Soluzioni esonero 26/03/07

1. Calcolare l'energia di soglia del fotone relativo alla produzione di coppie in presenza del campo di un elettrone. **[5 punti]**

La produzione di coppie non può avvenire per un fotone isolato in quanto non si conserverebbe il quadrimpulso. Occorre quindi la presenza di una seconda particella, che può essere un nucleo atomico oppure un elettrone.

Nel caso di un elettrone si ha il processo:

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$$

Per calcolare l'energia di soglia si assume che le particelle finali vengano prodotte a riposo nel sistema del centro di massa. Inoltre ricordiamo che il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico. Indichiamo con m la massa dell'elettrone.

$$P_\gamma = (E_\gamma, \vec{P}_\gamma) \; ; \quad E_e = (m, 0)$$

$$\Rightarrow \quad P^{Lab.}_{iniz.} = (E_\gamma + m, \vec{P}_\gamma) \; ; \quad P^{C.M.}_{fin.} = (3m, 0)$$

$$\left(P^{Lab.}_{iniz.}\right)^2 = \left(P^{C.M.}_{fin.}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(E_\gamma + m\right)^2 - \vec{p}^{\,2}_\gamma = (3m)^2 =$$

$$= \cancel{E^2_\gamma} + m^2 + 2E_\gamma - \cancel{\vec{p}^{\,2}_\gamma} = 9m^2$$

$$\Rightarrow \quad E_\gamma = 4m = 4 \cdot 0.511 = 2.04 \text{ MeV}$$

2. Dire quali reazioni sono possibili e quali no. Nel caso siano possibili indicare l'interazione responsabile e nel caso non lo siano, spiegare perché. (si tenga presente che i processi deboli al secondo ordine sono di fatto proibiti). **[6 punti]**

a) $p+p \to K^+ + K^+ + n + n$ ☐ SI ☒ NO : ....

Violazione della stranezza

b) $\bar{p}+n \to \pi^- + \pi^0$ ☒ SI ☐ NO

interazione forte

c) $K^+ + n \to K^+ + \bar{K}^0$ ☐ SI ☒ NO :

violazione del numero barionico

d) $\Sigma^+ \to \pi^+ + \pi^0$ ☐ SI ☒ NO :

violazione del numero barionico

e) $\pi^0 \to \mu^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ ☐ SI ☒ NO :

violazione del numero leptonico

f) $K^0 \to K^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ ☒ SI ☐ NO :

int. debole, anche se lo spazio delle fasi è molto piccolo quindi di fatto non avviene

g) $K^- + p \to K^+ + \Xi^-$ ☒ SI ☐ NO :

int. forte

h) $\Omega^- \to \Xi^0 + \pi^-$ ☒ SI ☐ NO :

int. debole

3. Determinare il numero barionico, l'ipercarica , lo spin isotopico e la carica dei seguenti sistemi di quark.
[5 punti]

a) $u\bar{s}$: B= ...0.. Y= ..1.. I= ...$\frac{1}{2}$.. ; Q=..1......

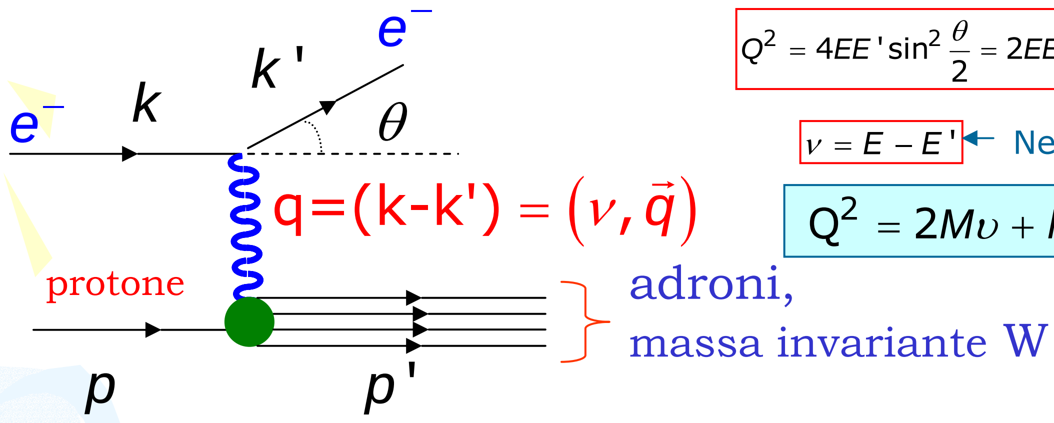
b) $c\bar{d}$: B= ..0... Y= ..1.. I= ..$\frac{1}{2}$... ; Q=...1.....

c) ddc : B= ...1.. Y= ..2.. I= ..1... ; Q=...0.....
Non si può avere isospin 0, perché Q=0 si ha solo se I_3=-1

d) ubc : B= ...1.. Y= ..1.. I= ..$\frac{1}{2}$... ; Q=...1.....

e) $s\bar{s}$: B= ..0... Y= ..0.. I= ..0... ; Q=...0.....

4. In un esperimento di scattering di elettroni su protoni si utilizzano elettroni di 7 GeV e si posiziona lo spettrometro per rivelare gli elettroni diffusi ad un angolo di 6° rispetto alla linea di volo degli elettroni incidenti. Si misura un'energia dell'elettrone deflesso pari a 5.13 GeV. Trovare: a) l'energia trasferita ν ; b) il modulo quadro del quadrimpulso trasferito q^2; c) la massa invariante W degli adroni prodotti; d) stabilire se lo scattering è elastico o anelastico. Per semplicità nei calcoli si assuma la massa del protone pari a 1 GeV. **[6 punti]**



$$\boxed{Q^2 = 4EE'\sin^2\frac{\theta}{2} = 2EE'(1-\cos\theta)}$$

$\boxed{\nu = E - E'}$ ← Nel laboratorio

$$\boxed{Q^2 = 2M\upsilon + M^2 - W^2}$$

a) Ricaviamo ν: $\nu = E - E' = 7 - 5.13 = 1.87$ GeV

b) $q^2 = -Q^2 = -2EE'(1-\cos\theta) = -2 \bullet 7 \bullet 5.13(1-\cos 6°) = -0.393\ \text{GeV}^2$

c) $Q^2 = 2M\upsilon + M^2 - W^2 \Rightarrow W^2 = 2M\upsilon + M^2 - Q^2 =$

$= 2 \bullet 1 \bullet 1.87 + 1^2 - 0.393 = 4.347 \Rightarrow W = \sqrt{4.347} = 2.1\ \text{GeV}$

d) Lo scattering è anelastico perché la massa invariante degli adroni prodotti non è uguale alla massa del protone. Comunque valutiamo anche il valore della variabile x che è uguale a 1 se lo scattering è elastico, altrimenti è minore di 1

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \frac{0.393}{2 \bullet 1 \bullet 1.87} = 0.105$$

5. Il B.R. del seguente decadimento $\Sigma^- \to \Lambda + e^- + \bar{\nu}_e$ è 5.7•10^{-5}. Assumendo che l'elemento di matrice del decadimento sia simile a quello del decadimento β del neutrone, stimare l'ordine di grandezza della vita media della Σ^-. Si ricorda che la vita media del neutrone è di 886 s, $m_n - m_p = 1.29$ MeV ; $m_{\Sigma^-} - m_\Lambda = 81$ MeV.
[5 punti]

Occorre applicare la regola di Sargent: la probabilità di transizione è proporzionale alla differenza di massa alla quinta. Per gli stessi canali di decadimento si assume che la costante di proporzionalità sia la stessa per il neutrone e per la Σ^-.

$$W_n = \Gamma_n = \frac{1}{\tau_n} = A \cdot (m_n - m_p)^5$$

$$W_{\Sigma^-}(\Sigma^- \to \Lambda e^- \bar{\nu}_e) = B.R. \times \Gamma_{\Sigma^-} = \frac{B.R.}{\tau_{\Sigma^-}} = A \cdot (m_{\Sigma^-} - m_\Lambda)^5$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_\Sigma}{\tau_n} = B.R. \frac{(m_n - m_p)^5}{(m_\Sigma - m_\Lambda)^5} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\Sigma^-} = \tau_n \; B.R. \frac{(m_n - m_p)^5}{(m_\Sigma - m_\Lambda)^5}$$

$$\tau_{\Sigma^-} = 886 \times 5.7 \cdot 10^{-5} \times \left(\frac{1.29}{81}\right)^5 = 52 \text{ ps}$$

Il valore misurato della vita media del Σ^- è 148 ps, che differisce di un fattore 3 rispetto alla nostra stima. La differenza può essere imputata all'assunzione che l'elemento di matrice del decadimento del neutrone e della Σ^- sia lo stesso.

6. La sezione d'urto totale del processo $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ a 200 GeV nel centro di massa vale 16.5 pb. Sapendo che il B.R. del decadimento del W in una coppia di leptoni è circa 11%, determinare le sezioni d'urto parziali nel canale completamente adronico (cioè tutti e due i W decadono adronicamente); completamente leptonico e semileptonico. **[6 punti]**

Il W può decadere in tre coppie di leptoni (elettrone più neutrino, muone più neutrino e tau più neutrino), quindi il B.R. leptonico del W è: 3x11=33%;
mentre il B.R. del decadimento adronico è 100-33=67%

La probabilità che tutti e due i W decadono leptonicamente è uguale al prodotto delle due probabilità che uno decada leptonicamente, e così via, tenendo presente che nel canale semileptonico occorre moltiplicare per 2 perché vi sono due combinazioni diverse che danno lo stesso risultato finale (decade leptonico il primo W oppure il secondo)

$$B.R.(WW \to lept.) = B.R.(W \to lept) \times B.R.(W \to lept) = 0.33 \times 0.33 = 0.11$$

$$B.R.(WW \to hadr.) = B.R.(W \to hadr) \times B.R.(W \to hadr) = 0.67 \times 0.67 = 0.45$$

$$B.R.(WW \to semilept.) = 2 \times B.R.(W \to lept) \times B.R.(W \to had) =$$
$$= 2 \times 0.33 \times 0.67 = 0.44$$

Per trovare le sezioni d'urto parziali è sufficiente moltiplicare la sezione d'urto totale per i B.R. appena trovati:

$$\sigma_{(WW \to lept.)} = \sigma_{tot} \times B.R.(WW \to lept) = 16.5 \times 0.11 = 1.815 \text{ pb}$$

$$\sigma_{(WW \to hadr.)} = \sigma_{tot} \times B.R.(WW \to hadr) = 16.5 \times 0.45 = 7.425 \text{ pb}$$

$$\sigma_{(WW \to semilept.)} = \sigma_{tot} \times B.R.(WW \to semilept) = 16.5 \times 0.44 = 7.260 \text{ pb}$$

7. Dedurre attraverso quali canali di isospin possono avvenire le seguenti due reazioni:

$$a)\ K^- + p \to \Sigma^0 + \pi^0 \quad ; \quad b)\ K^- + p \to \Sigma^+ + \pi^-$$

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, trovare il rapporto tra le sezioni d'urto

σ_a / σ_b

[5 punti]

Ricordiamo l'isospin totale e la terza componente delle particelle coinvolte nella reazione e scriviamo lo stato iniziale ed i due stati finali in termini degli autostati di isospin utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan.

$$K^- = \left| I = \tfrac{1}{2}; I_3 = -\tfrac{1}{2} \right\rangle \ ; \ p = \left| I = \tfrac{1}{2}; I_3 = \tfrac{1}{2} \right\rangle \Rightarrow K^- + p = +\sqrt{\frac{1}{2}}|1;0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|0;0\rangle$$

$$\Sigma^0 = |I = 1; I_3 = 0\rangle \ ; \ \pi^0 = |I = 1; I_3 = 0\rangle \Rightarrow \Sigma^0 + \pi^0 = +\sqrt{\frac{2}{3}}|2;0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0;0\rangle$$

$$\Sigma^+ = |I = 1; I_3 = 1\rangle \ ; \ \pi^- = |I = 1; I_3 = -1\rangle \Rightarrow \Sigma^+ + \pi^- = +\sqrt{\frac{1}{6}}|2;0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1;0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0;0\rangle$$

Di conseguenza la reazione a) può avvenire soltanto attraverso il canale di isospin totale 0, mentre la reazione b) può avvenire attraverso il canale con isospin 0 ed anche con isospin 1.

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, allora il rapporto tra le sezioni d'urto è pari al rapporto dei quadrati dei coefficienti di C.G. dell'autostato di isospin 0 nei due stati finali:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \left| \frac{\langle \Sigma^0 + \pi^0 | 0;0 \rangle}{\langle \Sigma^+ + \pi^- | 0;0 \rangle} \right|^2 = \left| \frac{-\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \right|^2 = 1$$