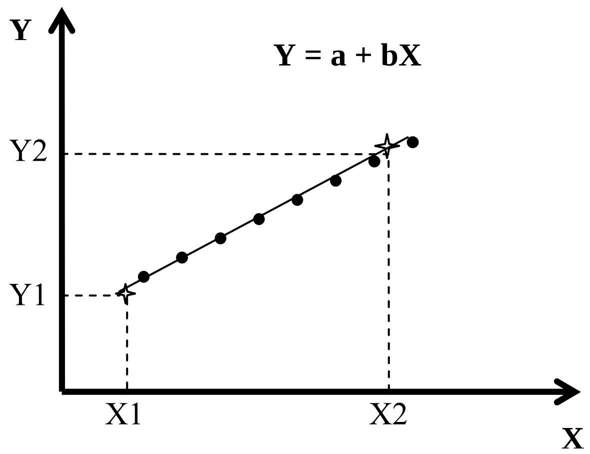
Laboratorio di termodinamica: richiami di analisi dei dati sperimentali

- Valor medio: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$
- Varianza: $\mathrm{Var}(x) = \sigma^2(x) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$
- Covarianza: $\mathrm{Cov}(x, y) = \overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}$
- Coefficiente di correlazione: $\rho(x, y) = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)}$

Grafici lineari: stima grafica dei parametri della retta

$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

$a = Y_1 - bX_1$
oppure per estrapolazione grafica a x=0



Relazione esponenziale : $y = ae^{bx} \quad \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$

Fit lineare con il metodo dei minimi quadrati

Occorre minimizzare la quantità: $\sum_i \frac{(y_i - bx_i - a)^2}{\sigma^2_{y_i}}$; questa formula è valida nel caso in cui le x non siano affette da errore. <u>Nel caso in cui anche le x presentino un errore</u>, si può eseguire la seguente sostituzione nella formula:

$$\sigma^2_{y_i} \rightarrow \sigma^2_{y_i} + b^2 \cdot \sigma^2_{x_i}$$

dove per b si può utilizzare il parametro stimato per via grafica, in modo da utilizzare le stesse formula di minimizzazione per ricavare i parametri a e b dal fit.

Formule dei minimi quadrati

σ_Y nota e costante :

$$b = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} \quad ; \qquad \sigma_b = \frac{1}{\sqrt{Var(x)}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \quad ; \qquad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\overline{x^2}} \cdot \sigma_b = \frac{\sqrt{Var(x) + \left(\bar{x}\right)^2}}{\sqrt{Var(x)}} \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}; \qquad \rho(a,b) = -\frac{\bar{x}}{\sqrt{\overline{x^2}}} = \frac{segno(\bar{x})}{\sqrt{1 + \frac{Var(x)}{\bar{x}}}}$$

σ_{Yi} ignote e supposte costanti

valgono le formule precedenti, con l'accortezza di ricavare σ_Y dai residui del fit, ovvero:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i \left(y_i - bx_i - a\right)^2}{n-2}}$$

σ_{Yi} diverse e note a priori

In questo caso valgono ancora le formule precedenti, ma per il calcolo dei valori medi occorre fare delle medie pesate:

$$pi = \frac{1}{\sigma^2{}_{Y\,i}}$$ (nel caso vi siano errori anche sulle x, si modifica come detto σ_Y)

$$\bar{x} = \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i p_i} \quad ; \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_i p_i x^2{}_i}{\sum_i p_i} \quad ; \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i p_i y_i}{\sum_i p_i}; \qquad \overline{xy} = \frac{\sum_i p_i x_i y_i}{\sum_i p_i}$$

e poi occorre fare la seguente sostituzione nella formula degli errori sui parametri:

$$\frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \to \frac{1}{\sqrt{\sum_i p_i}}$$

Retta y = bx

In questo caso il fit dei minimi quadrati da:

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x^2{}_i}; \qquad \sigma_b = \frac{1}{\sqrt{\sum_i x^2{}_i}} \cdot \sigma_y$$