Teorie di Gauge
e
Modello Standard

- Trasformazione di gauge globale e locale
- Derivata covariante e Lagrangiana della QED
- SU(2) e campi di Yang-Mills
- Modello di Glashow-Weinberg-Salam
- Rottura spontanea di una simmetria discreta e di una continua
- Teorema di Goldstone
- Meccanismo di Higgs
- Massa dei bosoni di gauge e angolo di Weinberg
- Massa dei fermioni

Teorie di Gauge

- Invarianza di gauge globale:

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{iQ\Lambda} \cdot \Psi(x)$$ ➡ Conservazione della carica Q

- Facciamo una trasformazione nella quale il parametro Λ sia una funzione dello spazio-tempo:

$$\Lambda = \Lambda(x)$$

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{iq\Lambda(x)} \cdot \Psi(x)$$
$$\bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}'(x) = e^{-iq\Lambda(x)} \cdot \bar{\Psi}(x)$$

- Lagrangiana di Dirac di una particella libera:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

Invarianza di gauge locale

$$\mathscr{L} = i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

- La Lagrangiana di Dirac non è invariante per una trasformazione di gauge locale.
  - termine di massa:

$$m\bar{\Psi}\Psi = m\bar{\Psi}(x)\cdot e^{-iq\Lambda(x)}\cdot e^{iq\Lambda(x)}\Psi(x) = m\bar{\Psi}\Psi \Rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

  - termine cinetico:

$$\partial_{\mu}\Psi \to \partial_{\mu}\Psi' = \partial_{\mu}\left(e^{iq\Lambda(x)}\cdot\Psi(x)\right) =$$
$$= e^{iq\Lambda(x)}\cdot\partial_{\mu}\Psi(x) + iq\cdot e^{iq\Lambda(x)}\Psi(x)\cdot\partial_{\mu}\Lambda(x)$$

$$\Rightarrow \partial_{\mu}\Psi \neq \partial_{\mu}\Psi'$$ viola l'invarianza di gauge locale

Derivata covariante

- Per conservare l'invarianza si introduce la derivata covariante:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x)$$

(sostituzione minimale)

- A_μ è un campo vettoriale (il campo del fotone) che, attraverso la trasformazione di gauge, si trasforma come:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x)$$

- La derivata covariante è invariante per una trasformazione di gauge:

$$D_\mu \Psi \rightarrow D_\mu \Psi' = e^{iq\Lambda(x)} D_\mu \Psi$$

Verifica dell'invarianza della Der. Cov.

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu + iqA_\mu(x)\right)\Psi(\mathrm{x}) \rightarrow \left(\partial_\mu + iqA_\mu(x) - iq\partial_\mu\Lambda(x)\right)e^{iq\Lambda(x)}\Psi(\mathrm{x}) =$$

$$= e^{iq\Lambda(x)}\partial_\mu\Psi(\mathrm{x}) + \cancel{\mathrm{i}q\partial_\mu\Lambda(x)\cdot e^{iq\Lambda(x)}\Psi(\mathrm{x})} +$$

$$+ \mathrm{i}qA_\mu(x)\cdot e^{iq\Lambda(x)}\Psi(\mathrm{x}) \cancel{- iq\partial_\mu\Lambda(x)\cdot e^{iq\Lambda(x)}\Psi(\mathrm{x})} =$$

$$= e^{iq\Lambda(x)}\left(\partial_\mu + iqA_\mu(x)\right)\Psi(\mathrm{x}) = e^{iq\Lambda(x)}D_\mu\Psi(x)$$

Lagrangiana della QED

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

- Questa è invariante per una trasf. di gauge locale.

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi =$$
$$= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - qA_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi = \mathcal{L}_{free} - J^\mu A_\mu$$

termine di int. e.m.

$$\left(J^\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi : \text{corrente e.m.} \right)$$

- Per completezza occorre aggiungere alla Lagrangiana il termine cinetico di A_μ :

$$\mathcal{L}_{free}(fotone) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \left[F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right]$$

- N.B. se il fotone avesse massa, bisognerebbe aggiungere alla Lagrangiana un termine del tipo: $\frac{1}{2}m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$

  il quale romperebbe l'invarianza di gauge locale.

$$A_\mu A^\mu \rightarrow \left(A_\mu - \partial_\mu \Lambda\right)\left(A^\mu - \partial^\mu \Lambda\right) \neq A_\mu A^\mu$$

Simmetria SU(2) e campi di Yang-Mills

- Consideriamo un doppietto di SU(2):

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

Ψ_1 e Ψ_2 sono due spinori di Dirac

- La Lagrangiana si può scrivere come:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

$$\bar{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix}$$

- Richiediamo che la Lagrangiana sia invariante per una trasformazione di gauge locale (infinitesima):

$$\Psi(x) \to \left[1 - ig\vec{\Lambda}(x)\cdot\vec{I}\,\right]\Psi(x)$$

$\vec{I} = \left(I_1\ ,\ I_2\ ,\ I_3\right)$ sono gli operatori di isospin

$$\left[I_i\ ,\ I_j\right] = \varepsilon_{1jk} I_k$$

Derivata covariante dei campi di Y-M

- Introduciamo la derivata covariante:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\vec{I} \cdot \vec{W}_\mu(x)$$

(g=costante di accoppiamento)

- I campi vettoriali W_μ si trasformano come:

$$\vec{W}_\mu(x) \rightarrow \vec{W}_\mu(x) - \partial_\mu \vec{\Lambda}(x) + g\vec{\Lambda}(x) \times \vec{W}_\mu(x)$$

- Il termine cinetico dei W_μ è: $\mathscr{L}_{free}(W) = -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu} \cdot \vec{W}^{\mu\nu}$

$$\left[\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu\right]$$

Self-coupling dei bosoni di gauge

- N.B. anche qui i bosoni devono avere massa nulla.

Modello di Glashow-Weinberg-Salam

- Nel modello le particelle sono classificate come:

Doppietto di isospin debole

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad ; \quad e^-_R \quad ; \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad ; \quad u_R \quad ; \quad d'_R$$

- Glashow introdusse anche l'ipercarica debole:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$$

	I	I_3	Q	Y
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
e^-_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e^-_R	0	0	-1	-2
u_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
d'_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
u_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
d'_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

- Il doppietto di isospin debole può essere ruotato nello spazio $SU(2)_L$ e la Lagrangiana deve essere invariante.

- Anche trasformazioni della simmetria $U(1)_Y$ devono lasciare la Lagrangiana invariante.

Gruppo di simmetria del modello:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

Lagrangiana del modello GWS

- La Lagrangiana libera del modello si scrive come:

$$\mathscr{L}_{free} = i\bar{\Psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_L + i\bar{\Psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_R$$

- Facciamo una trasformazione di gauge locale infinitesima

$SU(2)_L$

$$\Psi_L(x) \to \left[1 - ig\vec{\Lambda}(x)\cdot\vec{I}\right]\Psi_L(x)$$

$$\Psi_R(x) \to \Psi_R(x)$$

$\vec{\Lambda}(x)$: vettore nello spazio dell'isospin debole

$U(1)_Y$

$$\Psi_L(x) \to \left[1 - i\frac{g'}{2}\lambda(x)\cdot Y\right]\Psi_L(x)$$

$$\Psi_R(x) \to \left[1 - i\frac{g'}{2}\lambda(x)\cdot Y\right]\Psi_R(x)$$

- Occorre introdurre la derivata covariante:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\vec{I}\cdot\vec{W}_\mu(x) + i\frac{g'}{2}\mathrm{Y}\cdot\mathrm{B}_\mu$$

Lagrangiana del modello GWS

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\vec{I}\cdot\vec{W}_\mu(x) + i\frac{g'}{2}\mathrm{Y}\cdot\mathrm{B}_\mu$$

- I bosoni vettore devono trasformarsi nel modo seguente:

$\mathrm{SU}(2)_L$

$$\vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu + \partial_\mu\vec{\Lambda}(x) + g\vec{\Lambda}(x)\times\vec{W}_\mu$$
$$B_\mu \to B_\mu$$

$\mathrm{U}(1)_Y$

$$\vec{W}_\mu \to \vec{W}_\mu$$
$$B_\mu \to B_\mu + \partial_\mu\lambda(x)$$

- Termine cinetico dei bosoni vettore: $\mathscr{L}_{free}(\vec{W},B) = -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}\cdot B^{\mu\nu}$
- Lagrangiana completa:

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}_L\gamma^\mu\left[i\partial_\mu - g\vec{I}\cdot\vec{W}_\mu(x) - \frac{g'}{2}Y\cdot B_\mu\right]\Psi_L + \bar{\Psi}_R\gamma^\mu\left[i\partial_\mu - \frac{g'}{2}Y\cdot B_\mu\right]\Psi_R + \mathscr{L}_{free}(\vec{W},B)$$

N.B. non ci sono termini di massa per i bosoni di gauge perché rompono la simmetria di gauge locale

N.N.B. non c'e' $m\bar{\Psi}\Psi$ perche' $\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R$

Lagrangiana $\lambda\varphi^4$

- Lagrangiana di un campo scalare: $\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi + m^2\varphi = 0 \quad \text{[eq. del moto]}$$

(particelle di spin 0 e massa m)

- Consideriamo ora:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

μ e λ sono costanti, con $\mu^2 < 0$; $\lambda > 0$

N.B. *se* $\mu^2 < 0$, allora $-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2$ non puo' essere il termine di massa.

- Osservazione: la Lagrangiana ha simmetria di riflessione ($\varphi \to -\varphi$).

N.B. Il calcolo delle ampiezze di scattering con la tecnica dei diagrammi di Feynman è un metodo perturbativo dove i campi sono trattati come fluttuazioni intorno ad uno stato di minima energia: lo stato fondamentale (il vuoto, $\varphi=0$).

Nel caso presente $\varphi=0$ non è lo stato fondamentale.

Rottura spontanea di una simmetria discreta

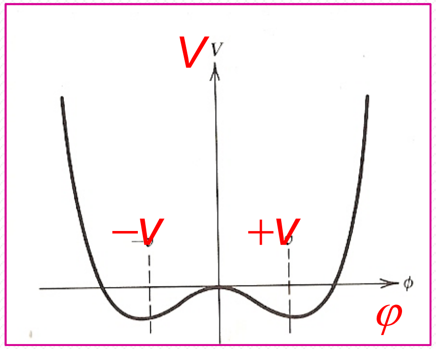
- Consideriamo la Lagrangiana come un termine cinetico $T = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)$ meno un termine di energia potenziale V pari a:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

- I minimi corrispondo a: $\frac{\partial V}{\partial\varphi} = \varphi\left(\mu^2 + \lambda\varphi^2\right) = 0$

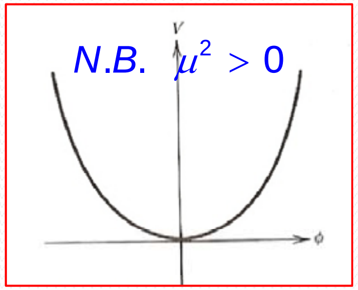
$\varphi = 0;$

$\varphi = \pm v \quad ; \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$



Scegliamo il minimo φ=v come stato fondamentale ed introduciamo il campo χ(x)

$$\varphi(x) = v + \chi(x)$$



$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\chi) - \lambda v^2\chi^2 - \lambda v\chi^3 - \frac{1}{4}\lambda\chi^4 + \frac{1}{4}\lambda v^4$$

termine di massa — self-interaction — è una costante

$$m_\chi = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$$

N.B. Si poteva anche scegliere di sviluppare φ(x) intorno a -v

Sebbene la Lagrangiana abbia una simmetria per riflessione, lo stato fondamentale non ha questa simmetria, e quando ne scegliamo uno rompiamo la simmetria.

Questa è la rottura spontanea di simmetria

Rottura spontanea di una simmetria continua

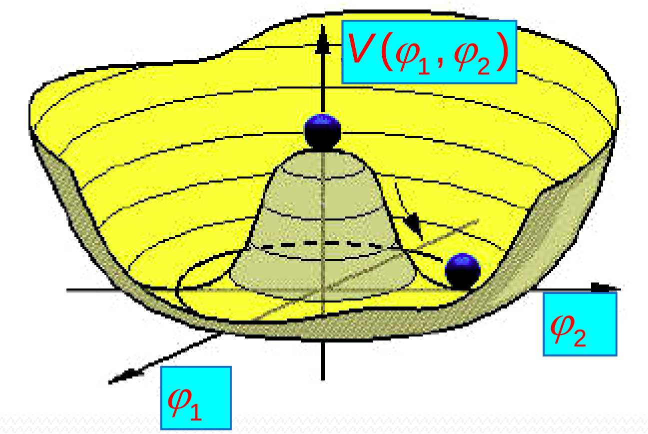
- Campo scalare complesso: $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$

$$\mathscr{L} = \left(\partial_\mu \varphi\right)^* \left(\partial^\mu \varphi\right) - \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi_2\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)^2$$

- La Lagrangiana è invariante per U(1): $\varphi \to \varphi' = e^{i\alpha}\varphi$

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}\mu^2\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)^2$$



- La condizione di minimo si ha sul cerchio:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2 \quad ; \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

- Scegliamo come minimo intorno al quale fare lo sv. pert. $\varphi_1 = v \;\; ; \;\; \varphi_2 = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= v + \chi_1(x) \\ \varphi_2(x) &= \chi_2(x) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \chi_1(x) + i\chi_2(x)\right)$$

Teorema di Goldstone

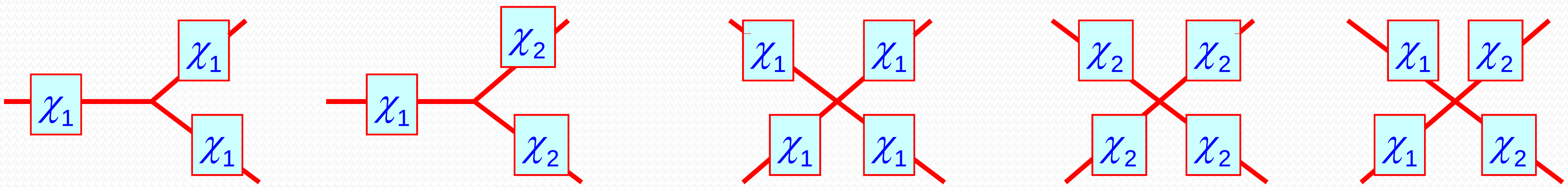
- Dopo la scelta del minimo, la Lagrangiana diventa:

$$\mathscr{L} = \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \chi_1\right)\left(\partial^\mu \chi_1\right) - \lambda v^2 \chi_1^2\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \chi_2\right)\left(\partial^\mu \chi_2\right)\right] - \left[\lambda v\left(\chi_1^3 + \chi_1\chi_2^2\right) + \frac{1}{4}\lambda\left(\chi_1^4 + \chi_2^4 + 2\chi_1^2\chi_2^2\right)\right] + \frac{1}{4}\lambda v^4$$

$$m_{\chi_1} = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} > 0$$

$$m_{\chi_2} = 0$$

- Il terzo termine rappresenta le self-interaction:



- Il secondo termine rappresenta un campo scalare con massa nulla (bosone di Goldstone)
- Potete "muovervi" lungo i minimi senza "sprecare" energia.

Teorema di Goldstone: la rottura spontanea di una simmetria continua genera uno (o più) bosoni scalari a massa nulla.

Il meccanismo di Higgs

- Il meccanismo di Higgs corrisponde alla rottura spontanea della simmetria di una Lagrangiana che è invariante per una trasformazione di gauge locale.

⇒ **Teorema di Goldstone + bosoni di gauge**

- Consideriamo la Lagrangiana $\lambda\varphi^4$ con la derivata covariante:

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\varphi^* \left(\partial^\mu + iqA^\mu\right)\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi - \lambda\left(\varphi^*\varphi\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1 + i\varphi_2\right)$$

la quale è invariante per la trasformazione di gauge U(1):

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{iq\Lambda(x)} \cdot \varphi(x)$$

- Se $\mu^2<0$ bisogna sviluppare il campo φ intorno ad un minimo diverso da $\varphi=0$, ad esempio:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= v + \chi_1(x)\\ \varphi_2(x) &= \chi_2(x)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \chi_1 + i\chi_2\right)$$

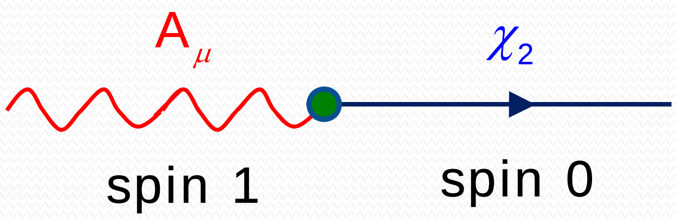
Il meccanismo di Higgs

- La Lagrangiana diventa:

$$\mathscr{L} = \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_1)(\partial^\mu \chi_1) - \lambda v^2 \chi_1^2\right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_2)(\partial^\mu \chi_2)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\nu - q v A_\mu \partial^\mu \chi_2 + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{ termini di interazione}$$

- Analizziamo la Lagrangiana:
  - campo scalare χ_1 con massa $m_{\chi_1} = \sqrt{2\lambda v^2}$
  - bosone di Goldstone χ_2 privo di massa
  - il bosone di gauge A_μ ha acquistato un termine di massa $m_A = qv$

- Tuttaviail termine $A_\mu \partial^\mu \chi_2$, che sembrerebbe permettere al bosone A_μ di trasformarsi in χ_2 mentre si propaga, getta dei dubbi su questa interpretazione



Gradi di libertà della Lagrangiana

- Prima della rottura spontanea della simmetria:
  - 2 campi scalari reali φ_1 e φ_2,
  - 2 stati di elicità di A_μ (spin 1, massa zero)

    $\rightarrow$ 4 gradi di libertà .

- Dopo la rottura spontanea della simmetria:
  - 2 campi scalari reali χ_1 e χ_2,
  - 3 stati di elicità di A_μ (spin 1, massa diversa da zero)

    $\rightarrow$ 5 gradi di libertà .

$\Rightarrow$ **NON VA BENE.**

Per trovare la via d'uscita a questo problema, occorre ricordarsi che è sempre possibile fare una trasformazione di gauge locale

Trasformazione di gauge locale

- Cambiamo la parametrizzazione di φ(x) utilizzando il "modulo" e la "fase":

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + H(x)\right]e^{i\frac{\theta(x)}{v}}$$

$H(x)$ e $\theta(x)$ sono campi reali

- Facciamo una trasformazione di gauge in modo da eliminare il campo θ(x):

$$\varphi'(x) = e^{iq\Lambda(x)}\varphi(x)$$
$$\Rightarrow \left[v + H'(x)\right]e^{i\frac{\theta'(x)}{v}} = e^{iq\Lambda(x)}\left[v + H(x)\right]e^{i\frac{\theta(x)}{v}}$$

$$\Rightarrow \quad H'(x) = H(x)$$
$$\theta'(x) = \theta(x) + qv \cdot \Lambda(x)$$

- Se scegliamo: $\Lambda(x) = -\frac{1}{qv}\theta(x)$ $\Rightarrow$ $\theta'(x) = 0$ (gauge unitaria)

- Il bosone di Goldstone connette i vari stati di vuoto che sono degeneri in energia. Con la trasformazione di gauge abbiamo "tolto" questo grado di libertà non voluto ed il campo φ è diventato reale.

Con la nuova parametrizzazione il campo θ non dovrebbe apparire esplicitamente nella Lagrangiana.

Verifica dei gradi di libertà della Lagrangiana

- Nella nuova gauge unitaria si ha: $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + H(x)\right]$; $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{qv}\partial_\mu\theta(x)$

$$\mathscr{L} = \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu H\right)^2 - \lambda v^2 H^2\right] + \frac{1}{2}q^2 v^2 A_\mu A^\nu + \frac{1}{2}q^2 A_\mu A^\nu H^2 + q^2 v A_\mu A^\nu H - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\lambda v^4$$

- $\mathscr{L}$ non dipende da θ come ci aspettavamo: il bosone di Goldstone è scomparso. È stato "mangiato" dal bosone di gauge che è ingrassato ed ha acquistato massa.
- La Lagrangiana descrive ora un bosone scalare H (Higgs) ed un bosone di gauge vettoriale A_μ, di massa rispettivamente:

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} \qquad m_A = qv$$

- Gli altri termini della Lagrangiana descrivono le interazioni tra i campi e le self-interaction

N.B. questo è il meccanismo di Higgs Abeliano, cioè valido per un gruppo di simmetria commutativo.

Meccanismo di Higgs e campi di Y-M

- Studiamo la rottura spontanea della simmetria per il gruppo (non abeliano) SU(2)xU(1).
  Partiamo dalla Lagrangiana seguente e studiamo SU(2):

$$\mathscr{L} = \left(\partial_\mu \varphi\right)^+ \left(\partial^\mu \varphi\right) - \mu^2 \varphi^+ \varphi - \lambda \left(\varphi^+ \varphi\right)^2$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

- La Lagrangiana è invariante per una trasformazione globale di SU(2):

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\vec{\Lambda}\cdot\vec{I}} \varphi(x)$$

- Affinché lo sia anche per una trasformazione locale occorre introdurre la derivata covariante:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \left[1 + i\vec{\Lambda}(x) \cdot \vec{I}\,\right] \varphi(x)$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\vec{I} \cdot \vec{W}_\mu(x)$$

$$\vec{W}_\mu(x) \rightarrow \vec{W}_\mu(x) - \partial_\mu \vec{\Lambda}(x) + g\vec{\Lambda}(x) \times \vec{W}_\mu(x)$$

Meccanismo di Higgs e campi di Y-M

- La Lagrangiana si può scrivere come:

$$\mathscr{L} = \left(\partial_\mu \varphi + ig\vec{I}\cdot\vec{W}_\mu\varphi\right)^+ \left(\partial_\mu \varphi + ig\vec{I}\cdot\vec{W}_\mu\varphi\right) - \left(\mu^2\varphi^+\varphi - \lambda\left(\varphi^+\varphi\right)^2\right) - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}$$

- Consideriamo il caso $\mu^2<0$ e $\lambda>0$. Il minimo del potenziale si ha per:

$$\varphi^+\varphi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}$$

$$\varphi^+\varphi = \left(\varphi_a^* \;\; \varphi_b^*\right)\begin{pmatrix}\varphi_a \\ \varphi_b\end{pmatrix} = \varphi_a^*\varphi_a + \varphi_b^*\varphi_b = \frac{1}{2}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2\right) = \frac{v^2}{2}$$

- Scegliamo un minimo rompendo la simmetria dello stato fondamentale:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = 0 \quad ; \quad \varphi_3 = v^2$$

- Lo stato di vuoto che abbiamo scelto è:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix}$$

- Facciamo lo sviluppo perturbativo intorno a questo stato, scegliendo una gauge opportuna in modo da avere:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v + H(x)\end{pmatrix}$$

N.B. in questo modo tre campi scalari sono stati eliminati dalla trasformazione di gauge lasciando un solo campo: H(x)

Meccanismo di Higgs e campi di Y-M

- Possiamo riscrivere la Lagrangiana in termini del campo di Higgs H:

$$\mathscr{L} = \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu H\right)^2 - \lambda v^2 H^2\right] + \frac{g^2 v^2}{8}\left[\left(W_\mu^1\right)^2 + \left(W_\mu^2\right)^2 + \left(W_\mu^3\right)^2\right]$$

+ termini di ordine superiore + termine cinetico per i $\vec{W}$

- Questa Lagrangiana descrive un campo di Higgs scalare di massa:

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{\left(-2\mu^2\right)} = ????\ \text{GeV}$$

e tre bosoni di gauge massivi di massa:

$$m_W = \frac{1}{2} g v$$

- I tre bosoni di gauge si sono "mangiati" i tre campi di Goldstone acquistando massa.

Occorre estendere questi concetti all'intera simmetria SU(2)xU(1)

SU(2)$_L$ x U(1)$_Y$ e campo di Higgs

- Lagrangiana elettrodebole invariante per trasformazione di gauge:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g\vec{I} \cdot \vec{W}_\mu(x) - \frac{g'}{2} Y \cdot B_\mu \right] \Psi_L + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - \frac{g'}{2} Y \cdot B_\mu \right] \Psi_R + \mathcal{L}_{free}(\vec{W}, B)$$

- Introduciamo nella Lagrangiana quattro campi scalari reali φ_i:

$$\mathcal{L} = \left(D_\mu \varphi\right)^+ \left(D^\mu \varphi\right) - \mu^2 \varphi^+ \varphi - \lambda \left(\varphi^+ \varphi\right)^2$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\vec{I} \cdot \vec{W}_\mu(x) + i\frac{g'}{2} \mathrm{Y} \cdot \mathrm{B}_\mu$$

- Siamo interessati al caso in cui $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$.
- Seguiamo Weinberg ed arrangiamo i quattro campi φ_i in un doppietto di isospin debole con ipercarica debole Y=1:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}$$

φ^+ ha carica elettrica Q=1
e φ^0 ha Q=0

- Scegliamo il minimo del potenziale tale che $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ e sviluppiamo $\varphi(x)$ intorno a questo punto. Con una scelta opportuna della gauge si ha:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ e campo di Higgs

- La Lagrangiana diventa:

$$\mathscr{L} = \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu H\right)^2 - \lambda v^2 H^2\right] + \frac{g^2 v^2}{8}\left[W^1_\mu W^{1\mu} + W^2_\mu W^{2\mu}\right] + \frac{v^2}{8}\left(gW^3_\mu - g' B_\mu\right)\left(gW^{3\mu} - g' B^\mu\right)$$

+ termini di ordine superiore + termine cinetico per i $\vec{W}$ ed il B

- Da qui si vede che i campi W_μ^1 e W_μ^2 hanno un termine di massa "convenzionale" $m_W = \frac{1}{2} g v$ mentre i campi W_μ^3 e B_μ sono mescolati.
- Dobbiamo ruotare questi due campi in modo tale che il termine di massa sia diagonale nei nuovi due campi A_μ e Z_μ :

$$\frac{v^2}{8}\begin{pmatrix} W^3_\mu & B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$$

Matrice di massa. Va diagonalizzata.
Uno dei due autovalori è zero.

$$\frac{v^2}{8}\left(g^2\left(W^3_\mu\right)^2 - 2gg' W^3_\mu B^\mu + g' B^2_\mu\right) = \frac{v^2}{8}\cdot\left(gW^3_\mu - g' B_\mu\right)^2 + 0\cdot\left(g' W^3_\mu + gB_\mu\right)^2$$

$$A_\mu = \frac{\left(g' W^3_\mu + gB_\mu\right)}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \qquad m_A = 0$$

$$Z_\mu = \frac{\left(gW^3_\mu - g' B_\mu\right)}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \qquad m_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2}$$

Massa dei bosoni e angolo di Weinberg

- Introduciamo l'angolo di Weinberg definito come:

$$\frac{g'}{g} = \tan\theta_W \quad ; \quad \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \cos\theta_W \quad ; \quad \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = \sin\theta_W$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} A_\mu &= \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W W_\mu^3 \\ Z_\mu &= -\sin\theta_W B_\mu + \cos\theta_W W_\mu^3 \end{aligned}$$

- Ricordando che: $m_W = \frac{1}{2} g v$ e $m_Z = \frac{1}{2} v\sqrt{g^2 + g'^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{m_W}{m_Z} = \cos\theta_W}$

- La rottura spontanea della simmetria $SU(2)_L x U(1)_Y$ ha dato origine al seguente spettro di masse:

1 bosone di Higgs, $m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2}$

2 bosoni carichi $W^\pm$, $m_W = \frac{1}{2} g v$

1 bosone neutro Z, $m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_W}$

1 bosone neutro a massa nulla (fotone)

N.B. $Q\varphi_0 = \left(I_3 + \frac{1}{2}Y\right)\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0$

La carica del minimo scelto è nulla, quindi la simmetria $U(1)^{em}$ non è rotta ed il fotone rimane a massa nulla

Massa dei bosoni di gauge

- Dall'analisi del decadimento del μ si ricava la relazione:

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$$

- Dato che $m_W = \frac{1}{2} g v$ $\Rightarrow$ $v = \frac{1}{\sqrt{\left(G\sqrt{2}\right)}}$

- Il valore di aspettazione del vuoto dipende solo dalla costante di Fermi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\left(G\sqrt{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\cdot 1.17\cdot 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}\right)}} \approx 246\ \mathrm{GeV}$$

- Come vedremo vale la relazione: $g\cdot \sin\theta_W = e$ $\quad\left[\alpha = \frac{e^2}{4\pi}\right]$

$$\Rightarrow\quad m_W = \left(\frac{\pi\alpha}{G\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin\theta_W}$$

sin θ_W deve essere determinato sperimentalmente. La prima misura fu fatta con il deep inelastic scattering dei neutrini negli anni '70.

$$\sin^2\theta_W \approx 0.23 \quad\Rightarrow\quad m_W \approx 80\ \mathrm{GeV}\ ;\ m_Z \approx 90\ \mathrm{GeV}$$

N.B. La massa del bosone di Higgs non è prevista dal Modello Standard perché dipende dal parametro incognito λ che compare nel potenziale V(φ).

Massa dei fermioni

- Il termine di massa dei fermioni $-m\bar{e}e$ non può essere messo esplicitamente nella Lagrangiana perché rompe la simmetria $SU(2)_L xU(1)_Y$:

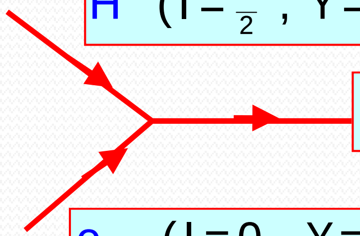
$$-m\bar{e}e = -m\bar{e}\left[\frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)+\frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)\right]e = -m\left(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R\right)$$

- Ricordiamo che:

	I	I_3	Y
ν_e	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
e^-_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
e^-_R	0	0	-2

$$\begin{pmatrix}\nu_e \\ e^-\end{pmatrix}_L \qquad e^-_R$$

$H \quad (I=\frac{1}{2}\ ,\ Y=1)$



$e_L \quad (I=\frac{1}{2}\ ,\ Y=-1)$

$e_R \quad (I=0\ ,\ Y=-2)$

il bosone di Higgs ha i numeri quantici giusti per accoppiarsi a e_L e e_R.

- Aggiungiamo alla Lagrangiana il termine (alla “Yukawa”) invariante per trasformazioni di gauge:

$$\mathscr{L} = -g_e\left[\bar{L}\varphi e_R + \bar{e}_R\bar{\varphi}L\right]$$

dove

$$L = \begin{pmatrix}\nu_e \\ e^-\end{pmatrix}_L \quad ; \quad \varphi = \begin{pmatrix}\varphi^+ \\ \varphi^0\end{pmatrix}$$

$$\left(\bar{\nu}_e \quad \bar{e}^-_L\right)\begin{pmatrix}\varphi^+ \\ \varphi^0\end{pmatrix} e^-_R = \left(\bar{\nu}_e\varphi^+ e^-_R + \bar{e}^-_L\varphi^0 e^-_R\right)$$

g_e = costante di accoppiamento

Massa dei fermioni

- Dopo la rottura spontanea di simmetria, la Lagrangiana diventa

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{L} = -\frac{g_e v}{\sqrt{2}}\left[\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R\right] - \frac{g_e}{\sqrt{2}}\left[\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R\right] H$$

$$\mathrm{m}_e = \frac{g_e \cdot v}{\sqrt{2}}$$

termine di massa

accoppiamento dell'elettrone con il bosone di Higgs

$$\mathscr{L} = -m_e \bar{e} e - \left(\frac{m_e}{v}\right)\bar{e} e H$$

N.B. La costante di accoppiamento è proporzionale alla massa del fermione

- Per generare le masse dei quark di tipo "up" si introduce il doppietto di Higgs coniugato:

$$\tilde{\varphi} = i\sigma_2 \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \bar{\varphi}^0 \\ -\varphi^- \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{L} = -g_d \bar{L}_q \varphi d_R - g_u \bar{L}_q \tilde{\varphi} u_R \quad + \text{ hermitiano coniugato}$$

$$L_q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$\mathscr{L} = -m_d \bar{d} d - m_u \bar{u} u - \left(\frac{m_d}{v}\right)\bar{d} d H - \left(\frac{m_u}{v}\right)\bar{u} u H$$

Lagrangiana elettrodebole completa

- Lagrangiana elettrodebole invariante per trasformazione di gauge:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - g\vec{I} \cdot \vec{W}_\mu(x) - \frac{g'}{2} Y \cdot B_\mu \right] \Psi_L + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \left[i\partial_\mu - \frac{g'}{2} Y \cdot B_\mu \right] \Psi_R + \mathcal{L}_{free}(\vec{W}, B)$$

- Aggiungiamo alla Lagrangiana quattro campi scalari reali φ_i per dare massa ai bosoni di gauge tramite il meccanismo della rottura spontanea della simmetria.

$$\mathcal{L} = \left(D_\mu \varphi\right)^+ \left(D^\mu \varphi\right) - \mu^2 \varphi^+ \varphi - \lambda \left(\varphi^+ \varphi\right)^2$$

- Aggiungiamo alla Lagrangiana un'interazione tra i fermioni ed il campo φ per dare massa ai fermioni:

$$\mathcal{L} = -g_e \left[\bar{L} \varphi e_R + \bar{e}_R \bar{\varphi} L \right]$$

$$\mathcal{L} = -g_d \bar{L}_q \varphi d_R - g_u \bar{L}_q \tilde{\varphi} u_R \quad + \text{herm. con.}$$

Che cosa è questo campo φ? BOH!