Si abbia un sistema composto da una Σ^- ed un protone. Scrivere la funzione d'onda del sistema in termini degli stati di isospin totale del sistema e calcolare la probabilità di trovare il sistema in uno stato di spin isotopico totale ½

- La Σ^- ha $I=1$ e $I_3=-1$, mentre il protone ha $I=1/2$ e $I_3 = +1/2$, combinando insieme i due stati si può avere come isospin totale ½ oppure 3/2 e come terza componente -1/2.

$$|\Sigma^- p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

- la probabilità di trovare il sistema in uno stato di isospin totale ½ è di 2/3

Il barione Λ decade in protone – π^- oppure in neutrone-π^0. Nel decadimento il quark s della Λ si trasforma in un quark u del nucleone, quindi il suo isospin forte varia di ½ . Assumendo che nel decadimento della Λ questa regola di selezione venga rispettata e trascurando altre correzioni, qual è il rapporto che ci si aspetterebbe tra il B.R. in p- π^- rispetto a quello in n- π^0?

Il nucleone ha isospin ½ mentre il pione ha isospin 1, quindi un nucleone più un pione possono dare isospin totale uguale a ½ oppure 3/2. La Λ ha isospin zero, quindi nella funziona d'onda del sistema nucleone-pione occorre prendere in considerazione soltanto la componente con isospin ½ , per la regola di selezione $\Delta I=1/2$

$$p+\pi^- = \left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1;-1\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$n+\pi^0 = \left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1;0\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$$

La probabilità di transizione è proporzionale al quadrato della funzione d'onda:

$$\frac{B.R.\left(\Lambda\to p+\pi^-\right)}{B.R.\left(\Lambda\to n+\pi^0\right)} = \frac{\left|\langle p+\pi^- \mid \tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle\right|^2}{\left|\langle n+\pi^0 \mid \tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle\right|^2} = \frac{2/3}{1/3} = 2$$

I valori sperimentali sono: $B.R.\left(\Lambda\to p+\pi^-\right)=63.9\%$; $B.R.\left(\Lambda\to n+\pi^0\right)=35.8\%$

$$\frac{B.R.\left(\Lambda\to p+\pi^-\right)}{B.R.\left(\Lambda\to n+\pi^0\right)} = \frac{63.9}{35.8} = 1.78$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con $\Delta I=3/2$

Il K^0_S può decadere in due pioni carichi oppure in due pioni neutri. Trovare il rapporto tra il B.R. del decadimento in pioni neutri rispetto a quello in pioni carichi. Si ricorda che per ragioni di simmetria lo stato finale deve avere isospin totale zero

---

Nei decadimento deboli con ΔS=1 si ha ΔI=1/2, quindi dato che il K ha I=1/2, lo stato finale dei due pioni deve avere I=0 oppure I=1. La funzione d'onda dei due pioni deve essere simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle, quindi dato che essi hanno spin zero e si trovano in uno stato di momento angolare l=0, anche la parte di isospin deve essere simmetrica, quindi I=0.

Utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan si ha:

$$|0;0\rangle = +\sqrt{\frac{1}{3}}|1,+1;1-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1;1+1\rangle =$$

$$= +\sqrt{\frac{1}{3}}\pi^+\pi^- - \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^0\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^-\pi^+$$

Di conseguenza abbiamo:

$$\frac{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^0 + \pi^0\right)}{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^+ + \pi^-\right)} = \frac{\left|\langle \pi^0\pi^0 \mid 0;0\rangle\right|^2}{\left|\langle \pi^+\pi^- \mid 0;0\rangle\right|^2} = \frac{1}{2}$$

I valori sperimentali sono:

$$B.R.\left(K_S^0 \to \pi^0 + \pi^0\right) = 30.7\% \quad ; \; B.R.\left(K_S^0 \to \pi^+ + \pi^-\right) = 69.2\%$$

$$\frac{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^0 + \pi^0\right)}{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^+ + \pi^-\right)} = \frac{30.7}{69.2} = 0.44$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con ΔI=3/2

. Dedurre attraverso quali canali di isospin possono avvenire le seguenti due reazioni: $a)\ K^- + p \to \Sigma^0 + \pi^0 \quad ; \quad b)\ K^- + p \to \Sigma^+ + \pi^-$

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, trovare il rapporto tra le sezioni d'urto σ_a/σ_b

Ricordiamo l'isospin totale e la terza componente delle particelle coinvolte nella reazione e scriviamo lo stato iniziale ed i due stati finali in termini degli autostati di isospin utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan.

$$K^- = \left|I = \tfrac{1}{2}; I_3 = -\tfrac{1}{2}\right\rangle \ ; \ p = \left|I = \tfrac{1}{2}; I_3 = \tfrac{1}{2}\right\rangle \Rightarrow K^- + p = +\sqrt{\frac{1}{2}}|1;0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|0;0\rangle$$

$$\Sigma^0 = |I = 1; I_3 = 0\rangle \ ; \ \pi^0 = |I = 1; I_3 = 0\rangle \Rightarrow \Sigma^0 + \pi^0 = +\sqrt{\frac{2}{3}}|2;0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0;0\rangle$$

$$\Sigma^+ = |I = 1; I_3 = 1\rangle \ ; \ \pi^- = |I = 1; I_3 = -1\rangle \Rightarrow \Sigma^+ + \pi^- = +\sqrt{\frac{1}{6}}|2;0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1;0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0;0\rangle$$

Di conseguenza la reazione a) può avvenire soltanto attraverso il canale di isospin totale 0, mentre la reazione b) può avvenire attraverso il canale con isospin 0 ed anche con isospin 1.

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, allora il rapporto tra le sezioni d'urto è pari al rapporto dei quadrati dei coefficienti di C.G. dell'autostato di isospin 0 nei due stati finali:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \left|\frac{\langle \Sigma^0 + \pi^0 | 0;0\rangle}{\langle \Sigma^+ + \pi^- | 0;0\rangle}\right|^2 = \left|\frac{-\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right|^2 = 1$$