Soluzioni scritto 10/09/07

1. Al collider simmetrico e+e- Daphne vengono utilizzati dei fasci di 510 MeV per produrre la particella Φ a riposo. La Φ può decadere in una coppia di K carichi la cui massa è di 494 MeV. Determinare la quantità di moto di un K carico prodotto nel decadimento.

   [5 punti]

La reazione è: $\Phi \to K^+K^-$

La massa della phi è uguale al doppio dell'energia dei fasci, quindi è di 1020 MeV. Nel decadimento si deve conservare il quadrimpulso, quindi l'energia dei due K deve essere pari a 1020 MeV e la quantità di moto totale deve essere nulla, cioè i due K sono back to back. Indichiamo con P_1 e P_2 il quadrimpulso dei K:

$$P_1 = (E_K;\vec{p}_K) \quad ; \quad P_2 = (E_K;-\vec{p}_K)$$

$$\Rightarrow \quad P_{in} = (M_\Phi;0) \quad ; \quad P_{fin} = (2E_K;0)$$

Il quadrato del quadrimpulso è un invariante relativistico:

$$P_{in}^2 = P_{fin}^2 \Rightarrow M_\Phi^2 = 4E_K^2$$

La relazione tra energia ed impulso del K è la seguente:

$$E_K^2 = m_K^2 + p_K^2$$

$$\Rightarrow \quad p_K^2 = \frac{1}{4}M_\Phi^2 - m_K^2 = \frac{1}{4}1020^2 - 494^2 = 16064 \text{ MeV}^2$$

$$\Rightarrow \quad p_K = 127 \text{ MeV}$$

2. Dire quali reazioni sono possibili e quali no. Nel caso siano possibili indicare l'interazione responsabile e nel caso non lo siano, spiegare perché. (si tenga presente che i processi deboli al secondo ordine sono di fatto proibiti). **[6 punti]**

a) $\Sigma^{+} \rightarrow n + e^{+} + \nu$ ☐ SI ☒ NO

Viola la regola $\Delta S = \Delta Q$

b) $\Omega^{-} \rightarrow \Lambda + \pi^{-}$ ☐ SI ☒ NO

$\Delta S=2$ non può avvenire al primo ordine

c) p + n $\rightarrow \bar{K}^{0} + K^{+}$ ☐ SI ☒ NO

Viola la conservazione del numero barionico

d) $K^{+} \rightarrow \pi^{0} + \mu^{+} + \nu_{\mu}$ ☒ SI ☐ NO

Interazione debole

e) $K^{0} \rightarrow \pi^{-} + \mu^{+} + \nu_{\mu}$ ☒ SI ☐ NO

interazione debole

f) $K^{+} \rightarrow \pi^{+} + \nu + \bar{\nu}$ ☐ SI ☒ NO

Viola la regola $\Delta S = \Delta Q$

g) $\mu^{+} + e^{-} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu} + \nu_{e}$ ☒ SI ☐ NO

interazione debole, anche se è un processo che non si può misurare

h) $\Xi^{0} \rightarrow \Sigma^{0} + \nu_{\tau}$ ☐ SI ☒ NO

Violazione del numero leptonico

3. Dimostrare perché il mesone eta non può decadere nei seguenti due canali: a) $\eta \to \pi^0 + \pi^0$; b) $\eta \to \pi^0 + \gamma$

[5 punti]

Il mesone eta fa parte dell'ottetto dei mesoni 0-, quindi ha spin 0 e parità intrinseca negativa. Inoltre l'eta è l'antiparticella di sé stessa come il π^0, essa è un autostato dell'operatore coniugazione di carica con autovalore +1, come il π^0.

L'eta decade elettromagneticamente in due fotoni, quindi non può fare nessun decadimento debole perché questi avrebbero un'ampiezza di decadimento trascurabile rispetto al decadimento dominante elettromagnetico. Quindi i decadimenti dell'eta devono essere forti o elettromagnetici ed in entrambi i casi si deve conservare la parità e la coniugazione di carica.

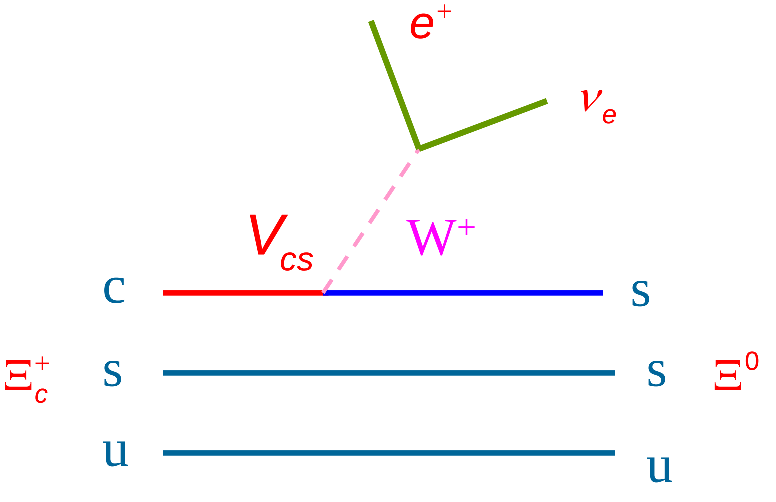
a) $\eta \to \pi^0 + \pi^0$

Lo stato finale ha parità positiva perché la funzione d'onda deve essere simmetrica dato che sono due particelle identiche; inoltre per la conservazione del momento angolare il momento angolare finale deve essere 0. Dato che l'eta ha parità intrinseca negativa, questo decadimento non può avvenire per la conservazione della parità.

b) $\eta \to \pi^0 + \gamma$

Questo decadimento non può avvenire per la conservazione dell'autovalore della coniugazione di carica, infatti il π^0 e l'eta hanno autovalore +1 mentre il fotone ha autovalore -1. Dato che la coniugazione di carica è moltiplicativa, lo stato finale ha autovalore +1 mentre lo stato iniziale ha autovalore -1.

4. Il barione Ξ^{+}_{c} ha stranezza -1 e charm +1. Esso può decadere nel seguente canale: $\Xi^{+}_{s} \rightarrow \Xi^{0} + e^{+} + \nu_{e}$. Indicare la sua composizione in quark e disegnare il diagramma di Feynman, nel modello spettatore, relativo al decadimento. Specificare se il decadimento è Cabibbo favorito o meno. **[5 punti]**



Il decadimento è Cabibbo favorito perché compare l'elemento di matrice V_{cs}

b)

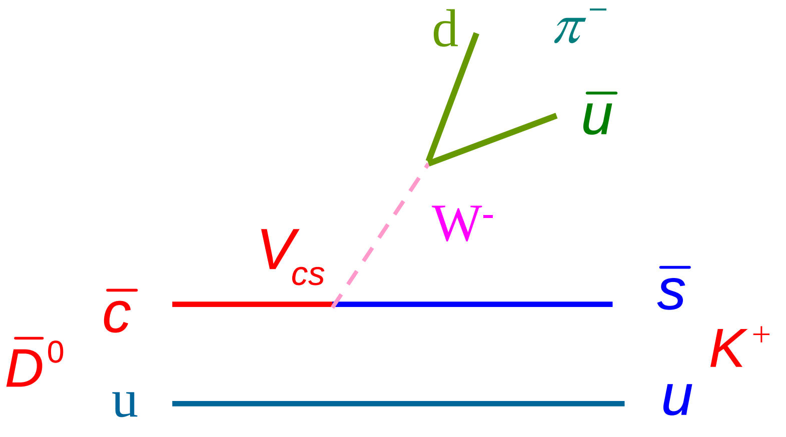
c) Nella reazione b) compare il termine V_{ub} che è molto piccolo confrontato con gli altri elementi della matrice CKM, quindi esso rende meno probabile questo decadimento rispetto all'altro.

5. In un esperimento ad un collider protone-antiprotone sono stati individuati un K^+ ed pione negativo la cui massa invariante è di circa 1.86 GeV compatibile con quella di un mesone D neutro. Stabilire se di tratta di un D^0 oppure di un anti-D^0. Si ricorda che il charm di un D^0 è +1. **[5 punti]**

La composizione in quark delle quattro particelle è la seguente:

$$D^0 = c\bar{u} \quad ; \quad \bar{D}^0 = \bar{c}u \quad ; \quad K^+ = \bar{s}u \quad ; \quad \pi^- = d\bar{u}$$

Dato che il K^+ ha un quark anti-s, esso può venire solo dal decadimento di quark anti-c che è contenuto dell'anti-D^0.



6. A Lep-1 si studiava il processo $e^+e^- \to Z \to \bar{f}f$. La larghezza parziale di decadimento dello Z in una coppia di muoni è 84 MeV. Si valuti la larghezza parziale di decadimento in una coppia di quark uū utilizzando le costanti di accoppiamento vettoriale ed assiale dello Z. Si faccia l'approssimazione $\sin^2\theta_w=1/4$ e tenere conto che i fermioni del decadimento dello Z sono levogiri. **[6 punti]**

La larghezza parziale dello Z è uguale a:

$$\Gamma(Z \to l^+l^-) = 2\frac{GM_Z^3}{\sqrt{2}\cdot 12\pi}\left[\left(C_V^l\right)^2 + \left(C_A^l\right)^2\right]$$

$$\Gamma(Z \to q\bar{q}) = 6\frac{GM_Z^3}{\sqrt{2}\cdot 12\pi}\left[\left(C_V^l\right)^2 + \left(C_A^l\right)^2\right]$$ (fattore 3 di colore)

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(Z \to u\bar{u})}{\Gamma(Z \to \mu^+\mu^-)} = \frac{3\left[\left(C_V^u\right)^2 + \left(C_A^u\right)^2\right]}{\left[\left(C_V^\mu\right)^2 + \left(C_A^\mu\right)^2\right]}$$

I fermioni di decadimento dello Z hanno un'energia pari a Mz/2 ed i fermioni tendono ad essere levogiri. Pertanto utilizziamo soltanto le costanti di accoppiamento dei fermioni levogiri per valutare le larghezze parziali. Le costanti di accoppiamento sono:

$$C_V^u = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w \approx \frac{1}{6} \ ; \ C_A^u = \frac{1}{2} \ ; \ C_V^\mu = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w \approx 0 \ ; \ C_A^\mu = -\frac{1}{2}$$

Facendo il rapporto si ottiene:

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(Z \to u\bar{u})}{\Gamma(Z \to \mu^+\mu^-)} = \frac{3\left[\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]}{\left[(0)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]} = \frac{10}{3} \simeq 3.3$$

$$\Rightarrow \Gamma(Z \to u\bar{u}) = \Gamma(Z \to \mu^+\mu^-) \times \frac{10}{3} \simeq 3.3 \simeq 84 \times 3.3 = 277 \text{ MeV}$$

Il risultato del calcolo esatto è 300 MeV in buono accordo che la stima appena fatta.

7. Ad una data energia del centro di massa, determinare il rapporto tra le sezioni d'urto dei seguenti due processi ipotizzando che la reazione avvenga prevalentemente attraverso il canale con isospin totale 3/2:

a) $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0$; b) $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$

[5 punti]

Ricordiamo che il protone ed il K hanno isospin ½ mentre il pione e la Σ hanno isospin 1, quindi gli stati iniziali e finali, in termini degli autostati di isospin, sono uguali a:

$$\pi^+ + p = \left|\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\rangle \quad ; \quad K^+ + \Sigma^+ = \left|\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\pi^- + p = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle \quad ; \quad K^0 + \Sigma^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$$

La transizione dallo stato iniziale allo stato finale avviene tramite l'hamiltoniana delle interazioni forti H, la quale non connette stati con isospin totale diverso. La sezione d'urto è proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice:

$$\sigma \propto \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle^2 = M_{if}^2$$

Prendiamo in esame la reazione a):

$$\sigma_a \propto \left\langle \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right| + \sqrt{\frac{1}{3}}\left\langle\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right| \right) \middle| H \middle| \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle \right) \right\rangle^2 =$$

$$\left[\sqrt{\frac{2}{9}}\left\langle\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right| H \left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{9}}\left\langle\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right| H \left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle \right]^2$$

Se supponiamo che l'ampiezza nel canale con I=3/2 domina rispetto al canale con I=1/2 , abbiamo:

$$\sigma_a \propto \frac{2}{9}\left\langle\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right| H \left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle^2$$

Dato che l'elemento di matrice non può dipendere dalla terza componente dell'isospin per invarianza per rotazioni nello spazio dell'isospin, abbiamo:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \frac{\frac{2}{9}\left|\langle\frac{3}{2};-\frac{1}{2} \mid H \mid \frac{3}{2};-\frac{1}{2}\rangle\right|^2}{\left|\langle\frac{3}{2};\frac{3}{2} \mid H \mid \frac{3}{2};\frac{3}{2}\rangle\right|^2} = \frac{2}{9}$$