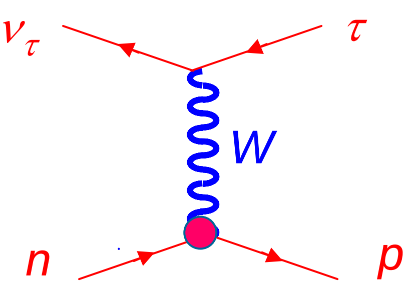
Soluzioni scritto 03/07/07

1. Un fascio di neutrini mu viene mandato dal cern ai laboratori sotterranei del Gran Sasso. Supponendo che durante il tragitto il neutrino mu si trasformi in un neutrino tau, si trovi l'energia minima del neutrino necessaria per produrre un leptone tau in un'interazione di corrente carica con un nucleone del rivelatore. (Si assuma comunque trascurabile la massa del neutrino). La massa del tau è 1777 MeV e la massa del nucleone è 939 MeV.

[5 punti]



La reazione è: $\nu_\tau + n \rightarrow \tau^- + p$

L'energia minima si ha quando le particelle dello stato finale sono prodotte in quiete nel sistema di riferimento del centro di massa. Scriviamo i quadrimpulsi dello stato iniziale nel sistema del laboratorio e dello stato finale nel sistema del CM

$$P_{in} = (E_\nu + M; \vec{p}_\nu) \quad ; \quad P_{fin} = (m_\tau + M; 0)$$

Il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico:

$$P_{in}^2 = P_{fin}^2 \Rightarrow (E_\nu + M)^2 - \vec{p}_\nu^{\,2} = (m_\tau + M)^2$$

$$\cancel{E_\nu^2} + 2E_\nu M + \cancel{M^2} - \cancel{\vec{p}_\nu^{\,2}} = m_\tau^2 + 2m_\tau M + \cancel{M^2}$$

$$\Rightarrow E_\nu = \frac{m_\tau^2}{2M} + m_\tau = \frac{1.777^2}{2 * 0.939} + 1.777 = 3.46 \text{ GeV}$$

2. Dire quali reazioni sono possibili e quali no. Nel caso siano possibili indicare l'interazione responsabile e nel caso non lo siano, spiegare perché. (si tenga presente che i processi deboli al secondo ordine sono di fatto proibiti). **[6 punti]**

a) $\pi^{+} + n \rightarrow K^{+} + \Sigma^{0}$ ☒ SI ☐ NO :

SI, Interazione forte

b) $\pi^{-} + n \rightarrow K^{-} + \Sigma^{0}$ ☐ SI ☒ NO :

NO, non si conserva la stranezza

c) $\bar{p} + n \rightarrow \bar{K}^{0} + K^{-}$ ☐ SI ☒ NO :

NO, non si conserva la stranezza

d) $\Sigma^{+} \rightarrow n + \mu^{+} + \nu_{\mu}$ ☐ SI ☒ NO :

NO, viene violata la regola $\Delta S = \Delta Q$

e) $e^{+} + e^{-} \rightarrow \nu + \bar{\nu} + e^{+} + e$ ☒ SI ☐ NO :

SI, interazione debole

f) $\pi^{+} \rightarrow \mu^{+} + \nu_{\mu} + \gamma$ ☒ SI ☐ NO :

SI, interazione debole

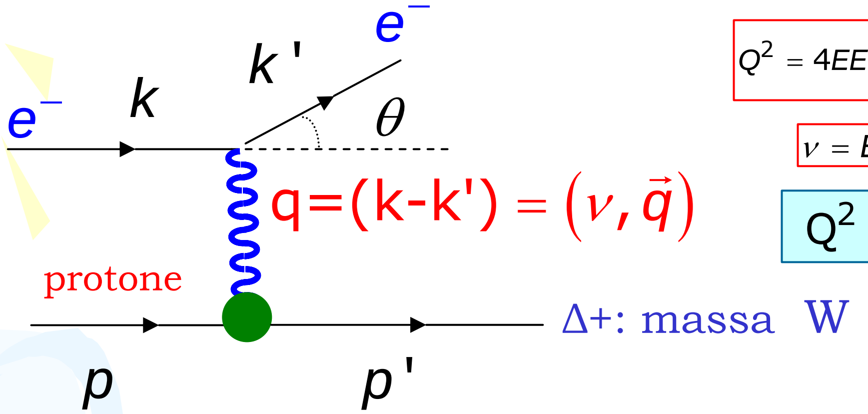
g) $\mu^{-} + e^{-} \rightarrow \nu_{\mu} + \nu_{e}$ ☐ SI ☒ NO :

NO, violazione della carica

h) $\Xi^{0} \rightarrow \Sigma^{0} + \pi^{0}$ ☐ SI ☒ NO :

NO, le masse finali sono maggiori della massa iniziale

3. In un esperimento di scattering di elettroni su protoni si vuole studiare la produzione della risonanza Δ^+, la cui massa è 1232 MeV (la massa del protone è 938 MeV). a) Si trovi l'energia minima dell'elettrone per la produzione di questa risonanza (si ricavi questo valore dalle formule dello scattering anelastico elettrone protone). b) Si immagini di avere un fascio di elettroni di energia 1 GeV e di avere uno spettrometro che non sia in grado di rilevare elettroni di energia al di sotto di 250 MeV. Si calcoli l'angolo massimo, rispetto alla direzione di volo degli elettroni, al di là del quale l'apparato non misura più gli elettroni relativi alla produzione della risonanza Δ^+. **[5 punti]**



$$\boxed{Q^2 = 4EE'\sin^2\frac{\theta}{2} = 2EE'(1-\cos\theta)}$$

$\boxed{\nu = E - E'}$ ← Nel laboratorio

$$\boxed{Q^2 = 2M\upsilon + M^2 - W^2}$$

a) Il sistema di riferimento del laboratorio “coincide” con il sistema del CM in quanto la massa dell’elettrone è molto minore di quella della Δ+.
L’energia di soglia si ha per E’=0 (elettrone fermo):

$$W^2\text{-}M^2 = 2M\upsilon - Q^2 = 2M(E-E') - 4EE'\sin^2\frac{\vartheta}{2} \Rightarrow 2ME$$

$$E = \frac{W^2\text{-}M^2}{2M} = \frac{1232^2 - 938^2}{2*938} = 340 \text{ MeV}$$

Si ottiene lo stesso risultato con un calcolo di cinematica relativistica.

b) Esplicitiamo sin² nella formula scritta in precedenza:

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{2M(E-E') + M^2 - W^2}{4EE'}$$

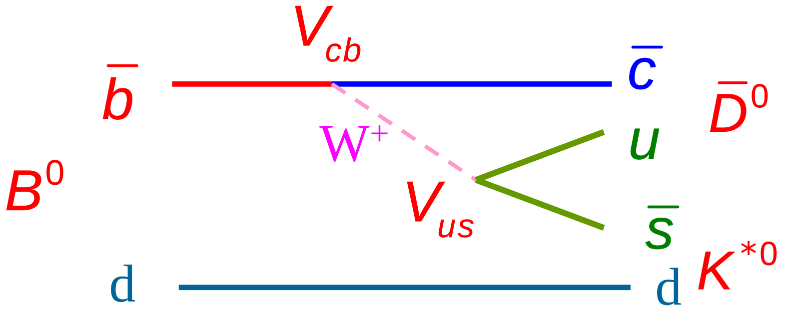
Sostituiamo i valori E=1 GeV, E’=0.25 GeV, M=0.938 GeV, W=1.232 GeV

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{2*0.938(1-0.25) + 0.938^2 - 1.232^2}{4*1*0.25} = 0.7690$$

$$\Rightarrow \vartheta = 2*\arcsin\left(\sqrt{0.7690}\right) = 122.5^o$$

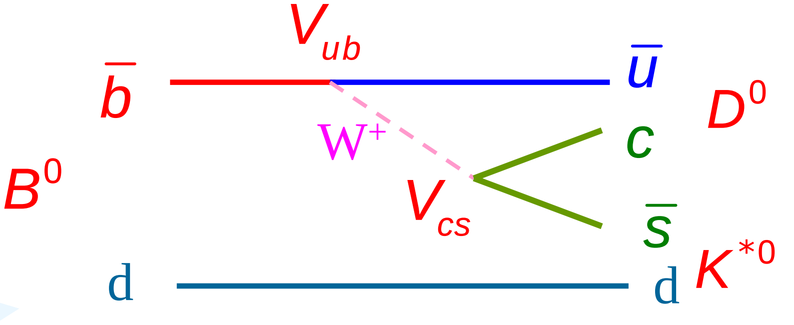
4. Il mesone B^0 è formato dal quark antib e dal quark d. Esso può decadere in anti-D^0 K^{*0} ($B^0 \rightarrow \bar{D}^0 + K^{*0}$) oppure D^0 K^{*0} ($B^0 \rightarrow D^0 + K^{*0}$) . Il D^0 è formato dall'antiquark $\bar{u}$ e dal quark c, mentre il K^{*0} è formato dal anti-s e d. a) Disegnare il diagramma di Feynman, nel modello spettatore, relativo ai due decadimenti. b) Indicare nel grafico gli elementi della matrice CKM che intervengono nell'accoppiamento del W.
c) In base al valore di questi elementi, dire se è più probabile il decadimento del B^0 in anti-D^0 K^{*0} oppure in D^0 K^{*0}. **[5 punti]**

a)



$B^0 \rightarrow \bar{D}^0 + K^{*0}$

b)



$B^0 \rightarrow D^0 + K^{*0}$

c) Nella reazione b) compare il termine V_{ub} che è molto piccolo confrontato con gli altri elementi della matrice CKM, quindi esso rende meno probabile questo decadimento rispetto all'altro.

5. La risonanza Δ^{++} ha la massa di 1232 MeV e larghezza totale di 118 MeV. Sapendo che la vita media del neutrone è di 886 s e che la differenza di massa tra neutrone e protone è di 1.29 MeV, si calcoli il B.R. del decadimento β^{+} della Δ^{++}.

($B.R. = \Gamma(\Delta^{++} \rightarrow p + e^{+} + \nu) / \Gamma_{tot}$). Si ricorda che $\hbar$=6.59 • 10^{-22} MeV^{-1} s. **[5 punti]**

Per risolvere il problema si utilizza la regola di Sargent. Facciamo l'ipotesi che la dinamica del decadimento beta del neutrone e della Delta siano simili, e che i due decadimenti differiscano solo per lo spazio delle fasi. Quindi abbiamo:

$$\Gamma_n \propto (m_n - m_p)^5 = \Delta m_n^5 \quad ; \quad \Gamma_\Delta \bullet B.R. \propto (m_\Delta - m_p)^5 = \Delta m_\Delta^5$$

$$\Rightarrow B.R. = \frac{\Delta m_\Delta^5}{\Delta m_n^5} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\Delta}$$

Trasformiamo la vita media del neutrone in una larghezza totale utilizzando la relazione di indeterminazione di Heisemberg:

$$\Gamma_n = \frac{\hbar}{\tau_n} = \frac{6.59 \bullet 10^{-22}}{886} = 7.44 \bullet 10^{-25} \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow B.R. = \frac{\Delta m_\Delta^5}{\Delta m_n^5} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\Delta} = \frac{(1232 - 938)^5}{1.29^5} \bullet \frac{7.44 \bullet 10^{-25}}{1.18 \bullet 10^2} = 3.9 \bullet 10^{-15}$$

6. A Lep-1 si studiava il processo $e^+e^- \to Z \to \bar{f}f$. Al picco della risonanza dello Z, la sezione d'urto parziale nel canale di decadimento adronico dello Z vale 41.5 nb mentre nel canale in coppie di muoni vale 2.00 nb. Sapendo che il B.R. del canale adronico è 0.699, si calcoli il B.R. del canale in coppie di muoni. **[5 punti]**

$$\sigma_{q\bar{q}} = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{s\Gamma_{e^+e^-}\Gamma_{q\bar{q}}}{\left(s - M_Z^2\right)^2 + \frac{s^2\Gamma_Z^2}{M_Z^2}} \xrightarrow{s=M_Z^2} \boxed{\sigma^0_{q\bar{q}} = \frac{12\pi}{M_Z^2}\frac{\Gamma_{e^+e^-}\Gamma_{q\bar{q}}}{\Gamma_Z^2}}$$

La sezione d'urto al picco è proporzionale al B.R. del decadimento dello Z nello stato finale:

$$\sigma^0_{f\bar{f}} = \frac{12\pi}{M_Z^2} B.R._{e^+e^-} \bullet B.R_{f\bar{f}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma^0_{q\bar{q}}}{\sigma^0_{\mu^+\mu^-}} = \frac{B.R._{q\bar{q}}}{B.R._{\mu^+\mu^-}} \Rightarrow B.R._{\mu^+\mu^-} = \frac{\sigma^0_{\mu^+\mu^-}}{\sigma^0_{q\bar{q}}} B.R._{q\bar{q}} = \frac{2.00}{41.5} \bullet 0.699 = 0.034$$

7. Ad una data energia del centro di massa, determinare il rapporto tra le sezioni d'urto dei seguenti due processi:

$a)$ p+d $\rightarrow$ $^3He + \pi^0$; b) p+d $\rightarrow$ $^3H + \pi^+$

Si ricorda che il deutone ha isospin zero.

[5 punti]

Il deutone ha isospin zero; quando si aggiunge un neutrone per formare il trizio, quest'ultimo avrà isospin ½ e terza componente -1/2. Quando al deutone si aggiunge un protone per formare ^{3}He, quest'ultimo avrà isospin ½ e terza componente +1/2. Quindi lo stato iniziale ed i due stati finali, nella base dell'isospin totale e ricordando che il pione ha isospin 1, sono uguali a:

$$p + d = \left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$^3He + \pi^0 = \left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1;0\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$^3H + \pi^+ = \left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1;1\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$$

Le interazioni forti conservano l'isospin totale, quindi la sezione d'urto è proporzionale al quadrato del coefficiente del termine con isospin totale ½ della funzione d'onda dello stato finale. Pertanto:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{\left|\left\langle ^3He + \pi^0 \mid \frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle\right|^2}{\left|\left\langle ^3H + \pi^+ \mid \frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle\right|^2} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$