

Memento: simmetrie e leggi di conservazione

- Leggi di conservazione
- simmetrie continue e discrete
- numero barionico e leptonico
- parità, coniugazione di carica
- Isospin

Leggi di conservazione

Tutto ciò che non è proibito accade

$$n \rightarrow p + e^- ; p \rightarrow n + e^+ + \nu ; \mu \rightarrow e + \gamma$$

- Se non accade vuol dire che è violata qualche legge di conservazione.

1. Leggi di conservazione “sacre”: derivano da una simmetria della Lagrangiana (teorema di Noether)

- *Traslazione temporale* → *energia*
- *Traslazione spaziale* → *quantità di moto*
- *Invar. per rotazione* → *momento angolare*
- *Invar. di gauge (U(1))* → *carica elettrica*
- *etc... etc...*

2. Leggi di conservazione “empiriche”: non sono “protette” da una simmetria della Lagrangiana e potrebbero venire violate in qualche processo

- *ad esempio il numero leptonico o numero barionico*

Due tipi di simmetrie

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad ; \quad \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

U = operatore unitario della simmetria

- **Simmetrie continue:**

esempio traslazione spaziale.

- si ricavano dall'identità facendo trasformazioni infinitesime;
- Esiste un generatore della trasformazione:

$$U(\alpha) = e^{i\alpha F}$$

α = parametro reale ;
 F = generatore della trasf.

|

- F è un operatore hermitiano che commuta con l'hamiltoniana \rightarrow è un osservabile.
 - **numeri quantici additivi.**
- **Simmetrie discrete:** esempio parità.
 - non si ricavano facendo piccoli passi
 - **numeri quantici moltiplicativi.**

Numero barionico

- Sperimentalmente si osservò che nelle reazioni nucleari il numero di nucleoni si conservava; questo continuava ad essere vero anche considerando i fermioni “strani” come Λ e Σ .
- Stueckelberg ipotizzò che si doveva conservare il numero barionico.
- Oggi diciamo che in una reazione si deve conservare il numero di quark meno il numero di antiquark:

$$B = N_q - N_{\bar{q}}$$

- Tuttavia non si riesce ancora a trovare una simmetria dell'Hamiltoniana che tenga conto di questo effetto, per cui ci sono teorie che violano la conservazione del numero barionico.
- La violazione del numero barionico è uno degli ingredienti “base” per spiegare la “scomparsa” dell'antimateria.

Numero leptonico

- Sperimentalmente si osserva che anche il numero leptonico si conserva.
- Inoltre si hanno (avevano) tre leggi di conservazione separate per i tre leptoni, perché non esiste il decadimento:

$$\mu \rightarrow e + \gamma \quad \text{ma} \quad \mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$\text{B.R.}(\mu \rightarrow e + \gamma) < 10^{-11} \quad [\text{limite sperimentale}]$$

- Tuttavia negli ultimi anni si è osservata l'oscillazione dei neutrini (l'autostato di massa non è uguale all'autostato di sapore), quindi il numero leptonico non si conserva più separatamente.

$$\text{B.R.}(\mu \rightarrow e + \gamma) \approx 10^{-55} \quad [\text{valore del MS}]$$

- Nuove teorie (es. SUSY) prevedono:

$$\text{B.R.}(\mu \rightarrow e + \gamma) \approx 10^{-11-15}$$

$$\text{B.R.} \approx 10^{-13} \quad [\text{sensitivita' aspet. MEG}]$$

Parità

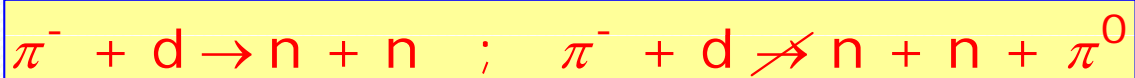
$$x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$$

- Gli autovalori di P sono: **+1** e **-1**
- Una funzione d'onda può avere o non avere una parità definita. Nel caso l'avesse può essere pari (autovalore +1) oppure dispari (autovalore -1).
Esempio: armoniche sferiche.

- La parità delle armoniche sferiche è:

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) \rightarrow Y_l^m(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

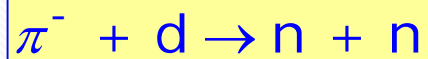
- Nelle interazioni forti e e.m. la parità è conservata.
Alcune reazioni non sono state osservate, mentre altre avvengono, ad esempio:



ciò si può spiegare assegnando al pione una **parità intrinseca**.

Parità del pione: η_π

È stata misurata dall'assorbimento di pioni lenti in deuterio



deutone: $S_d = 1 \Rightarrow \eta_d = 1 \left[\eta = (-1)^{L+S+1} \right]$

- La conservazione della parità richiede:

$$\eta_\pi \cdot \eta_d \cdot (-1)^{L_i} = \eta_d \cdot \eta_d \cdot (-1)^{L_f}$$

$$\eta_d = 1, \quad \eta_d \cdot \eta_d = 1, \quad L_i = 0 \Rightarrow \eta_\pi = (-1)^{L_f}$$

- I due neutroni sono due fermioni identici, quindi la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica. Lo stato iniziale ha $J=1$ perché $S_\pi = 0, S_d=1$ e $L_i = 0$.

$$\begin{aligned} |\psi_{nn}^{(1)}\rangle &= |J=1, S=1, L_f=0, 2\rangle \Rightarrow \psi \text{ simmetrica} \\ |\psi_{nn}^{(2)}\rangle &= |J=1, S=1, L_f=1\rangle \Rightarrow \psi \text{ antisimmetrica} \\ |\psi_{nn}^{(3)}\rangle &= |J=1, S=0, L_f=0, 2\rangle \Rightarrow \psi \text{ simmetrica} \end{aligned}$$



$$\eta_\pi = (-1)^1 = -1$$

Coniugazione di carica

- L'operatore coniugazione di carica trasforma una particella nella sua antiparticella, la quale ha tutti i numeri quantici interni di segno opposto (carica, stranezza, momento magnetico, etc...).

➔ Solo le particelle “neutre” possono essere autostati dell'operatore di carica.

$$C|\alpha, \psi\rangle = C_\alpha|\alpha, \psi\rangle \quad [\text{autostato di } C]$$
$$C|a, \psi\rangle = |\bar{a}, \psi\rangle \quad [\bar{a}=\text{antiparticella di } a]$$

- Gli autovalori C_α sono **+1 e -1**.
- Autostati di C si possono costruire con coppie particelle-antiparticelle dove l'operatore C scambia le due particelle.
- Se lo stato è simmetrico o antisimmetrico per via dello scambio, si ha:

$$C|a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle = |\bar{a}, \psi_1; a, \psi_2\rangle = \pm|a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle$$

in questo caso $|a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle$ e' un autostato di C

Stato $\pi^+ \pi^-$

- Prendiamo una coppia $\pi^+ \pi^-$ in uno stato di momento angolare orbitale L :

$$C |\pi^+ \pi^-, L\rangle = (-1)^L |\pi^+ \pi^-, L\rangle$$

perché scambiare i due pioni è equivalente ad invertire le loro posizioni spaziali.

- N.B. ricordiamo che lo spin del pione è zero, quindi non va considerata la parte di spin nella funzione d'onda.

Stato $f\bar{f}$

- coppia di fermioni di spin $\frac{1}{2}$
 - da tenere presente che:

$$\begin{array}{l}
 |\uparrow\uparrow\rangle \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad ; \quad |\downarrow\downarrow\rangle \quad [Simmetrica] \\
 S=1, S_Z=1 \qquad \qquad S=1, S_Z=0 \qquad \qquad S=1, S_Z=-1 \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad [S=0, S_Z=0] \quad [antisimmetrica]
 \end{array}$$

scambiare i due fermioni introduce, a causa dello spin, un fattore $(-1)^{S+1}$

- Inoltre, a causa della parità intrinseca opposta di fermione-antifermione (vedi Dirac), occorre introdurre un altro fattore -1.

$$\begin{aligned}
 C|f\bar{f}, J, L, S\rangle &= (-1)^L \cdot (-1)^{S+1} (-1)|f\bar{f}, J, L, S\rangle = \\
 &= (-1)^{L+S} |f\bar{f}, J, L, S\rangle
 \end{aligned}$$

- Questo pone dei vincoli nell'assegnazione del contenuto dei quark alle varie particelle.

Coniugazione di carica del π^0

$$S_{\pi^0} = 0$$

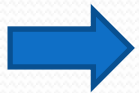
S = spin della coppia $q\bar{q}$ del π^0
 L = momento angolare orbitale di $q\bar{q}$

- La somma di S e L della coppia quark-antiquark dà lo spin del pione.

$$\Rightarrow L + S = 0 \quad \Rightarrow C_{\pi^0} = (-1)^{L+S} = (-1)^0 = 1$$

- Sperimentalmente si trova che il decadimento dominante è: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

$$C|\pi^0\rangle = C_{\pi^0}|\pi^0\rangle ;$$



$$C|\gamma\gamma\rangle = C_\gamma \cdot C_\gamma |\gamma\gamma\rangle = 1 \cdot |\gamma\gamma\rangle \text{ dato che } C_\gamma^2 = 1$$

- Per l'invarianza delle interazioni e.m. per coniug. di carica si deve avere $C_{\pi^0} = 1$ in accordo con il modello a quark.

N.B. : $C_\gamma = -1$ perché $(q \rightarrow -q ; E, B \rightarrow -E, -B)$

\Rightarrow La C-parity di 3 fotoni è: $(C_\gamma)^3 = -1$

$$R = \frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} < 3 \cdot 10^{-8}$$

Alcuni numeri quantici conservati

- N.B. non tutte le interazioni rispettano le varie leggi di conservazione. Ad esempio:

Quantity	Strong	EM	Weak	Comments
Baryon number	Y	Y	Y	no $p \rightarrow \pi^+ \pi^0$
Lepton number(s)	Y	Y	Y	no $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$
top	Y	Y	N	discovered 1995
strangeness	Y	Y	N	discovered 1947
charm	Y	Y	N	discovered 1974,
bottom	Y	Y	N	discovered 1977
Isospin	Y	N	N	$p = n$ ($m_u \approx m_d$)
Charge con. (C)	Y	Y	N	part. \leftrightarrow anti-part.
Parity (P)	Y	Y	N	1956
CP or Time (T)	Y	Y	y/n	small No
CPT	Y	Y	Y	sacred

- Un'interazione procede nell'ordine:
 1. **interazione forte;**
 2. **interazione e.m. (ad esempio se ci sono fotoni che non interagiscono forte)**
 3. **interazione debole (ad esempio se ci sono neutrini oppure viene violata una legge di conservazione rispettata dalle interazioni forti ed elettromagnetiche).**

Esempi di reazione



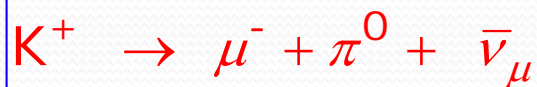
- Int. debole ; proibita (vedi numero leptonic)
-



- Int. debole ; permessa ; (energia di soglia?)
-



- Int. debole ; proibita (vedi numero barionico)
-



- Int. debole ; permessa (si conserva la stranezza?)
-



- Int. ?; permessa (B.R. 20%)

Perché non accadono?

Non è sempre così semplice

$$K^+ p \rightarrow \Lambda \pi^+ \pi^+ \quad (\text{stranezza})$$

$$B.R.(\phi(1020) \rightarrow KK) \approx 83\%$$

$$B.R.(\phi(1020) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) \approx 15\%$$

(regola di OZI)

$$\frac{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)} = \frac{195 \text{ mb}}{22 \text{ mb}} = 8.86 \approx 9$$

(isospin)

$$\frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = 1.2 \times 10^{-4}$$

(elicità)

Isospin

- Heisenberg propose nel 1932 che il protone ed il neutrone fossero due stati diversi di una stessa particella: **il nucleone**.
- Per implementare questa idea si può rappresentare il nucleone come un vettore colonna a due componenti:

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Il formalismo è identico al formalismo di Pauli per trattare lo spin dell'elettrone.
- Il protone ha $I_3 = \frac{1}{2}$ ed il neutrone $I_3 = -\frac{1}{2}$
- **Se le interazioni forti sono invarianti per rotazioni nello spazio dell'isospin, allora l'isospin si deve conservare in tutti i processi dove intervengono le interazioni forti.**

Formula di Gell-Mann - Nishijima

La terza componente dell'isospin distingue la carica all'interno di un multipletto di isospin

carica → $Q = I_3 + \frac{1}{2}(B+S)$ ← stranezza

Numero barionico

N.B. $B+S = Y$ (ipercarica)

→ $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$

L'interazione elettromagnetica rompe la simmetria di isospin. Di conseguenza le masse all'interno del multipletto sono diverse (m_p diversa da m_n)

Isospin

Vediamo una conseguenza dinamica della conservazione dell'isospin

- Supponiamo di avere due nucleoni. Dalla regola di addizione dei momenti angolari, sappiamo che l'isospin totale può essere **1** oppure **0**.

Tripletto simmetrico; $I = 1$

$$\begin{aligned} \text{a) } |1,1\rangle &= pp \\ \text{b) } |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (pn + np) \\ \text{c) } |1,-1\rangle &= nn \end{aligned}$$

Isosingoletto
antisimmetrico; $I = 0$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (pn - np)$$

- Esiste uno stato legato protone-neutrone (il deutone), ma non esistono stati legati protone-protone o neutrone-neutrone, quindi il deutone deve essere un isosingoletto, altrimenti sarebbero dovuti esistere anche gli altri due stati che differiscono per una rotazione nello spazio dell'isospin.

Scattering nucleone-nucleone

Consideriamo i processi:

$$a) p + p \rightarrow d + \pi^+$$

$$b) p + n \rightarrow d + \pi^0$$

$$c) n + n \rightarrow d + \pi^-$$

il π ha isospin 1 perché esiste in tre stati diversi.

- Dato che il deutone ha $I=0$, per i processi di destra si ha:

$$d + \pi^+ = |1,1\rangle ; d + \pi^0 = |1,0\rangle ; d + \pi^- = |1,-1\rangle$$

mentre per quelli di sinistra si ha:

$$p + p = |1,1\rangle ; p + n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,0\rangle) ; n + n = |1,-1\rangle$$

- Dato che I si deve conservare, contribuiscono solo gli stati con $I=1$. Le ampiezze di scattering devono essere nel rapporto:

$$1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$

e le σ

$$2 : 1 : 2$$

- I processi a) e b) sono stati misurati, ed una volta tenuto conto dell'interazione e.m., essi hanno il rapporto predetto.

Scattering pione-nucleone

Consideriamo le 4 reazioni:



Gli stati iniziali sono la composizione di $I=1$ e $I=1/2$ che danno $I=1/2$ e $I=3/2$

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$$

- Esprimiamo i vari stati nella base dell'isospin totale usando i coefficienti di Clebsch-Gordan

$$|\pi^+, p\rangle = \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle \quad ; \quad |\pi^-, p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$
$$|\pi^-, n\rangle = \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \quad ; \quad |\pi^0, n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Scattering pione-nucleone

- Scriviamo i 4 processi nella nuova base:

$$a) \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle \rightarrow \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle$$

$$b) \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$c) \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$d) \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle \rightarrow \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$$

- Per calcolare le ampiezze di probabilità occorre fare il prodotto scalare: $\langle f|S|i\rangle$

$$\left\langle \frac{3}{2}, I_3 \right| S \left| \frac{3}{2}, I_3 \right\rangle = A_{3/2} ; \quad \left\langle \frac{1}{2}, I_3 \right| S \left| \frac{1}{2}, I_3 \right\rangle = A_{1/2}$$

$$\text{N.B. } A_{1/2} \neq A_{3/2}$$

$$a) A_{\text{tot}} = A_{3/2}$$

$$b) A_{\text{tot}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} A_{1/2} \right)$$

$$c) A_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{3} A_{3/2} + \frac{2}{3} A_{1/2} \right)$$

$$d) A_{\text{tot}} = A_{3/2}$$

N.B. le interazioni forti non mescolano stati con isospin diverso

Scattering pione-nucleone

- Le sezioni d'urto dei 4 processi saranno proporzionali, tramite un fattore K uguale per tutti (tiene conto dello spazio delle fasi, fattori 2π , etc...), a:

$$a) \sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p) = K \left| A_{3/2} \right|^2$$

$$b) \sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n) = K \left| \frac{\sqrt{2}}{3} A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} A_{1/2} \right|^2$$

$$c) \sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p) = K \left| \frac{1}{3} A_{3/2} + \frac{2}{3} A_{1/2} \right|^2$$

$$d) \sigma(\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n) = K \left| A_{3/2} \right|^2$$

- Da queste relazioni si evince che i processi a) e d) devono avere la stessa sezione d'urto alla stessa energia. Questo è verificato sperimentalmente.
- Per gli altri processi occorre conoscere $A_{1/2}$ e la fase relativa tra le ampiezze.

La risonanza Δ

- La risonanza Δ ha isospin $3/2$ (esiste in 4 stati di carica diversa), quindi i processi in cui compare la Δ come risonanza di formazione posso procedere solo attraverso il canale con $I=3/2$, quindi:

$$\text{a) } \sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p) = K \left| A_{3/2} \right|^2$$

$$\text{b) } \sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n) = K \left| \frac{\sqrt{2}}{3} A_{3/2} \right|^2 = \frac{2}{9} \left| A_{3/2} \right|^2$$

$$\text{c) } \sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p) = K \left| \frac{1}{3} A_{3/2} \right|^2 = \frac{1}{9} \left| A_{3/2} \right|^2$$

$$\text{d) } \sigma(\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n) = K \left| A_{3/2} \right|^2$$

- Da queste relazioni si evince ora che:

$$\frac{\sigma(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p)}{\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p)} = 9 ; \quad \frac{\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n)}{\sigma(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p)} = 2$$

che abbiamo verificato essere vero.

Coefficienti di Clebsch-Gordan

35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation: $\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$

$1/2 \times 1/2$

1	0
+1/2 +1/2	0
+1/2 -1/2	1/2 1/2
-1/2 +1/2	1/2 -1/2
-1/2 -1/2	1

$1 \times 1/2$

3/2	1/2
+1 +1/2	1 +1/2 +1/2
+1 -1/2	1/3 2/3
0 +1/2	2/3 -1/3
0 -1/2	2/3 1/3
-1 +1/2	1/3 -2/3
-1 -1/2	1

2×1

3	2
+2 +1	1 +2 +2
+2 0	1/3 2/3
+1 +1	2/3 -1/3
+1 0	1/3 2/3
0 +1	2/3 -1/3
0 0	1

1×1

2	1
+1 +1	1 +1
+1 0	1/2 1/2
0 +1	1/2 -1/2
0 0	1

$Y_l^{-m} = (-1)^m Y_l^{m*}$

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$d_{m,0}^{\ell} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell}^m e^{-im\phi}$

$2 \times 1/2$

5/2	3/2
+2 +1/2	1 +3/2 +3/2
+2 -1/2	1/5 4/5
+1 +1/2	2/5 -1/5
+1 -1/2	2/5 3/5
0 +1/2	3/5 -2/5
0 -1/2	3/5 2/5
-1 +1/2	1/5 -4/5
-1 -1/2	1/5 4/5

$3/2 \times 1/2$

3	1
+3/2 +1/2	1 +1 +1
+3/2 -1/2	1/4 3/4
+1/2 +1/2	3/4 -1/4
+1/2 -1/2	1/2 1/2
-1/2 +1/2	1/2 -1/2
-1/2 -1/2	1

$3/2 \times 1$

5/2	3/2
+3/2 +1	1 +3/2 +3/2
+3/2 0	2/5 3/5
+1/2 +1	3/5 -2/5
+1/2 0	3/5 2/5
-1/2 +1	1/10 2/5 1/2
-1/2 0	3/5 1/15 -1/3
-1/2 -1	3/10 -8/15 1/6
0 -1	2/5 1/2 1/10
-1 0	8/15 -1/6 -3/10
-2 +1	1/15 -1/3 3/5
-2 0	1/3 -2/3 -3
-2 -1	1

$3/2 \times 1/2$

3	1
+3/2 +1/2	1 +1 +1
+3/2 -1/2	1/10 2/5 1/2
+1/2 +1	3/5 1/15 -1/3
+1/2 0	3/10 -8/15 1/6
-1/2 +1	1/10 2/5 1/2
-1/2 0	3/5 1/15 -1/3
-3/2 +1	1/10 -2/5 1/2
-3/2 -1	3/5 2/5 5/2
-1/2 -1	3/5 2/5 5/2
-3/2 0	2/5 -3/5 -5/2
-3/2 -1	1

$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM)$
 $= (-1)^{J-j_1-j_2} (j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 JM)$

Notation: $\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$

m_1	m_2	Coefficients
m_1	m_2	
\dots	\dots	
\dots	\dots	

$1 \times 1/2$

3/2	1/2
+1 +1/2	1 +1/2 +1/2
+1 -1/2	1/3 2/3
0 +1/2	2/3 -1/3
0 -1/2	2/3 1/3
-1 +1/2	1/3 -2/3
-1 -1/2	1

$1/2 \times 1/2$

1	0
+1	1 0
+1/2 +1/2	1 0 0
+1/2 -1/2	1/2 1/2 1
-1/2 +1/2	1/2 -1/2 -1
-1/2 -1/2	1

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient,

Si abbia un sistema composto da una Σ^- ed un protone. Scrivere la funzione d'onda del sistema in termini degli stati di isospin totale del sistema e calcolare la probabilità di trovare il sistema in uno stato di spin isotopico totale $\frac{1}{2}$

• La Σ^- ha $I=1$ e $I_3=-1$, mentre il protone ha $I=1/2$ e $I_3 = +1/2$, combinando insieme i due stati si può avere come isospin totale $\frac{1}{2}$ oppure $3/2$ e come terza componente $-1/2$.

$$|\Sigma^- p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

• la probabilità di trovare il sistema in uno stato di isospin totale $\frac{1}{2}$ è di $2/3$

Il barione Λ decade in protone $- \pi^-$ oppure in neutrone $- \pi^0$. Nel decadimento il quark s della Λ si trasforma in un quark u del nucleone, quindi il suo isospin forte varia di $\frac{1}{2}$. Assumendo che nel decadimento della Λ questa regola di selezione venga rispettata e trascurando altre correzioni, qual è il rapporto che ci si aspetterebbe tra il B.R. in $p- \pi^-$ rispetto a quello in $n- \pi^0$?

Il nucleone ha isospin $\frac{1}{2}$ mentre il pione ha isospin 1, quindi un nucleone più un pione possono dare isospin totale uguale a $\frac{1}{2}$ oppure $\frac{3}{2}$. La Λ ha isospin zero, quindi nella funzione d'onda del sistema nucleone-pione occorre prendere in considerazione soltanto la componente con isospin $\frac{1}{2}$, per la regola di selezione $\Delta I=1/2$

$$p + \pi^- = \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle + |1; -1\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$n + \pi^0 = \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + |1; 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle$$

La probabilità di transizione è proporzionale al quadrato della funzione d'onda:

$$\frac{B.R.(\Lambda \rightarrow p + \pi^-)}{B.R.(\Lambda \rightarrow n + \pi^0)} = \frac{|\langle p + \pi^- | \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \rangle|^2}{|\langle n + \pi^0 | \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \rangle|^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

I valori sperimentali sono: $B.R.(\Lambda \rightarrow p + \pi^-) = 63.9\%$; $B.R.(\Lambda \rightarrow n + \pi^0) = 35.8\%$

$$\frac{B.R.(\Lambda \rightarrow p + \pi^-)}{B.R.(\Lambda \rightarrow n + \pi^0)} = \frac{63.9}{35.8} = 1.78$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con $\Delta I=3/2$

Il K_S^0 può decadere in due pioni carichi oppure in due pioni neutri. Trovare il rapporto tra il B.R. del decadimento in pioni neutri rispetto a quello in pioni carichi. Si ricorda che per ragioni di simmetria lo stato finale deve avere isospin totale zero

Nei decadimento deboli con $\Delta S=1$ si ha $\Delta I=1/2$, quindi dato che il K ha $I=1/2$, lo stato finale dei due pioni deve avere $I=0$ oppure $I=1$. La funzione d'onda dei due pioni deve essere simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle, quindi dato che essi hanno spin zero e si trovano in uno stato di momento angolare $l=0$, anche la parte di isospin deve essere simmetrica, quindi $I=0$.

Utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan si ha:

$$\begin{aligned} |0;0\rangle &= +\sqrt{\frac{1}{3}}|1,+1;1-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1;1+1\rangle = \\ &= +\sqrt{\frac{1}{3}}\pi^+\pi^- - \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^0\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^-\pi^+ \end{aligned}$$

Di conseguenza abbiamo:

$$\frac{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0)}{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)} = \frac{|\langle \pi^0 \pi^0 | 0;0 \rangle|^2}{|\langle \pi^+ \pi^- | 0;0 \rangle|^2} = \frac{1}{2}$$

I valori sperimentali sono:

$$\begin{aligned} B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0) &= 30.7\% \quad ; \quad B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) = 69.2\% \\ \frac{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0)}{B.R.(K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-)} &= \frac{30.7}{69.2} = 0.44 \end{aligned}$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con $\Delta I=3/2$

Dedurre attraverso quali canali di isospin possono avvenire le seguenti due reazioni: a) $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$; b) $K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, trovare il rapporto tra le sezioni d'urto σ_a/σ_b

Ricordiamo l'isospin totale e la terza componente delle particelle coinvolte nella reazione e scriviamo lo stato iniziale ed i due stati finali in termini degli autostati di isospin utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan.

$$K^- = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle ; p = \left| I = \frac{1}{2}; I_3 = \frac{1}{2} \right\rangle \quad \rightarrow \quad K^- + p = +\sqrt{\frac{1}{2}} |1; 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |0; 0\rangle$$

$$\Sigma^0 = \left| I = 1; I_3 = 0 \right\rangle ; \pi^0 = \left| I = 1; I_3 = 0 \right\rangle \quad \rightarrow \quad \Sigma^0 + \pi^0 = +\sqrt{\frac{2}{3}} |2; 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0; 0\rangle$$

$$\Sigma^+ = \left| I = 1; I_3 = 1 \right\rangle ; \pi^- = \left| I = 1; I_3 = -1 \right\rangle \quad \rightarrow \quad \Sigma^+ + \pi^- = +\sqrt{\frac{1}{6}} |2; 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |1; 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |0; 0\rangle$$

Di conseguenza la reazione a) può avvenire soltanto attraverso il canale di isospin totale 0, mentre la reazione b) può avvenire attraverso il canale con isospin 0 ed anche con isospin 1.

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, allora il rapporto tra le sezioni d'urto è pari al rapporto dei quadrati dei coefficienti di C.G. dell'autostato di isospin 0 nei due stati finali:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{\left| \langle \Sigma^0 + \pi^0 | 0; 0 \rangle \right|^2}{\left| \langle \Sigma^+ + \pi^- | 0; 0 \rangle \right|^2} = \frac{\left| -\sqrt{\frac{1}{3}} \right|^2}{\left| \sqrt{\frac{1}{3}} \right|^2} = 1$$