

Il campo magnetico

capitolo

21

- sommario**
- 21.1 Il campo magnetico di un magnete
 - 21.2 Campo magnetico generato da una corrente elettrica
 - 21.2.1 Campo magnetico generato da un filo infinito rettilineo percorso da corrente
 - 21.2.2 Campo magnetico generato da un circuito di forma qualsiasi
 - 21.2.3 Campo magnetico al centro di una spira
 - 21.3 Il teorema di Gauss per il campo magnetico
 - 21.4 Teorema della circuitazione
 - 21.4.1 Campo magnetico di un solenoide
 - 21.4.2 Campo magnetico di un toroide
 - 21.5 Esercizi

Il magnetismo è un fenomeno noto fin dall'antichità. Esso prende nome da una regione della Grecia, la Magnesia, che è ricca di depositi di magnetite, un materiale che ha la proprietà di attrarre piccoli oggetti di ferro. È esperienza comune il fatto che se si avvicinano due magneti (calamite) essi esercitano delle forze reciproche, attraendosi o respingendosi. Tali forze si manifestano anche se i magneti non sono a contatto; quindi la forza magnetica, come la forza elettrica e gravitazionale, è un'interazione a distanza.

Nell'XI secolo (e forse anche prima) i cinesi scoprirono che un sottile ago di magnetite sospeso al centro in modo che possa ruotare, tende a disporsi in modo da puntare verso il nord geografico e costruirono le prime bussole da utilizzare nella navigazione. Come l'ago della bussola, un qualsiasi magnete libero di ruotare si dispone in modo da puntare verso il nord geografico. **Convenzionalmente si indica con polo nord magnetico la parte del magnete che punta verso il nord geografico e con polo sud quella opposta.** Questa terminologia fu introdotta da Pietro Peregrino di Maricourt che nel 1296 scrisse un trattato, la *Epistola de magnete*, in cui introdusse il concetto e la terminologia dei due poli, e descrisse come i poli dello stesso tipo si attraggano e quelli di tipo opposto si respingano.

Inoltre egli osservò che se un magnete viene spezzato i due pezzi presentano anch'essi un polo positivo e uno negativo. Quindi ipotizzò che i poli magnetici non siano "divisibili", ma si trovino sempre in coppia. Infatti a tutt'oggi i monopoli magnetici non sono stati osservati. Questa è una differenza importante rispetto alle cariche elettriche, che invece possono esistere singolarmente nello stato positivo e negativo.

I primi studi quantitativi sui fenomeni magnetostatici risalgono alla fine del diciottesimo e all'inizio del diciannovesimo secolo. Un contributo fondamentale alla comprensione della natura dell'interazione magnetica fu data dal chimico e fisico danese Hans Christian Oersted; nel 1820 egli scoprì che se all'ago di una bussola, inizialmente allineato con il campo magnetico terrestre, si avvicina un circuito in cui passa una corrente elettrica, esso si sposta. Questo semplice esperimento dimostrò che esiste una relazione tra i fenomeni elettrici e quelli magnetici. Questa scoperta è alla base della teoria dell'elettromagnetismo che fu sviluppata nel corso degli anni con il contributo di molti grandissimi scienziati, quali A.M. Ampère, C.F. Gauss, J.B. Biot, F. Savart, M. Faraday, i cui studi e risultati furono compendati dal fisico scozzese James Clerck Maxwell nelle famose equazioni che portano il suo nome. Nella prima metà dell'800 Ampère eseguì diversi esperimenti con aghi magnetici e piccoli circuiti percorsi da correnti (spire). Confrontando i risultati di questi esperimenti egli concluse che il campo magnetico generato da una corrente elettrica e da un magnete naturale avessero un'origine comune; in particolare ipotizzò che all'interno dei magneti vi fossero delle correnti microscopiche responsabili della generazione del campo magnetico. Ampère non era a conoscenza della struttura atomica della materia, ed oggi sappiamo che il campo magnetico delle calamite è dovuto alla natura quantistica degli elettroni; tuttavia l'intuizione di Ampère è corretta e si posso-

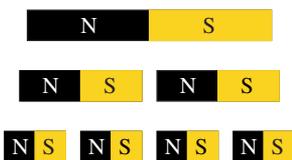


Figura 21.1

Ogni volta che si spezza un magnete, si formano due nuovi magneti, ciascuno con un polo nord e un polo sud.

no interpretare i campi magnetici delle calamite in termini di correnti interne elementari. Lo studio di questi modelli è alquanto complesso, quindi è preferibile studiare il campo magnetico generato da una corrente elettrica, che rappresenta il fenomeno elementare di base.

21.1 Il campo magnetico di un magnete

Nel capitolo 16 abbiamo visto che le cariche elettriche in quiete esercitano forze su altre cariche in quiete [forza di Coulomb, equazione (16.5)]. Per separare l'effetto che una carica Q produce nello spazio circostante dall'azione che essa esercita su un'altra carica q generica posta nelle sue vicinanze, si introduce il campo elettrico, che permette di scrivere la forza elettrostatica nella forma $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

L'esperienza mostra che le calamite esercitano tra loro delle forze. In analogia con quanto detto per il campo elettrico, possiamo allora affermare che un magnete genera nello spazio un **campo magnetico**, che indicheremo con il simbolo \vec{B} . L'introduzione del campo magnetico permette di scrivere la forza magnetica separando l'effetto di ciò che consideriamo "sorgente" del campo — vale a dire il magnete o, come vedremo in seguito, la corrente elettrica — da ciò che è soggetto al campo, per esempio un altro magnete o un circuito elettrico o una carica in moto.

Vediamo ora con alcuni semplici esempi come è possibile determinare le linee di forza del campo magnetico. Sondiamo il campo generato, ad esempio, da una barretta magnetica utilizzando un aghetto magnetico come quello di una bussola, libero di ruotare senza attriti attorno ad un perno che passa per il suo centro. Come già detto nell'introduzione, si indica con polo nord magnetico la parte dell'aghetto che, in presenza del solo campo magnetico terrestre, punta verso il nord geografico (si veda il box verde sul campo magnetico terrestre).

Il campo magnetico della Terra è relativamente piccolo e nelle vicinanze di un magnete si può trascurare; quindi nel seguito non considereremo mai il suo contributo. Se si pone l'aghetto vicino al magnete, esso ruota fino a disporsi con una data inclinazione; per definizione la direzione del campo magnetico \vec{B} coincide con quella dell'aghetto, mentre il suo verso è tale che \vec{B} punti nel verso del polo nord dell'aghetto. Spostando l'aghetto in varie posizioni si possono ricostruire le linee di forza del campo che, ricordiamo, sono le linee a cui il campo è tangente, come indicato in figura 21.2.

In figura 21.3 indichiamo come sono fatte le linee di forza del campo magnetico generato dalla barretta magnetica. Esse sono linee chiuse che escono dal polo nord, entrano in quello sud e si chiudono all'interno del magnete. Questa è una proprietà che vale in generale:

le linee di forza del campo magnetico \vec{B} sono sempre linee chiuse.

Il campo è più intenso dove le linee di forza sono più dense. Come vedremo nel paragrafo 21.3, il fatto che le linee di forza siano sempre

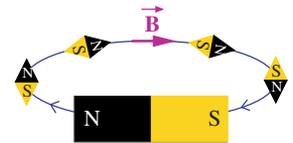


Figura 21.2
La direzione e il verso del campo generato dal magnete sono individuati dalla posizione dell'aghetto magnetico. In ogni punto il campo è tangente a una linea di forza (linea blu).

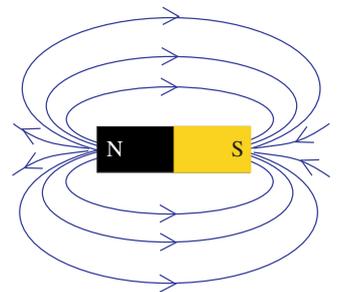


Figura 21.3
Le linee di forza del campo magnetico generato da una barretta magnetica sono dirette dal polo nord al polo sud magnetico e si chiudono all'interno del magnete.

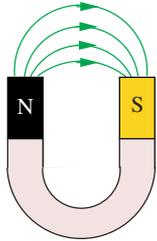


Figura 21.4

Le linee di forza del campo magnetico generato da un magnete a forma di ferro di cavallo.

linee chiuse è legato al fatto che **non esistono cariche magnetiche isolate**.

Il campo magnetico di una calamita dipende anche dalla sua forma; ad esempio la calamita a forma di ferro di cavallo disegnata nella figura 21.4 ha un campo \vec{B} diverso da quello della calamita della figura 21.3. Trovare una relazione tra l'intensità del campo magnetico e la forma della calamita, le sue dimensioni e la distanza da essa è alquanto difficile.

Come abbiamo accennato nell'introduzione, nel 1820 Oersted eseguì un esperimento fondamentale per la comprensione dei fenomeni magnetici; egli avvicinò un ago magnetico ad un filo percorso da corrente e notò che esso veniva deviato in maniera analoga a quanto avveniva nelle vicinanze di un magnete naturale. Da questo e dai successivi esperimenti di Ampère, si comprese che anche **la corrente elettrica genera un campo magnetico**. Lo studio dei fenomeni magnetici parte quindi dallo studio dei campi prodotti da correnti elettriche. In questo capitolo vedremo come si determina il campo magnetico generato da una corrente. Nel prossimo studieremo le forze che agiscono su fili percorsi da corrente e su cariche in moto in presenza di un campo magnetico esterno. Vedremo inoltre brevemente come si descrive il campo magnetico nella materia.

Il campo magnetico terrestre

Il primo a comprendere che la Terra si comporta come un grande magnete fu il fisico inglese W. Gilbert che nel 1660 propose questa teoria nel *De Magnete*, asserendo che per questo motivo l'ago della bussola si orienta in direzione nord-sud. Solo molti anni dopo, nel 1832, K. F. Gauss condusse uno studio dettagliato del campo magnetico terrestre tracciandone le linee di forza.

In pratica tale campo si può schematizzare come quello generato da una barra magnetica passante per il centro della Terra e inclinata di $11^\circ 30'$ rispetto all'asse di rotazione terrestre. Come abbiamo visto nel paragrafo 21.1, le linee di forza del campo generato da una barretta magnetica escono dal polo nord magnetico ed entrano nel polo sud (si veda la figura 21.3). Il verso delle linee di forza del campo magnetico terrestre mostrato in figura 21.5 mostra che il polo magnetico sud è situato nell'emisfero settentrionale. Tuttavia, è tradizione chiamare polo magnetico Nord quello che si trova nell'emisfero Nord e polo magnetico Sud quello che si trova nell'emisfero Sud, in accordo con i corrispondenti poli geografici. Il campo magnetico varia al variare della latitudine; esso è minimo all'equatore ($B \sim 3 \cdot 10^{-5}$ T) e massimo ai poli, dove è circa tre volte più intenso.

La sua origine non è ancora del tutto chiarita. Il contributo maggiore viene senz'altro dalla composizione interna della Terra, ed a questo si sommano i contributi delle correnti elettriche atmosferiche, che sono però molto inferiori. Inizialmente si era pensato che il nucleo della Terra fosse magnetizzato; tuttavia, a

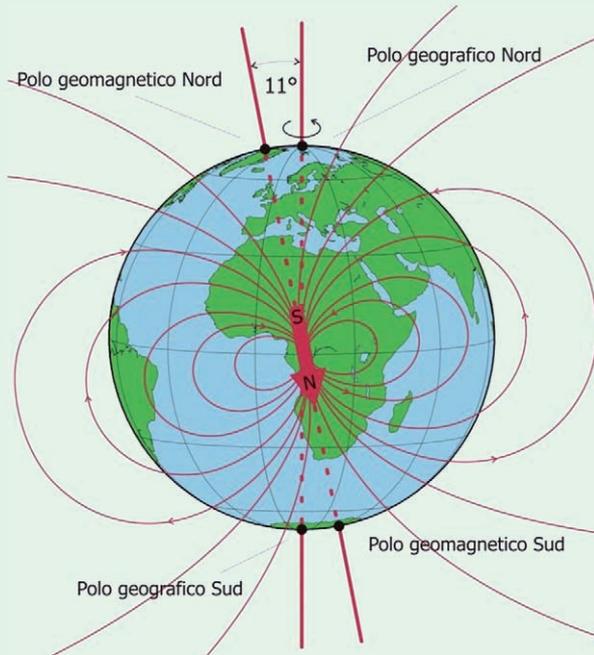


Figura 21.5
Linee di forza del campo magnetico terrestre.

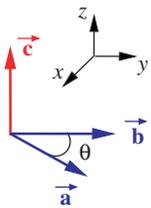
profondità di qualche centinaio di chilometri si raggiungono temperature di oltre $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$, alle quali qualsiasi minerale noto perde le sue qualità ferromagnetiche (si veda il paragrafo [22.5](#) per spiegazioni più dettagliate sul magnetismo nella materia).

Oggi si pensa piuttosto che il campo sia generato da correnti elettriche nel nucleo fluido e conduttore della Terra; tuttavia non è chiaro il meccanismo attraverso il quale queste correnti vengano prodotte e mantenute, e per quale motivo esse siano in grado di generare un campo che all'esterno appare come quello di un magnete che ha direzione quasi coincidente con quella dell'asse di rotazione terrestre. All'interno della Terra si presume che il campo abbia una struttura molto più complessa e assai diversa da quella che osserviamo in superficie.

Infine menzioniamo il fatto che il campo magnetico terrestre non è costante nel tempo. Esso subisce piccole variazioni diurne e presenta variazioni stagionali (massime d'estate e minime in inverno); inoltre varia in relazione all'attività solare. Le variazioni maggiori si sono però avute in ere geologiche passate; lo studio della magnetizzazione delle rocce (*paleomagnetismo*) ha mostrato che in passato esso ha subito diverse inversioni di polarità.

Prodotto vettoriale

Richiamiamo brevemente la definizione e le proprietà del prodotto vettoriale che useremo spesso nel seguito. Il prodotto

**Figura 21.6**

Il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è ortogonale al piano formato dai vettori \vec{a} e \vec{b} .

vettoriale

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (21.1)$$

è un vettore che ha:

- direzione **ortogonale** al piano individuato da \vec{a} e \vec{b} ;
- modulo pari a

$$c = ab \sin \theta, \quad (21.2)$$

dove θ è l'angolo compreso tra \vec{a} e \vec{b} come indicato nella figura 21.6. Il verso di \vec{c} si può trovare in diversi modi.

Regola della mano destra: si dispone la mano destra aperta lungo il vettore \vec{a} (primo vettore) e si chiudono le dita verso \vec{b} (secondo vettore), coprendo l'angolo più piccolo tra i due vettori. Il pollice dà il verso di \vec{c} .

Regola della mano sinistra: apriamo le tre dita della mano sinistra (pollice, indice e medio) in modo da indicare i tre assi cartesiani; facciamo coincidere il dito medio della mano sinistra con \vec{a} (primo vettore) ed il dito indice con \vec{b} (secondo vettore); in questo caso \vec{c} sarà diretto nel verso indicato dal pollice.

Regola “dell’omino”: consideriamo un omino che ha i piedi sul piano individuato da \vec{a} e \vec{b} ; il vettore \vec{a} viene portato sul vettore \vec{b} percorrendo l'angolo minimo compreso fra loro; la testa dell’omino sta dalla parte del piano tale che vede \vec{a} ruotare su \vec{b} in senso antiorario. Il verso di \vec{c} coincide con quello dell’omino così disposto.

Regola della terna cartesiana: il verso di \vec{c} coincide con quello dell’asse z di una terna cartesiana sinistrorsa in cui il piano $\{xy\}$ coincide con quello individuato da \vec{a} e \vec{b} , l’asse x coincide con \vec{a} e l’asse y è scelto in modo tale che la componente y di \vec{b} sia positiva.

Regola della vite: il vettore \vec{c} è diretto nel verso in cui si avvita una vite che vede il vettore \vec{a} ruotare verso il vettore \vec{b} .

Se si cambia l’ordine dei vettori il prodotto vettoriale cambia segno:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

21.2 Campo magnetico generato da una corrente elettrica

In questo paragrafo studieremo il campo magnetico generato da una corrente elettrica. Considereremo dapprima il caso ideale di un filo in-

finito percorso da corrente ricavando la **legge di Biot-Savart**; successivamente vedremo come, attraverso la **formula di Laplace**, si possa determinare il campo magnetico generato da una corrente che scorre in un circuito di forma qualsiasi.

21.2.1 Campo magnetico generato da un filo infinito rettilineo percorso da corrente

Consideriamo un filo infinito, rettilineo, percorso dalla corrente i e poniamo nelle sue vicinanze l'aghetto magnetico di una bussola, così come abbiamo fatto per studiare la direzione del campo magnetico generato da un magnete nel paragrafo 21.1. Vediamo che nei vari punti l'aghetto si dispone come indicato in figura 21.7; quindi ne deduciamo che le linee di forza del campo sono circonferenze con centro nel filo e ad esso perpendicolari. Il campo magnetico è tangente alle linee di forza ed è diretto come mostrato in figura 21.8.

Il suo verso, che è quello indicato dal polo nord dell'aghetto, si può trovare con una semplice regola mnemonica: se chiudiamo la mano destra attorno al filo con il pollice nel verso della corrente, il verso del campo è quello delle dita che si avvolgono attorno al filo. In qualsiasi punto, il campo \vec{B} è ortogonale al filo e al raggio r , quindi esso si può esprimere tramite il prodotto vettoriale nel modo seguente

$$\vec{B} = B \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{r}}, \quad (21.3)$$

dove $\hat{\mathbf{i}}$ è il versore che individua la direzione del filo ed ha lo stesso verso della corrente, e $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore della direzione radiale rispetto al filo, come mostrato in figura 21.9.

B è il modulo del campo che dobbiamo ancora determinare (si ricordi che i versori hanno modulo pari a 1). Possiamo aspettarci che B sia tanto maggiore quanto maggiore è la corrente che scorre nel filo e che diminuisca all'aumentare della distanza, ma non sappiamo quale sia la dipendenza esplicita di B da i e da r . Per determinarla studiamo il modo in cui il filo percorso da corrente interagisce con altri circuiti. Come indicato in figura 21.10, poniamo nelle sue vicinanze un circuito di prova, in cui il lato AC di lunghezza L è connesso alla base da una molla ed è libero di muoversi scorrendo senza attrito sui due lati a cui è ortogonale. Misurando l'allungamento o la compressione della molla si può misurare la forza che agisce sul lato AC .

Disponiamo il circuito in modo tale che AC sia parallelo al filo e sia posto a distanza r da questo. Si verifica che:

se nel ramo AC scorre una corrente i_1 che ha lo stesso verso di i , la molla si allunga e i due fili affacciati si attraggono con una forza ad essi perpendicolare; se i_1 ha verso opposto a i la forza è invece repulsiva. In entrambi i casi il modulo della forza, che chiamiamo **forza magnetica**, è pari a

$$F_m = i_1 L \left(k_m \frac{i}{r} \right), \quad (21.4)$$

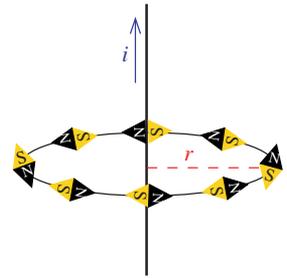


Figura 21.7

La direzione del campo magnetico generato dal filo percorso dalla corrente i è quella dell'aghetto magnetico.

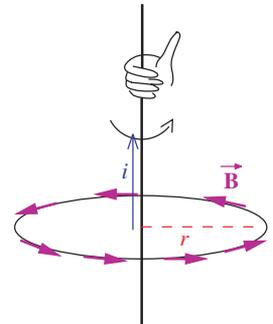


Figura 21.8

Il verso del campo è quello in cui si avvolge la mano destra con pollice nel verso della corrente.

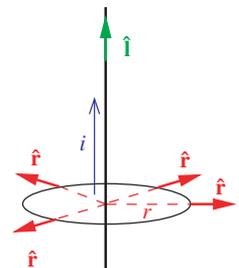


Figura 21.9

$\hat{\mathbf{i}}$ è il versore del filo ed ha lo stesso verso della corrente; $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore della direzione radiale rispetto al filo.

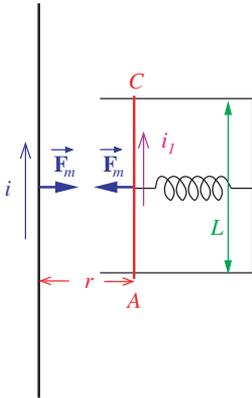


Figura 21.10
Se le correnti scorrono nello stesso verso i fili si attraggono; se scorrono in verso opposto si respingono.

dove k_m è una costante che nel Sistema Internazionale ha il seguente valore

$$k_m = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 . \quad (21.5)$$

Per motivi storici si usa esprimere la costante k_m in funzione di un'altra costante, μ_0 , detta **permeabilità magnetica del vuoto**, legata a k_m dalla relazione

$$k_m = \frac{\mu_0}{2\pi} , \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 . \quad (21.6)$$

Nell'espressione (21.4) notiamo che il termine $i_1 L$ dipende dal circuito di prova, e il termine i/r dipende dal filo in cui passa la corrente i . Definiamo il modulo del campo magnetico B come la forza magnetica (21.4) diviso $i_1 L$:

$$B = \frac{F_m}{i_1 L} .$$

Quindi B vale

$$B = k_m \frac{i}{r} \equiv \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} . \quad (21.7)$$

Utilizzando l'equazione (21.3) possiamo ora formulare la **legge di Biot-Savart**: il campo magnetico generato da un filo infinito percorso dalla corrente i è

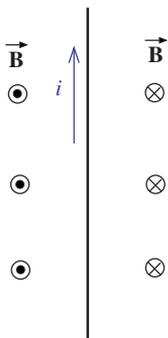


Figura 21.11
Nella regione a destra del filo il campo è entrante rispetto a chi guarda, nella regione a sinistra è uscente.

$$\vec{B} = k_m \frac{i}{r} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{r}} \equiv \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{r}} . \quad (21.8)$$

Ricordiamo che le linee di forza del campo magnetico generato dal filo sono circonferenze centrate sul filo.

Si noti che se mostriamo il filo in un piano, come in figura 21.11, in tutti i punti \vec{B} è perpendicolare al piano; inoltre nella regione a destra del filo il campo è entrante rispetto a chi guarda, nella regione a sinistra è uscente. Per convenzione il campo entrante viene indicato con il simbolo \otimes , mentre quello uscente con il simbolo \odot . Se nella figura 21.11 invertiamo il verso della corrente i , il verso del campo si inverte e diventa uscente a destra ed entrante a sinistra.

Dimensioni e unità di misura del campo magnetico

Le dimensioni del campo magnetico si possono ricavare dalle equazioni (21.4) e (21.7) che danno

$$[B] = \frac{[F_m]}{[il]} = \frac{[mlt^{-2}]}{[il]} = mt^{-2}i^{-1} .$$

L'unità di misura del campo magnetico è il **tesla**, simbolo T, pari a

$$T = \frac{\text{newton}}{\text{ampere} \times \text{metro}} .$$

Nella pratica il tesla è un'unità grande; per esempio il campo magnetico massimo all'interno di un magnete è dell'ordine di qualche tesla. Spesso viene utilizzata l'unità del sistema c.g.s. di Gauss, il **gauss**, simbolo G, pari a

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} .$$

Un'altra unità di misura, usata spesso nel passato, è il **weber/m²** (simbolo Wb/m²), dove il weber è l'unità di misura del flusso del campo magnetico che studieremo in seguito. Si ha:

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 .$$

Un filo conduttore rettilineo infinito è percorso da una corrente di 6.0 A. Determinare il modulo del campo magnetico \vec{B} ad una distanza di 3 mm dal filo.

Il modulo del campo magnetico è dato dalla legge di Biot-Savart (21.7):

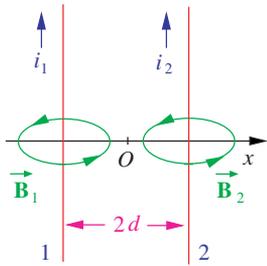
$$B = k_m \frac{i}{r} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{6}{3 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ T} .$$

Notiamo che il modulo del campo magnetico risultante è molto piccolo, nonostante sia stato calcolato in un punto molto vicino al filo in cui scorre una corrente piuttosto grande. Esso è confrontabile con il campo magnetico terrestre che sulla superficie della Terra all'equatore è $\approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. La ragione per cui il valore di B è piccolo è dovuto al fatto che il valore della costante $k_m = \mu_0/(2\pi) = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ è piccolo. Per avere campi magnetici molto più intensi, è necessario utilizzare delle configurazioni di fili percorsi da correnti diverse dal filo rettilineo. In questo capitolo vedremo come utilizzando un solenoide è possibile ottenere un campo magnetico più grande, che può essere ulteriormente aumentato inserendo del materiale ferromagnetico all'interno del solenoide, come mostreremo nel prossimo capitolo.

PROBLEMA 21.1

Due fili conduttori rettilinei infiniti e paralleli distano $2d = 60 \text{ cm}$. Essi sono percorsi dalle correnti $i_1 = 3.0 \text{ A}$ e $i_2 = 1.5 \text{ A}$ dirette nello stesso verso come indicato in figura 21.12.

PROBLEMA 21.2

**Figura 21.12**

Le linee di forza del campo \vec{B} generato da un filo rettilineo infinito sono delle circonferenze concentriche con il filo.

Scegliendo l'asse x ortogonale ai fili e ponendo l'origine nel punto intermedio tra essi, in modo che il filo 1 si trovi in $x_1 = -d = -30$ cm ed il filo 2 in $x_2 = d = 30$ cm, determinare: a) il punto lungo l'asse x in cui il campo magnetico \vec{B} si annulla; b) il modulo del campo \vec{B} nell'origine e dire se è entrante o uscente dal foglio.

Le linee di forza del campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito sono delle circonferenze concentriche al filo e ortogonali ad esso. Il verso del campo si può trovare con la regola della mano destra, cioè mettendo il pollice nel verso in cui scorre la corrente: la direzione delle dita dà il verso di \vec{B} . Se le correnti che scorrono nei due fili hanno lo stesso verso, ad esempio verso l'alto, le linee di forza dei due campi sono quelle disegnate in figura. Il campo magnetico totale è la somma vettoriale dei campi \vec{B}_1 e \vec{B}_2 generati dai due fili.

Esso si annulla nei punti in cui \vec{B}_1 e \vec{B}_2 hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto. Facendo riferimento alla figura, si nota che in tutti i punti dell'asse x i due campi hanno sempre la stessa direzione, ma a sinistra del filo 1 e a destra del filo 2 essi hanno anche lo stesso verso; quindi il campo totale non può annullarsi in queste regioni. Nella regione tra i due fili invece \vec{B}_1 e \vec{B}_2 hanno verso opposto, quindi esiste un punto dell'asse x in cui il campo totale \vec{B} è nullo.

a) Se P è il punto di ascissa x in cui il campo totale si annulla, segue che il modulo della distanza di P dal filo 1 è $r_1 = d + x$, mentre quello dal filo 2 è $r_2 = d - x$. Per trovare il valore di x imponiamo che i moduli di \vec{B}_1 e \vec{B}_2 siano uguali; utilizzando la legge di Biot-Savart (21.7) si ha:

$$B_1 = B_2 \quad \Rightarrow \quad k_m \frac{i_1}{r_1} = k_m \frac{i_2}{r_2} ;$$

dai dati del problema $i_1 = 2i_2$, quindi:

$$k_m \frac{2i_2}{r_1} = k_m \frac{i_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2r_2 .$$

Ricordando le definizioni di r_1 e r_2 si ha

$$d + x = 2(d - x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ cm} ,$$

quindi il campo si annulla in un punto che dista 40 cm dal filo 1 e 20 cm dal filo 2.

b) Per trovare il campo totale nell'origine, calcoliamo separatamente i campi generati dai due fili, ricordando che entrambi distano dall'origine $d = 30$ cm:

$$B_1 = k_m \frac{i_1}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{3}{0.3} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T} ;$$

$$B_2 = k_m \frac{i_2}{d} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{1.5}{0.3} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ T} .$$

Facendo riferimento alla figura si vede che \vec{B}_1 nell'origine è entrante nel foglio, mentre \vec{B}_2 è uscente, quindi il campo totale è entrante ed il suo modulo vale:

$$B_{tot} = B_1 - B_2 = 2 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

21.2.2 Campo magnetico generato da un circuito di forma qualsiasi

Il campo magnetico generato da un circuito di forma qualsiasi si può calcolare utilizzando la **prima formula di Laplace**; essa stabilisce che, dato un tratto di filo di lunghezza dl percorso da corrente i , il contributo infinitesimo che esso dà al campo magnetico totale è

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r}. \quad (21.9)$$

In questa equazione $d\vec{l}$ è un vettore che ha modulo pari a dl , è tangente al filo ed è orientato nello stesso della corrente i ; \vec{r} è il vettore che unisce il trattino dl al punto in cui si vuole calcolare il campo e r è il suo modulo. Tutti i vettori sono mostrati in figura 21.13.

Come applicazione della prima formula di Laplace ritroviamo la legge di Biot-Savart (21.7). Consideriamo un filo infinito percorso da una corrente i e prendiamo su di esso il trattino $d\vec{l}$. La corrente che scorre in $d\vec{l}$ genera in P un campo perpendicolare al piano del foglio, entrante e di modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{r^2}.$$

Inoltre si ha che

$$d = r \sin(\pi - \varphi) = r \sin \varphi \quad \text{e} \quad r = \sqrt{l^2 + d^2}$$

per cui

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \frac{d}{r} = \frac{\mu_0 i d}{4\pi} \frac{dl}{r^3} = \frac{\mu_0 i d}{4\pi} \frac{dl}{(l^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Tutti i trattini di filo $d\vec{l}$ danno questo contributo; quindi integrando tra $-\infty$ e $+\infty$ si trova

$$B = \frac{\mu_0 i d}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{(l^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i d}{4\pi} \left[\frac{1}{d^2} \frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d},$$

che coincide con il modulo del campo di un filo infinito dato dalla (21.7).

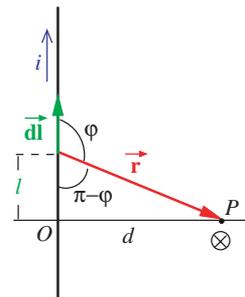
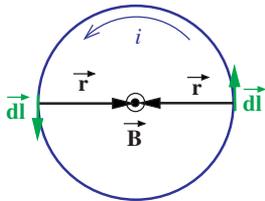


Figura 21.13

Il trattino di filo $d\vec{l}$ percorso dalla corrente i genera in P un campo $d\vec{B}$ perpendicolare al piano del foglio ed entrante.

**Figura 21.14**

Ogni trattino di filo $d\vec{l}$ genera un campo magnetico infinitesimo perpendicolare al foglio e uscente verso chi guarda.

NOTARE CHE: come per il campo elettrico, anche per il campo magnetico vale il **principio di sovrapposizione**; di conseguenza il campo generato da più fili percorsi da correnti, o anche da più magneti, è la somma vettoriale dei campi generati dai singoli elementi.

21.2.3 Campo magnetico al centro di una spira

Calcoliamo il campo magnetico al centro di una spira circolare di raggio R in cui scorre la corrente i . Sia \vec{r} il vettore che unisce il generico trattino di filo $d\vec{l}$ al centro O della spira, come indicato in figura 21.14.

Dalla prima formula di Laplace (21.9) sappiamo che ogni elemento di filo $d\vec{l}$ genera in O un campo infinitesimo $d\vec{B}$ che è perpendicolare al piano individuato da $d\vec{l}$ e da \vec{r} , cioè al piano della spira. Dato che $d\vec{l}$ e \vec{r} sono tra loro perpendicolari, il modulo di $d\vec{B}$ vale

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(r dl) = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} dl. \quad (21.10)$$

Se la corrente i scorre in verso antiorario come in figura 21.14, il verso di $d\vec{B}$ è uscente rispetto a chi guarda. Quindi il verso è quello del pollice della mano destra le cui dita si avvolgono nel verso della corrente, come mostrato in figura 21.15 (regola della mano destra).

Il campo magnetico totale \vec{B} è la somma vettoriale di tutti i campi infinitesimi $d\vec{B}$; dato che essi hanno tutti la stessa direzione e lo stesso verso, il modulo di \vec{B} è l'integrale dei moduli dei campi $d\vec{B}$ dati dalla (21.10), vale a dire

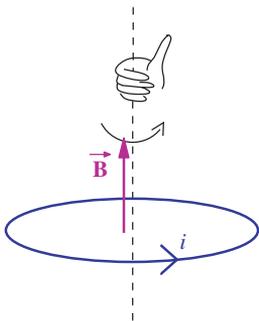
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} 2\pi r = \mu_0 \frac{i}{2r}.$$

In conclusione, **il campo magnetico al centro di una spira percorsa da corrente è perpendicolare al piano della spira, ha il verso dato dalla regola della mano destra, ed ha modulo pari a**

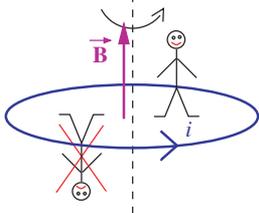
$$B = \mu_0 \frac{i}{2r}. \quad (21.11)$$

Un modo alternativo per calcolare il verso di \vec{B} è il seguente; si consideri un omino che poggia i piedi sul piano della spira e con la testa dalla parte della spira in cui vede la corrente ruotare in verso antiorario.

Il verso di \vec{B} è quello che va dai piedi alla testa dell'omino, come mostrato in figura 21.16.

**Figura 21.15**

Il campo magnetico al centro della spira ha il verso del pollice di una mano destra che si avvolge nel verso della corrente (regola della mano destra).

**Figura 21.16**

L'omino che dà il verso di \vec{B} è quello che vede la corrente ruotare in verso antiorario.

Nel modello semiclassico dell'atomo di idrogeno, l'elettrone ruota intorno al nucleo seguendo un'orbita circolare di raggio $R = 5.3 \cdot 10^{-11}$ m e di periodo $T = 1.5 \cdot 10^{-16}$ s. Calcolare il modulo del campo magnetico al centro dell'orbita, approssimando il moto velocissimo dell'elettrone con una corrente che scorre in una spira circolare di raggio pari a quello dell'orbita. Si ricordi che la carica dell'elettrone vale in modulo $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

Consideriamo un punto qualsiasi dell'orbita dell'elettrone e prendiamo una superficie S ortogonale ad essa. S viene attraversata dall'elettrone ogni volta che compie un giro. In un intervallo di tempo Δt l'elettrone attraversa S un numero di volte $n = \Delta t/T$, quindi la carica totale che attraversa S in tale tempo è ne . La corrente i generata dalla rapidissima rotazione dell'elettrone intorno al nucleo pertanto è

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{ne}{nT} = \frac{e}{T} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{1.5 \cdot 10^{-16}} = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Dall'equazione (21.11) il campo magnetico al centro dell'orbita è

$$B = \mu_0 \frac{i}{2r} = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{1.1 \times 10^{-3}}{2 \times 5.3 \cdot 10^{-11}} = 13 \text{ T}.$$

Due fili rettilinei sono ortogonali e sono disposti su due piani paralleli vicinissimi in modo da non intersecarsi. Ai fini di questo esercizio si può assumere che i due fili giacciono sullo stesso piano. Nei fili scorrono le correnti $i_1 = 3$ A e $i_2 = 5$ A, come mostrato in figura 21.17. Calcolare il campo magnetico nei punti A e B posti a distanza $d = 10$ cm.

Scegliamo un sistema di riferimento in cui l'asse x è diretto come il filo 2 in cui scorre i_2 , l'asse y come il filo 1 in cui scorre i_1 e l'asse z perpendicolare al piano su cui giacciono i fili e uscente dal piano. Nel punto A il campo generato dal filo 1 è diretto come l'asse z , ha verso entrante nel piano e quindi vale:

$$\vec{B}_{1,A} = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \hat{k}. \quad (21.12)$$

Il campo generato dalla corrente i_2 ha la stessa direzione di $\vec{B}_{1,A}$ ma ha verso uscente, quindi vale

$$\vec{B}_{2,A} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \hat{k}. \quad (21.13)$$

Il campo risultante è la somma vettoriale dei due campi; il suo modulo vale

$$\begin{aligned} B_{ris,A} &= B_{2,A} - B_{1,A} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} - \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0}{2\pi d} (i_2 - i_1) \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \times 10 \cdot 10^{-2}} (5 - 3) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}. \end{aligned}$$

$B_{ris,A}$ è diretto nello stesso verso dell'asse z . Nel punto B il campo $\vec{B}_{1,B}$ ha stesso modulo, stessa direzione e stesso verso del campo $\vec{B}_{1,A}$ dato

PROBLEMA 21.3

PROBLEMA 21.4

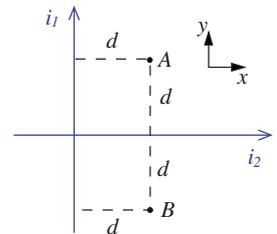


Figura 21.17

dalla (21.12); il campo $\vec{B}_{2,B}$ ha la stessa direzione e lo stesso modulo di $\vec{B}_{2,A}$, ma ha verso opposto, cioè entrante, quindi vale

$$\vec{B}_{2,B} = -\frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \hat{k}. \quad (21.14)$$

Nel punto B il campo risultante è diretto come l'asse z , ha verso entrante nel piano ed ha modulo

$$\begin{aligned} B_{ris,B} &= B_{2,B} + B_{1,B} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} + \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0}{2\pi d} (i_2 + i_1) \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \times 10 \cdot 10^{-2}} (5 + 3) = 16 \cdot 10^{-6} \text{ T}. \end{aligned}$$

21.3 Il teorema di Gauss per il campo magnetico

Vogliamo ora calcolare il flusso del campo magnetico \vec{B} attraverso una superficie **chiusa** A :

$$\Phi(\vec{B})_A = \oint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA. \quad (21.15)$$

Supponiamo che il campo sia generato da un filo percorso da corrente e scegliamo la superficie A come in figura 21.18. Consideriamo ad esempio i due elementi di superficie dA indicati in figura. Il flusso infinitesimo attraverso ciascuno di essi è

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \hat{n} dA;$$

se il campo è entrante, l'angolo che esso forma con il versore \hat{n} è $\theta > 90^\circ$; quindi, ricordando che il coseno di un angolo maggiore di 90° è negativo e che il modulo di \hat{n} è uguale a uno, si ha

$$d\Phi_{\text{campo entrante}} = B \cos \theta < 0;$$

se invece il campo è uscente, $\theta < 90^\circ$ e si ha

$$d\Phi_{\text{campo uscente}} = B \cos \theta > 0.$$

Il numero di linee di forza che attraversano dA è proporzionale a B (tanto maggiore è B , tanto maggiore è il numero di linee di forza per unità di superficie), quindi possiamo dire che $d\Phi$ è proporzionale al numero di linee di forza che attraversano dA ed è positivo se le linee di forza sono uscenti, negativo se sono entranti. Dato che le linee di forza del campo magnetico sono chiuse, il numero di quelle che entrano nella superficie A è uguale al numero di quelle che escono; quindi il flusso totale attraverso A , che è la somma di tutti i contributi $d\Phi$, è nullo. Questo risultato, che abbiamo ricavato per il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente, discende solo dal fatto che le linee di forza del campo sono linee chiuse; dato che questa è una

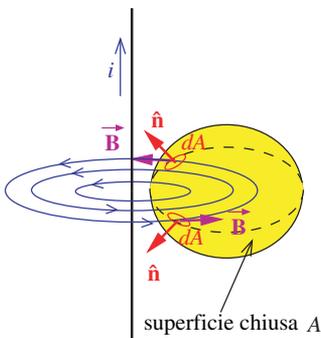


Figura 21.18

Il numero di linee di forza che entrano nella superficie chiusa A è pari al numero di quelle che escono; pertanto il flusso del campo magnetico attraverso A è nullo.

proprietà generale del campo magnetico, possiamo infine affermare che

il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie CHIUSA A è nullo:

$$\Phi(\vec{B})_{A, chiusa} = 0. \quad (21.16)$$

Questa proprietà del campo magnetico si esprime anche dicendo che il vettore \vec{B} è **solenoidale**.

Una conseguenza importante: i monopoli magnetici non esistono. Nel paragrafo **17.2** abbiamo discusso il teorema di Gauss per il campo elettrico ed abbiamo dimostrato che il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è pari alla somma delle cariche elettriche, ossia delle sorgenti del campo, contenute all'interno della superficie, divisa per ϵ_0 :

$$\Phi(\vec{E})_A = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (21.17)$$

Quando il flusso è zero vuol dire o che all'interno della superficie non sono presenti sorgenti del campo elettrico, oppure che la somma delle cariche positive e negative è nulla.

Il fatto che il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa sia sempre nullo implica che non ci possono essere sorgenti isolate del campo magnetico, ma che al contrario le “cariche magnetiche” di polarità opposta devono essere sempre accoppiate, come nel caso della coppia di cariche elettriche di segno opposto appena discusso. Quindi l'annullarsi del flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa implica che non possono esistere i “monopoli magnetici”, vale a dire cariche magnetiche isolate di una sola polarità.

Dimensioni e unità di misura del flusso del campo magnetico

Le dimensioni del flusso del campo magnetico si ricavano dalla definizione (21.15):

$$[\Phi(B)] = [B][A] = [mt^{-2}i^{-1}][l^2] = ml^2t^{-2}i^{-1}.$$

L'unità di misura è il **weber**, simbolo Wb:

$$\text{Wb} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{A}}.$$

21.4 Teorema della circuitazione

Nel paragrafo **18.1** abbiamo mostrato che la forza elettrica è una forza conservativa, vale a dire che il lavoro che essa compie quando il

corpo su cui agisce si sposta da un punto A a un punto B non dipende dal cammino percorso, ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale. Sappiamo che questo equivale ad affermare che il lavoro che la forza compie lungo un qualsiasi cammino chiuso è nullo; pertanto se la forza elettrostatica è conservativa si ha

$$\oint_{\ell} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0,$$

dove ℓ è il cammino chiuso lungo il quale viene calcolato l'integrale. Vogliamo ora verificare se il campo magnetico gode della stessa proprietà. A tale scopo, calcoliamo la **circuitazione** del vettore \vec{B} lungo la linea chiusa orientata ℓ , vale a dire

$$C = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{s}, \quad (21.18)$$

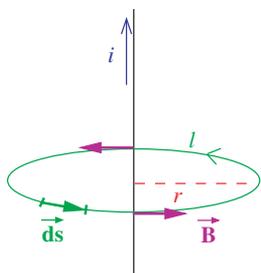


Figura 21.19

Il percorso chiuso lungo il quale si sceglie di calcolare la circuitazione di \vec{B} è una linea di forza del campo.

dove $d\vec{s}$ è uno spostamento infinitesimo lungo ℓ .

Supponiamo ad esempio che il campo magnetico sia generato da un filo infinito rettilineo percorso dalla corrente i e scegliamo come cammino chiuso ℓ una linea di forza, cioè una circonferenza concentrica al filo e giacente su un piano ad esso perpendicolare, come mostrato in figura 21.19. Il campo \vec{B} è tangente alla linea di forza, quindi è parallelo allo spostamento $d\vec{s}$ lungo la linea; il suo modulo è dato dall'equazione (21.7) che qui riportiamo

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r};$$

quindi su tutto il percorso ℓ esso è costante. Di conseguenza la circuitazione (21.18) vale

$$C = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \oint_{\ell} ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i. \quad (21.19)$$

Dunque a differenza del campo elettrico, **il campo magnetico può avere circuitazione diversa da zero.**

NOTARE CHE: per calcolare l'integrale (21.19) è necessario orientare la linea chiusa, ossia assegnare un verso di integrazione. Nell'esempio abbiamo scelto un verso concorde con quello della linea di forza di \vec{B} ; di conseguenza \vec{B} e $d\vec{s}$ hanno lo stesso verso e il segno della circuitazione è positivo.

NOTARE CHE: La corrente i si dice *concatenata* alla linea chiusa perché attraversa una qualsiasi superficie che ha come bordo la linea chiusa (nella figura 21.19 tale superficie è il cerchio di raggio r).

Il risultato (21.19) si può dimostrare nel caso più generale in cui siano presenti più correnti ed è descritto dal seguente teorema.

Teorema della circuitazione di Ampère: la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa è pari alla somma algebrica delle correnti concatenate alla linea, moltiplicata per μ_0 :

$$C = \mu_0 \sum_k i_k . \quad (21.20)$$

Per *correnti concatenate* si intendono tutte quelle che attraversano, in un verso o nell'altro, una qualsiasi superficie che abbia come bordo il cammino chiuso. Per esempio, riferendoci alla figura 21.20, i_1 , i_2 e i_3 sono concatenate alla linea ℓ mentre i_4 non lo è. Scelto un verso di percorrenza della linea chiusa si considerano come positive le correnti tali che un omino, con la testa nel verso della corrente e i piedi sulla superficie, vede la linea percorsa in senso antiorario e negative quelle di segno opposto. Di conseguenza le correnti i_1 e i_3 in figura 21.20 danno un contributo positivo, mentre quello di i_2 è negativo; quindi scriveremo

$$C = \mu_0 (i_1 - i_2 + i_3) .$$

Si noti che i_4 non è concatenata alla linea chiusa scelta, pertanto essa non dà contributo alla circuitazione.

Dal punto di vista pratico questo teorema ha una funzione analoga a quella del teorema di Gauss in elettrostatica, perché consente di trovare \vec{B} quando si abbiano particolari simmetrie, come vedremo nel prossimo paragrafo. Come prima applicazione del teorema, ricaviamo il modulo del campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente, vale a dire ricaviamo la formula di Biot-Savart data dalla (21.7). Supponiamo di sapere solo che le linee di forza del campo magnetico siano circonferenze concentriche al filo e perpendicolari ad esso, e che il modulo di \vec{B} dipenda solo dalla distanza r dal filo. Scegliamo come cammino chiuso ℓ lungo cui calcolare la circuitazione una linea di forza, vale a dire una circonferenza di raggio r , fissando il verso di percorrenza come mostrato in figura 21.19. Calcoliamo la circuitazione, ricordando che \vec{B} e \vec{ds} sono paralleli e concordi e che B è costante sul cammino scelto:

$$C = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \oint_{\ell} B ds = B \oint_{\ell} ds = B 2\pi r .$$

L'unica corrente concatenata con il cammino ℓ è i , per cui $\sum_k i_k = i$; quindi dal teorema della circuitazione si trova

$$C = \mu_0 \sum_k i_k \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ,$$

che coincide con la (21.7).

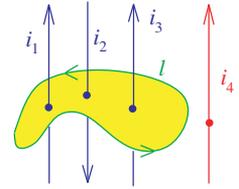


Figura 21.20

Le correnti i_1 , i_2 e i_3 sono concatenate alla linea ℓ , mentre i_4 non lo è. Il contributo di i_1 e i_3 alla circuitazione è positivo, quello di i_2 è negativo, quello di i_4 è nullo.

PROBLEMA 21.5

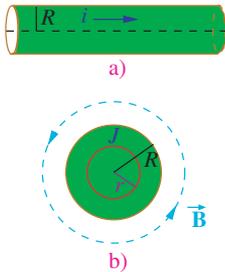


Figura 21.21

La corrente i scorre con densità di corrente J uniforme in un cilindro conduttore di raggio R .

Una corrente di 4 A scorre con densità di corrente \vec{J} uniforme lungo un conduttore cilindrico di lunghezza infinita e raggio $R = 1.5$ cm, come mostrato nella figura 21.21a). Determinare l'andamento del campo magnetico \vec{B} in funzione della distanza r dall'asse del cilindro e calcolare il modulo del campo nei punti: a) $r_1 = 0.8$ cm; b) $r_2 = 2.0$ cm.

La densità di corrente J nel conduttore è uniforme; indicando con S la sezione del cilindro, dall'equazione (20.13) si trova:

$$J = \frac{i}{S} = \frac{i}{\pi R^2} = \frac{4}{\pi(1.5 \cdot 10^{-2})^2} = 5.66 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2.$$

Dato che J è uniforme, il sistema ha simmetria cilindrica e di conseguenza le linee di forza del campo devono essere delle circonferenze concentriche con il cilindro come nel caso del filo rettilineo infinito. Nella figura 21.21b) è mostrata una sezione del cilindro; supponendo che la corrente sia uscente dal foglio, applicando la regola della mano destra si ricava che le linee di forza del campo hanno verso antiorario. Il modulo del campo può dipendere solo dalla distanza r dall'asse del cilindro e si può ricavare utilizzando il teorema della circuitazione di Ampère (21.20):

$$C = \mu_0 \sum_k i_k,$$

dove le i_k sono tutte le correnti concatenate alla linea chiusa ℓ utilizzata per calcolare C . Scegliamo come linea chiusa una circonferenza qualsiasi di raggio r , centrata sull'asse del cilindro come indicato in figura 21.21b); la circuitazione vale

$$C = \int_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_{\ell} ds = B2\pi r. \quad (21.21)$$

Per applicare il teorema di Ampère dobbiamo calcolare quanto vale la corrente concatenata a ℓ . Se $r < R$, la corrente che scorre all'interno di ℓ è data dal prodotto di J per l'area racchiusa da ℓ , cioè

$$i_{int} = J\pi r^2; \quad (21.22)$$

quindi combinando le due equazioni (21.21) e (21.22) si ottiene

$$\begin{aligned} C = \mu_0 \sum_k i_k &\Rightarrow B2\pi r = \mu_0 J\pi r^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow B = \mu_0 \frac{J}{2} r. \end{aligned} \quad (21.23)$$

Quindi all'interno del conduttore il campo magnetico \vec{B} aumenta linearmente con la distanza r dall'asse del cilindro. Invece quando $r > R$, la corrente concatenata con la linea chiusa è tutta la corrente i che scorre nel cilindro; quindi il campo magnetico è uguale a quello generato da un filo rettilineo infinito:

$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r}. \quad (21.24)$$

Per calcolare B in $r_1 = 0.8$ cm utilizziamo la formula (21.23):

$$B = \mu_0 \frac{J}{2} r_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{5.66 \cdot 10^3}{2} \times 0.8 \cdot 10^{-2} = 2.84 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Per calcolare B in $r_2 = 2.0$ cm utilizziamo la formula (21.24):

$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r_2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{4}{2\pi \times 2.0 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

21.4.1 Campo magnetico di un solenoide

Un solenoide è costituito da un filo conduttore avvolto strettamente a forma di spirale e in cui scorre una corrente i , come mostrato in figura 21.22. Se l'avvolgimento è molto stretto, esso può essere considerato come una sequenza di spire poste una di seguito all'altra come mostrato in figura 21.23.

Se assumiamo che il solenoide abbia lunghezza infinita, per motivi di simmetria **il campo magnetico è diretto parallelamente all'asse. Il verso del campo è quello del pollice della mano destra che "avvolge" il solenoide nel verso della corrente.**¹ Inoltre il modulo del campo può dipendere solo dalla distanza dall'asse (si veda il box grigio alla fine del paragrafo per una spiegazione dettagliata).

Mostriamo ora che il campo all'esterno del solenoide è nullo applicando il teorema della circuitazione di Ampère.

Scegliamo come cammino chiuso ℓ lungo cui calcolare la circuitazione la linea quadrata di lato L , tutta esterna al solenoide e parallela all'asse, mostrata in figura 21.24. Siano r_1 ed r_2 le distanze dei lati AB e CD dall'asse del solenoide. La circuitazione di \vec{B} si può scrivere come somma di quattro integrali:

$$C = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (21.25)$$

Dato che il campo è parallelo all'asse, esso è perpendicolare ai tratti DA e BC ; quindi lungo tali tratti $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ e i relativi integrali sono nulli. Il modulo del campo dipende solo dalla distanza dall'asse, quindi sul lato AB esso vale $B(r_1)$ e sul lato CD vale $B(r_2)$. Inoltre sul lato AB il campo magnetico è concorde con il verso di percorrenza della curva ℓ , quindi è parallelo e concorde a $d\vec{s}$, mentre sul lato CD è parallelo e discorde a $d\vec{s}$; pertanto si ha

$$\begin{aligned} C &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B B(r_1) ds - \int_C^D B(r_2) ds = \\ &= B(r_1)L - B(r_2)L. \end{aligned}$$

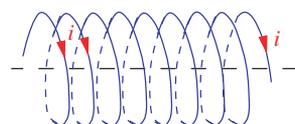


Figura 21.22

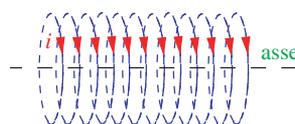


Figura 21.23

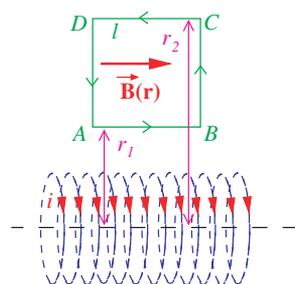


Figura 21.24

¹In alternativa, il verso del campo magnetico si può calcolare con la regola dell'omino: il verso è quello delle testa di un omino che ha i piedi poggiati sulla superficie di una delle spire del solenoide e vede la corrente circolare in verso antiorario.

Dato che la linea ℓ è tutta esterna al solenoide, non ci sono correnti concatenate a ℓ ; ne segue che la circuitazione è nulla:

$$B(r_1)L - B(r_2)L = 0 \quad \Rightarrow \quad B(r_1) = B(r_2) . \quad (21.26)$$

Supponiamo che r_2 tenda a infinito; lontano dalle sorgenti, il campo deve essere nullo, quindi deve essere $B(r_2 \rightarrow \infty) = 0$. Dall'equazione (21.26) segue allora che

$$B(r_1) = 0 ;$$

dato che r_1 corrisponde a un punto esterno qualsiasi, da questa equazione segue che **il campo all'esterno di un solenoide infinito è nullo.**

Calcoliamo ora il modulo del campo magnetico all'interno del solenoide scegliendo come cammino ℓ la linea chiusa scelta in precedenza, disposta come indicato in figura 21.25. Spezziamo il calcolo della circuitazione come indicato nell'equazione (21.25). All'esterno del solenoide il campo è nullo, quindi l'integrale sul tratto CD , e sui tratti esterni dei lati DA e BC è nullo. Sulla parte interna di tali lati il campo è perpendicolare a \vec{ds} , quindi anche gli integrali su DA e BC sono nulli. L'unico contributo alla circuitazione è quello del lato AB , in cui il campo è parallelo a \vec{ds} e concorde, quindi $\vec{B} \cdot \vec{ds} = Bds$. Come abbiamo detto, all'interno del solenoide il modulo di \vec{B} può dipendere solo dalla distanza dall'asse, quindi sul lato AB è costante e la circuitazione vale

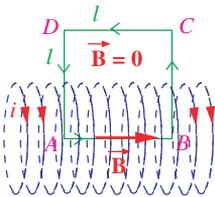


Figura 21.25

$$C = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int_A^B \vec{B} \cdot \vec{ds} = \int_A^B B ds = BL . \quad (21.27)$$

Indichiamo con n il numero di spire contenute nel solenoide per unità di lunghezza. Il numero di correnti concatenate alla linea chiusa ℓ è pari al numero di spire che sono contenute nel tratto di solenoide di lunghezza $AB = L$:

$$N_L = nL ;$$

queste correnti sono tutte uguali e hanno tutte lo stesso verso. Dal teorema di Ampère quindi si trova

$$C = \mu_0 \sum_k i_k \quad \Rightarrow \quad LB = \mu_0 N_L i \quad \Rightarrow \quad LB = \mu_0 n L i ;$$

pertanto il modulo del campo magnetico all'interno di un solenoide infinito vale

$$B = \mu_0 i n . \quad (21.28)$$

Il campo magnetico all'interno di un solenoide è uniforme e il suo modulo dipende solo dalla corrente che scorre nel solenoide e dal numero di spire per unità di lunghezza.

NOTARE CHE: come abbiamo visto nel problema 21.1, il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito in cui scorre una corrente i è piuttosto piccolo anche se i è grande e se consideriamo

punti vicini al filo. L'equazione (21.28) mostra che, a parità di corrente, per avere un campo magnetico più intenso conviene avvolgere il filo a forma di solenoide per due motivi: 1) invece che diminuire con il crescere della distanza dal filo il campo all'interno del solenoide è uniforme; 2) il modulo del campo cresce con n , vale a dire con il numero di spire per unità di lunghezza; quindi per ottenere un campo più intenso bisogna fare avvolgimenti molto "stretti".

NOTARE CHE: un solenoide reale ha lunghezza finita. Le linee di forza del campo magnetico che esso genera sono mostrate in figura 21.26. All'esterno esse sono molto più distanziate che all'interno, quindi all'esterno il campo è molto meno intenso. All'interno il campo è approssimativamente uniforme e il suo valore è ben approssimato dall'equazione (21.28) purché si considerino punti lontani dai bordi.

NOTARE CHE: se si esegue il calcolo esatto del campo magnetico di un solenoide infinito tenendo conto del fatto che esso è un'elica e non una sequenza di spire, si trova che a grandi distanze dall'asse del solenoide il campo esterno è simile a quello di un filo infinito.

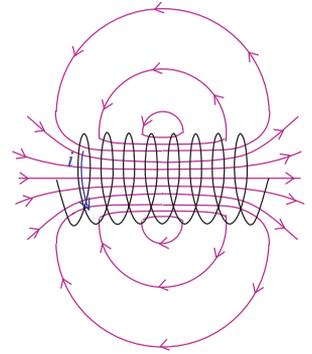


Figura 21.26
Linee di forza di un solenoide reale.

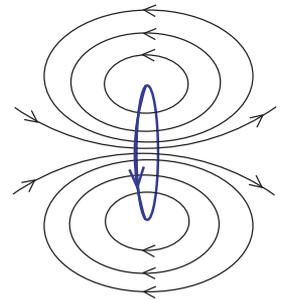


Figura 21.27
Linee di forza del campo magnetico generato da una singola spira.

Considerazioni di simmetria sul solenoide infinito

Come discusso nel paragrafo 21.4.1, un solenoide infinito può essere considerato come una sequenza di spire in cui passa la stessa corrente i come indicato in figura 21.23. Le linee di forza del campo magnetico generato da una singola spira sono mostrate in figura 21.27.

Consideriamo ad esempio una sola linea di forza della spira. In figura 21.28 è mostrato come è diretto il campo in due punti posti a distanza r dall'asse, equidistanti dal centro della spira e situati da parti opposte rispetto ad essa. Si noti che, come conseguenza della simmetria, il campo magnetico nei due punti forma lo stesso angolo θ con una retta parallela all'asse. Consideriamo ora due spire poste a distanza $2s$ e vediamo come è diretto il campo che esse generano in un punto P posto a distanza s da entrambe, e a distanza r dall'asse come mostrato in figura 21.29.

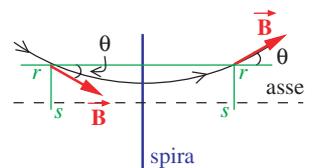


Figura 21.28

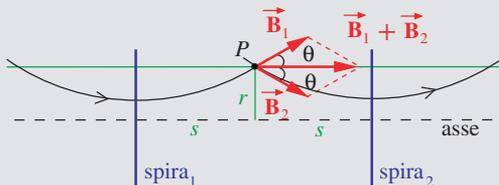


Figura 21.29

Nel punto P i campi delle due spire hanno lo stesso modulo perchè P è equidistante dai centri delle due spire. Inoltre \vec{B}_1 e \vec{B}_2 formano lo stesso angolo θ con la direzione orizzontale, quindi la loro somma è diretta come l'asse delle spire, come mostrato in figura 21.29. Il suo verso è quello di un omino che ha i piedi su una qualsiasi delle spire e vede la corrente circolare in verso antiorario.

Dato che il solenoide è infinito, per qualsiasi punto P il numero di spire che si trovano alla sua destra è uguale a quello delle spire che si trovano alla sua sinistra; pertanto il ragionamento appena fatto si può ripetere per ogni coppia di spire poste simmetricamente rispetto a P . Ne segue che **il campo magnetico generato da un solenoide infinito è diretto come l'asse del solenoide**.

Notiamo che tale risultato vale sia per punti interni al solenoide che per punti esterni.

Supponiamo di fissare l'asse z del sistema di riferimento lungo l'asse del solenoide. Dato che il solenoide è infinito, il modulo del campo non può dipendere dalla coordinata z del punto P che si considera; infatti il contributo al campo delle spire a destra e a sinistra di P è uguale perché, come già sottolineato, è uguale il loro numero. Di conseguenza **il modulo del campo magnetico generato da un solenoide infinito può dipendere solo dalla distanza r dall'asse**. Come si dimostra applicando il teorema della circuitazione, in realtà B non dipende nemmeno da r , vale a dire è uniforme.

PROBLEMA 21.6

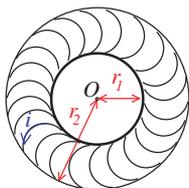


Figura 21.30
Nel filo conduttore che è avvolto a forma di toroide scorre la corrente i .

In un solenoide lungo $L = 3$ cm scorre la corrente $i = 2$ A. Si calcoli quante spire deve avere affinché il campo magnetico al suo interno abbia modulo $B = 0.1$ T.

Per l'equazione (21.28) il campo magnetico all'interno del solenoide è

$$B = \mu_0 i n ,$$

dove

$$n = \frac{N}{L}$$

è il numero di spire per unità di lunghezza; quindi si ha

$$B = \mu_0 i \frac{N}{L} \Rightarrow N = \frac{BL}{\mu_0 i} = \frac{0.1 \times 3 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 2} = 1194 \text{ spire} .$$

21.4.2 Campo magnetico di un toroide

Un toroide è un solenoide piegato in modo da chiudersi su se stesso a forma di ciambella, come indicato in figura 21.30. Sia N il numero totale di spire ed i la corrente che circola nel toroide. Da considerazioni di simmetria analoghe a quelle fatte nel box grigio precedente, si deduce che le linee di forza del campo magnetico sono delle circonferenze, come indicato in figura 21.31, e che il modulo del campo B può dipendere solo dalla distanza dal centro del toroide.

Calcoliamo B utilizzando il teorema della circuitazione. Scegliamo come percorso chiuso ℓ una linea di forza di raggio r e scegliamo il verso coincidente con quello del campo magnetico in modo tale che \vec{B} e $d\vec{s}$ siano paralleli e concordi. Si trova:

$$C = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint_{\ell} ds = B 2\pi r .$$

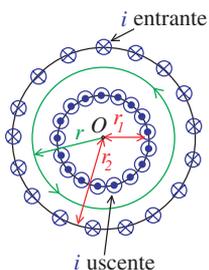


Figura 21.31
Toroide visto in sezione. Le linee di forza del campo sono circonferenze di raggio r con centro in O .

Se assumiamo che il percorso ℓ sia interno al toroide, cioè $r_1 < r < r_2$, le correnti concatenate a ℓ sono quelle che scorrono nelle N spire; quindi per il teorema della circuitazione si ha

$$\mathcal{C} = \mu_0 \sum_k i_k \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 N i ,$$

da cui si ricava

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} . \quad (21.29)$$

Si vede dunque che il campo all'interno del toroide non è uniforme come nel caso del solenoide; il suo modulo varia in funzione della distanza dal centro.

Supponiamo ora che la linea ℓ sia esterna al toroide, cioè si abbia $r > r_2$. In questo caso ogni corrente che passa in una spira entra ed esce dalla superficie che ha per bordo la linea (si consideri ad esempio il cerchio di raggio r). Dunque ogni corrente concatenata va presa una volta con il segno positivo e una volta con il segno negativo, per cui il risultato finale è

$$\sum_k i_k = 0 .$$

Ne segue che $\mathcal{C} = 0$ e quindi $B(r > r_2) = 0$: il campo all'esterno del toroide è nullo. Con ragionamento analogo si può dimostrare che anche per $r < r_1$ il campo è nullo.

Riassumiamo

- **Legge di Biot-Savart.** Il campo magnetico generato da un filo infinito percorso dalla corrente i è

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{r}} ;$$

$\hat{\mathbf{i}}$ è il versore che individua la direzione del filo ed ha lo stesso verso della corrente, $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore della direzione radiale rispetto al filo e μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e vale $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$. Le linee di forza del campo sono circonferenze con centro nel filo e ad esso perpendicolari. In ogni punto $\vec{\mathbf{B}}$ è tangente alle linee di forza ed è perpendicolare al filo. Il modulo di $\vec{\mathbf{B}}$ vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} .$$

- **La prima formula di Laplace** permette di calcolare il campo magnetico generato da un circuito di forma qualsiasi: dato un tratto di filo di lunghezza dl percorso da corrente i , il contributo infinitesimo che esso dà al campo magnetico totale è

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r};$$

$d\vec{l}$ è un vettore che ha modulo pari a dl , è tangente al filo ed è orientato nello stesso della corrente i ; \vec{r} è il vettore che unisce il trattino dl al punto in cui si vuole calcolare il campo ed r è il suo modulo.

- **Campo magnetico al centro di una spira.** Data una spira circolare di raggio r percorsa dalla corrente i , il campo magnetico nel suo centro è perpendicolare al piano della spira ed ha modulo pari a

$$B = \mu_0 \frac{i}{2r}.$$

Il verso è quello del pollice della mano destra le cui dita si avvolgono nel verso della corrente (regola della mano destra).

- **Il teorema di Gauss per il campo magnetico.** Il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie CHIUSA A è nullo:

$$\Phi(\vec{B})_{A, chiusa} = 0.$$

Questa proprietà si esprime anche dicendo che il vettore \vec{B} è **solenoidale**.

- **Circuitazione del campo magnetico.** È l'integrale, eseguito su un cammino chiuso orientato ℓ , del prodotto scalare tra il vettore \vec{B} e lo spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ lungo ℓ :

$$C = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

- **Teorema della circuitazione di Ampère.** La circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa orientata è pari alla somma algebrica delle correnti concatenate alla linea, moltiplicata per μ_0 :

$$C = \mu_0 \sum_k i_k;$$

le *correnti concatenate* sono tutte quelle che attraversano, in un verso o nell'altro, una qualsiasi superficie che abbia come bordo il cammino chiuso ℓ . Scelto un verso di percorrenza della linea chiusa si considerano come positive le correnti tali che un omino con la testa nel verso della corrente e i piedi su una superficie che ha per bordo ℓ , vede la linea percorsa in senso antiorario e negative quelle di segno opposto.

- **Campo magnetico di un solenoide infinito.** Un solenoide è un filo conduttore avvolto a forma di spirale e in cui scorre una corrente i . Si ha:

- all'esterno del solenoide il campo magnetico è nullo;
- all'interno è diretto parallelamente all'asse e il suo verso è quello del pollice della mano destra che "avvolge" il solenoide nel verso della corrente;
- il modulo del campo magnetico è uniforme (cioè ha lo stesso valore in ogni punto) e vale

$$B = \mu_0 i n ,$$

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza.

- **Campo magnetico di un toroide.** Il toroide è un solenoide piegato in modo da chiudersi su se stesso a forma di ciambella. Al suo interno le linee di forza del campo magnetico sono delle circonferenze con lo stesso centro del toroide; il modulo del campo varia in funzione della distanza r dal centro:

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} .$$

All'esterno del toroide il campo è nullo.

21.5 Esercizi

21.1 Due fili conduttori paralleli di lunghezza infinita sono attraversati da due correnti dirette nello stesso verso di modulo rispettivamente $i_1 = 10$ A e $i_2 = 40$ A. La distanza tra i due fili è $d = 12$ cm. Determinare: a) il campo magnetico nel punto a distanza intermedia tra i due fili; b) il punto dello spazio in cui il campo B è nullo (indicare la distanza rispetto al filo percorso dalla corrente i_1).

21.2 Due conduttori sono costituiti da gusci cilindrici coassiali infiniti, di spessore trascurabile e di raggio rispettivamente di 3 cm e 5 cm. Essi sono percorsi da correnti in verso opposto, di 2 A nel conduttore interno e 4 A in quello esterno. Si calcoli il campo magnetico in modulo, direzione e verso, alle seguenti distanze dall'asse dei cilindri: a) sull'asse; b) a 1 cm; c) a 4 cm; d) a 8 cm.

21.3 Due fili conduttori rettilinei infiniti paralleli distano $2d = 60$ cm. Essi sono percorsi dalle correnti $i_1 = 3.0$ A e $i_2 = 1.5$ A dirette in verso opposto come indicato nella figura 21.32. Scegliendo l'asse x ortogonale ai due fili e ponendo l'origine nel punto intermedio tra i fili, in modo che il filo 1 si trovi in $x_1 = -d = -30$ cm ed il filo 2 in $x_2 = d = 30$ cm; determinare: a) il punto lungo l'asse x in cui il campo magnetico \vec{B} si annulla; b) il modulo del campo \vec{B} nell'origine e dire se è entrante o uscente dal foglio.

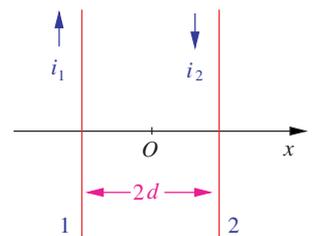


Figura 21.32

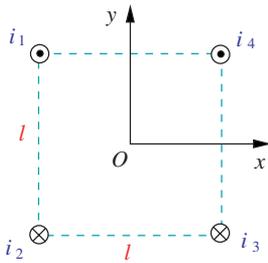


Figura 21.33

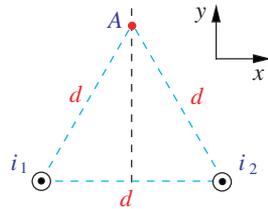


Figura 21.34

21.4 Quattro fili conduttori rettilinei infiniti sono disposti ai vertici di un quadrato di lato $l = 40$ cm come mostrato in figura 21.33. Nei quattro fili scorre la stessa corrente di 3 A; le correnti i_1 e i_4 sono uscenti dal foglio, mentre le correnti i_2 e i_3 sono entranti. Scegliendo un sistema di riferimento $\{xy\}$ come in figura con l'origine nel centro del quadrato, si calcoli il campo magnetico \mathbf{B} totale generato dalle quattro correnti nell'origine delle coordinate.

21.5 Due fili conduttori rettilinei infiniti paralleli distano $d = 12$ cm. Essi sono percorsi dalle correnti i_1 e i_2 di 2.0 A uscenti entrambe dal foglio come indicato nella figura 21.34. Si scelga un sistema di riferimento come quello indicato in figura. a) Calcolare il campo magnetico totale generato dalle due correnti nel punto A mostrato in figura, che dista d da entrambe le correnti; b) calcolare il campo nello stesso punto se la corrente i_2 è entrante nel foglio.

21.6 Due spire circolari concentriche giacciono sullo stesso piano. La spira più grande ha un raggio di 8 cm ed è percorsa da una corrente di 4 A che circola in senso antiorario. La spira più piccola ha un raggio di 6 cm. Sapendo che il campo magnetico nel centro del sistema è nullo, quanto vale la corrente che circola nella spira piccola ed in che verso scorre?

21.7 In un laboratorio di fisica si misura che la componente verticale del campo magnetico Terrestre ha modulo $7 \cdot 10^{-5}$ T ed è orientata verso il basso. In un dato punto del laboratorio si vuole neutralizzare questa componente utilizzando una spira circolare piana disposta su un piano orizzontale in modo tale che il punto suddetto coincida con il centro della spira. Sapendo che la spira ha il diametro di 10 cm, determinare la corrente che deve circolare nella spira ed il suo verso, rispetto ad un osservatore posto sopra la spira.

21.8 Un cavo coassiale è costituito da un filo conduttore centrale immerso in un materiale isolante e circondato da una calza metallica di forma cilindrica avente un raggio di 4 mm. Nel filo centrale scorre una corrente di 1.5 A in un dato verso e nella calza metallica scorre la stessa corrente in verso opposto. Facendo l'approssimazione di filo rettilineo infinito, si trovi il valore del modulo del campo magnetico ad una distanza dal filo centrale di 3 mm e di 5 mm. Suggerimento: si utilizzi il teorema di Ampere.

21.9 Si deve progettare un solenoide che generi un campo magnetico di modulo pari a 0.314 T, senza che l'intensità di corrente superi 10.0 A. Il solenoide è lungo 20 cm. Si trovi il numero minimo di spire necessarie.

21.10 Un solenoide lungo 10 cm, con 600 spire, è percorso da una corrente di 20 A. Quanto vale il campo magnetico al suo interno?

21.11 Lungo l'asse di un solenoide di raggio $R = 10$ cm e avente 1000 spire/m è disposto un filo conduttore; nel solenoide e nel filo scorrono rispettivamente le correnti $i_s = 0.1$ A e $i_f = 40$ A. Calcolare il campo magnetico in modulo, direzione e verso, nei punti A e B posti a distanza $d_A = 2$ cm e $d_B = 12$ cm dall'asse del solenoide, indicati in figura 21.35.

21.12 Un lungo solenoide composto da 20 spire per centimetro, ha un raggio di 9.0 cm ed è attraversato da una corrente di 10.0 mA. Lungo l'asse centrale del solenoide è disposto un filo rettilineo percorso da una corrente di 7.0 A. Trovare: a) la distanza dal filo rettilineo tale che il campo magnetico totale formi un angolo di 45° con una direzione parallela all'asse del solenoide; b) l'intensità del campo magnetico in questo punto.

21.13 Un solenoide è costruito a partire da un filo di rame (resistività $1.78 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$) lungo 6.7 m, di diametro 1.2 mm e ricoperto da una guaina isolante di spessore trascurabile. Il filo viene arrotolato su un cilindro di

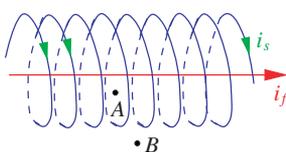


Figura 21.35

plastica, avente il diametro di 2 cm, in modo che tutte le spire si tocchino tra loro senza mai sovrapporsi. Il solenoide viene poi collegato ad una batteria di 24 V. Determinare: a) la lunghezza del solenoide; b) la resistenza del solenoide; c) il campo magnetico al suo interno, facendo l'approssimazione di solenoide infinito.