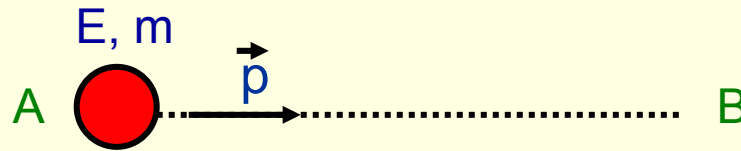




Fenomeni di trasporto

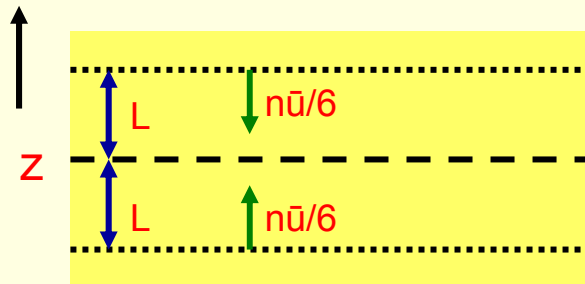
- Generalità sui fenomeni di trasporto
- Viscosità
- Conduzione del calore
- Diffusione
- Regimi di flusso del gas
- Portata e portata volumetrica
- Conduttanza
- Legge di Ohm della fluidodinamica

Generalità sui fenomeni di trasporto



- La molecola che descrive nel gas la traiettoria AB, trasporta dal punto A al punto B massa, energia e quantità di moto.
- Se il gas si trova in equilibrio termico, ci sarà un'altra molecola che in media trasferirà la stessa quantità di energia dal punto B al punto A.
- Ma se il gas non si trova all'equilibrio, perché la densità non è la stessa in tutti i punti, oppure la temperatura (energia) o la quantità di moto non sono le stesse, il movimento caotico delle molecole tenderà a realizzare un trasferimento netto di massa, energia e quantità di moto da un punto all'altro del gas.
- Da un punto di vista sperimentale, cioè delle misure macroscopiche che si possono realizzare, è possibile individuare i seguenti tre fenomeni:
 - **Viscosità**: quando un gas ha un moto netto di insieme, con velocità di deriva non uniformi, si ha un fenomeno di attrito dovuto al trasporto di quantità di moto da un punto all'altro del gas. Il fenomeno è caratterizzato dal coefficiente di viscosità η .
 - **Conduzione del calore**: quando il gas non è all'equilibrio termico si ha un passaggio di energia dai punti più caldi a quelli più freddi. Esso è caratterizzato dal coefficiente di conduzione del calore k ed è regolato dalla legge di Fourier.
 - **Diffusione**: trasporto di massa da un punto del gas a densità più alta verso gli altri punti. Esso è caratterizzato dal coefficiente di diffusione D ed è regolato dalla legge di Fick.
- I tre fenomeni sono legati tra di loro ed i vari coefficienti macroscopici D , k ed η sono legati al cammino libero medio L delle molecole.

Flusso attraverso un piano nei fenomeni di trasporto



- Nell'analisi dei fenomeni di trasporto tramite la teoria cinetica dei gas, compare il flusso di molecole attraverso un piano alla quota Z e la distanza media dal piano alla quale le molecole hanno subito un urto.
- In precedenza abbiamo trovato, applicando in maniera rigorosa la teoria cinetica dei gas e la distribuzione di Maxwell:

$$\Phi_s = \frac{n}{4} \bar{u} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{2}{3} L$$

- Dato che nei fenomeni di trasporto interessa il prodotto di queste due grandezze:

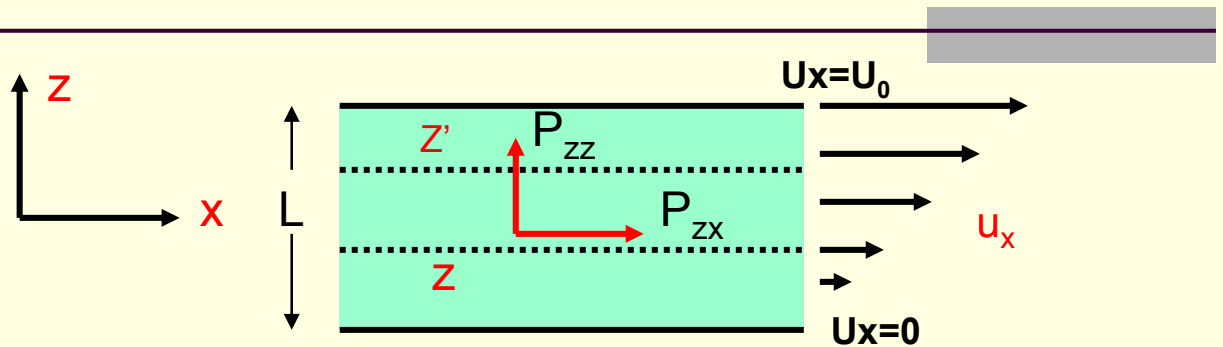
$$\Phi_s \cdot \bar{z} = \frac{n}{4} \bar{u} \cdot \frac{2}{3} L = \frac{n}{6} \bar{u} \cdot L$$

si può seguire un ragionamento semplificato che porta allo stesso risultato:

- Consideriamo un piano z come in figura. Nell'unità di tempo ci saranno $n\bar{u}/6$ molecole che attraverseranno una unità di superficie del piano dal basso verso l'alto ed altrettante che lo attraverseranno dall'alto verso il basso (non consideriamo quindi il fatto che la direzione della velocità delle molecole è isotropa).
- Dalla definizione di cammino libero medio si deduce che in media le molecole che attraversano il piano dal basso hanno avuto in precedenza in media una collisione ad una distanza L al di sotto del piano (non consideriamo quindi il fatto che le molecole possono attraversare il piano z con un angolo). Il prodotto di queste due grandezze dà come in precedenza:

$$\Phi_s \cdot \bar{z} = \frac{n}{6} \bar{u} \cdot L = \frac{n}{6} \bar{u} \cdot L$$

Viscosità e trasporto di quantità di moto

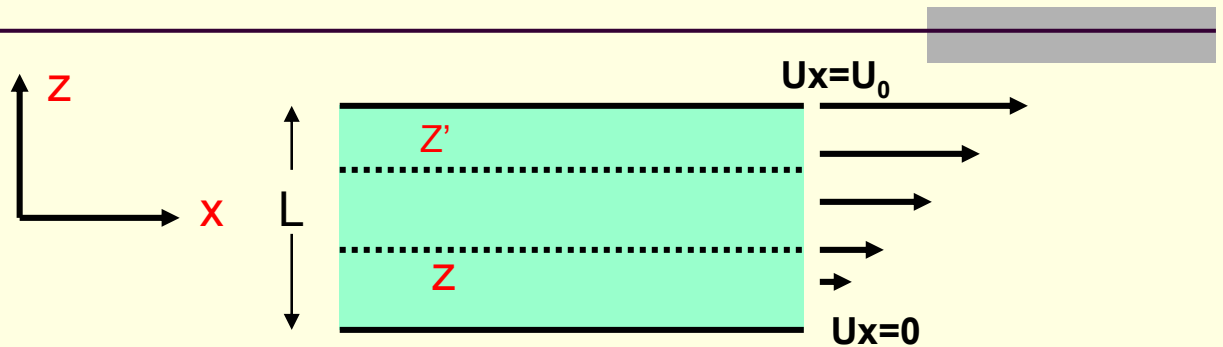


- Si consideri un fluido qualsiasi (liquido o gas) e si immagini in esso un piano la cui normale sia orientata lungo la direzione z . Il fluido al di sotto di questo piano esercita una forza media per unità di superficie (sforzo medio) \mathbf{P}_z sul fluido al di sopra di esso. Per la terza legge di Newton, il fluido al di sopra eserciterà uno sforzo $-\mathbf{P}_z$ su quello al di sotto.
- Lo sforzo medio normale al piano, cioè la componente z di \mathbf{P}_z misura la pressione media p nel fluido. Quando il fluido è in equilibrio, cioè è fermo o si muove con velocità uniforme, per simmetria la componente media dello sforzo parallela al piano è nulla.
- Se abbiamo invece una situazione di non equilibrio come quella illustrata in figura, dove c'è un gradiente di velocità lungo l'asse z , compare nel fluido una componente dello sforzo parallela alla velocità di deriva del fluido, che tende a ristabilire una condizione di velocità uniforme. Il fluido presenta quindi una sorta di attrito che viene chiamato viscosità.
- In prima approssimazione esiste la seguente relazione tra lo sforzo parallelo ed il gradiente di velocità:

$$P_{zx} = -\eta \frac{\delta u_x}{\delta z}$$

- Questa relazione è ben soddisfatta sperimentalmente dalla maggior parte dei liquidi e dei gas se il gradiente di velocità non è troppo grande. La costante di proporzionalità η viene detta coefficiente di viscosità del fluido.

Viscosità: esempio



- Un esempio di fluido in moto con un gradiente di velocità uniforme lungo l'asse z si realizza ad esempio ponendo il fluido tra due piastre, dove la piastra inferiore è ferma mentre la piastra superiore è in moto con velocità u_0 . Il fluido immediatamente a contatto con la piastra superiore tende ad avere la stessa velocità della piastra, mentre il fluido a contatto con la piastra inferiore è fermo.
- Se l'altezza del fluido è L , possiamo assumere che il gradiente di velocità sia:

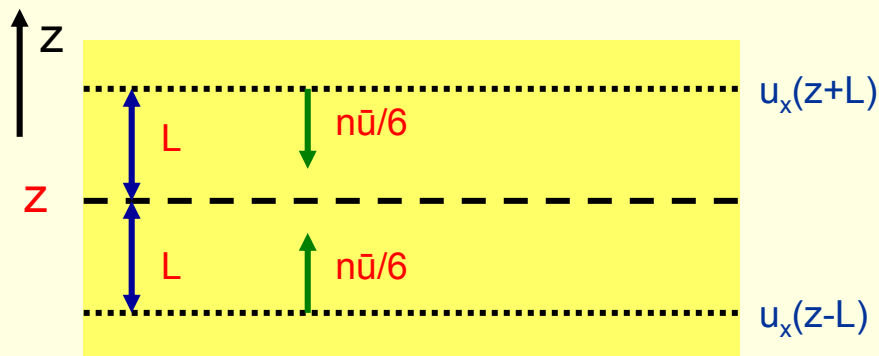
$$\frac{\delta u_x}{\delta z} = \frac{u_0}{L}$$

- Di conseguenza lo sforzo di taglio che il fluido esercita sul moto della piastra superiore vale:

$$P_{zx} = -\eta \frac{u_0}{L}$$

- Per ricavare la forza di attrito sulla piastra superiore occorre moltiplicare lo sforzo per la superficie della piastra a contatto con il fluido.
- Da notare che l'unità di misura della viscosità η è il $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$. Un decimo di questa unità, indicata con P , si chiama **poise** in onore del fisico Poiseuille.

Viscosità: gas rarefatto



- Supponiamo che il gas abbia una componente u_x della velocità media, che si suppone piccola rispetto alla velocità media termica delle molecole, e che sia funzione di z .
- Vi sono n molecole per unità di volume. $1/3$ di queste saranno dirette lungo l'asse z . Metà di queste si muoveranno verso z positivo e l'altra metà nel verso opposto. Si supponga che tutte le molecole abbiano velocità pari alla velocità media \bar{u} .
- Consideriamo un piano z come in figura. Nell'unità di tempo ci saranno $n\bar{u}/6$ molecole che attraverseranno una unità di superficie del piano dal basso verso l'alto ed altrettante che lo attraverseranno dall'alto verso il basso.
- Dalla definizione di cammino libero medio si deduce che in media le molecole che attraversano il piano dal basso hanno avuto in precedenza una collisione ad una distanza L al di sotto del piano (non stiamo considerando il fatto che le molecole possono attraversare il piano z con un angolo, ma il calcolo corretto conduce allo stesso risultato finale). Nel punto della collisione le molecole avevano in media la velocità di deriva pari a $u_x(z-L)$, che trasportano attraverso il piano z .
- La componente x della quantità di moto media trasportata per unità di tempo e per unità di superficie attraverso il piano verso l'alto è:

$$\frac{1}{6} [n \cdot \bar{u}] \cdot [m u_x(z-L)]$$

Viscosità: gas rarefatto

- In maniera analoga si ricava la componente della quantità di moto trasportata attraverso il piano dalle molecole che lo attraversano dall'alto:

$$\frac{1}{6} [n \cdot \bar{u}] \cdot [\mu_x(z+L)]$$

- Sottraendo le due relazioni si ottiene il trasporto molecolare netto della componente x media di quantità di moto per unità di tempo e per unità di superficie dal di sotto al di sopra del piano, cioè lo sforzo P_{zx} descritto in precedenza:

$$P_{zx} = \frac{1}{6} [n \cdot \bar{u}] \cdot [\mu_x(z-L)] - \frac{1}{6} [n \cdot \bar{u}] \cdot [\mu_x(z+L)]$$

- ovvero: $P_{zx} = \frac{1}{6} n \bar{u} \cdot [u_x(z-L) - u_x(z+L)]$
- Poiché il cammino libero medio L è molto più piccolo rispetto alle dimensioni in cui il gradiente di velocità varia apprezzabilmente, si può scrivere con buona approssimazione:

$$u_x(z+L) = u_x(z) + \frac{\delta u_x}{\delta z} L \quad ; \quad u_x(z-L) = u_x(z) - \frac{\delta u_x}{\delta z} L$$

- quindi: $P_{zx} = \frac{1}{6} n \bar{u} \cdot \left[-2 \frac{\delta u_x}{\delta z} \right] L \equiv -\eta \frac{\delta u_x}{\delta z}$

- Dove $\eta = \frac{1}{3} n \bar{u} \cdot m \cdot L$

- Ricordiamo che n è il numero di molecole per unità di volume, \bar{u} è la velocità media delle molecole dovuta all'agitazione termica, m è la massa delle molecole e L è il cammino libero medio.
- Considerando la distribuzione delle velocità di Maxwell si ottiene lo stesso risultato per la viscosità

Viscosità: gas rarefatto

- Riprendiamo la relazione trovata per η in un gas e ricordiamo l'espressione del cammino libero medio e della velocità media delle molecole che seguono la distribuzione di Maxwell:

$$\eta = \frac{1}{3} n \cdot \bar{u} \cdot m \cdot L$$

$$L = \bar{u} \cdot \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n\sigma}$$

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

- Sostituendo quindi l'espressione di L e \bar{u} nella relazione di η si ha:

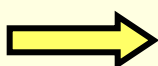
$$\eta = \frac{2}{3} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{mkT}{\pi}}$$

- Come si può notare la **viscosità risulta essere indipendente da n, cioè non dipende dalla densità del gas, ma soltanto dalla temperatura**. L'indipendenza da n implica anche che, a parità di temperatura, η è indipendente anche dalla pressione. Questo risultato fu derivato per la prima volta da Maxwell nel 1860 e fu da lui confermato sperimentalmente.

- Questo risultato è valido però soltanto per gas rarefatti, dove il cammino libero medio è molto maggiore delle dimensioni delle molecole. Il gas però non deve essere troppo rarefatto, altrimenti non si hanno più urti tra le molecole ma soltanto con le pareti del recipiente, questo vuol dire che il cammino libero medio deve essere a sua volta molto minore delle dimensioni del recipiente.

- Per avere una stima numerica di η per gas a temperatura ambiente, si consideri l'azoto a 300 K, assumendo un diametro molecolare di 2 Å

$$m = \frac{28}{6 \times 10^{23}} = 2.4 \times 10^{-18} \text{ g} ; \quad \sigma \approx \pi d^2 = 1.2 \times 10^{-19} \text{ m}^2$$



$$\eta \approx 5 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = 5 \times 10^{-4} \text{ poise}$$

Conduzione del calore

- Se abbiamo un gas lontano dall'equilibrio termico, vale a dire che le variabili intensive quali pressione, temperatura, densità non sono le stesse in tutti i punti del gas, il movimento caotico delle molecole e gli urti conseguenti tra di esse, tenderanno al raggiungimento dell'equilibrio termico.
- Prendiamo in esame cosa succede quando punti diversi del gas hanno diversa temperatura. La temperatura diversa implica densità diverse e quindi l'azione combinata della forza di gravità e del principio di Archimede fanno sì che nel caso si abbiano dei moti convettivi di molecole che tendono a ristabilire l'equilibrio termico. Questi moti corrispondono ad uno spostamento macroscopico di parte del gas da un punto ad un altro del contenitore. Il loro studio è pertinenza dell'idrodinamica.
- Supponiamo ora che il moto convettivo del gas non abbia luogo, o sia di molto ridotto, ad esempio perché la differenza di temperatura si ha lungo un piano orizzontale e non lungo un piano verticale. In questo caso si ha comunque il raggiungimento dell'equilibrio termico o comunque il passaggio di calore da un punto all'altro del gas, ma il meccanismo di base è dovuto alla conduzione del calore ed è simile a quanto analizzato nel caso della viscosità del gas.
- Da un punto di vista sperimentale risulta comunque molto difficile separare il contributo della conduzione da quello della convezione, dato che il campo gravitazionale è sempre presente. Ponendo però lo strato di gas più caldo sopra quello più freddo, lavorando a bassa pressione ed utilizzando strati di gas sottili, la convezione può essere trascurata rispetto alla conduzione.
- Se prendiamo in esame due grandi piani orizzontali di gas, quello superiore a temperatura T_1 e quello inferiore a temperatura T_0 , separati da una distanza d , la quantità di calore Q trasferita da un piano all'altro attraverso l'area A in un tempo t , assume la forma:

$$Q = KA \frac{T_1 - T_0}{d} t$$

Conduzione del calore nei gas

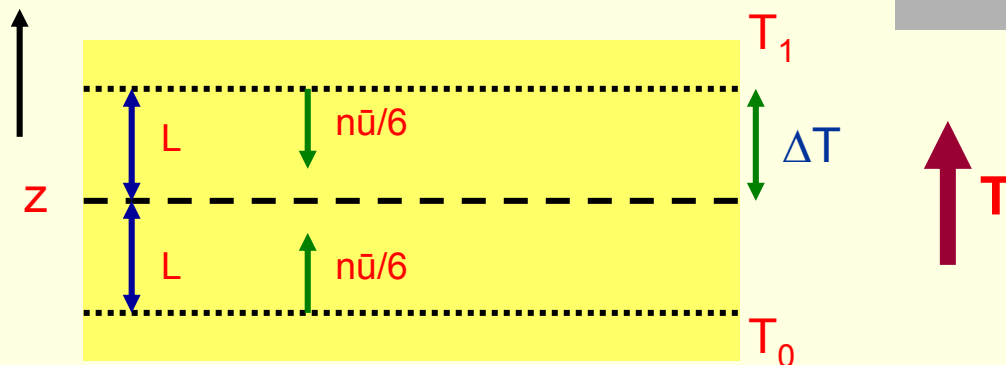
$$Q = KA \frac{T_1 - T_0}{d} t$$

- Questa relazione è identica alla relazione trovata per il flusso di calore unidirezionale in un solido. Lo stabilirsi di questa relazione indica che nei gas sono cessati tutti i fenomeni di convezione, e che K ha lo stesso significato di conducibilità termica trovato nel caso dei solidi. Sperimentalmente si trova che K è una costante caratteristica di ogni tipo di gas, funzione della temperatura del gas.
- Tuttavia, sebbene la conduzione di calore nei gas obbedisce alla stessa legge di quella nei solidi, essa è probabilmente dovuta ad un meccanismo completamente differente. Infatti la conducibilità nei gas aumenta all'aumentare della temperatura, mentre nei metalli diminuisce.
- Diamo il valore della conducibilità K per alcuni materiali:

Gas o sostanza	T [°C]	K [J/(mKs)]
aria	0	0.0238
Elio	0	0.142
Acqua (liquida)	0	0.599
Carta	..	0.125
Mattone	..	0.63
Alluminio	18	211
Rame	13	419
Argento	18	419

- Tramite l'ausilio della teorica cinetica è possibile ricavare un'espressione per K. Il procedimento è analogo a quello seguito per dedurre la relazione della viscosità. In questo caso però occorre considerare l'energia cinetica trasferita e non la quantità di moto.

Conduzione del calore nei gas



- Assumiamo che il gas sia disposto in strati ortogonali all'asse z (verticale), e lo strato più caldo sia quello superiore. In questo modo la temperatura dipende solo da z .
- Quando si raggiunge uno stato stazionario, tanto calore entra in uno strato e tanto calore ne esce, in modo tale che la temperatura non cambi. Nel gas si stabilisce un gradiente costante di temperatura.

$$\frac{dT}{dz} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad T(z) = T_0 + \frac{dT}{dz} z$$

- Statisticamente un terzo delle molecole si muove lungo l'asse z , queste sono le molecole che trasportano calore da uno strato all'altro (anche qui il trattamento statistico corretto si fa prendendo una direzione qualsiasi per la velocità delle molecole e facendo la media statistica appropriata, però questa dimostrazione semplificata da il risultato che si ottiene con il trattamento rigoroso).
- Consideriamo uno strato di gas dello spessore pari al cammino libero medio delle molecole L . La differenza di temperatura media sulle due facce di questo strato sarà:

$$\Delta T = \frac{dT}{dz} L$$

- Se ciascuna molecola ha una massa m ed il calore specifico del gas è C_v , la differenza di energia cinetica tra due molecole sui due lati dello strato vale:

$$\Delta E_k = mc_v \Delta T = mc_v \frac{dT}{dz} L$$

Conduzione del calore nei gas

- Analogamente a quanto fatto in precedenza, possiamo assumere che $1/6$ delle molecole si muovono lungo $+z$ ed $1/6$ nel verso opposto. Se indichiamo con n il numero di molecole per unità di volume e con \bar{u} la velocità media delle molecole, in un secondo avremo $1/6n\bar{u}$ molecole che passeranno attraverso l'unità di superficie dall'alto verso il basso e che porteranno con sé la differenza di energia cinetica che abbiamo indicato in precedenza ed $1/6$ di molecole che si muoveranno dal basso verso l'alto.

- Consideriamo ora il flusso di energia attraverso il piano a quota z indicato in figura. Le molecole che vengono dall'alto trasporteranno attraverso l'unità di superficie del piano ed in un secondo, l'energia:

$$E_k^+ = E(z) + \frac{1}{6} n\bar{u} \cdot mc_v \frac{dT}{dz} L$$

- $E(z)$ è l'energia che hanno le molecole nel punto z . Le molecole che attraversano il piano z dal basso verso l'alto trasportano l'energia:

$$E_k^- = E(z) - \frac{1}{6} n\bar{u} \cdot mc_v \frac{dT}{dz} L$$

- Il flusso netto di energia attraverso il piano è dato dalla differenza di queste due espressioni. Questa corrisponde al calore che attraversa l'unità di superficie per unità di tempo:

$$\frac{Q}{A \cdot t} = E_k^+ - E_k^- = \frac{1}{3} n\bar{u} \cdot mc_v \frac{dT}{dz} L$$

- Per definizione: $\frac{Q}{A \cdot t} = K \frac{dT}{dz}$

- Quindi: $K = \frac{1}{3} n\bar{u} \cdot mc_v L$

- A questa relazione si arriva anche tenendo conto nella maniera appropriata della distribuzione delle velocità e dei cammini liberi.

Conduzione del calore nei gas

- Se ricordiamo la relazione trovata per la viscosità η abbiamo:

$$\eta = \frac{1}{3} n \cdot \bar{u} \cdot m \cdot L \quad \oplus \quad K = \frac{1}{3} n \bar{u} \cdot m c_v L \quad \Rightarrow \quad K = \eta \cdot c_v$$

- La relazione trovata per K non è strettamente rigorosa, sebbene dia l'ordine di grandezza giusto per la conducibilità termica. Infatti sono stati trascurati diversi effetti:

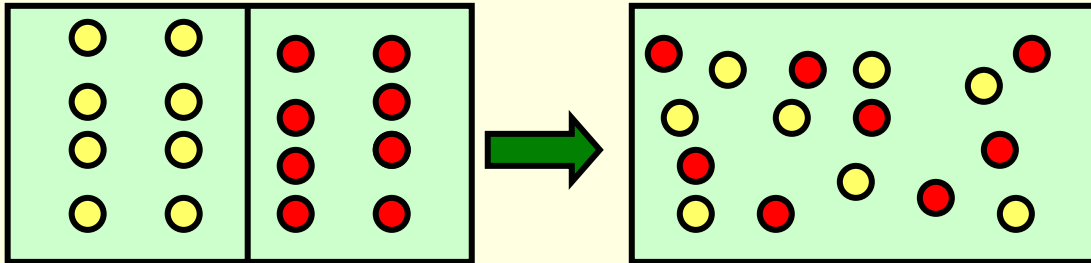
- In primo luogo la pressione del gas è costante, altrimenti si avrebbero dei moti convettivi nel gas, quindi dato che T varia da punto a punto, anche la densità n deve variare da punto a punto, e più esattamente deve decrescere all'aumentare della temperatura.
- Inoltre la velocità media è una funzione della temperatura e quindi anche in questo caso non si può utilizzare un unico valore.
- Il cammino libero medio varia anch'esso al variare della temperatura.
- Infine nella trattazione rigorosa, che conduce alla stessa formula da noi trovata, si fa uso della distribuzione delle velocità di Maxwell, ma questa è valida solo per un gas in equilibrio termico, e quindi a rigore non può essere usata in questo caso.
- Come ultima cosa, per le molecole non monoatomiche, occorre tener conto anche del contributo degli effetti rotazionali e vibrazionali al calore specifico.

- La trattazione rigorosa di tutti questi effetti conduce alla seguente relazione:

$$K = \left(2.5 \frac{c_t}{c_v} + \frac{c_r}{c_v} \right) c_v \cdot \eta = \varepsilon \cdot \eta \cdot c_v$$

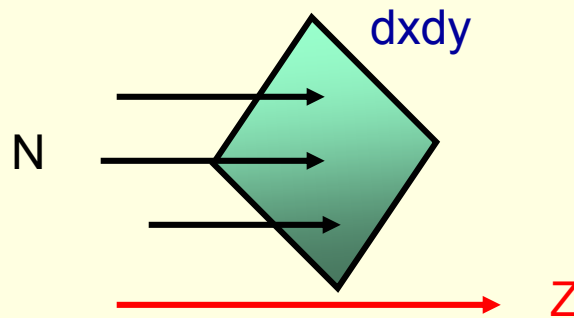
- Dove C_t è il calore specifico traslazionale e C_r il calore specifico rotazionale. In questa espressione non è incluso il contributo del calore specifico vibrazionale.
- Si può concludere che il successo della teoria cinetica nel predire la conducibilità termica è stato spettacolare, in particolar modo la predizione che essa **non dipende dalla pressione**. Tuttavia la difficoltà nella misura di K e le grandi incertezze teoriche nella predizione di ε rendono questo coefficiente poco utile nella valutazione del cammino libero medio.

Diffusione



- Immaginiamo due gas diversi, aventi la stessa pressione, contenuti in due contenitori separati da un setto mobile. Nell'istante in cui viene rimosso il setto mobile, il primo gas comincerà lentamente a diffondere nel secondo contenitore e viceversa il secondo gas diffonderà nel primo contenitore, fino a raggiungere la condizione di equilibrio in cui i due gas saranno distribuiti in maniera uniforme in tutto il volume a disposizione.
- Questo fenomeno è noto come interdiffusione di due gas. La sua trattazione è abbastanza complessa e non verrà fatta in questi appunti. Se si presta però attenzione soltanto a uno dei due gas e si assume che l'altro gas costituisca una sorta di background attraverso il quale si diffonde il primo gas, la trattazione temporale della diffusione viene semplificata.
- Il fenomeno della diffusione naturalmente ha luogo anche quando consideriamo un gas formato da un solo tipo di molecole, ma dove la densità non è la stessa da punto a punto. In questo caso si parla di autodiffusione.
- La diffusione avviene anche nei liquidi e nei solidi, e le leggi generali che governano il fenomeno sono le stesse che nei gas, tuttavia le intense forze intermolecolari presenti nei liquidi e nei solidi, rendono la trattazione seguita nel caso dei gas inapplicabile a questi due stati della materia, come del resto avviene anche per la viscosità e la conduzione del calore.
- Nel caso della diffusione avremo quindi a che fare con un trasporto di massa.

Autodiffusione

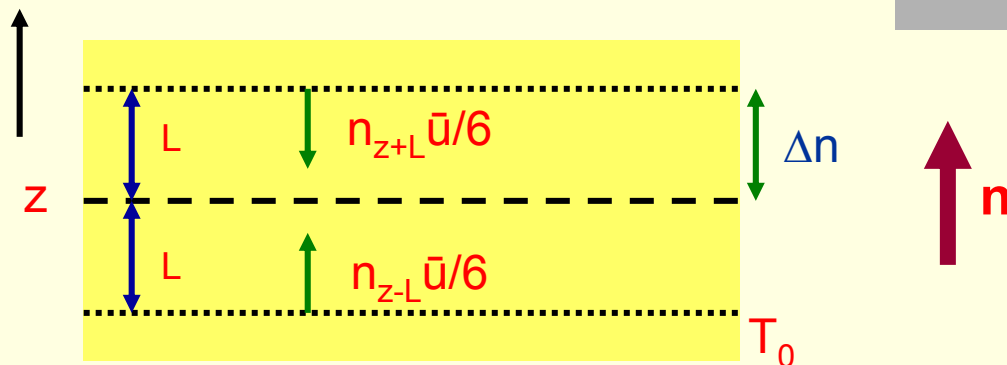


- Fissiamo quindi l'attenzione su un gas che diffonde attraverso un altro gas di background, oppure in maniera equivalente sull'autodiffusione. Da un punto di vista sperimentale si trova che, in regime stazionario, vale la seguente relazione:

$$dN_{dxdydt} = -D \frac{dn}{dz} dxdydt$$

- dN è il numero di molecole che diffondono attraverso la superficie $dxdy$, normale all'asse z , nel tempo dt , ovvero è il flusso di molecole.
- n è il numero di molecole per unità di volume (ovvero la densità o concentrazione che dir si voglia), quindi dn/dz esprime la variazione della densità delle molecole lungo l'asse z .
- D è una costante di proporzionalità, chiamata coefficiente di diffusione, che dipende dal tipo di gas in questione nel caso di autodiffusione, oppure dai due gas nel caso in cui stiamo trattando della diffusione di un gas attraverso un altro.
- Come si vede dall'equazione, il processo di diffusione è dovuto alla presenza di un gradiente di concentrazione dn/dz diverso da zero. Nel caso in cui la temperatura sia costante, ovvero le molecole hanno tutte la stessa energia cinetica, ricordando che vale la legge $p=nkT$, un gradiente di concentrazione equivale ad un gradiente nella pressione parziale p del gas in esame.

Autodiffusione



- Cerchiamo di ricavare ora il coefficiente di diffusione D nel caso più semplice dell'autodiffusione, facendo uso della teoria cinetica.
- Immaginiamo che sia stato raggiunto un regime stazionario, vale a dire che il flusso di molecole non varia in funzione del tempo. In queste condizioni dn/dz è costante, quindi si ha un gradiente lineare di concentrazione lungo l'asse z . Assumiamo inoltre che la concentrazione aumenta dal basso verso l'alto. Quindi le molecole diffonderanno dall'alto verso il basso.
- Consideriamo un piano $dx dy$ alla quota z , e sia L il cammino libero medio delle molecole. Alla quota $z+L$ e $z-L$ avremo una concentrazione di molecole pari a:

$$n_{z+L} = n_z + \frac{dn}{dz} L \quad ; \quad n_{z-L} = n_z - \frac{dn}{dz} L$$

- Il numero di molecole che attraversano il piano $dx dy$ dall'alto verso il basso, assumendo come al solito che $1/6$ delle molecole si muova lungo la direzione negativa dell'asse z , tutte con velocità pari alla velocità media \bar{u} , sarà:

$$dN_{dt\downarrow} = -\frac{1}{6} n_{z+L} dx dy \bar{u} dt = -\frac{1}{6} \left(n_z + \frac{dn}{dz} L \right) dx dy \bar{u} dt$$

- Il segno $-$ è dovuto al fatto che si è assunto positivo l'asse z lungo l'alto, in modo che il gradiente di concentrazione dn/dz sia anch'esso positivo.

Autodiffusione

- In maniera analoga si ricava il numero di molecole che attraversano il piano $dx dy$ dal basso verso l'alto:

$$dN_{dt\uparrow} = \frac{1}{6} n_{z-L} dx dy \bar{u} dt = \frac{1}{6} \left(n_z - \frac{dn}{dz} L \right) dx dy \bar{u} dt$$

- Il flusso netto di particelle attraverso il piano $dx dy$ è dato dalla somma di questi due numeri:

$$dN_{dt} = dN_{dt\downarrow} + dN_{dt\uparrow} = -\frac{1}{3} dx dy \bar{u} L \frac{dn}{dz}$$

- Il numero di particelle che attraversano la superficie $dx dy$ nell'unità di tempo è pari a:

$$dN_{dx dy} = -\frac{1}{3} dx dy \cdot \bar{u} L \frac{dn}{dz}$$

- Da un punto di vista sperimentale si ha la relazione:

$$dN_{dx dy} = -D \frac{dn}{dz} dx dy$$

- Ne consegue quindi:

$$D = \frac{1}{3} \bar{u} L$$

- Ricordando che $\eta = \frac{1}{3} n \cdot \bar{u} \cdot m \cdot L$, si ha:

$$D = \frac{\eta}{n \cdot m}$$

- Ma dato che il prodotto della massa della molecola m per il numero di molecole per unità di volume n , è pari alla densità ρ , si ha:

$$D = \frac{\eta}{\rho}$$

- Infine, ricordando l'espressione della velocità media \bar{u} , del cammino libero medio L e la relazione del gas perfetto $p = nkT$, si ha:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad ; \quad L = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n \cdot \sigma} \quad \rightarrow \quad D = \frac{1}{p} \frac{1}{3\sigma} \sqrt{\frac{[kT]^3}{\pi m}}$$

- Quindi, come si vede, a parità di temperatura, il coefficiente di diffusione D è inversamente proporzionale alla pressione del gas.

Riassunto sui fenomeni di trasporto

- Ricordiamo le tre leggi che abbiamo ricavato per i fenomeni di trasporto:

$$J_p = -\eta \frac{dv}{dz}$$

Legge del moto viscoso
(trasporto di quantità di moto)

$$J_E = -K \frac{dT}{dz}$$

Legge di Fourier per la conduzione
del calore (trasporto di energia)

$$J_n = -D \frac{dn}{dz}$$

Legge di Fick sulla diffusione
(trasporto di materia)

- J rappresenta rispettivamente il flusso di quantità di moto, di calore e di materia attraverso una superficie unitaria e per unità di tempo.
- Queste tre leggi hanno una validità sperimentale, nei limiti indicati in ciascun caso. Le tre quantità η , K e D sono legate alle proprietà molecolare del gas.

Abbiamo ricavato le seguenti relazioni:

$$\eta = \frac{1}{3} n \cdot \bar{u} \cdot m \cdot L$$

$$K = \frac{1}{3} n \bar{u} \cdot m c_v L$$

$$D = \frac{1}{3} \bar{u} L$$

dove n è il numero di molecole per unità di volume, m è la massa di una molecola, \bar{u} è la velocità media delle molecole, L è il cammino libero medio e C_v è il calore specifico del gas.

- Le misure sperimentali confermano le relazioni tra le tre grandezze previste dalla teoria cinetica.
- Da queste misure è possibile ricavare il cammino libero medio delle molecole e da questo il raggio molecolare. Dalla misura di una grandezza macroscopica si ricava quindi il valore di una grandezza microscopica.

Regimi di flusso del gas e numero di Knudsen

- Vi sono delle situazioni sperimentali in cui un gas viene mantenuto in circolazione nel sistema. Ad esempio nel seguito del corso ci occuperemo dei sistemi da vuoto; in questo caso avremo a che fare con del gas che fluisce dal recipiente in cui si vuole fare il vuoto verso la pompa.
- il flusso di gas può essere suddiviso in tre regimi. Questi regimi vengono individuati dall'intervallo di valori di un parametro adimensionale noto come **numero di Knudsen** così definito:

$$K_n = \frac{L}{r}$$

dove L è il cammino libero medio e r è una dimensione caratteristica del sistema in cui circola il gas, ad esempio il raggio di una condotta.

- I regimi di flusso del gas sono i seguenti:
- **Flusso viscoso:** $K_n < 0.01$

In questo caso il flusso d'insieme delle molecole è dominato dagli urti tra le molecole, mentre gli urti con le pareti del recipiente o della condotta giocano un ruolo secondario. Questa è la situazione tipica a pressione atmosferica oppure in regimi di basso vuoto (il cammino libero medio deve essere comunque sempre molto più grande delle dimensioni molecolari, altrimenti non vale più l'ipotesi di gas rarefatto).
- **Regime molecolare:** $K_n > 1.0$

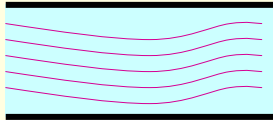
In questo caso il cammino libero medio è maggiore delle dimensioni caratteristiche del sistema. Il flusso del gas è dominato dagli urti delle molecole con le pareti e gli urti tra le molecole stesse sono trascurabili. Questo regime inizia a stabilirsi in genere, come vedremo, per pressioni inferiori al Pascal.
- **Regime di transizione:** $0.01 < K_n < 1.0$

Per numeri di Knudsen intermedi il tipo di flusso non è completamente determinato.

Regime turbolento e laminare, numero di Reynolds

- Nel caso di flusso viscoso si possono fare due ulteriori distinzioni: flusso laminare e flusso turbolento. I due regimi si distinguono, come vedremo, dal numero di Reynolds:

- **Flusso laminare:**

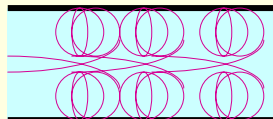


in questo tipo di moto la velocità del fluido non dipende dal tempo. Le linee di flusso non si intersecano ed il moto è irrotazionale. Questo tipo di moto può essere trattato sulla base dell'equazione di Poiseuille. Ad esempio questa equazione afferma che, per un fluido incomprimibile, il volume di fluido che attraversa nell'unità di tempo una sezione di un tubo di raggio R , di lunghezza l , avente una differenza di pressione ΔP ai capi del tubo, vale:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta l}$$

dove η è la viscosità del fluido. Un gas rarefatto non può essere trattato come un fluido incomprimibile, ma va notato come il flusso dipenda dalla differenza di pressione ΔP ai capi del tubo.

- **Flusso turbolento:**



Nel caso di flusso laminare, il fluido tende a comportarsi come un mezzo continuo, mentre nel caso di flusso turbolento esso riassume la sua natura "discreta" ed ha dei comportamenti caotici anche a livello macroscopico. Il moto d'insieme del fluido è funzione del tempo e non è possibile predire il suo comportamento.

- Numero di Reynolds Re : $Re = \frac{\bar{u} \cdot \rho \cdot d}{\eta}$

\bar{u} = velocità media
 ρ = densità, η = viscosità
 d = dimensione caratteristica,
ad es. diametro di un tubo

I due regimi possono essere caratterizzati dal numero di Reynolds. Per $Re < 2000$ il flusso è laminare, mentre per $Re > 2000$ il flusso tende ad essere sempre più turbolento.

Portata Q

- Partiamo dalla legge di Fick che esprime il flusso di molecole che attraversano una superficie unitaria nell'unità di tempo:

$$\frac{dN}{dt \cdot dS} = -D \frac{dn}{dz}$$

dove n è il numero di molecole per unità di volume.

- Dalla legge dei gas perfetti si ha: $p = nkT \Rightarrow dn = \frac{dp}{kT}$
- Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{D}{kT} \frac{dp}{dz} dS \Rightarrow kT \frac{dN}{dt} = -D \frac{dp}{dz} dS$$

- Definiamo la portata Q nel modo seguente:

$$Q = kT \frac{dN}{dt}$$

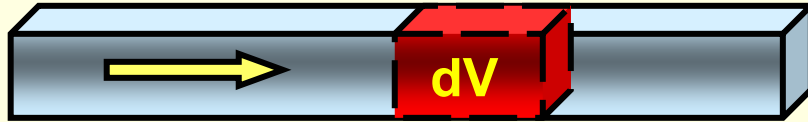
- La portata Q esprime la quantità di gas, o per meglio dire la quantità di energia trasportata dalle molecole di gas, che attraversa la superficie dS nell'unità di tempo.
- Se assumiamo che la temperatura del gas rimanga costante in tutto il sistema, ricordando l'equazione dei gas perfetti $PV = NkT$, si ha:

$$Q = kT \frac{dN}{dt} = \frac{d(NkT)}{dt} = \frac{d(PV)}{dt}$$

- L'unità di misura della portata è uguale a $\text{Pa} \cdot \text{m}^3/\text{s}$ che è identica al Watt. Un'altra unità di misura utilizzata è $\text{atm} \cdot \text{l} / \text{s}$
- Nei sistemi da vuoto la portata viene spesso misurata in **lusec** così definito:

$$\text{lusec} = \frac{\mu\text{m Hg} \cdot \text{l}}{\text{s}} \equiv \frac{\text{mTorr} \cdot \text{l}}{\text{s}}$$

Portata volumetrica Σ



- Consideriamo un gas che fluisce lungo un condotto. Possiamo definire la portata volumetrica Σ che esprime il volume di gas che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo.

$$\Sigma = \frac{dV}{dt}$$

- Σ si misura in m^3/s o in altre unità equivalenti.
- Nel caso di un fluido incompressibile la portata volumetrica esprime anche la quantità di materia che fluisce nel condotto per unità di tempo. Nel caso dei gas invece la conoscenza del volume non è sufficiente per ricavare la quantità di gas, ovvero il numero di molecole, che fluisce attraverso la sezione.
- Se conosciamo la pressione P e la temperatura T che ha il volume di gas dV nel momento che attraversa la sezione del condotto interessata, possiamo risalire al numero di molecole attraverso l'equazione dei gas perfetti:

$$P \cdot dV = kT \cdot dN \Rightarrow P \cdot \frac{dV}{dt} = kT \cdot \frac{dN}{dt}$$

- Ricordando la definizione della portata Q abbiamo la seguente relazione tra la portata e la portata volumetrica:

$$P \cdot \Sigma = Q$$

- Come vedremo più avanti, le pompe da vuoto sono caratterizzate dalla velocità di pompaggio che esprime la portata volumetrica Σ attraverso l'ingresso della pompa. Essa si misura quindi in m^3/s . Come vedremo la velocità di pompaggio effettiva dipende invece anche dalla geometria del sistema nel quale si vuole fare il vuoto.

Litri standard al secondo

- A volte per indicare le perdite di un sistema contenente gas, ad esempio un rivelatore di particelle, si usano come unità di misura i litri standard al secondo. Questo vuol dire che la pressione e la temperatura del gas che fuoriesce dal sistema devono essere normalizzati alla pressione standard di 1 atm (101323 Pa) ed alla temperatura standard di 273.15 K.

- Ricordiamo che la grandezza di interesse è sempre la quantità di gas che circola (o che fuoriesce dal rivelatore in questo caso), ovvero il numero di molecole. Il numero di molecole che escono per unità di tempo è uguale a:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{kT} \frac{dV}{dt}$$

- La stessa quantità di gas a pressione e temperatura standard vale:

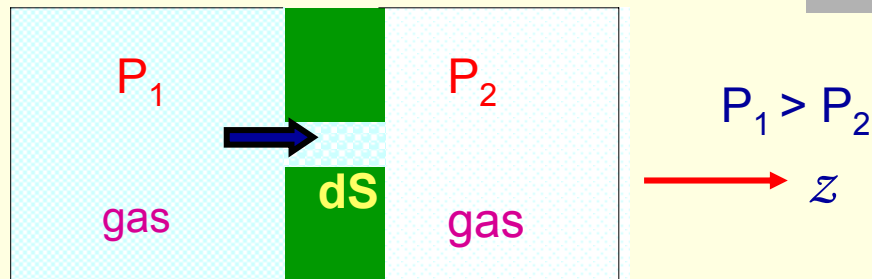
$$\frac{dN}{dt} = \frac{P_0}{kT_0} \left(\frac{dV}{dt} \right)^{\text{standard}}$$

- La quantità di gas che fuoriesce deve essere sempre la stessa, qualunque sia il modo di esprimere la portata volumetrica dV/dt ;, quindi:

$$\frac{P}{kT} \frac{dV}{dt} = \frac{P_0}{kT_0} \left(\frac{dV}{dt} \right)^{\text{standard}} \Rightarrow \left(\frac{dV}{dt} \right)^{\text{standard}} = \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \frac{dV}{dt}$$

- Occorre quindi fare sempre attenzione se la portata volumetrica di un sistema viene espressa in litri/secondo oppure in litri standard/secondo, ed apportare le correzioni opportune.
- il flusso di gas in un circuito viene misurato con degli strumenti chiamati flussimetri. Di solito questi strumenti sono calibrati per un particolare tipo di gas ed occorre fare attenzione se la loro misura è in litri standard oppure litri alla pressione di erogazione.

Conduttanza



- Consideriamo un gas che si trova in due regioni di spazio distinte caratterizzate rispettivamente dalle pressioni P_1 e P_2 , dove ad esempio P_1 è maggiore di P_2 . Le due regioni comunicano tramite un foro di sezione dS .
- La differenza di pressione fa sì che vi sia un passaggio netto di molecole dalla regione a pressione maggiore a quella a pressione minore.
- In condizioni di gas rarefatto il numero di molecole che diffondono per unità di tempo attraverso il foro è regolato dalla legge di Fick:

$$kT \frac{dN}{dt} = Q = -D \frac{dp}{dz} dS$$

- Assumendo di essere in regime viscoso laminare, il gradiente di pressione dp/dz sarà comunque in qualche modo proporzionale alla differenza di pressione $P_1 - P_2$:

$$\frac{dp}{dz} \propto P_1 - P_2$$

- Quindi possiamo trovare la relazione seguente che lega la portata Q del gas alla differenza di pressione:

$$Q \propto D \cdot dS \cdot (P_1 - P_2) \Rightarrow Q = C \cdot (P_1 - P_2)$$

- La costante C si chiama conduttanza e tiene conto della geometria del sistema (sezione del foro, lunghezza, etc...) e delle proprietà del gas, quali ad esempio il coefficiente di diffusione D .

- Ricordando l'espressione di D , si può notare come in questo caso la conduttanza sia funzione anche della pressione, e quindi in queste condizioni non risulta molto utile.

$$D = \frac{1}{p} \frac{1}{3\sigma} \sqrt{\frac{[kT]^3}{\pi m}}$$

Conduttanza in regime molecolare e legge di Ohm della fluidodinamica

- il flusso di un gas che ha un cammino libero medio comparabile con le dimensioni del condotto non segue più l'equazione di Poiseuille ed i vari coefficienti ricavati in precedenza quali la viscosità η , la conduttività termica K ed il coefficiente di diffusione D , perdono di significato.
- Knudsen nel 1908, studiando il flusso di un gas molto rarefatto attraverso dei capillari, trovò che esso può essere descritto da una relazione molto semplice.
- Supponiamo di avere un condotto che collega due recipienti alle pressioni rispettivamente P_1 e P_2 . Knudsen ha dimostrato che, nel caso di regime molecolare, vale la seguente relazione tra la portata Q (definita in precedenza) e la differenza di pressione:

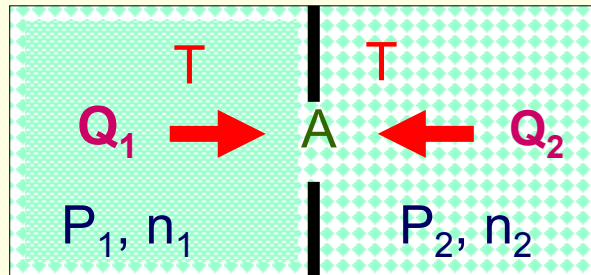
$$Q = C \cdot (P_1 - P_2)$$

dove C è la conduttanza introdotta in precedenza. Tuttavia, nella situazione di regime molecolare, **essa dipende soltanto dalla geometria del condotto** e non dipende dalle caratteristiche del gas e tanto meno dipende dalla sua pressione, a differenza invece del caso di flusso laminare, in cui si può ancora definire una conduttanza, ma essa è funzione della pressione.

- Questa relazione è nota come **legge di Ohm della fluidodinamica**, infatti possono essere fatte le seguenti analogie con la legge di Ohm $\Delta V = R \cdot I$

Fluidodinamica	elettrodinamica	Fluidod.	Elettrod.
Differenza di pressione agli estremi del condotto	Differenza di potenziale ai capi del resistore	ΔP	ΔV
Portata	Corrente elettrica	Q	I
conduttanza	Inverso della resistenza elettrica	C	$1/R$

Calcolo della conduttanza di un foro



- Calcoliamo la conduttanza nel caso di un recipiente separato in due scomparti da una parete sottile in cui esiste un foro sottile di sezione A . Nei due scomparti vi sono rispettivamente le pressioni P_1 e P_2 ed il numero di molecole per unità di volume n_1 e n_2 .
- il numero di molecole che attraversano il foro nell'unità di tempo si calcola utilizzando il flusso di particelle contro una parete ricavato in precedenza tramite la teoria cinetica e la distribuzione di Maxwell.

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{1}{4} n_1 \bar{u} \cdot A \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{1}{4} n_2 \bar{u} \cdot A$$

- Il flusso netto attraverso il foro è dato dalla somma algebrica dei due flussi:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_1}{dt} - \frac{dN_2}{dt} = \frac{1}{4} (n_1 - n_2) \bar{u} \cdot A$$

- Ricordando la definizione della portata $Q = kT dN/dt$ e la legge dei gas perfetti $P = nkT$, si ha:

$$Q = \frac{1}{4} (P_1 - P_2) \bar{u} \cdot A$$

- Quindi la conduttanza C vale:

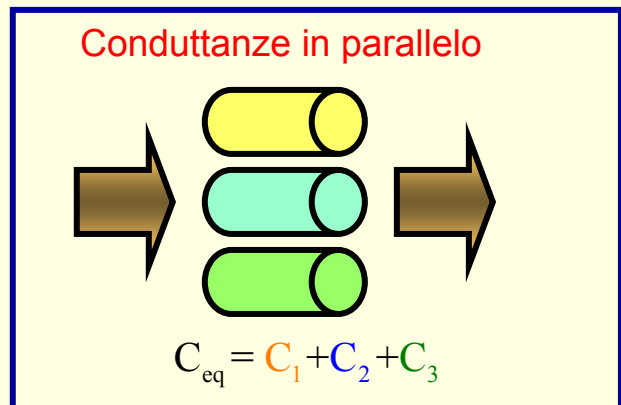
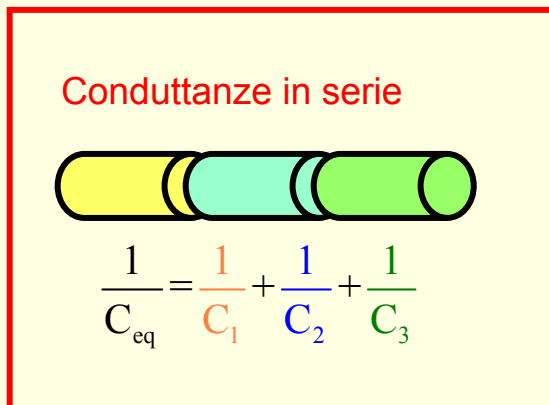
$$C = \frac{1}{4} \bar{u} \cdot A = A \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

- Nel caso di aria a temperatura ambiente ($\approx 20^\circ\text{C}$) si ha:

$$C = 11.6 \cdot A [\text{cm}^2] \frac{l}{s}$$

Conduttanze in serie ed in parallelo

- In generale nei sistemi da vuoto vi è un susseguirsi di elementi di connessione, ciascuno con la sua conduttanza caratteristica. In regime di flusso molecolare le conduttanze di tali elementi seguono le stesse leggi di combinazione delle conduttanze elettriche.



- Per geometrie complesse il calcolo della conduttanza è abbastanza complicato. Diamo qui di seguito alcune relazioni utili in alcuni casi comuni:

Condotto di lunghezza L ed avente una sezione costante A . Sia h il perimetro di tale sezione A (ad esempio per un tubo cilindrico di raggio R avremo $A=\pi R^2$, $h=2\pi R$)

$$C_{\text{tubo}} = \frac{1}{4} \bar{u} \cdot A \frac{1}{1 + \frac{3Lh}{16A}}$$

Condotto a forma di tronco di cono di lunghezza L , avente le basi circolari di raggi R_1 e R_2 :

$$C_{\text{tronco di cono}} = 4\pi R_1^2 R_2^2 \bar{u} \frac{1}{3L(R_1 + R_2)}$$