Simmetrie e leggi di conservazione

- Simmetrie in meccanica quantistica.
- Simmetrie continue e discrete. Numeri quantici additivi e moltiplicativi.
- parità. Parità intrinseca.
- Invarianza di gauge e conservazione della carica. Numero barionico e leptonico.
- Coniugazione di carica.
- Time reversal.
- Teorema CPT.
- Isospin.
- SU(2).
- Invarianza delle interazioni forti per trasformazioni di isospin.
- Formula di Gell-Mann Nishijima.

SIMMETRIE E INVARIANZE

- UNA LEGGE FISICA È SIMMETRICA IN RAPPORTO AD UNA TRASFORMAZIONE SE LA FORMA DELL'EQUAZIONE CHE ESPRIME LA LEGGE È INVARIANTE PER QUESTA TRASFORMAZIONE

ESEMPIO: $\vec{F} = m \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ invariante rispetto all'inversione temporale $t \to -t$

- UNA SIMMETRIA RIFLETTE UN'IGNORANZA, CIOÈ L'ESISTENZA DI UNA GRANDEZZA NON OSSERVABILE.

– IN MECCANICA CLASSICA AD UNA SIMMETRIA CORRISPONDE UNA GRANDEZZA CONSERVATA

– IN MEC. QUANT. CONTINUA AD ESSERE VERO, ATTENZIONE CHE IN ENTRAMBI I CASI È VERO SOLO PER LE SIMMETRIE CONTINUE

ESEMPI:

– ASSENZA DI UN'ORIGINE ASSOLUTA DELLO SPAZIO $\longleftrightarrow$ INVARIANZA PER TRASLAZIONI $\leftrightarrow$ CONS. QUANTITÀ DI MOTO

– ASSENZA DI UN'ORIGINE ASSOLUTA DEL TEMPO $\leftrightarrow$ INVARIANZA PER TRASL. TEMPORALI $\longleftrightarrow$ CONS. ENERGIA

– ASSENZA DI UNA DIREZIONE ASSOLUTA NELLO SPAZIO $\longleftrightarrow$ INVARIANZA PER ROTAZIONI $\leftrightarrow$ CONS. MOMENTO ANGOLARE

SIMMETRIE IN M. Q.

- PRENDIAMO UN OPERATORE F

  IL VALOR MEDIO DI F NELLO STATO ψ_a VALE:

$$\langle F \rangle = \langle \psi_a | F | \psi_a \rangle$$

SE F È UN <u>OSSERVABILE</u> IL SUO VALOR MEDIO $\langle F \rangle$

PUÒ ESSERE MISURATO, QUINDI $\langle F \rangle$ DEVE ESSERE REALE,

PER CUI F DEVE ESSERE HERMITIANO ($F^+ = F$)

$$\frac{d}{dt}\langle F \rangle = [H, F] \quad \text{(F non dipende esplicitamente dal tempo)}$$

- SE $\langle F \rangle$ È UNA COSTANTE DEL MOTO $\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle F \rangle = 0 \Rightarrow [H, F] = 0$

$\Rightarrow$ GLI OPERATORI DELLE QUANTITÀ CONSERVATE DEVONO COMMUTARE CON L'HAMILTONIANA

- CERCHIAMO ORA UN OPERATORE DI UNA SIMMETRIA
  - CHIAMIAMO U L'OPERATORE DELLA SIMMETRIA

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

SE U È UNA SIMMETRIA NON CAMBIA, AD ESEMPIO, IL PRODOTTO SCALARE TRA DUE STATI

$$\langle a | b \rangle = \langle a' | b' \rangle = \langle a | U^+ U | b \rangle$$

$\Rightarrow$ U DEVE ESSERE UNITARIO, CIOÈ $U^+ U = U^{-1} U = 1$

- SE U E' UNA SIMMETRIA, ALLORA $U\Psi$ DEVE SODDISFARE LA STESSA EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

$$i\hbar \frac{d(U\Psi)}{dt} = HU\Psi$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d(U^{-1}U\Psi)}{dt} = U^{-1}HU\Psi \quad (U \text{ non dipende dal tempo})$$

$$\Rightarrow H = U^{-1}HU = U^{+}HU \Rightarrow UH = HU \Rightarrow [H,U] = 0$$

→ L'OPERATORE DI SIMMETRIA COMMUTA CON L'HAMILTONIANA

- SE U E' HERMITIANO ⇒ SARA' UN OSSERVABILE, ALTRIMENTI BISOGNA TROVARE UN ALTRO OPERATORE HERMITIANO CHE SIA IN RELAZIONE AD U (GENERATORE DELLA TRASFORMAZIONE)

- IN GENERALE GLI OPERATORI DELLE TRASFORMAZIONI NON SONO HERMITIANI, ANCHE SE CI SONO DELLE ECCEZIONI

- <u>CI SONO DUE TIPI DI TRASFORMAZIONI</u>

CONTINUE E DISCRETE → NON SI RICAVANO FACENDO PICCOLI PASSI

numeri quantici moltiplicativi

numeri quantici additivi

↳ SI RICAVANO PARTENDO DALL'IDENTITA' FACENDO TRASFORMAZIONI INFINITESIME

- NELLE TRASFORMAZIONI DISCRETE SI TROVANO OPERATORI CHE SONO CONTEMPORANEAMENTE UNITARI E HERMITIANI, AD ESEMPIO L'OPERATORE DI PARITA'

TRASFORMAZIONI CONTINUE

- UN ESEMPIO DI TRASFORMAZIONI CONTINUE SONO LE ROTAZIONI INTORNO AD UN ASSE DI UN ANGOLO ARBITRARIO α
- L'OPERATORE U DI QUESTA TRASFORMAZIONE PUÒ ESSERE SCRITTO COME:

$$U = e^{i\alpha F}$$

α È UN PARAMETRO REALE

F È IL GENERATORE DELLA TRASFORMAZIONE

- U PUÒ ESSERE ESPANSO IN SERIE DI POTENZE:

$$U = 1 + i\alpha F + \frac{(i\alpha F)^2}{2!} + \dots$$

- IN LINEA DI PRINCIPIO

$$e^{i\alpha F} \neq e^{-i\alpha F^+} \Rightarrow U \text{ NON È HERMITIANO}$$

– SE IMPONIAMO CHE U SIA UNITARIO, ALLORA SI HA:

$$e^{-i\alpha F^+} \cdot e^{i\alpha F} = e^{i\alpha(F - F^+)} = 1 \Rightarrow F = F^+ \Rightarrow F \text{ È HERMITIANO}$$

- PER UNA TRASFORMAZIONE INFINITESIMA:

$$U = 1 + i\alpha F$$

U COMMUTA CON H $\Rightarrow H(1 + i\alpha F) = (1 + i\alpha F)H \Rightarrow [H, F] = 0$

- F È HERMITIANO E COMMUTA CON H $\Rightarrow$ È UN OSSERVABILE
- SI PUÒ DIMOSTRARE CHE PER LE ROTAZIONI SPAZIALI F È PROPORZIONALE ALL'OPERATORE DEL MOMENTO ANGOLARE E PER LE TRASLAZIONI F È PROPORZIONALE ALL'OPERATORE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$F = e^{-i\theta \frac{\hat{n} \cdot \vec{L}}{\hbar}} \quad ; \quad F = e^{+i \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}}{\hbar}}$$

CARICA ELETTRICA

- SPERIMENTALMENTE È STATO VERIFICATO CHE LA CARICA ELETTRICA SI CONSERVA, QUINDI L'HAMILTONIANA DEVE ESSERE INVARIANTE PER UNA QUALCHE OPERAZIONE DI SIMMETRIA

<u>QUESTA È L'INVARIANZA DI GAUGE</u>

$$\psi' = \psi e^{i\alpha Q}$$

α = PARAMETRO REALE

Q HERMITIANO E COMMUTA CON H

Q VIENE IDENTIFICATO CON LA CARICA ELETTRICA

NUMERO BARIONICO

- SPERIMENTALMENTE SI TROVÒ CHE NELLE REAZIONI NUCLEARI IL NUMERO DI NUCLEONI SI CONSERVAVA; QUESTO CONTINUAVA AD ESSERE VERO ANCHE CONSIDERANDO I FERMIONI "STRANI" COME Λ E Σ

  STUCHELBERG IPOTIZZÒ CHE SI DOVEVA CONSERVARE IL NUMERO BARIONICO

  OGGI DICIAMO CHE IN UNA REAZIONE SI DEVE CONSERVARE IL NUMERO DI QUARK MENO IL NUMERO DI ANTIQUARK

- TUTTAVIA NON SI RIESCE ANCORA A TROVARE UNA SIMMETRIA DELL'HAMILTONIANA CHE TENGA CONTO DI QUESTO EFFETTO, PER CUI CI SONO TEORIE CHE VIOLANO LA CONSERVAZIONE DEL NUMERO BARIONICO

NUMERO LEPTONICO

STESSO DISCORSO FATTO PER IL NUMERO BARIONICO

PARITÀ

- L'OPERAZIONE DI INVERSIONE DELLE COORDINATE SPAZIALI È UNA TRASFORMAZIONE DISCRETA

$$x, y, z \to -x, -y, -z$$

- LA TRASFORMAZIONE È PRODOTTA DALL'OPERATORE DI PARITÀ P

$$P\psi(\vec{r}) \to \psi(-\vec{r})$$

$$P\psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \Rightarrow P^2 = 1 \Rightarrow P \text{ È UNITARIO}$$

- GLI AUTOVALORI DI P SONO ± 1

- UNA FUNZIONE D'ONDA PUÒ AVERE O NON AVERE UNA PARITÀ DEFINITA. NEL CASO L'AVESSE PUÒ ESSERE PARI (AUTOVALORE +1) OPPURE DISPARI (AUTOVALORE −1)

ESEMPIO: ARMONICHE SFERICHE

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \chi(r)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \chi(r)\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

L'INVERSIONE SPAZIALE $\vec{r} \to -\vec{r}$ È EQUIVALENTE A:

$$\theta \to \pi - \theta \quad ; \quad \varphi \to \pi + \varphi$$

$$\Rightarrow \quad e^{im\varphi} \to e^{im(\pi+\varphi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$$

$$P_\ell^m(\cos\theta) \to P_\ell^m[\cos(\pi-\theta)] = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(\cos\theta)$$

OVVERO $Y_\ell^m(\theta,\varphi) \to Y_\ell^m(\pi-\theta, \pi+\varphi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

$\Rightarrow$ LA PARITÀ DELLE ARMONICHE SFERICHE È $(-1)^\ell$

PARITÀ INTRINSECA

- NELLE INTERAZIONI FORTI ED E.M. LA PARITÀ È CONSERVATA.

SE CONSIDERIAMO AD ESEMPIO LA REAZIONE

$$p + p \to \pi^+ + p + n$$

OCCORRE ASSEGNARE AL PIONE UNA <u>PARITÀ INTRINSECA</u> AFFINCHÉ LA PARITÀ GLOBALE SIA CONSERVATA NELLA REAZIONE

PARITÀ DEL PIONE η_π

$$\pi^- + d \to n + n$$ (assorbimento di pioni lenti in deuterio)

- INDICHIAMO CON ℓ_i E ℓ_f IL MOMENTO ANGOLARE ORBITALE DELLO STATO INIZIALE E DELLO STATO FINALE. LA CONSERVAZIONE DELLA PARITÀ RICHIEDE:

$$\eta_\pi \eta_d (-1)^{\ell_i} = \eta_n \cdot \eta_n \cdot (-1)^{\ell_f}$$

- $\eta_d = 1$ (due nucleoni in onda S) ; $\eta_n^2 = 1$

$$\Rightarrow \eta_\pi = (-1)^{\ell_f - \ell_i} \Rightarrow (-1)^{\ell_f} \quad [\ell_i = 0]$$

pione quasi fermo

- LO SPIN DEL DEUTONE È UGUALE A 1, QUINDI PER LO STATO FINALE A 2 NEUTRONI ABBIAMO [N.B. $S_\pi = 0$]

$\eta_\pi = +$ $\quad |\Psi_{nn}^{(1)}\rangle = |J = 1, S = 1, \ell_f = 0$ oppure $2\rangle$ $\quad \Psi$ simmetrica

$\eta_\pi = -$ $\quad |\Psi_{nn}^{(2)}\rangle = |J = 1, S = 1, \ell_f = 1\rangle$ $\quad \Psi$ antisimmetrica

$\eta_\pi = -$ $\quad |\Psi_{nn}^{(3)}\rangle = |J = 1, S = 0, \ell_f = 1\rangle$ $\quad \Psi$ simmetrica

I DUE NEUTRONI SONO DUE FERMIONI IDENTICI, QUINDI LA FUNZIONE D'ONDA TOTALE DEVE ESSERE ANTISIMMETRICA $\Rightarrow \eta_\pi = -1$

CONIUGAZIONE DI CARICA

- L'OPERATORE CONIUGAZIONE DI CARICA TRASFORMA UNA PARTICELLA NELLA SUA ANTIPARTICELLA, LA QUALE HA TUTTI I NUMERI QUANTICI INTERNI DI SEGNO OPPOSTO (CARICA, STRANEZZA, MOMENTO MAGNETICO, ETC.......)

$\Rightarrow$ SOLO LE PARTICELLE "NEUTRE" POSSONO ESSERE AUTOSTATI DELL'OPERATORE DI CONIUGAZIONE DI CARICA

$$\hat{C}\,|\alpha,\psi\rangle = C_\alpha\,|\alpha,\psi\rangle \quad \text{autostato di } C$$

E $$\hat{C}\,|a,\psi\rangle = |\bar{a},\psi\rangle \quad \bar{a} = \text{antiparticella } a$$

APPLICANDO DUE VOLTE $\hat{C}$ NE CONSEGUE CHE GLI AUTOVALORI C_α SONO ± 1

- C_α È UN NUMERO MOLTIPLICATIVO

- AUTOSTATI SI POSSONO ANCHE COSTRUIRE CON COPPIE PARTICELLE - ANTIPARTICELLE DOVE L'OPERATORE C SCAMBIA SEMPLICEMENTE LE DUE PARTICELLE

  - SE LO STATO È SIMMETRICO O ANTISIMMETRICO PER VIA DELLO SCAMBIO, SI HA:

$$\hat{C}\,|a,\psi_1;\bar{a},\psi_2\rangle = |\bar{a},\psi_1;a,\psi_2\rangle = \pm\,|a,\psi_1;\bar{a},\psi_2\rangle$$

QUINDI $|a,\psi_1;\bar{a},\psi_2\rangle$ È UN AUTOSTATO DI C

STATO $\pi^+\pi^-$

- PRENDIAMO UNA COPPIA $\pi^+\pi^-$ IN UNO STATO DI MOMENTO ANGOLARE ORBITALE L:

$$\hat{C}\,|\pi^+\pi^-;L\rangle = (-1)^L\,|\pi^+\pi^-;L\rangle$$

PERCHÈ SCAMBIARE I DUE PIONI È EQUIVALENTE AD INVERTIRE LE LORO POSIZIONI SPAZIALI

STATO $p\bar{p}$

- PRENDIAMO UNA COPPIA DI FERMIONI DI SPIN $\frac{1}{2}$
  - DA TENERE PRESENTE CHE:

$$|\uparrow\uparrow\rangle\;;\;\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle\right)\;;\;|\downarrow\downarrow\rangle \quad \text{simmetrica}$$

$$S=1;\,S_z=1 \qquad S=1;\,S_z=0 \qquad S=1;\,S_z=-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right) \quad \text{antisimmetrica}$$

$$S=0;\,S_z=0$$

SCAMBIARE I DUE FERMIONI INTRODUCE, A CAUSA SOLO DELLO SPIN, UN FATTORE $(-1)^{S+1}$

  - INOLTRE, A CAUSA DELLA PARITÀ INTRINSECA OPPOSTA DI FERMIONE-ANTIFERMIONE (VEDI DIRAC), OCCORRE INTRODURRE UN ALTRO FATTORE -1

$$\Rightarrow \quad \hat{C}\,|p\bar{p},J,L,S\rangle = (-1)^L(-1)^{S+1}(-1)\,|p\bar{p},J,L,S\rangle =$$

$$= (-1)^{L+S}\,|p\bar{p},J,L,S\rangle$$

- QUESTO PONE DEI VINCOLI, AD ESEMPIO, NELL'ASSEGNAZIONE DEL CONTENUTO DEI QUARK ALLE VARIE PARTICELLE

CONIUGAZIONE DI CARICA DEL π^0

- IL π^0 E' UN MESONE DI SPIN 0 ED E' COMPOSTO, COME TUTTI I MESONI, DA UN QUARK E UN ANTIQUARK.
  LA FUNZIONE D'ONDA DEI DUE QUARK AVRA' SPIN S E MOMENTO ANGOLARE ORBITALE; LA LORO SOMMA $L+S=J$ DA' LO SPIN DEL PIONE

$$\Rightarrow \quad L+S=0$$

$$\Rightarrow \quad C_{\pi^0} = (-1)^{L+S} = (-1)^0 = 1$$

- SPERIMENTALMENTE SI TROVA CHE IL DECADIMENTO DOMINANTE E': $\pi^0 \to \gamma\gamma$

$$\hat{C}\,|\pi^0\rangle = C_{\pi^0}\,|\pi^0\rangle$$

$$\hat{C}\,|\gamma\gamma\rangle = C_\gamma C_\gamma\,|\gamma\gamma\rangle = |\gamma\gamma\rangle \quad \text{DATO CHE} \quad C_\gamma^2 = 1$$

PER L'INVARIANZA DELL'INTERAZIONE E.M. PER C PARITY, SI DEVE AVERE

$$C_{\pi^0} = 1 \quad (\text{in accordo con il modello a quark})$$

N.B. LA C-PARITY DEL FOTONE PUO' ESSERE DEDOTTA DAL COMPORTAMENTO DEL CAMPO E.M. CLASSICO. DATO CHE IL CAMBIO DEL SEGNO DELLA CARICA COMPORTA IL CAMBIO DEL SEGNO DEI CAMPI $\vec{E}$ E $\vec{B}$, $\Rightarrow C_\gamma = -1$

$\Rightarrow$ LA C-PARITY DI 3 FOTONI E' $(C_\gamma)^3 = -1$

$\Rightarrow$ IL DECADIMENTO $\pi^0 \to \gamma\gamma\gamma$ VIOLA LA C-PARITY

SPERIMENTALMENTE SI HA:

$$R \equiv \frac{\Gamma(\pi^0 \to 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)} < 3\cdot 10^{-8}$$

mentre ci si aspetterebbe che fosse di ordine $\alpha = \frac{1}{137}$

DOMANDE

$$R \equiv \frac{\Gamma(\pi^0 \to 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)} < 3 \cdot 10^{-8}$$

1) PERCHÉ DA UN PUNTO DI VISTA SPERIMENTALE NON POSSIAMO SEMPLICEMENTE DIRE $R = 0$?

2) COME FACCIAMO AD ESSERE SICURI CHE NEL DECADIMENTO $\pi^0 \to 2\gamma$ NON CI SIAMO "PERSI" UN FOTONE, ED ERANO INVECE 3γ ?

3) LO SPAZIO DELLE FASI GIOCA UN RUOLO NEL VALUTARE R ?

TIME REVERSAL

- GLI OPERATORI $\hat{P}$ E $\hat{C}$ SONO HERMITIANI E UNITARI E DANNO ORIGINE A NUMERI QUANTICI MOLTIPLICATIVI
- L'OPERATORE DI TIME REVERSAL $\hat{T}$ NON È UNITARIO E PERTANTO AD ESSO NON È ASSOCIATO NESSUN NUMERO QUANTICO
- TUTTAVIA L'INVARIANZA PER TIME REVERSAL È UTILE NELLA FISICA SUBATOMICA, AD ESEMPIO NEL CASO DI BILANCIO DETTAGLIATO

– ALCUNE CONSEGUENZE:

$$t \xrightarrow{\hat{T}} -t \;;\quad \vec{x} \xrightarrow{\hat{T}} \vec{x} \;;\quad \vec{p} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{p} \;;\quad \vec{J} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{J} \;;\quad \vec{E} \xrightarrow{\hat{T}} \vec{E} \quad \vec{B} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{B}$$

- LE LEGGI DI NEWTON SONO INVARIANTI PER $\hat{T}$ PERCHÉ LA DERIVATA TEMPORALE COMPARE AL SECONDO ORDINE
- PRENDIAMO L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER:

$$i\hbar \frac{d\Psi(t)}{dt} = H\Psi(t)$$

[formalmente è uguale all'equazione di diffusione che non è invariante per $\hat{T}$]

SE $\hat{T}|\Psi(t)\rangle$ SODDISFA LA STESSA EQ. DI $|\Psi(t)\rangle \Rightarrow T =$ SIMMETRIA

$$i\hbar \frac{d(\hat{T}\Psi(t))}{dt} = H(\hat{T}\Psi(t))$$

SE PONIAMO $\hat{T}\Psi(t) = \Psi(-t)$ LE COSE NON TORNANO

→ PONENDO $t' = -t \Rightarrow dt' = -dt$; ABBIAMO

$$-i\hbar \frac{d\Psi(t')}{dt'} = H\Psi(t')$$

CHE È DIVERSA DALL'EQUAZIONE DI $\Psi(t)$

- LA CORRETTA TRASFORMAZIONE PER $\psi(t)$ FU TROVATA DA WIGNER

$$T\,\psi(t) = \psi^*(-t)$$

$$\Rightarrow \qquad -i\hbar \frac{d\psi^*(t')}{dt'} = H\,\psi^*(t')$$

PRENDIAMO POI IL COMPLESSO CONIUGATO DELL'INTERA EQUAZIONE E TORNIAMO ALL'EQ. DI SCHRÖDINGER DI PARTENZA

$$i\hbar \frac{d\psi(t')}{dt'} = H\,\psi(t')$$

MA A PATTO CHE H SIA REALE

SE H CONTIENE DEI TERMINI IMMAGINARI ALLORA L'HAMILTONIANA NON È INVARIANTE PER TIME REVERSAL

- T È UN OPERATORE ANTIUNITARIO E ANTILINEARE

$$\langle\psi'|\varphi'\rangle = \langle\psi T^+|T\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|\psi\rangle \qquad T(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1^* T_1\psi_1 + c_2^* T\psi_2$$

- L'INTERPRETAZIONE PIÙ FISICA DELLA TIME REVERSAL È UN MOTION-REVERSAL, DATO CHE T INVERTE SIA L'IMPULSO CHE IL MOMENTO ANGOLARE

$$T\,|\vec{p}, \vec{J}\rangle = |-\vec{p}\,; -\vec{J}\rangle \qquad \text{particelle di momento } -\vec{p}$$

- NON CI SONO SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI

$$T\,\psi(t) = \eta_T\,\psi(t) \qquad \text{perché} \qquad T\,\psi(t) = \psi^*(-t)$$

- L'INVARIANZA PER TIME REVERSAL <u>NON</u> PUÒ ESSERE VERIFICATA CERCANDO DECADIMENTI CHE LA VIOLANO PERCHÉ NON C'È UN NUMERO QUANTICO CHE CARATTERIZZA UNO STATO

PARTICELLE IDENTICHE

- SE UN SISTEMA È COMPOSTO DA PARTICELLE IDENTICHE, IL PRINCIPIO DI INDISTINGUIBILITA' AFFERMA CHE NESSUNA MISURA PUO' ESSERE FATTA CHE DISTINGUA QUESTO SISTEMA DA UNO NEL QUALE DUE (O PIU') PARTICELLE VENGANO SCAMBIATE

$$\Rightarrow |\xi_2, \xi_1\rangle = e^{i\alpha} |\xi_1, \xi_2\rangle$$

SE FACCIAMO UN SECONDO CAMBIO:

$$|\xi_1, \xi_2\rangle = e^{i\alpha} |\xi_2, \xi_1\rangle = e^{i2\alpha} |\xi_1, \xi_2\rangle \Rightarrow e^{i2\alpha} = 1 \Rightarrow e^{i\alpha} = \pm 1$$

- BOSONI: $e^{i\alpha} = +1$ (FUNZIONE D'ONDA SIMMETRICA)
- FERMIONI: $e^{i\alpha} = -1$ (FUNZIONE D'ONDA ANTISIMMETRICA)

N.B. LA FUNZIONE D'ONDA TOTALE PUO' ESSERE IL PRODOTTO DI TANTE PARTI:

$$\xi = \Psi(\text{SPAZIALE}) \cdot \chi(\text{SPIN}) \cdot \varphi(\text{SAPORE}) \cdot \sigma(\text{COLORE})$$

TEOREMA CPT

- NON C'E' NESSUNA RAGIONE FONDAMENTALE PER LA QUALE LE FORZE IN NATURA DEBBANO ESSERE INVARIANTI PER TRASFORMAZIONI C, P, T SEPARATAMENTE.

- TUTTAVIA UNA TEORIA DEI CAMPI QUANTISTICA CHE SIA INVARIANTE PER TRASFORMAZIONI DI LORENTZ DEVE ESSERE ANCHE INVARIANTE PER LA TRASFORMAZIONE CPT
- CONSEGUENZE: AD ESEMPIO UNA PARTICELLA E LA SUA ANTIPARTICELLA DEVONO AVERE RIGOROSAMENTE LA STESSA MASSA E LA STESSA VITA MEDIA

GRUPPO DI SIMMETRIA

- SI STUDIA LA SIMMETRIA DI UN SISTEMA FACENDO DELLE "ROTAZIONI" IN UNO SPAZIO APPROPRIATO
- L'INSIEME DEGLI OPERATORI DI ROTAZIONE FORMANO UN GRUPPO DI SIMMETRIA
- SE ABBIAMO UN NUMERO FINITO DI STATI TALI CHE, SOTTO L'AZIONE DEGLI OPERATORI, SI TRASFORMANO IN UN ALTRO STATO DELLO SPAZIO, ALLORA ABBIAMO UN SOTTOSPAZIO INVARIANTE DI STATI. PER QUESTI STATI GLI OPERATORI DEL GRUPPO NON POSSONO CONNETTERE LO STATO CON UN ALTRO AL DI FUORI DI QUESTO SPAZIO. LO SPAZIO È IRRIDUCIBILE SE È IL PIÙ PICCOLO DEI SOTTOSPAZI.
- UN SOTTOSPAZIO INVARIANTE IRRIDUCIBILE SI CHIAMA MULTIPLETTO DEL GRUPPO DI OPERATORI.
- UN TEOREMA GENERALE AFFERMA CHE SE L'HAMILTONIANA DI UN SISTEMA COMMUTA CON GLI OPERATORI DEL GRUPPO DI SIMMETRIA, ALLORA I MULTIPLETTI SONO DEGLI INSIEMI DI AUTOSTATI DEGENERI DELL'HAMILTONIANA (AD ESEMPIO STESSA MASSA)
- SAPPIAMO CHE PER LE PARTICELLE ELEMENTARI GLI STATI NON SONO DEGENERI (NON HANNO LA STESSA MASSA), QUINDI L'HAMILTONIANA NON COMMUTA CON IL GRUPPO DI SIMMETRIA. [ESEMPIO: L'ACCOPPIAMENTO SPIN ORBITA $\vec{L}\cdot\vec{S}$ ROMPE LA SIMMETRIA DI ROTAZIONE, ALLORA I LIVELLI ATOMICI SI SPLITTANO]
- UN GRUPPO DI LIE È UN GRUPPO CONTINUO COMPOSTO DAGLI OPERATORI $U(\vec{\alpha}) = U(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ CHE DIPENDE ANALITICAMENTE DAGLI n PARAMETRI α E PER IL QUALE $U(\vec{0}) = 1$

TEORIA DEI GRUPPI !

- INTRODUCIAMO BREVEMENTE SOLO LA TERMINOLOGIA PRENDENDO AD ESEMPIO LE ROTAZIONI SPAZIALI

- L'INSIEME DELLE ROTAZIONI FORMANO UN GRUPPO, OGNI ROTAZIONE È UN ELEMENTO DEL GRUPPO
- DUE ROTAZIONI SUCCESSIVE, R_1 SEGUITA DA R_2, SONO EQUIVALENTI AD UNA SINGOLA ROTAZIONE, CHIAMATA <u>PRODOTTO</u> $R_2 R_1$

- L'INSIEME DELLE ROTAZIONI È <u>CHIUSO</u> RISPETTO ALLE MOLTIPLICAZIONI, CIOÈ OGNI MOLTIPLICAZIONE PRODUCE UN ELEMENTO CHE FA PARTE DELL'INSIEME
- C'È UN ELEMENTO <u>IDENTITA'</u> (NESSUNA ROTAZIONE) ED UN ELEMENTO <u>INVERSO</u> (ROTAZIONE ALL'INDIETRO)

- IL PRODOTTO NON È NECESSARIAMENTE COMMUTATIVO $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$. QUANDO LO È IL GRUPPO SI CHIAMA ABELIANO. VALE SEMPRE LA REGOLA ASSOCIATIVA $R_3 (R_2 R_1) = (R_3 R_2) R_1$

- IL GRUPPO DELLE ROTAZIONI È CARATTERIZZATO DA UN INSIEME DI PARAMETRI CONTINUI $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. OGNI ROTAZIONE PUÒ ESSERE ESPRESSA COME SOMMA DI ROTAZIONI INFINITESIME: <u>GRUPPO DI LIE</u>
- I GENERATORI DELLE ROTAZIONI SONO I TRE OPER. DEL MOM. ANG.

$$[\vec{J}_i, \vec{J}_j]\; i\epsilon_{ijk} J_k$$

QUESTA RELAZIONE DEFINISCE COMPLETAMENTE LE PROPRIETÀ DEL GRUPPO: <u>ALGEBRA DI LIE</u>.

- DATO CHE I GENERATORI NON COMMUTANO, SOLO UNO PUÒ ESSERE UTILIZZATO PER DEFINIRE IL NUMERO QUANTICO DI UNO STATO: ESEMPIO J_z

- FUNZIONI NON LINEARI DEI GENERATORI CHE COMMUTANO CON TUTTI I GENERATORI SONO CHIAMATI INVARIANTI O <u>OPERATORI DI CASIMIR</u>

PER IL GRUPPO DELLE ROTAZIONI:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

QUESTO È IL SOLO OPERATORE DI CASIMIR

$$[J^2, J_i] = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

QUINDI SI POSSONO COSTRUIRE SIMULTANEAMENTE AUTOSTATI DI J^2 E DI UNO DEI J_i, AD ESEMPIO J_3

$$J^2 |J, m\rangle = J(J+1) |J, m\rangle$$

$$J_3 |J, m\rangle = m |J, m\rangle$$

- SI POSSONO COSTRUIRE GLI OPERATORI DI INNALZAMENTO E DI ABBASSAMENTO

$$J_\pm = J_1 \pm i J_2$$

$$\Rightarrow \qquad J_\pm |J m\rangle = [(J(J+1) - m(m \pm 1)]^{1/2} |J, m \pm 1\rangle$$

- ALTRE DEFINIZIONI
  - GENERATORI DI UN GRUPPO = NUM. DI MATRICI INDIPENDENTI
  - RANGO DI UN GRUPPO = NUMERO DI MATRICI DIAGONALI, CORRISPONDENTI AL NUMERO DI OPERATORI CHE COMMUTANO

    (IL RANGO È ANCHE UGUALE AL NUMERO DI OPERATORI DI CASIMIR)

- VEDIAMO COME SI TRASFORMA L'AUTOSTATO $|J,m\rangle$ IN SEGUITO AD UNA ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE 2 (Y)

$$e^{-i\theta J_2}|J,m\rangle = \sum_{m'} d^J_{m'm}(\theta)\,|J,m'\rangle$$

I COEFFICIENTI $d^J_{m'm}$ POSSONO ESSERE INTERPRETATI COME MATRICI DI ROTAZIONE.

- DA NOTARE CHE GLI AUTOSTATI CHE HANNO LO STESSO J VENGONO MESCOLATI TRA DI LORO DALLA ROTAZIONE. ESSI FORMANO LA BASE DI <u>DIMENSIONE (2J+1)</u> DELLA <u>RAPPRESENTAZIONE</u> <u>IRRIDUCIBILE</u> DEL GRUPPO DELLE ROTAZIONI

SU(2)

- CONSIDERIAMO LE ROTAZIONI DEGLI STATI CON $J = \frac{1}{2}$

  – I GENERATORI DELLE ROTAZIONI POSSONO ESSERE SCRITTI COME:

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ matrici di Pauli

- LA BASE DI QUESTA RAPPRESENTAZIONE È DATA DAGLI AUTOSTATI DI σ_3

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- LE MATRICI DELLE TRASFORMAZIONI SONO:

$$U(\theta_i) = e^{-i\theta_i \sigma_i/2} \qquad i = 1, 2, 3$$ Matrici Unitarie

- L'INSIEME DI TUTTE LE MATRICI UNITARIE 2×2 È NOTO COME GRUPPO U(2). TUTTAVIA IL GRUPPO U(2) È PIÙ GRANDE DEL GRUPPO DELLE MATRICI $U(\theta_i)$, PERCHÉ LE σ_i HANNO TRACCIA ZERO.

- PER OGNI MATRICE A TRACCIA ZERO SI HA:

$$\det(e^{i\sigma}) = e^{i\,Tr(\sigma)} = 1$$

- L'INSIEME DELLE MATRICI 2×2 A TRACCIA NULLA FORMANO IL SOTTOGRUPPO SU(2) DI U(2). SU(2) DENOTA IL GRUPPO SPECIALE UNITARIO IN DUE DIMENSIONI

- L'ALGEBRA DI SU(2) È QUELLA DEI GENERATORI J_i

$$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k$$

- LA RAPPRESENTAZIONE A DUE DIMENSIONI DI SU(2) È LA RAPPRESENTAZIONE FONDAMENTALE

COMBINAZIONE DI RAPPRESENTAZIONI

- PRENDIAMO UN SISTEMA COMPOSTO DA DUE SISTEMI DI MOMENTO ANGOLARE J_A E J_B

$$|J_A J_B m_A m_B\rangle \equiv |J_A m_A\rangle |J_B m_B\rangle$$

- L'OPERATORE $\vec{J} = \vec{J}_A + \vec{J}_B$ SODDISFA LE REGOLE DELL'ALGEBRA DI LIE DEL GRUPPO: $[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k$
- I NUMERI QUANTICI CONSERVATI SONO J E M
- IL PRODOTTO DI DUE RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI DIMENSIONI $(2J_A+1)$ E $(2J_B+1)$ PUÒ ESSERE DECOMPOSTO NELLA SOMMA DI RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI DIMENSIONE $2J+1$, DOVE:

$$J = |J_A - J_B| \,;\; |J_A - J_B| + 1 \,;\; \cdots\cdots \,;\; J_A + J_B$$

L'AUTOSTATO È: $|J_A; J_B; J; M\rangle$; DOVE: $M = m_A + m_B$

- SI HA:

$$|J_A; J_B; J; M\rangle = \sum_{m_A, m_B} \underbrace{C(m_A, m_B; J, M)}_{\text{coefficienti di Clebsch-Gordan}} |J_A; J_B; m_A; m_B\rangle$$

- I COEFFICIENTI SI POSSONO CALCOLARE USANDO IN SEQUENZA L'OPERATORE DI ABBASSAMENTO $J_- = (J_A)_- + (J_B)_-$ ALLO STATO:

$$|J_A, J_B, J, M = J\rangle = |J_A, J_B, m_A = J_A, m_B = J_B\rangle$$

- ESEMPIO: NEL CASO DI DUE SISTEMI DI SPIN $\frac{1}{2}$ ABBIAMO:

$$2 \otimes 2 = \underbrace{3}_{\text{SIMMETRICO}} \oplus \underbrace{1}_{\text{ANTISIMMETRICO}}$$

- AGGIUNGENDO UN TERZO SPIN $\frac{1}{2}$ ABBIAMO:

$$(2\otimes 2)\otimes 2 = (3\oplus 1)\otimes 2 = (3\otimes 2)\oplus(1\otimes 2) = \underbrace{4}_{J=\frac{3}{2}} \oplus \underbrace{2}_{J=\frac{1}{2}} \oplus \underbrace{2}_{J=\frac{1}{2}}$$

ISOSPIN

- HEISENBERG PROPOSE NEL 1932 CHE IL PROTONE ED IL NEUTRONE ERANO DUE STATI DIVERSI DI UNA STESSA PARTICELLA: IL NUCLEONE, E CHE L'INTERAZIONE FORTE FOSSE LA STESSA PER p E n.

- PER IMPLEMENTARE QUESTA IDEA SI PUÒ RAPPRESENTARE IL NUCLEONE COME UN VETTORE COLONNA A DUE COMPONENTI:

$$N = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \quad ; \quad p = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad ; \quad n = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

IL PROTONE HA $I_3 = \frac{1}{2}$ E IL NEUTRONE HA $I_3 = -\frac{1}{2}$

- SE LE INTERAZIONI FORTI SONO INVARIANTI PER ROTAZIONI NELLO SPAZIO DELL'ISOSPIN, ALLORA L'ISOSPIN SI DEVE CONSERVARE IN TUTTI I PROCESSI DOVE INTERVENGONO LE INTERAZIONI FORTI

- VEDIAMO UNA CONSEGUENZA <u>DINAMICA</u> DELLA CONSERVAZIONE DELL'ISOSPIN:
  - SUPPONIAMO DI AVERE 2 NUCLEONI, DALLA REGOLA DI ADDIZIONE DEI MOMENTI ANGOLARI, SAPPIAMO CHE L'ISOSPIN TOTALE PUÒ ESSERE 1, 0

TRIPLETTO SIMMETRICO

a) $|1, 1\rangle = pp$

b) $|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn + np)$

c) $|1, -1\rangle = nn$

ISOSINGOLETTO ANTISIMMETRICO

$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np)$

- ESISTE UNO STATO LEGATO PROTONE-NEUTRONE = DEUTONE
  NON ESISTE UNO STATO LEGATO PROTONE-PROTONE OPPURE NEUTRONE-NEUTRONE, QUINDI IL DEUTONE DEVE ESSERE UN ISOSINGOLETTO, ALTRIMENTI SAREBBERO DOVUTI ESISTERE ANCHE GLI ALTRI DUE STATI CHE DIFFERISCONO PER UNA ROTAZIONE NELLO SPAZIO DELL'ISOSPIN (1

- VEDIAMO DELLE IMPLICAZIONI SULLO SCATTERING NUCLEONE-NUCLEONE. CONSIDERIAMO I PROCESSI:

a) $p + p \to d + \pi^+$

b) $p + n \to d + \pi^0$ [IL π HA ISOSPIN 1]

c) $n + n \to d + \pi^-$

DATO CHE IL DEUTONE HA ISOSPIN $I=0$, GLI STATI SULLA DESTRA SONO:

$$d+\pi^+ = |1,1\rangle \;;\quad d+\pi^0 = |1,0\rangle \;;\quad d+\pi^- = |1,-1\rangle$$

MENTRE QUELLI SULLA SINISTRA SONO:

$$p+p = |1,1\rangle \;;\quad p+n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,0\rangle\right) \;;\quad n+n = |1,-1\rangle$$

- DATO CHE I SI DEVE CONSERVARE, CONTRIBUISCONO SOLO GLI STATI CON $I=1$. LE AMPIEZZE DI SCATTERING DEVONO STARE NEL RAPPORTO:

$$1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$

E LE SEZIONI D'URTO COME $2 : 1 : 2$

- I PROCESSI a) E b) SONO STATI MISURATI, ED UNA VOLTA TENUTO IN CONTO LE CORREZIONI PER L'INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA, ESSI HANNO IL RAPPORTO PREDETTO

- FORMULA DI GELL-MANN - NISHIJIMA

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\underbrace{B}_{\text{numero barionico}} + \overbrace{S}^{\text{stranezza}})$$

N.B. $B + S = Y$ (IPERCARICA)

$$\Rightarrow Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$$

SU(3)

- SU(3) È LO SPAZIO DELLE MATRICI UNITARIE 3×3 A TRACCIA NULLA. VI SONO $3^2-1=8$ MATRICI INDIPENDENTI

- IL DOPPIETTO BASE DI SU(2) È SOSTITUITO DA UN TRIPLETTO
$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$$

- IL TRIPLETTO BASE SI TRASFORMA COME: $\varphi \to \varphi' = U\varphi$
LE MATRICI U SONO MATRICI UNITARIE 3×3

- LA RAPPRESENTAZIONE CANONICA DELLE U È:
$$U = e^{-\frac{1}{2} i \theta \hat{n} \cdot \vec{\lambda}}$$
[$\frac{1}{2}\vec{\lambda}$ SONO GLI 8 GENERATORI DEL GRUPPO DI SIMMETRIA]

- LE MATRICI $\vec{\lambda}$ FURONO INTRODOTTE DA GELL-MANN E SONO EQUIVALENTI ALLE MATRICI $\vec{\sigma}$ DI PAULI PER SU(2)

- LA FORMA STANDARD È:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- GLI 8 GENERATORI SODDISFANO ALLE REGOLE DI COMMUTAZIONE $\left[\frac{1}{2}\lambda_i, \frac{1}{2}\lambda_j\right] = i f_{ijk} \frac{1}{2}\lambda_k$

$$\left[\tfrac{1}{2}\lambda_i , \tfrac{1}{2}\lambda_j \right] = i f_{ijk} \tfrac{1}{2}\lambda_k$$

- $f_{123} = 1$; $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$; $f_{458} = f_{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
- GLI f_{ijk} SONO ANTISIMMETRICI PER LO SCAMBIO DI DUE INDICI.

N.B. CI SONO SOLO DUE MATRICI DIAGONALI ; QUESTO CORRI= SPONDE AL NUMERO MASSIMO DI GENERATORI CHE COMMUTANO. QUESTO SI CHIAMA RANGO DEL GRUPPO:

- SU(3) : RANGO 2
- SU(2) : RANGO 1

$\Rightarrow$ IN SU(3) CI SONO 2 OPERATORI DI CASIMIR (COMBINAZIONI NON LINEARE DEI GENERATORI CHE COMMUTA CON TUTTI I GENERATORI)

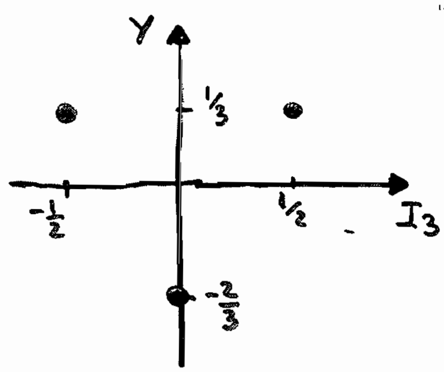
- I DUE GENERATORI DIAGONALI IDENTIFICANO DUE NUMERI QUANTICI ADDITIVI CHE POSSONO ESSERE UTILIZZATI PER IDENTIFI= CARE GLI ELEMENTI DEL MULTIPLETTO.

LA SCELTA CONVENZIONALE E':

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

I_3 = ISOSPIN $\qquad$ Y = IPERCARICA

- GLI STATI VENGONO RAPPRESENTATI IN UN GRAFICO BIDIMENSIONALE



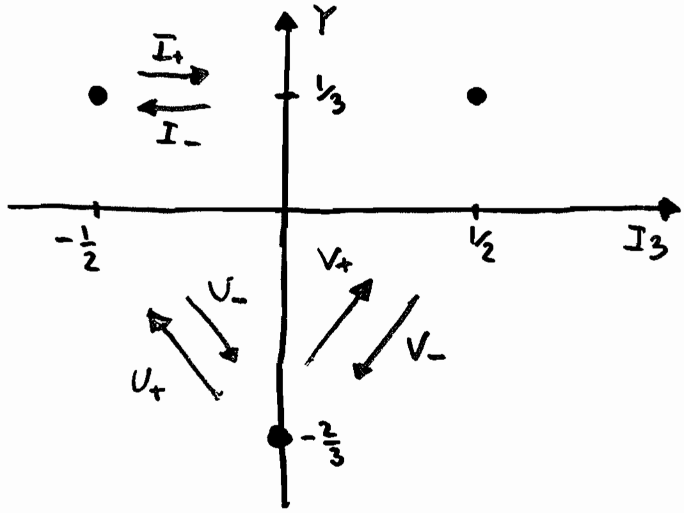
I 3 AUTOVETTORI DEL TRIPLETTO FONDAMENTALE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$I_3 = \frac{1}{2}$	$I_3 = -\frac{1}{2}$	$I_3 = 0$
$Y = \frac{1}{3}$	$Y = \frac{1}{3}$	$Y = -\frac{2}{3}$

OPERATORI "LADDER"

- SI POSSONO TROVARE DELLE COMBINAZIONI DEI GENERATORI ($\vec{F} = \frac{1}{2}\vec{\lambda}$) CHE CONNETTONO TRA DI LORO I VARI STATI DI UN MULTIPLETTO



$I_\pm = F_1 \pm i F_2$; $I_3 = F_3$

$V_\pm = F_4 \pm i F_5$

$U_\pm = F_6 \pm i F_7$

$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$

- $I_\pm \Rightarrow \Delta Y = 0$; $\Delta I_3 = \pm 1$
- $U_\pm \Rightarrow \Delta Y = \pm 1$; $\Delta I_3 = \mp \frac{1}{2}$
- $V_\pm \Rightarrow \Delta Y = \pm 1$; $\Delta I_3 = \pm \frac{1}{2}$

N.B. GLI OPERATORI LADDER CONNETTONO SOLO STATI CHE APPARTENGONO AD UN MULTIPLETTO IRRIDUCIBILE

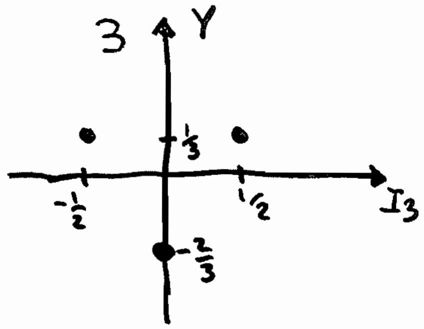
- REGOLE DI COMMUTAZIONE

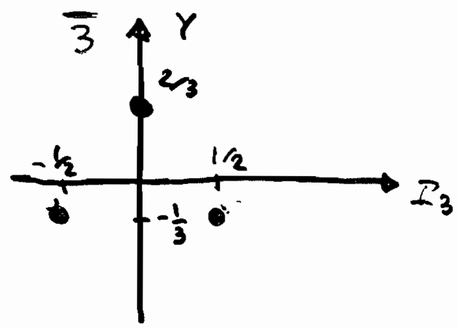
$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm$; $[I_3, U_\pm] = \mp \frac{1}{2} U_\pm$; $[I_3, V_\pm] = \pm \frac{1}{2} V_\pm$

$[Y, I_\pm] = 0$; $[Y, U_\pm] = \pm U_\pm$; $[Y, V_\pm] = \pm V_\pm$

PRODOTTO DI RAPPRESENTAZIONI

N.B. LA RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA DI SU(3), $\bar{3}$, SI TRASFORMA IN MODO DIVERSO DALLA 3 E HA NUMERI QUANTICI DIVERSI





(che cosa è una rappresentazione coniugata diventa chiaro quando le interpretiamo in termini di particelle)

- $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ ← singoletto di SU(3)
  ↑ ottetto di SU(3)

- $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$

- $3 \otimes 3 \otimes 3 = 3 \otimes (6 \oplus \bar{3}) = 3 \otimes 6 \oplus 3 \otimes \bar{3} =$

  $= 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$
  singoletto, ottetto, ottetto, decupletto

- QUESTE SONO RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI DI SU(3) CARATTERIZZATE DAGLI STESSI NUMERI QUANTICI INDIVIDUATI DAGLI OPERATORI DI CASIMIR.

- GLI STATI ALL'INTERNO DI UN MULTIPLETTO SONO INDIVIDUATI DA I_3 E Y E SONO CONNESSI TRA DI LORO DAGLI OPERATORI LADDER