Sviluppo in onde parziali

- Cenni allo sviluppo in onde parziali.
- Ampiezza di scattering.
- Diffusione elastica e anelastica.
- Condizione di risonanza.
- Limite unitario della sezione d'urto

CENNI ALLO SVILUPPO IN ONDE PARZIALI

- VOGLIAMO STUDIARE LO SCATTERING (DIFFUSIONE) DI UNA PARTICELLA PROIETTILE CONTRO UNA PARTICELLA BERSAGLIO.

- PER SEMPLICITA' TUTTE LE PARTICELLE HANNO SPIN ZERO E TRASCURIAMO L'INTERAZIONE COULOMBIANA.

- SIA m_1 LA MASSA DEL PROIETTILE E m_2 LA MASSA DEL BERSAGLIO

- LA DIFFUSIONE E' DESCRITTA, NELLA MEC. QUANT. NON RELAT., DALLA SEGUENTE EQUAZIONI DI SCHRÖDINGER

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r_1},\vec{r_2},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla_2^2 + U(\vec{r_1},\vec{r_2})\right]\Psi(\vec{r_1},\vec{r_2},t)$$

- LA SOLUZIONE SI PUO' FATTORIZZARE NELLE COORDINATE DEL MOTO RELATIVO TRA LE PARTICELLE E NELLE COORDINATE DEL BARICENTRO

$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2} \quad ; \quad \vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2} \quad ; \quad M = m_1 + m_2 \quad ; \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

- L'EQUAZIONE DEL MOTO DIVENTA:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},\vec{R},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + U(r)\right]\Psi(\vec{r},\vec{R},t)$$

- UNA SOLUZIONE DEL TIPO:

$$\Psi(\vec{r},\vec{R},t) = u(\vec{r})\cdot v(\vec{R})\, e^{i(E_r+E_R)\,t/\hbar}$$

SODDISFA L'EQUAZIONE:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2\, v(\vec{R}) = E_R\, v(\vec{R}) \quad ; \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + U(r)\right]u(\vec{r}) = E_r\, u(\vec{r})$$

- CI INTERESSA SOLO LA PARTE CHE DESCRIVE IL MOTO NEL SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA.
- FACCIAMO L'IPOTESI CHE IL POTENZIALE $U(r)$ SI ANNULLI PER $r \to \infty$ (ALMENO COME $\frac{1}{r}$) E SIA A SIMMETRIA SFERICA.
- AL TEMPO $t \to -\infty$, $r \gg R$ (DIMENSIONI DEL SISTEMA), $U(r) \to 0$.

$\Rightarrow$ L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 u(\vec{r}) = E_r u(\vec{r}) \Rightarrow \nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0$$

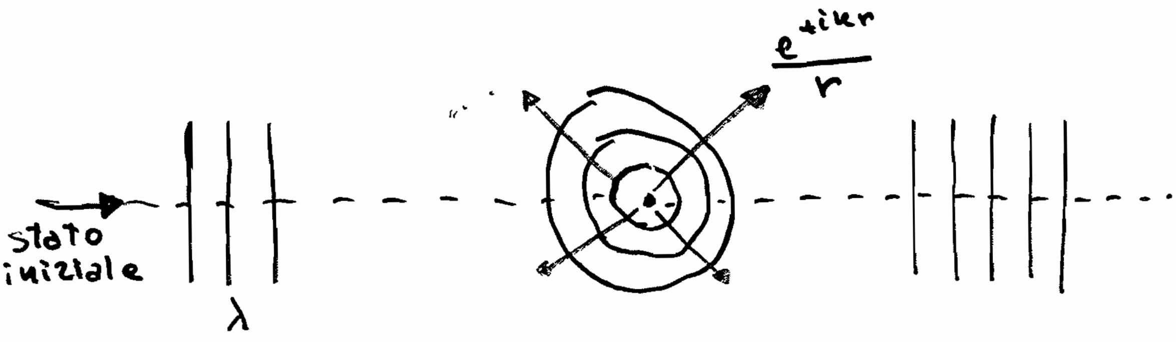
dove: $E_r = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot k^2$

[TENETE PRESENTE CHE L'ENERGIA E_r È QUELLA DISPONIBILE PER LA PRODUZIONE DI NUOVE PARTICELLE O PER IL PASSAGGIO A STATI ECCITATI DEL SISTEMA]

- SUPPONIAMO CHE LO STATO INIZIALE SIA QUELLO DI PARTICELLA LIBERA AVENTE UN IMPULSO $\underline{\vec{p} = \hbar \vec{k}}$, CHE ASSUMIAMO PARALLELO ALL'ASSE z

$$u_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz} \qquad V = \text{volume di normalizzazione}$$

- DOPO LA COLLISIONE, IN AGGIUNTA ALL'ONDA PIANA INCIDENTE, BISOGNA AGGIUNGERE UN'ONDA SFERICA EMESSA DAL CENTRO DIFFUSORE



- LA FORMA ASINTOTICA DELLA FUNZIONE D'ONDA DELLO STATO FINALE PUÒ ESSERE SCRITTA COME:

$$u_f \to \frac{1}{\sqrt{V}} \left[e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

FLUSSO

- IL FLUSSO INCIDENTE È OTTENUTO DALLA CORRENTE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ

$$\phi_i = \vec{J} = \frac{\hbar}{2im}\left(u_i^* \vec{\nabla} u_i - u_i \vec{\nabla} u_i^*\right) = \frac{\hbar k}{Vm} = \frac{p}{Vm} = \frac{v}{V} = \rho v \equiv d_i$$

- DA NOTARE CHE LA DENSITÀ ρ È DATA DA:

$$\rho = u_i u_i^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz} \cdot \frac{1}{\sqrt{V}} \cdot e^{-ikz} = \frac{1}{V}$$

- PER TROVARE IL FLUSSO DIFFUSO OCCORRE DAPPRIMA TROVARE LA CORRENTE DI PROBABILITÀ ASSOCIATA ALL'ONDA DIFFUSA.

– RICORDIAMO CHE IN COORDINATE POLARI SI HA:

$$P_r \psi = -i\hbar \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi) = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\psi$$

QUINDI LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$J_d = \frac{\hbar}{2imV}\left|f(\theta,\varphi)\right|^2\left[\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\hbar k}{Vm}\left|f(\theta,\varphi)\right|^2 = \frac{1}{r^2}\frac{v}{V}\left|f(\theta,\varphi)\right|^2$$

- CONSIDERIAMO LE PARTICELLE CHE ATTRAVERSANO LA SUPERFICIE ELEMENTARE $dS = r^2 d\Omega$

– IL FLUSSO È: $J_d \cdot dS = \frac{1}{r^2}\frac{\hbar k}{Vm}\left|f(\theta,\varphi)\right|^2 r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{Vm}\left|f(\theta,\varphi)\right|^2 d\Omega$

SEZIONE D'URTO

- DEFINIZIONE DI SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{FLUSSO PER UNITA' DI TEMPO E UNITA' DI ANGOLO SOLIDO}}{\text{FLUSSO INCIDENTE}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{\hbar k}{m}\,|f(\theta,\varphi)|^2}{\frac{\hbar k}{m}} = |f(\theta,\varphi)|^2$$

- $f(\theta,\varphi)$ E' NOTA COME AMPIEZZA DI SCATTERING
- L'ONDA DIFFUSA E':

$$u_{scat.} = u_f - u_i = \frac{e^{ikr}}{r} \cdot f(\theta,\varphi)$$

- RICORDIAMO CHE STIAMO CONSIDERANDO LO SCATTERING DI UNA PARTICELLA SENZA SPIN CHE SI MUOVE LUNGO L'ASSE Z, QUINDI LA SUA POSIZIONE NEL PIANO X, Y NON E' NOTA (ANCHE SE IN PRATICA VI SONO SEMPRE DEI COLLIMATORI, TUTTAVIA RIMANE SEMPRE UN'INDETERMINAZIONE).
- DA UN PUNTO DI VISTA CLASSICO DIREMMO CHE NON E' NOTO IL PARAMETRO D'URTO E QUINDI NON E' NOTO IL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO RISPETTO AL CENTRO DIFFUSORE.

$\Rightarrow$ POSSIAMO SVILUPPARE L'ONDA PIANA IN UNA SERIE DI FOURIER DI ONDE SFERICHE. DATO CHE NON CONSIDERIAMO GLI SPIN DELLE PARTICELLE E VI E' SIMMETRIA DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE Z, COMPARIRANNO SOLO LE ARMONICHE SFERICHE CHE NON HANNO DIPENDENZA DA φ

SVILUPPO IN ONDE SFERICHE

- ABBIAMO:

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)}\; i^{\ell}\, J_{\ell}(kr)\, Y_{\ell}^{0}(\theta)$$

funzioni di BESSEL

- CI INTERESSA IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO PER $kr \to \infty$

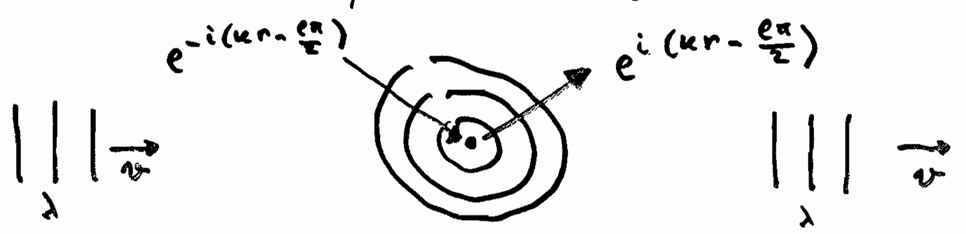
  - ABBIAMO: $J_{\ell}(kr) \xrightarrow[kr\to\infty]{} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)$

  - INOLTRE: $Y_{\ell}^{0}(\theta) = \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_{\ell}(\cos\theta)$ Polinomi di LEGENDRE

- $$e^{ikz} \to \frac{1}{kr} \sum_{\ell} (2\ell+1)\, i^{\ell}\, P_{\ell}(\cos\theta)\, \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{kr} \sum_{\ell} (2\ell+1)\, i^{\ell}\, P_{\ell}(\cos\theta)\, \frac{e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})} - e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}}{2i}$$

- LA FORMULA MOSTRA CHE L'ONDA PIANA PUÒ ESSERE CONSIDERATA COME UNA SOMMA DI ONDE SFERICHE $e^{-i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}$, OGNUNA DI MOMENTO ANGOLARE DEFINITO $\ell\hbar$ CONVERGENTI VERSO IL CENTRO DI SCATTERING, INSIEME AD ONDE SFERICHE DIVERGENTI $e^{i(kr-\frac{\ell\pi}{2})}$



- QUESTA SITUAZIONE RAPPRESENTA UN'ONDA PIANA "NON DISTURBATA"
- SE CONSIDERIAMO UN'INTERAZIONE CON IL CENTRO DIFFUSORE, IL PRINCIPIO DI CAUSALITA' RICHIEDE CHE SOLO LE ONDE DIVERGENTI VENGANO INFLUENZATE

- IL POTENZIALE DI INTERAZIONE PUO' MODIFICARE LE ONDE DIVERGENTI SOLTANTO IN <u>FASE</u> OPPURE IN <u>AMPIEZZA E FASE</u>

- NEL PRIMO CASO ABBIAMO UNA <u>DIFFUSIONE ELASTICA</u>, CON UNA CERTA DISTRIBUZIONE ANGOLARE, MENTRE NEL SECONDO CASO ABBIAMO IN AGGIUNTA ANCHE UNA <u>DIFFUSIONE ANELASTICA</u>

- LO STATO FINALE PUO' ESSERE SCRITTO COME:

$$u_f(r,\theta) = u_i(r,\theta) + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2k}\sum_\ell (2\ell+1)\left[(-1)^\ell \frac{e^{-ikr}}{r} - a_\ell \frac{e^{ikr}}{r}\right] P_\ell(\cos\theta)$$

→ LE AMPIEZZE a_ℓ RAPPRESENTANO L'AZIONE DEL POTENZIALE SULLA COMPONENTE ℓ DELL'ONDA SFERICA DIVERGENTE

- L'AZIONE DEL POTENZIALE RISULTA IN UNO <u>SFASAMENTO</u> ED IN UN <u>ASSORBIMENTO</u> DELLO STATO INIZIALE

$$a_\ell = \eta_\ell \cdot e^{2i\delta_\ell} \quad ; \quad \eta_\ell, \delta_\ell \text{ REALI} \quad ; \quad 0 \le \eta_\ell \le 1$$

- LA DIFFUSIONE È RAPPRESENTATA DALLO STATO:

$$u_d(r,\theta) = u_f(r,\theta) - u_i(r,\theta) = \frac{i}{2k}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_\ell (2\ell+1)(1-a_\ell)P_\ell(\cos\theta)$$

AVENTE AMPIEZZA DI DIFFUSIONE:

$$f(\theta) = \frac{i}{2k}\sum_\ell (2\ell+1)(1-a_\ell)P_\ell(\cos\theta)$$

- LA SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE VALE:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2}\sum_\ell \sum_{\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1)(1-a_\ell^*)(1-a_{\ell'})P_\ell \cdot P_{\ell'}$$

- USANDO LA PROPRIETÀ DI ORTONORMALITÀ DEI POLINOMI DI LEGENDRE:

$$\int P_\ell(\cos\vartheta)\cdot P_{\ell'}(\cos\vartheta)\, d\cos\vartheta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

SI TROVA LA SEZIONE D'URTO DI DIFFUSIONE

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\cos\vartheta\, d\varphi = \frac{1}{4k^2}\sum_\ell \sum_{\ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1)(1-\partial_\ell^*)(1-\partial_{\ell'})\frac{4\pi}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_d = \frac{\pi}{k^2}\sum_0^\infty{}_\ell (2\ell+1)|1-\partial_\ell|^2 = \frac{\pi\hbar^2}{P^2_{c.m.}}\sum_0^\infty{}_\ell (2\ell+1)|1-\partial_\ell|^2}$$

(RICORDIAMO CHE $P^2_{c.m.} = \hbar^2 k^2$)

SEZIONE D'URTO ELASTICA

- LA DIFFUSIONE ELASTICA È CARATTERIZZATA DA $\eta_\ell = 1$

$$\Rightarrow 1-\partial_\ell = 1-e^{2i\delta_\ell} = e^{i\delta_\ell}\cdot\left[e^{-i\delta_\ell} - e^{i\delta_\ell}\right] = -2i\, e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell$$

- IN QUESTO CASO L'AZIONE DEL POTENZIALE NON CAMBIA L'AMPIEZZA MA CAMBIA SOLO LA FASE DELL'ONDA DIFFUSA

$$\sigma_{ELASTICA} = \frac{4\pi\hbar^2}{P^2_{cm}}\sum_0^\infty{}_\ell (2\ell+1)\sin^2\delta_\ell \qquad \left[\sigma_{max} = \frac{4\pi\hbar^2}{P^2_{cm}}(2\ell+1) \text{ per una data } \ell\right.$$

- QUANDO LA FASE DELLA SINGOLA COMPONENTE È $\delta_\ell = \frac{\pi}{2}$, L'AMPIEZZA DI DIFFUSIONE $f_\ell(\vartheta)$ È PURAMENTE IMMAGINARIA E LA SEZIONE D'URTO σ_ℓ HA IL VALORE MASSIMO. QUESTA È CHIAMATA CONDIZIONE DI RISONANZA PER L'ONDA PARZIALE ℓ

SEZIONE D'URTO ANELASTICA

- SE $\eta_\ell < 1$ LA DIFFUSIONE È ANELASTICA PERCHÉ PARTE DEL FLUSSO INCIDENTE È ASSORBITO DAL BERSAGLIO

- IL FLUSSO ASSORBITO DELL'ONDA PARZIALE ℓ È PARI A:

$$\phi_{ASS} = \phi_i \cdot \left(1 - |\eta_\ell|^2\right)$$

- LA SEZIONE D'URTO DI ASSORBIMENTO (O SEZIONE D'URTO DI REAZIONE) È:

$$\sigma_{ass} = \frac{\pi \hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_{0}^{\infty}{}_\ell (2\ell+1)\left(1 - |\eta_\ell|^2\right)$$

QUESTA RAPPRESENTA I PROCESSI IN CUI UNA O ENTRAMBE LE PARTICELLE CAMBIANO NATURA NELLO STATO FINALE.

- N.B. SI PUÒ AVERE DIFFUSIONE ELASTICA SENZA ALTRI PROCESSI

$$\text{SE } \eta_\ell = 1 \Rightarrow \sigma_{ABS} = 0$$

- <u>NON</u> SI PUÒ AVERE DIFFUSIONE ANELASTICA SENZA AVERE ANCHE QUELLA ELASTICA

- LA SEZIONE D'URTO TOTALE È LA SOMMA DEI DUE CONTRIBUTI:

$$\sigma_{TOT} = \sigma_{EL} + \sigma_{ABS} = \frac{\pi \hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_{0}^{\infty}{}_\ell (2\ell+1)\left[\left(1 - 2\,\mathrm{Re}(\eta_\ell) + |\eta_\ell|^2\right) + \left(1 - |\eta_\ell|^2\right)\right]$$

$$\sigma_{TOT} = \frac{2\pi \hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_{0}^{\infty}{}_\ell (2\ell+1)\left(1 - \mathrm{Re}(\eta_\ell)\right)$$

LIMITE DI UNITARIETÀ

- LA SEZIONE D'URTO DI UN PROCESSO, NELLO STATO DI MOMENTO ANGOLARE ℓ, NON PUÒ SUPERARE IL VALORE CHE CORRISPONDE AL MASSIMO DELLA PROBABILITÀ DI DIFFUSIONE

$$\sigma_\ell \leq \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2}\cdot(2\ell+1) \qquad \text{(scattering elastico)}$$

TEOREMA OTTICO

- L'AMPIEZZA DI DIFFUSIONE HA UNA PARTE IMMAGINARIA, LEGATA ALLA DIFFUSIONE ELASTICA, E UNA PARTE REALE:

$$f(\theta) = \frac{\hbar}{2p_{cm}} \sum_{0}^{\infty}{}_{\ell} (2\ell+1)\left[i\left(1-\mathrm{Re}(a_\ell)\right) + \mathrm{Im}(a_\ell)\right] P_\ell(\cos\theta)$$

- CONSIDERIAMO LA PARTE IMMAGINARIA DELL'AMPIEZZA DI DIFFUSIONE IN AVANTI:

$$\theta \to 0 \quad ; \quad P_\ell(\cos\theta) \to 1$$

$$\lim_{\theta\to 0} \mathrm{Im}(f(\theta)) = \frac{\hbar}{2p_{cm}} \sum_{0}^{\infty}{}_{\ell} (2\ell+1)\left(1-\mathrm{Re}(a_\ell)\right)$$

QUESTO TERMINE È PROPORZIONALE ALLA SEZIONE D'URTO TOTALE RICAVATA IN PRECEDENZA:

$$\sigma_{TOT} = \frac{2\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} \sum_{0}^{\infty}{}_{\ell} (2\ell+1)\left(1-\mathrm{Re}(a_\ell)\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sigma_{TOT} = \frac{4\pi\hbar}{p_{cm}} \mathrm{Im}(f(\theta=0))} \leftarrow \text{teorema ottico}$$

N.B. NEI COLLIDER ADRONICI (pp O $p\bar{p}$) SI MISURA LA DIFFUSIONE ELASTICA IN AVANTI, DALLA QUALE RICAVARE σ_{TOT}