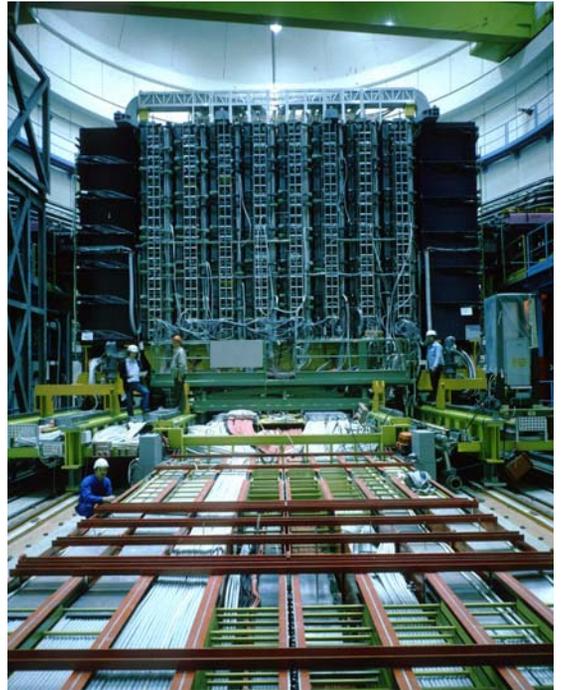
$$\sigma_{W^\pm} \approx 4 \text{ nb} \quad ; \quad \sigma_Z \approx 2 \text{ nb}$$

Scoperta del W nel 1982

- L'SppS fu equipaggiato con due rivelatori: UA1 (C.Rubbia) e UA2 (P.Darriulat).
- UA1 aveva un campo magnetico dipolare che gli permetteva di misura l'impulso delle tracce nella camera centrale, calorimetri (e.m. e had) seguiti dal rivelatore dei mu
- A novembre-dicembre 1982 UA1 (ed in maniera simile UA2) raccolse dati corrispondenti ad una luminosità integrata di 18 nb^{-1} , corrispondenti grosso modo a 109 collisioni protone-antiprotone a $\sqrt{s}=540 \text{ GeV}$.
- Furono trovati 6 eventi del tipo:

$$p\bar{p} \rightarrow W + \text{anything}$$

$$W \rightarrow e + \nu$$



Rivelatore UA1 (C.Rubbia)

- La topologia dell'evento consisteva in un elettrone isolato con un alto impulso trasverso (rispetto all'asse dei fasci) con in aggiunta un grande impulso trasverso mancante (dovuto al neutrino).
- La segnatura sperimentale era molto chiara, con un background molto ridotto, che ha permesso di misurare la massa del W avendo così pochi eventi a disposizione (tenendo in conto anche il momento trasverso dei partoni per ogni singolo evento).

$$M_W = 81 \pm 5 \text{ GeV}$$

- L'analisi degli eventi nel canale con un muone nello stato finale e l'esperimento UA2 confermarono questo risultato.

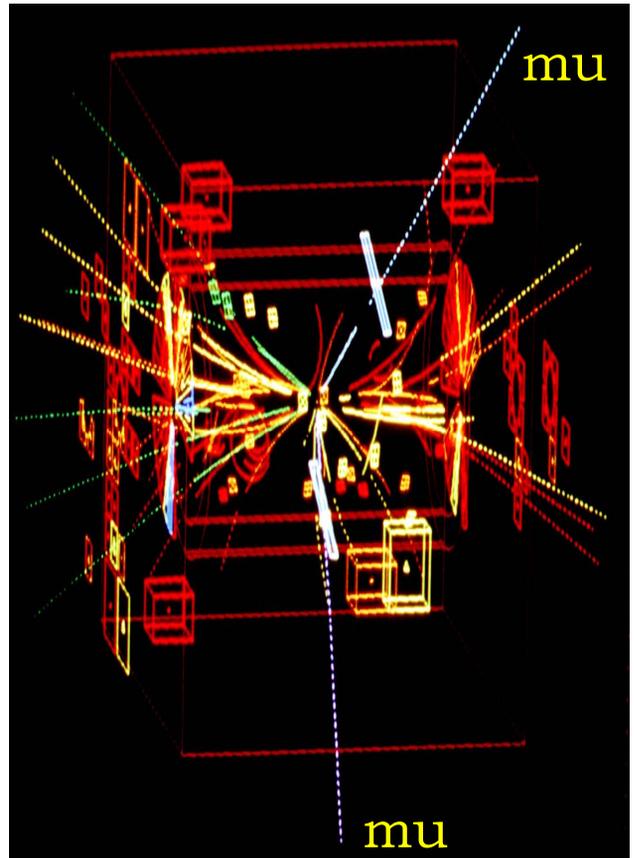
Scoperta dello Z nel 1983

- Nel 1983 i rivelatori UA1 e UA2 osservarono alcuni eventi relativi al decadimento dello Z:

$$pp \rightarrow Z + \text{anything}$$

$$Z \rightarrow e^+e^- \text{ or } \mu^+\mu^-$$

- *topologia dell'evento*: due leptoni carichi isolati con alto pT, carica elettrica opposta e nessun impulso trasverso mancante (niente neutrini)
- *background*: quasi trascurabile
- N.B. la segnatura sperimentale dello Z è più "facile" di quella del W, ma la sua sezione d'urto è più piccola, per questo si è osservato prima il W e poi lo Z.

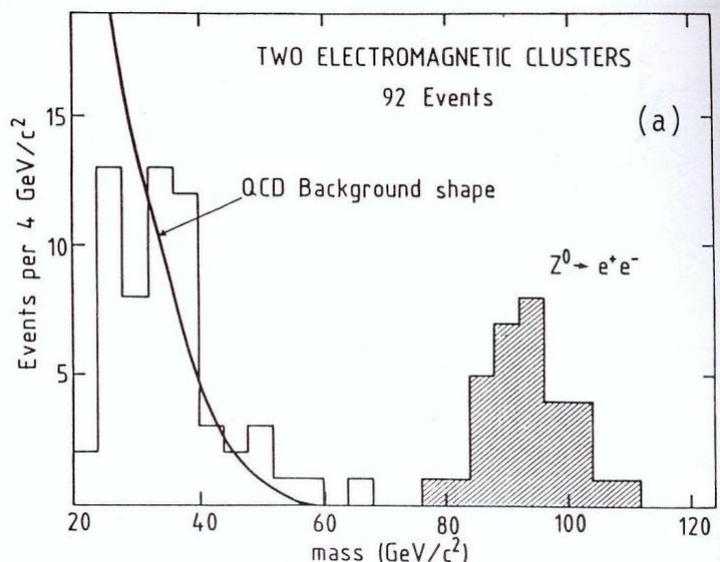


Evento di uno Z in $\mu^+\mu^-$ in UA1 ricostruito al computer

N.B. inoltre il B.R. dello Z in una coppia di leptoni è 3.4%, mentre quello del W in una coppia di leptoni è 10.7%

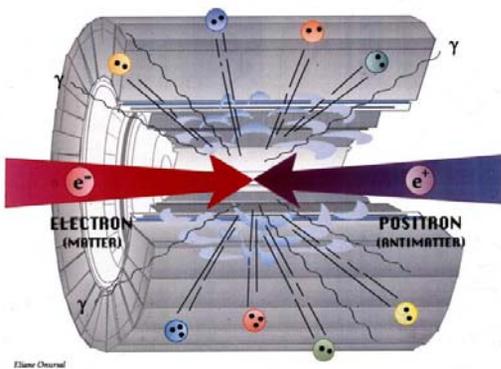
Dal grafico si vede ad "occhio" che la massa dello Z è intorno a 90 GeV. Il fit dava:

$$M_Z = 95.6 \pm 1.4 \pm 2.9 \text{ GeV}$$



II LEP

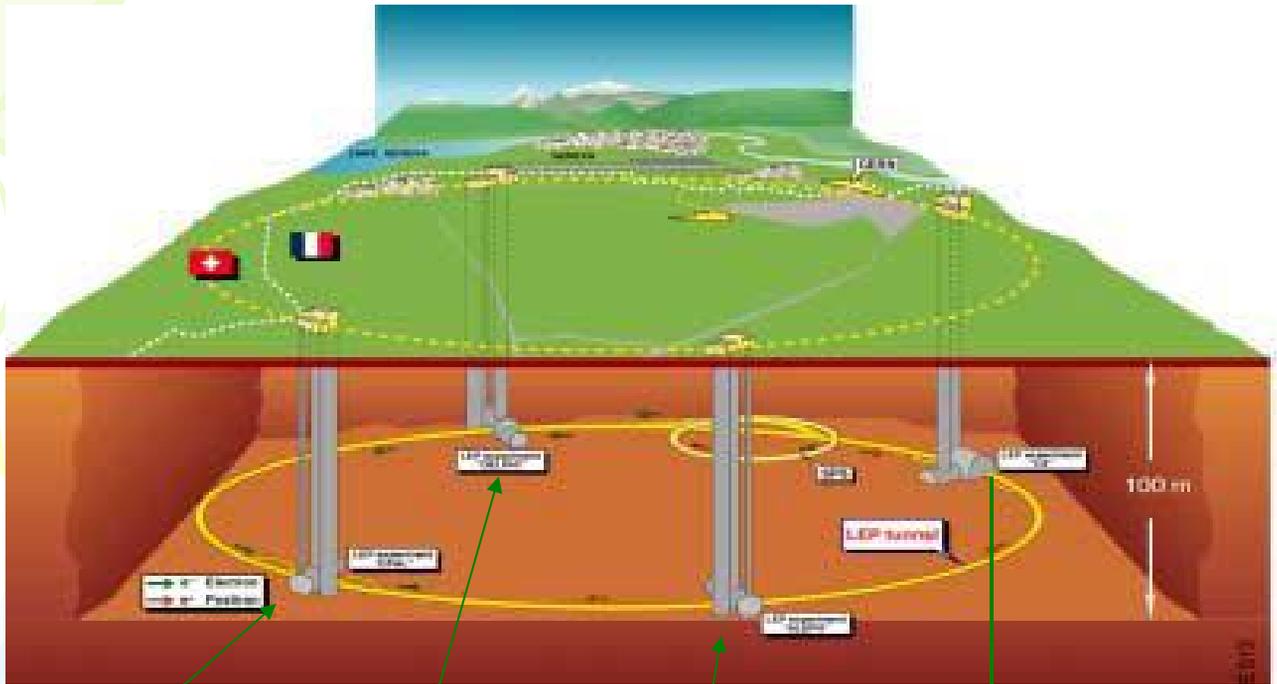
- Nel 1981 il CERN decide di costruire il più grande acceleratore del mondo: il LEP. Si tratta di un collisore elettrone-positrone di 27 km di circonferenza.
- Gli elettroni, al contrario dei protoni, sono delle particelle elementari, quindi l'interazione elettrone-positrone è molto più "pulita" di quella protone-antiprotone. Lo stato iniziale è perfettamente noto e le previsioni teoriche del Modello Standard possono essere verificate con maggiore accuratezza.



Tutta l'energia del centro di massa è disponibile per creare nuove particelle: $E=mc^2$

- Nel 1983 inizia lo scavo del tunnel. La galleria ha un diametro di 3.8 m e si trova a circa 100 m sotto il livello del suolo
- Nel 1988 lo scavo del tunnel è terminato. All'epoca era la galleria più lunga d'Europa, superata ora solo dal tunnel sotto la manica.
- I goal scientifici di Lep erano:
 - Scoperta del bosone di Higgs
 - Scoperta del quark top e misura dei livelli energetici del top quark
 - Scoperta delle particelle supersimmetriche
 - Misura della massa dello Z con un errore di 50 MeV
 - misure di precisione dei parametri del Modello Standard
 - misura del numero di famiglie di neutrini leggeri
 - Lep2: misura della massa del W e verifica del triple gauge boson coupling

LEP e gli esperimenti

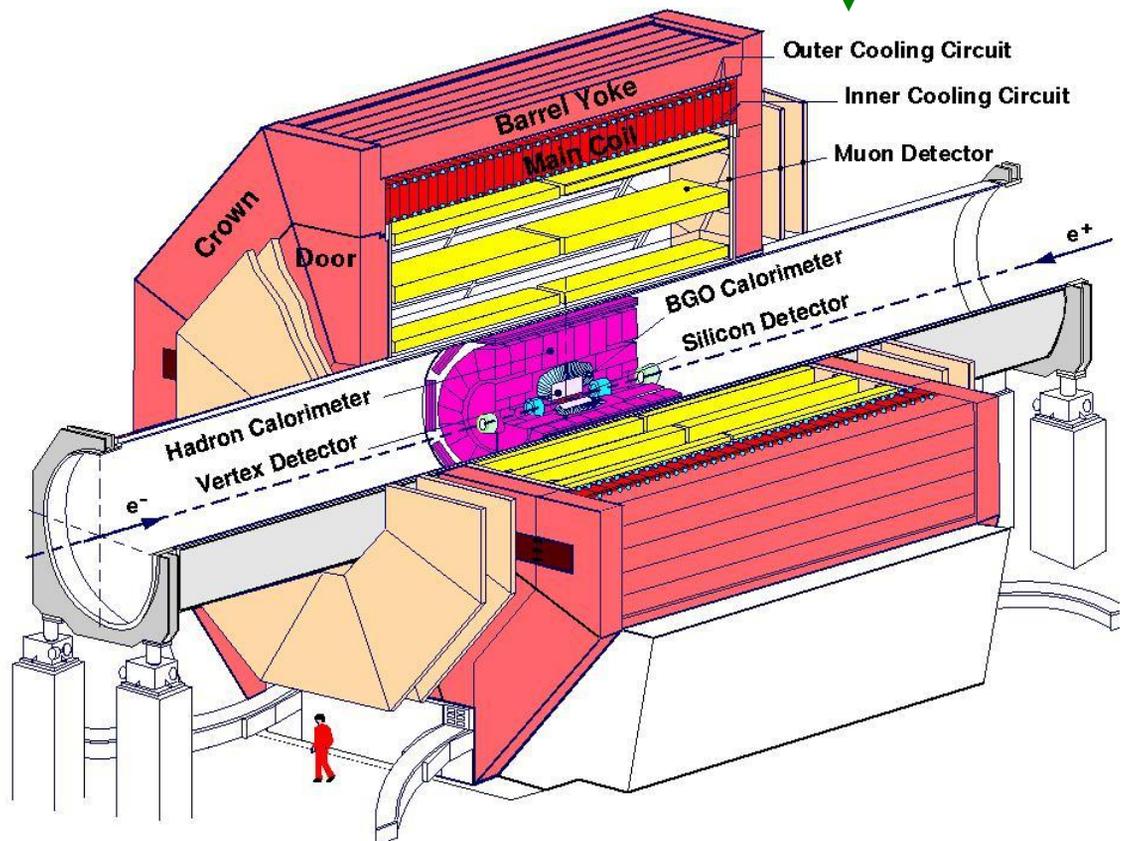


OPAL

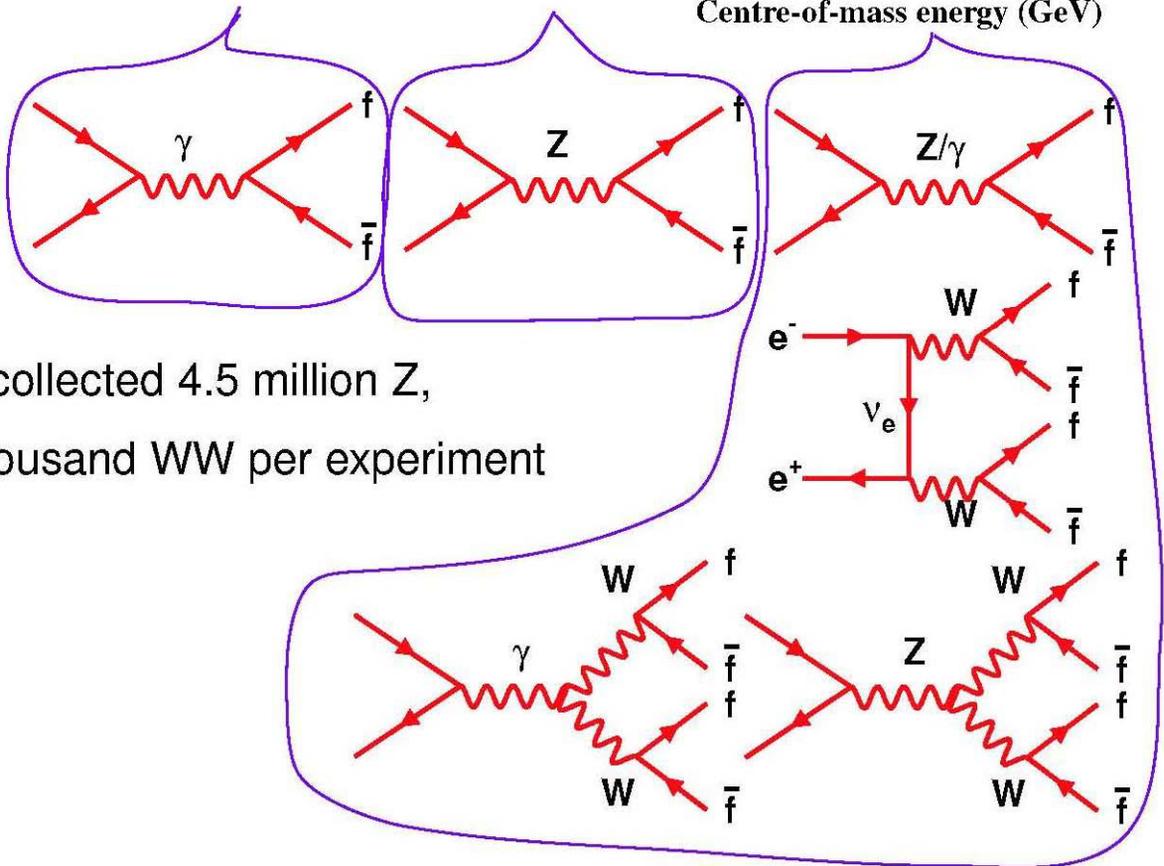
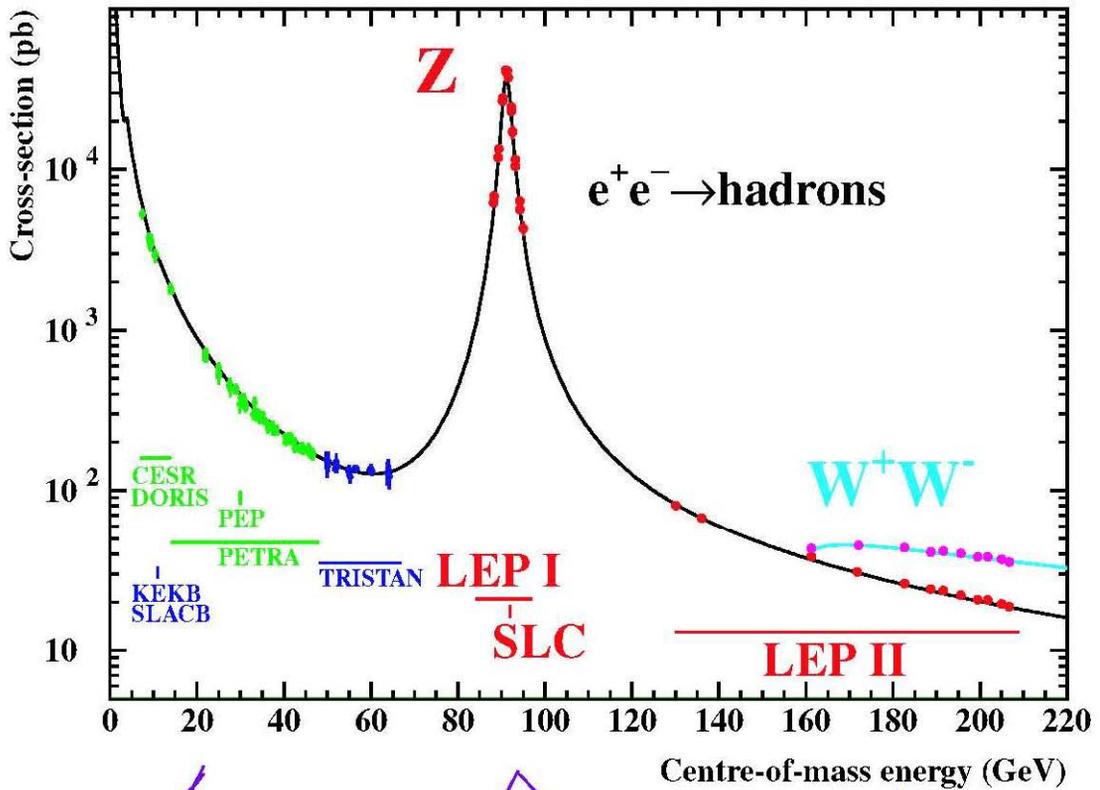
DELPHI

Aleph

L3



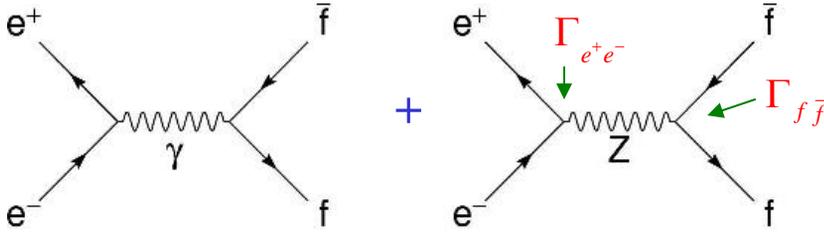
Sezione d'urto in funzione di \sqrt{s}



LEP collected 4.5 million Z,
12 thousand WW per experiment

Sezione d'urto del processo $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ per $\sqrt{s} \approx M_Z$

- Abbiamo visto che il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ viene descritto, all'ordine più basso, dai due seguenti diagrammi di Feynman:



- Per il calcolo della sezione d'urto occorre sommare le ampiezze e poi fare il modulo quadro (sommando sugli spin finali e mediando su quelli iniziali)

$$\sigma \propto |A_\gamma + A_Z|^2 = |A_\gamma|^2 + |A_Z|^2 + 2\text{Re}(A_\gamma \cdot A_Z^*)$$

- Per $\sqrt{s} \approx M_Z$ il contributo del fotone ed del termine di interferenza è di qualche per cento rispetto alla sezione d'urto totale. Lo scambio del fotone si sa calcolare teoricamente con grande precisione (QED); per il calcolo del termine di interferenza si assume il Modello Standard, mentre le misure riguardano il termine relativo allo Z, che si può parametrizzare nel modo seguente:

$$\sigma_{q\bar{q}} = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{s\Gamma_{e^+e^-}\Gamma_{q\bar{q}}}{(s - M_Z^2)^2 + \frac{s^2\Gamma_Z^2}{M_Z^2}}$$

- Γ_Z è la larghezza totale della risonanza $Z = 2.4952 \pm 0.0023$ GeV
- Γ_{ff} è la larghezza parziale del decadimento dello Z nel canale $f\bar{f}$

$$\Gamma(Z \rightarrow l^+l^-) = 2 \frac{GM_Z^3}{\sqrt{2} \cdot 12\pi} \left[(C_V^l)^2 + (C_A^l)^2 \right]$$

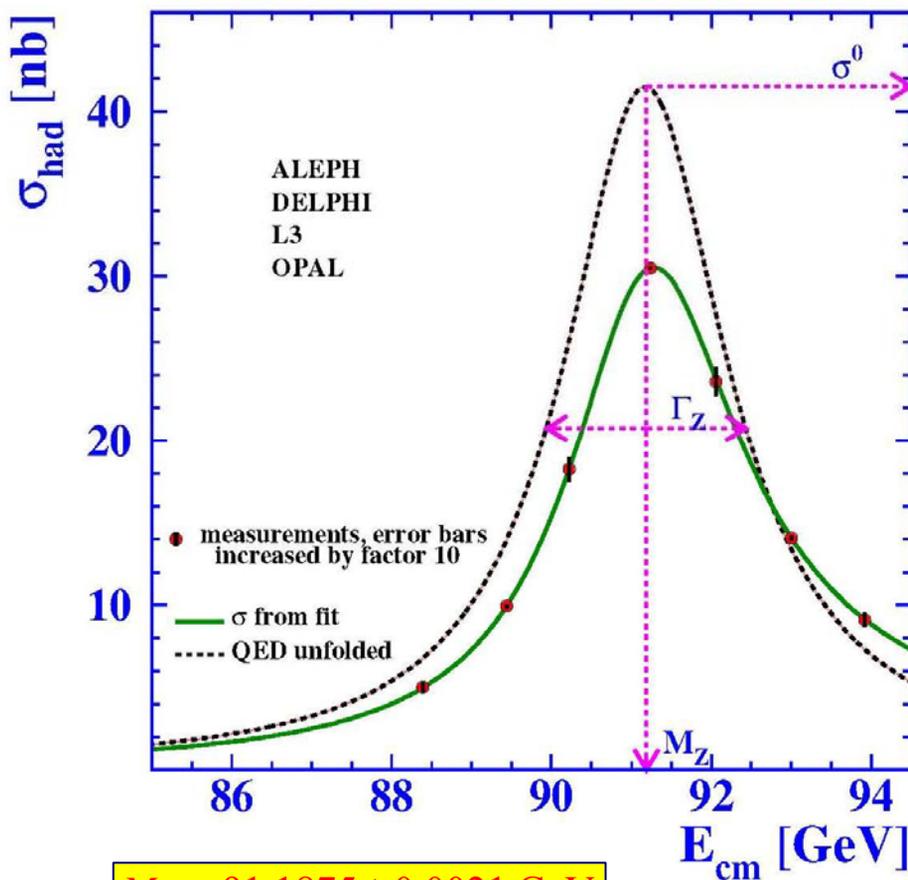
$$\Gamma(Z \rightarrow q\bar{q}) = 6 \frac{GM_Z^3}{\sqrt{2} \cdot 12\pi} \left[(C_V^l)^2 + (C_A^l)^2 \right] \quad (\text{fattore 3 di colore})$$

$$\Gamma_Z = \Gamma_{\text{leptoni carichi}} + \Gamma_{\text{adroni}} + N_\nu \cdot \Gamma_{\nu\bar{\nu}}$$

Misura della massa dello Z

$$\sigma_{q\bar{q}} = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{s\Gamma_{e^+e^-}\Gamma_{q\bar{q}}}{(s-M_Z^2)^2 + \frac{s^2\Gamma_Z^2}{M_Z^2}}$$

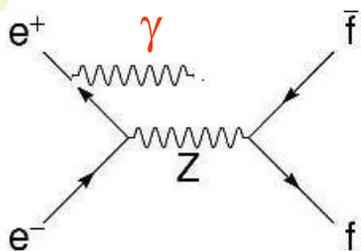
- La sezione d'urto ha una forte dipendenza dall'energia del centro di massa. La strategia di misura della massa dello Z è consistita nella misura della sezione d'urto adronica per diverse energie del centro di massa.
- In un collider e+e- l'energia del centro di massa è nota con grande precisione. Nel 1989 si pensava di riuscire a misurare la massa dello Z con un errore di 50 MeV, invece i "macchinisti" del Lep sono riusciti a migliorare di un ordine di grandezza la misura dell'energia dei fasci, permettendo la misura dello Z con un errore di 2 MeV.



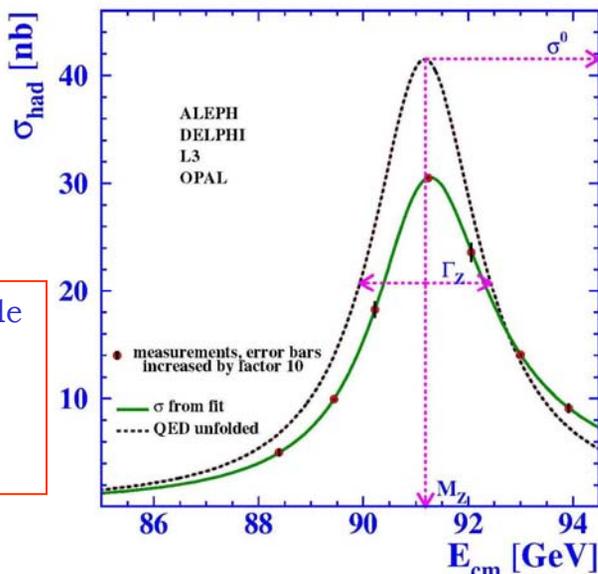
$$M_Z = 91.1875 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

$$\frac{\Delta M_Z}{M_Z} = \pm 2.3 \cdot 10^{-5}$$

Misura delle larghezze parziali



L'emissione di un fotone dallo stato iniziale modifica l'energia effettiva del centro di massa. Questo effetto può essere corretto (QED) e ne viene tenuto conto nel fit dal quale si estraggono i parametri dello Z.



$$\sigma_{q\bar{q}} = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{s\Gamma_{e^+e^-}\Gamma_{q\bar{q}}}{(s-M_Z^2)^2 + \frac{s^2\Gamma_Z^2}{M_Z^2}} \xrightarrow{s=M_Z^2} \sigma_{q\bar{q}}^0 = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{\Gamma_{e^+e^-}\Gamma_{q\bar{q}}}{\Gamma_Z^2}$$

- Per misurare le larghezze parziali del decadimento dello Z nei vari canali fermionici occorre misurare la sezione d'urto al picco.
- Si selezionano quindi i seguenti canali:

$$Z \rightarrow q\bar{q}$$

$$Z \rightarrow \mu^+\mu^-$$

$$Z \rightarrow \tau^+\tau^-$$

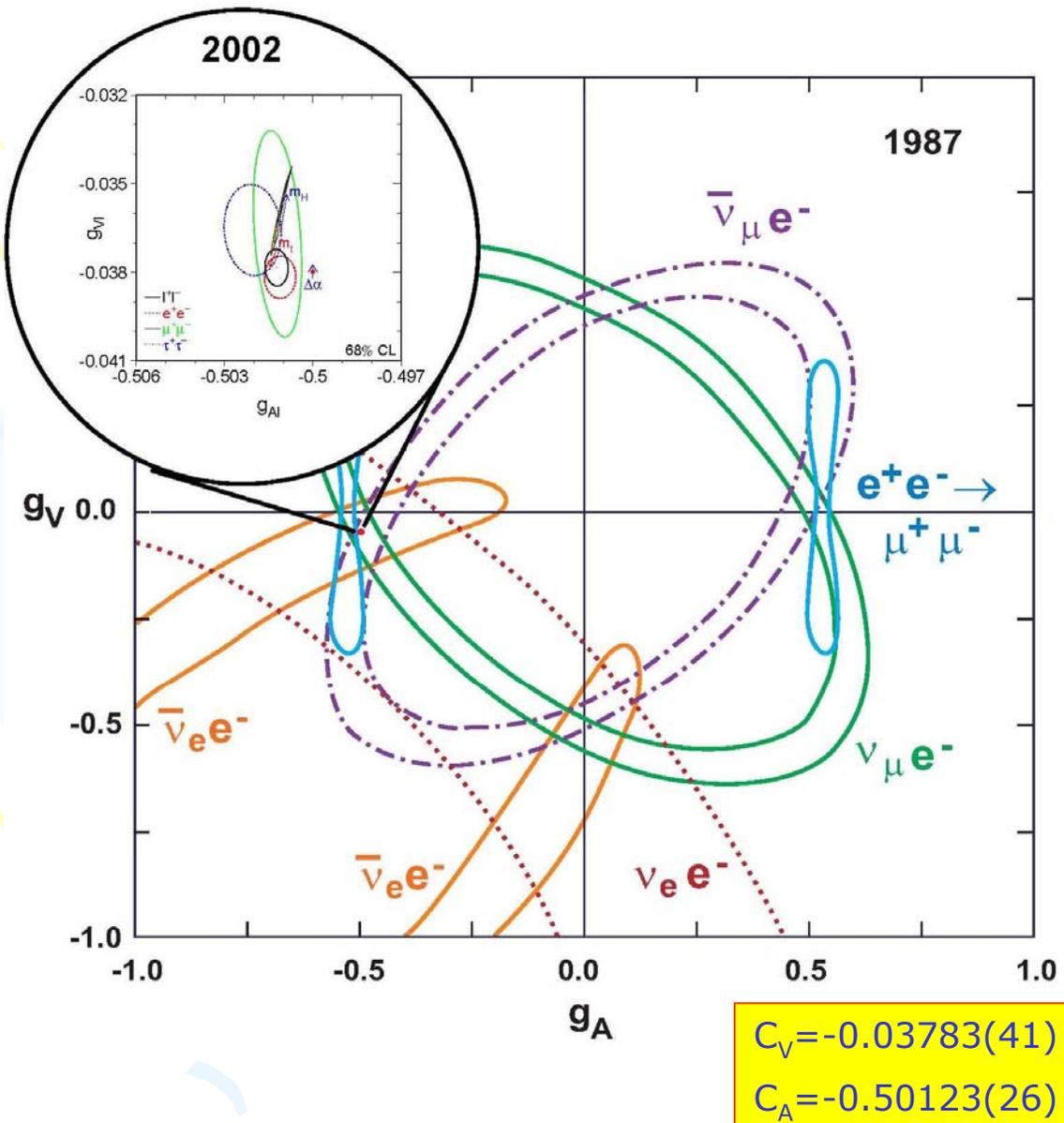
$$Z \rightarrow e^+e^-$$

1. sezione d'urto al picco
2. larghezze parziali.
3. accoppiamenti dello Z

- N.B. La larghezza totale Γ_Z è la stessa per tutti i canali; non cambia la forma della risonanza, ma solo il valore del picco
- N.B. Il canale con gli elettroni è più complicato degli altri perché c'è anche il canale t con lo scambio del fotone
- N.B. nel canale adronico si possono riconoscere i quark b dal parametro d'impatto; quindi si può misurare la larghezza parziale nel canale bb

Misura di C_V e C_A

- Le misure degli accoppiamenti dello Z fatte prima dell'entrata in funzione di LEP non avevano sufficiente precisione per fare dei test della validità del modello, ad esempio non permettevano di distinguere il segno degli accoppiamenti:



- Lepton coupling to the Z
Ratios of coupling constants:

$$g_A^\mu / g_A^e = 1.0002 \pm 0.0014$$

$$g_A^\tau / g_A^e = 1.0019 \pm 0.0015$$

$$g_V^\mu / g_V^e = 0.962 \pm 0.063$$

$$g_V^\tau / g_V^e = 0.958 \pm 0.029$$

Verifica dell'universalità leptonica al livello del per mille

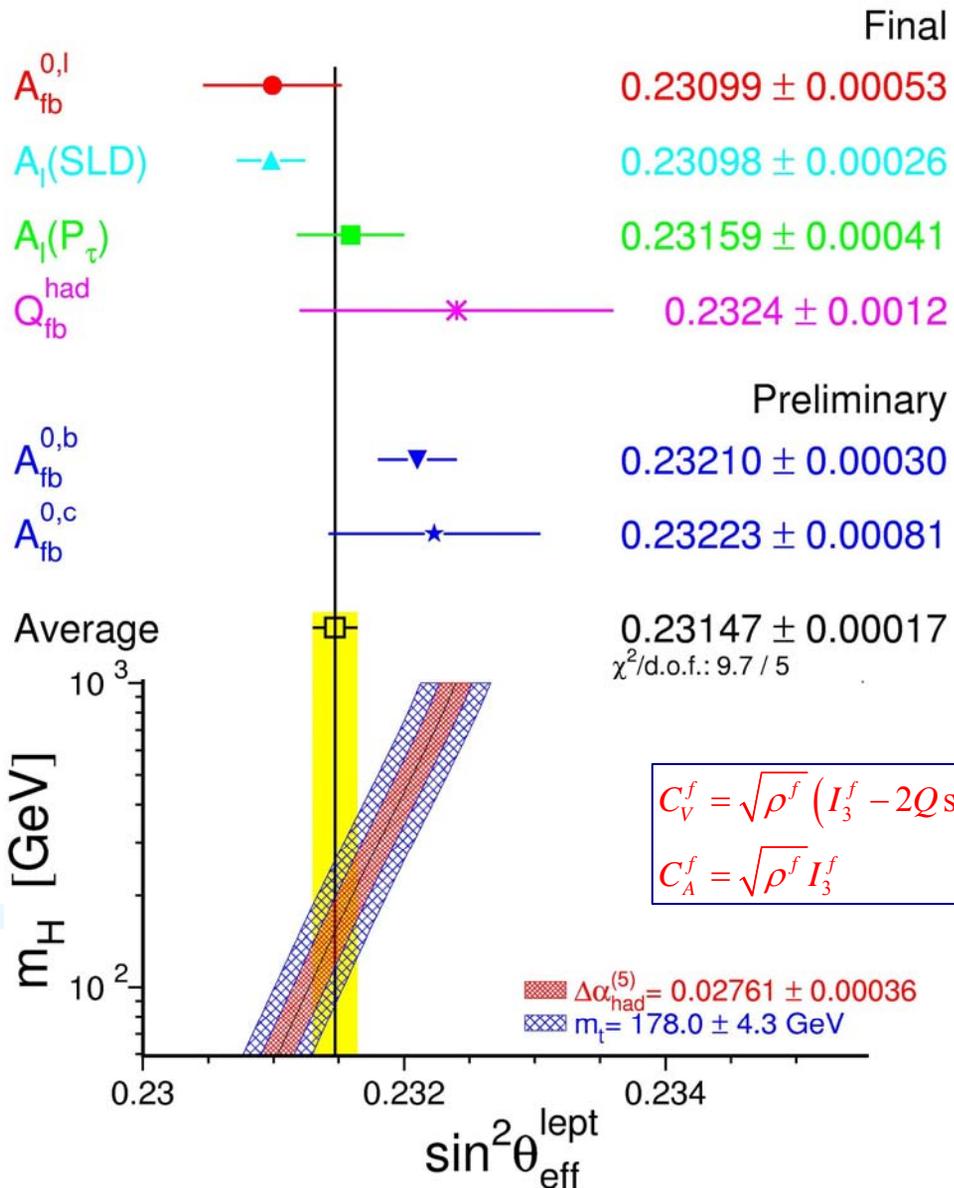
Misura di $\sin^2\theta_{\text{eff}}$

■ Asimmetrie al polo dello Z

- forward-backward
- left-right (SLD)
- tau polarisation

Dai valori misurati delle diverse asimmetrie si può ricavare il valore dell'angolo di Weimberg.

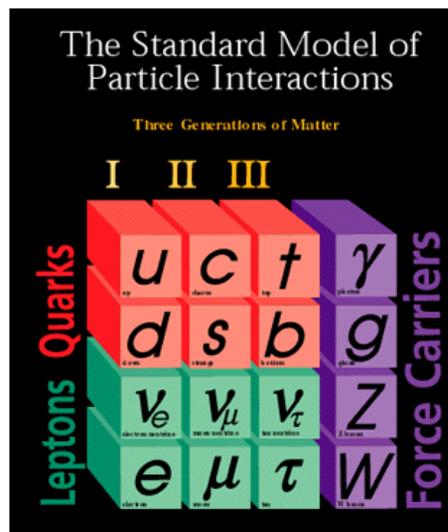
Attraverso le correzioni radiative, le previsioni sono funzioni della massa dell'Higgs e del top



- Da misure di questo tipo è stato possibile prevedere la massa del top dalla correzioni radiative, e si possono fare delle previsioni sulla massa dell'Higgs.

Misura del numero delle famiglie di neutrini leggeri

- Il numero di famiglie di leptoni non è previsto dal Modello Standard ma deve essere determinato sperimentalmente.
- Prima dell'entrata in funzione di LEP una quarta famiglia di fermioni non era esclusa sperimentalmente.
- In ogni famiglia è presente un neutrino, di massa nulla o comunque trascurabile, quindi la strategia di misura al Lep fu quella di misurare se esisteva un quarto neutrino leggero (dove leggero vuol dire di massa inferiore alla metà di M_Z).



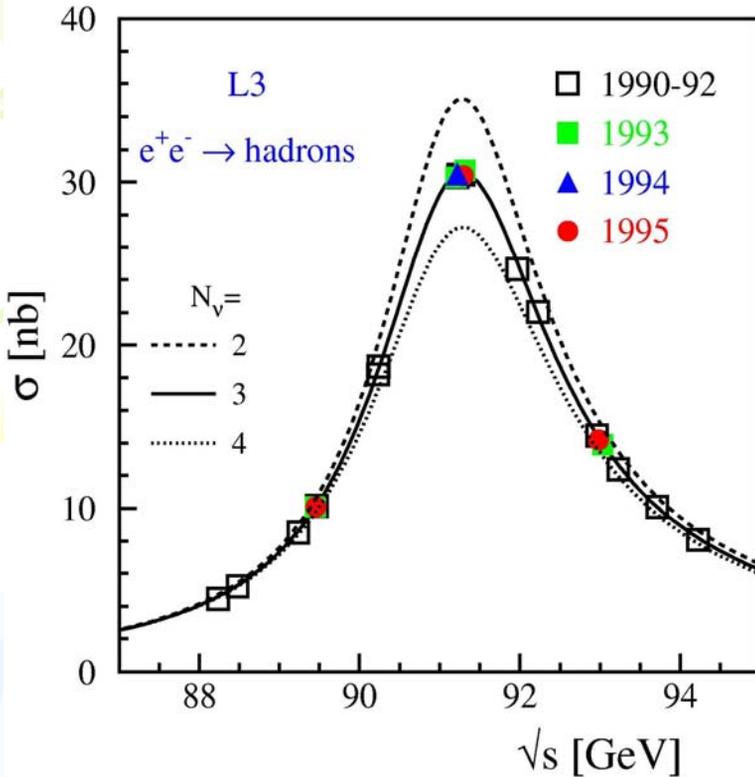
- Si trattava quindi di misurare la larghezza parziale di decadimento dello Z in neutrini e da questo dedurre il numero di neutrini.

$$\Gamma_Z = \Gamma_{\text{leptoni carichi}} + \Gamma_{\text{adroni}} + N_\nu \cdot \Gamma_{\nu\bar{\nu}}$$

- Vi erano due tipi di misure della cosiddetta larghezza invisibile (Γ_{inv}): una indiretta dove la Γ_{inv} veniva ottenuta per differenza sottraendo a Γ_Z le larghezze parziali visibili, ed una misura diretta dove veniva rivelato il fotone emesso dallo stato iniziale; in questo caso la segnatura dell'evento era costituito da un fotone singolo di energia intorno al GeV.

N_ν: risultati

Misura indiretta



$$N_{\nu} = 2.9841 \pm 0.0083$$

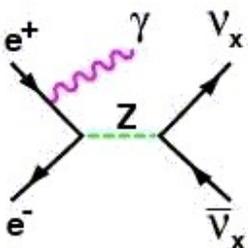
È una misura molto precisa che esclude la presenza di una quarta famiglia di neutrini (a meno che questa non abbia una struttura completamente diversa dalle altre tre).

N.B. La larghezza parziale dello Z in una coppia di neutrini si ricava dal calcolo del Modello Standard

Misura diretta

- Tuttavia nella misura indiretta il numero di neutrini è ottenuto per differenza, quindi se si fosse trovato un numero diverso da tre, non si era sicuri che la differenza fosse dovuta proprio alla presenza di un altro neutrino. Occorre quindi una misura diretta:

$$e^+e^- \rightarrow \nu\nu\gamma$$

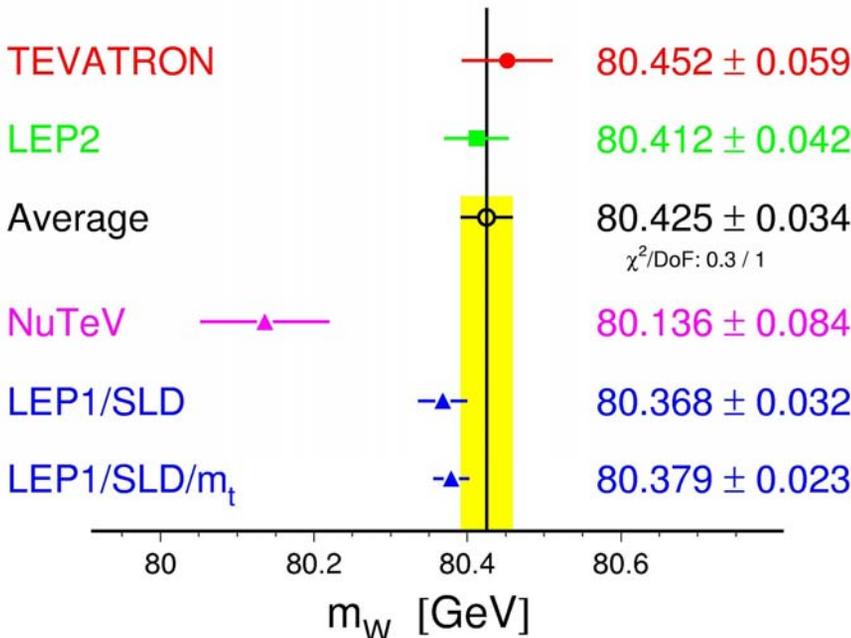
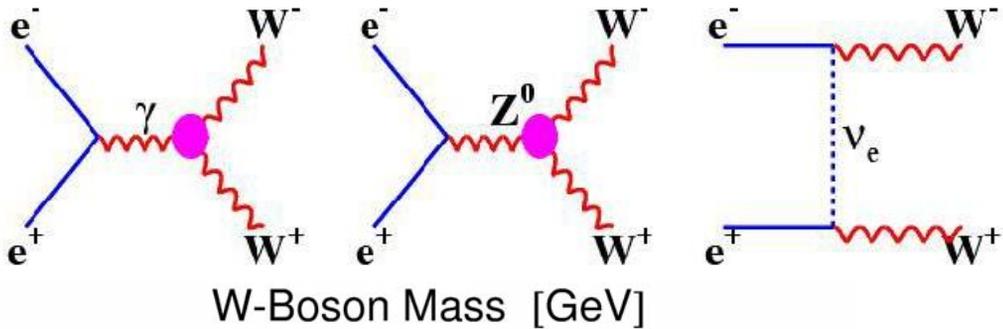


L3 ha trovato, a Lep fase 1, 702 eventi di questo tipo (da confrontarsi con 5 milioni di Z), dove l'energia del fotone è maggiore di 1 GeV. Da questi si ricava:

$$L3: N_{\nu} = 2.98 \pm 0.10$$

Misura della massa del W

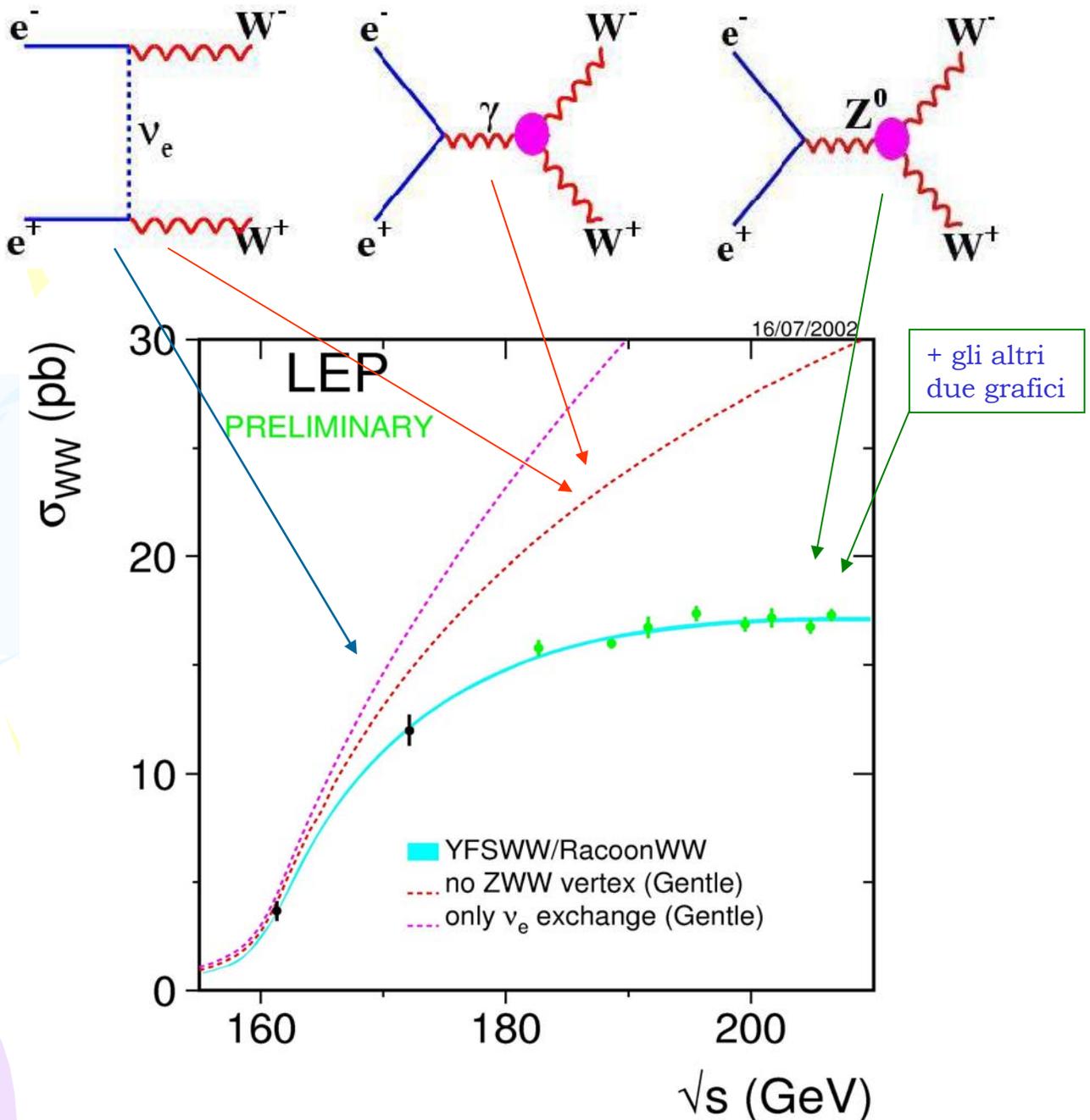
- A Lep fase 2 l'energia del centro di massa ha raggiunto i 208 GeV. Questo ha permesso di produrre coppie di W. E' stato possibile quindi misurarne la massa con precisione e di misurare i suoi accoppiamenti con i fermioni.



- La massa si è misurata utilizzando una tecnica di massa invariante con dei vincoli dati dalla conoscenza dell'energia del centro di massa. Tuttavia l'errore non è confrontabile con quello ottenuto per la massa dello Z.
- La precisione sulla M_W ottenuta a Lep2 è paragonabile con quella ottenuta al Tevatron.
- Infine la misura indiretta fatta a Lep1 dalla misura degli accoppiamenti dello Z è in accordo con la misura diretta della massa.

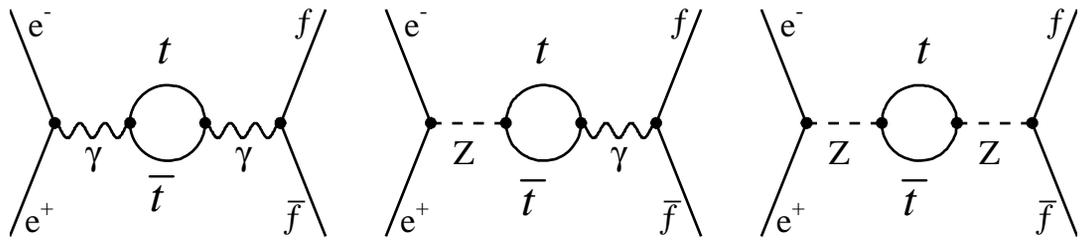
Triple gauge bosons coupling

- A Lep2 è stato possibile verificare l'esistenza dell'accoppiamento di 3 e 4 bosoni di gauge previsto dal Modello Standard ($SU(2)_L$ è un gruppo di simmetria non abeliano).



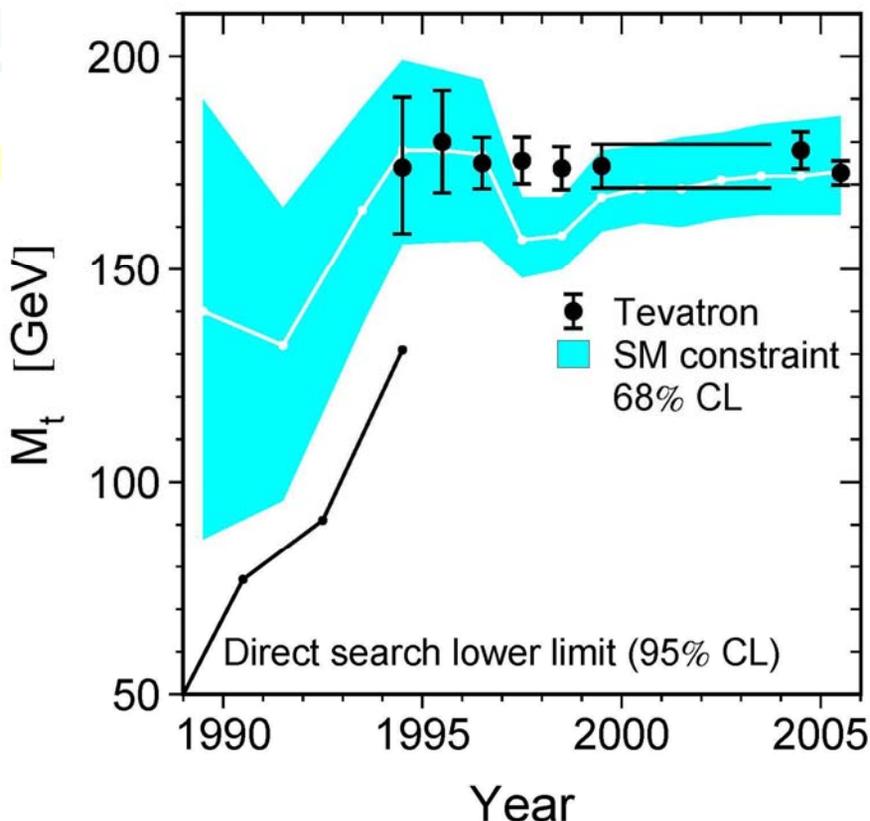
- La misura della sezione d'urto di produzione dei W in funzione di \sqrt{s} dimostra che i dati sono descritti correttamente dalla teoria solo se si considera anche il vertice ZWW previsto dal MS

Previsione della massa del top attraverso le correzioni radiative



- Il top non poteva essere prodotto al Lep perché la sua massa era troppo grande. Tuttavia esso interviene nei loop virtuali, e attraverso il confronto delle varie misure sperimentali con le previsioni teoriche che includevano le correzioni radiative, è stato possibile stimare la massa del top.

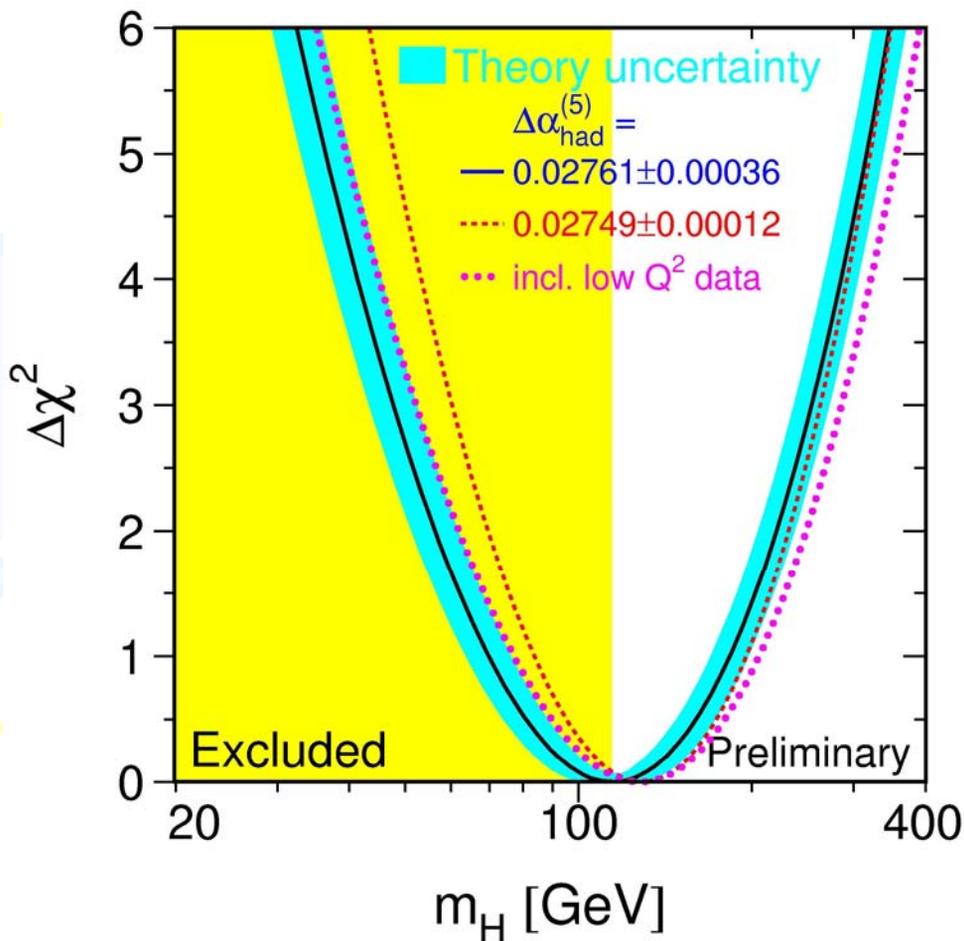
- Le previsioni fatte al Lep si sono mostrate in accordo con la misura diretta fatta al Tevatron una volta che è stato scoperto il quark top.



Le correzioni radiative dipendono da m_t^2

Previsioni sulla massa dell'Higgs

- Il successo ottenuto al Lep di prevedere la massa del top con un errore di 5-6 MeV attraverso le correzioni radiative, non si può ripetere per la massa del bosone di Higgs, perché le correzioni radiative dipendono dal logaritmo della massa dell'Higgs, e quindi la sensibilità è molto bassa:



▪ **95% CL upper limit: $m_H < 260$ GeV**

- Non resta che attendere l'entrata in funzione di LHC

- Il bosone Z è caratterizzato dalle seguenti grandezze: larghezza totale 2.495 GeV, larghezza parziale in adroni 1.744 GeV, larghezza parziale in una coppia di muoni di 84 MeV, che è anche uguale a quella in elettroni ed in tau (universalità leptonica). Se facciamo l'ipotesi che al Lep si fosse misurata una larghezza totale di 2.661 GeV, con le stesse misure per la larghezza parziale adronica e per quella parziale in muoni e rispettando l'universalità leptonica, cosa si sarebbe potuto concludere? Spiegare.

$$\Gamma_Z = \Gamma_{\text{leptoni carichi}} + \Gamma_{\text{adroni}} + N_\nu \cdot \Gamma_{\nu\bar{\nu}}$$

- Dalle misure relative allo Z, si ricava che la larghezza invisibile (decadimento in neutrini) è 499 MeV, quindi la larghezza in una coppia di neutrini è di circa 166 MeV.
- Se al Lep si fosse misurata la larghezza totale di 2.661 GeV, fermo restando le misure nelle larghezze parziali visibili, questo implicava che l'aumento era dovuto alla larghezza invisibile. L'aumento è proprio di 166 MeV, quindi vuol dire che si era prodotto un quarto neutrino.

La larghezza parziale di decadimento dello Z in una coppia di fermioni è proporzionale a $(C_V^2 + C_A^2)$. Trovare il rapporto tra la larghezza parziale dello Z in un coppia di quark b e la larghezza parziale in una coppia di quark c. Si faccia l'approssimazione $\sin^2\theta_w=0.25$

Ricordiamo che il quark c ha carica $2/3$ e terza componente I_3 dello spin isotopico debole uguale a $+1/2$, mentre il quark b ha $q=-1/3$ e $I_3=-1/2$

$$C_V = I_3 - 2q\sin^2 \theta_w \quad ; \quad C_A = I_3$$

Per il quark c si ha:

$$C_V = I_3 - 2q\sin^2 \theta_w = \frac{1}{2} - 2 \frac{2}{3} \frac{1}{4} = \frac{1}{6}; \quad C_A = I_3 = \frac{1}{2}$$

$$C_V^2 = \frac{1}{36} \quad ; \quad C_A^2 = \frac{1}{4} = \frac{9}{36} \quad \Rightarrow \quad C_V^2 + C_A^2 = \frac{1}{36} + \frac{9}{36} = \frac{10}{36}$$

Mentre per il quark b si ha:

$$C_V = I_3 - 2q\sin^2 \theta_w = -\frac{1}{2} - 2 \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}; \quad C_A = I_3 = -\frac{1}{2}$$

$$C_V^2 = \frac{1}{9} = \frac{4}{36} \quad ; \quad C_A^2 = \frac{1}{4} = \frac{9}{36} \quad \Rightarrow \quad C_V^2 + C_A^2 = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} = \frac{13}{36}$$

Il rapporto tra le due larghezze parziali risulta quindi uguale a:

$$\frac{B.R.(Z \rightarrow b\bar{b})}{B.R.(Z \rightarrow c\bar{c})} = \frac{(C_V^2 + C_A^2)_b}{(C_V^2 + C_A^2)_c} = \frac{13/36}{10/36} = 1.3$$

Le misure danno: $B.R.(Z \rightarrow b\bar{b}) = (15.13 \pm 0.05)\%$; $B.R.(Z \rightarrow c\bar{c}) = (11.81 \pm 0.33)\%$

$$\Rightarrow \frac{B.R.(Z \rightarrow b\bar{b})}{B.R.(Z \rightarrow c\bar{c})} = \frac{15.13}{11.81} = 1.28$$

La larghezza parziale calcolata del decadimento del W in una coppia di leptoni vale 226 MeV. Il B.R. misurato di questo decadimento è 10.8%. Ricavare la larghezza totale del W e la larghezza parziale del decadimento del W in adroni. La valutazione teorica del seguente rapporto delle larghezze parziali del W: $\frac{\Gamma(W \rightarrow u + b)}{\Gamma(W \rightarrow u + d)}$ vale $2 \cdot 10^{-5}$. Spiegare come mai questo numero è così piccolo

$$\Gamma_{par} = \Gamma_{tot} \cdot \text{B.R.} \Rightarrow \Gamma_{tot} = \frac{\Gamma_{lept.}}{\text{B.R.}} = \frac{226}{0.108} = 2092 \text{ MeV}$$

Ricordiamo che il W può decadere in tutti e tre i leptoni carichi (con il neutrino associato naturalmente), quindi:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tot} &= 3 \cdot \Gamma_{lept.} + \Gamma_{hadr.} \\ \Rightarrow \Gamma_{hadr.} &= \Gamma_{tot} - 3 \cdot \Gamma_{lept.} = 2092 - 3 \cdot 226 = 1414 \text{ MeV} \end{aligned}$$

La larghezza parziale del W in una coppia di quark è proporzionale al quadrato dell'elemento opportuno della matrice CKM, quindi:

$$\frac{\Gamma(W \rightarrow u + b)}{\Gamma(W \rightarrow u + d)} = \frac{|V_{ub}|^2}{|V_{ud}|^2} = \left(\frac{4.31 \cdot 10^{-3}}{0.97377} \right)^2 \cong 2 \cdot 10^{-5}$$

La sezione d'urto totale del processo $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$ a 200 GeV nel centro di massa vale 16.5 pb. Sapendo che il B.R. del decadimento del W in una coppia di leptoni è circa 11%, determinare le sezioni d'urto parziali nel canale completamente adronico (cioè tutti e due i W decadono adronicamente); completamente leptonic e semileptonico.

Il W può decadere in tre coppie di leptoni (elettrone più neutrino, muone più neutrino e tau più neutrino), quindi il B.R. leptonic del W è: $3 \times 11 = 33\%$;
mentre il B.R. del decadimento adronico è $100 - 33 = 67\%$

La probabilità che tutti e due i W decadono leptonicamente è uguale al prodotto delle due probabilità che uno decada leptonicamente, e così via, tenendo presente che nel canale semileptonico occorre moltiplicare per 2 perché vi sono due combinazioni diverse che danno lo stesso risultato finale (decade leptonic il primo W oppure il secondo)

$$B.R.(WW \rightarrow lept.) = B.R.(W \rightarrow lept) \times B.R.(W \rightarrow lept) = 0.33 \times 0.33 = 0.11$$

$$B.R.(WW \rightarrow hadr.) = B.R.(W \rightarrow hadr) \times B.R.(W \rightarrow hadr) = 0.67 \times 0.67 = 0.45$$

$$B.R.(WW \rightarrow semilept.) = 2 \times B.R.(W \rightarrow lept) \times B.R.(W \rightarrow had) = \\ = 2 \times 0.33 \times 0.67 = 0.44$$

Per trovare le sezioni d'urto parziali è sufficiente moltiplicare la sezione d'urto totale per i B.R. appena trovati:

$$\sigma_{(WW \rightarrow lept.)} = \sigma_{tot} \times B.R.(WW \rightarrow lept) = 16.5 \times 0.11 = 1.815 \text{ pb}$$

$$\sigma_{(WW \rightarrow hadr.)} = \sigma_{tot} \times B.R.(WW \rightarrow hadr) = 16.5 \times 0.45 = 7.425 \text{ pb}$$

$$\sigma_{(WW \rightarrow semilept.)} = \sigma_{tot} \times B.R.(WW \rightarrow semilept) = 16.5 \times 0.44 = 7.260 \text{ pb}$$