capitolo 4

Le leggi che governano il moto dei corpi

sommario

Nei capitoli 2 e 3 abbiamo studiato come si descrive il moto dei corpi, introducendo le grandezze cinematiche — posizione, spostamento, velocità, accelerazione — e le equazioni che esse soddisfano. In questo capitolo ci occuperemo della dinamica del punto materiale, la parte della fisica che studia le cause del moto. Vedremo che le forze sono responsabili delle accelerazioni dei corpi a cui sono applicate e studieremo le leggi che le governano.

Il concetto di forza è intuitivo: è quell'entità che, se applicata ad un corpo fermo e non vincolato, lo fa muovere. Un vincolo può essere, per esempio, un chiodo che tiene fisso il corpo in una data posizione o un piano che gli impedisce di muoversi verso il basso. Altrettanto intuitivo è il fatto che se applichiamo ad un corpo fermo non vincolato una forza in una data direzione, esso si muoverà in quella stessa direzione (vedi figura 4.1); se ne applichiamo una con verso opposto, il corpo si muoverà nel verso opposto. Da questo deduciamo, sia pure per ora in modo intuitivo, che la forza è una grandezza vettoriale, cioè è definita da modulo (quanto forte è la spinta), direzione (la retta lungo cui agisce) e verso. In questo capitolo discuteremo in dettaglio il concetto di forza; prima di farlo vogliamo chiarire alcuni punti importanti rispondendo alle seguenti domande:

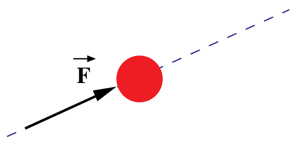


Figura 4.1
Una forza applicata ad un corpo fermo non vincolato lo fa muovere nella sua direzione.

- **Se un corpo è in moto, su di esso agisce una forza?** La risposta a questa domanda è: non necessariamente. Infatti, come vedremo in seguito, la forza produce un'accelerazione; quindi se il corpo si muove di moto accelerato allora su di esso agiscono una o più forze. Tuttavia se il corpo si muove con velocità costante in modulo, direzione e verso (moto rettilineo uniforme) su di esso non agiscono forze, oppure agiscono delle forze la cui somma vettoriale è nulla. Conclusione: **un corpo può essere in movimento senza che su di esso agiscano forze. C'è necessariamente una forza solo se il corpo ha un'accelerazione.** Questa affermazione vale solo in una particolare classe di sistemi di riferimento, i sistemi di riferimento inerziali, che sono definiti dal primo principio della dinamica. Negli esempi che faremo in questo paragrafo supporremo sempre di trovarci in un sistema di riferimento inerziale.
- **Se un corpo è fermo, su di esso non agiscono forze?** Anche in questo caso la risposta è: non necessariamente. Si consideri ad esempio una pallina appoggiata su un tavolo (figura 4.2): essa, come tutti i corpi, è soggetta alla forza peso $\vec{\mathbf{P}}$ diretta verso il centro della Terra e perpendicolare al piano. Se il piano non ci fosse la pallina cadrebbe. Per mantenerla ferma è necessario che il piano eserciti su di essa una forza che chiamiamo **reazione vincolare** $\vec{\mathbf{N}}$, uguale a $\vec{\mathbf{P}}$ in modulo, con la stessa direzione e con verso opposto (le reazioni vincolari saranno discusse nel paragrafo 5.1). Dato che la pallina è ferma, la sua accelerazione è nulla e poiché le forze producono accelerazioni, ne segue che la somma delle due forze deve essere nulla:

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = 0\,.$$

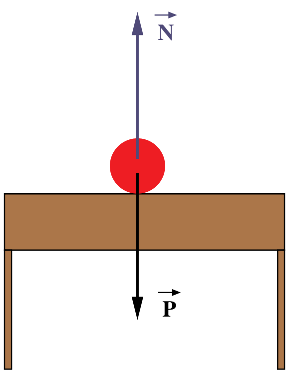


Figura 4.2
Una pallina ferma su un tavolo è soggetta a più forze la cui risultante è nulla.

Conclusione: **se un corpo è fermo si possono verificare due casi: o non è soggetto a forze, oppure è soggetto a delle forze la cui somma vettoriale è nulla.**

Se avessimo posto entrambe le domande a qualcuno antecedente a Galileo avremmo ottenuto sicuramente risposte differenti. Infatti prima di Galileo si pensava che lo stato naturale di un corpo fosse la quiete: quindi un corpo poteva essere in moto solo se era sottoposto all'azione di un agente esterno. Nella fisica pre-Galileiana, che è ancora piuttosto popolare nel sentire comune, esisteva il concetto di moto assoluto e di "quiete naturale", in quanto lo stato di quiete e di moto si riferivano implicitamente alla Terra. Galileo pose la questione se fosse possibile verificare uno stato di quiete assoluta. Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* egli si chiese cosa succede se si studia il moto dei corpi facendo esperimenti all'interno di una nave che naviga "con quanta si voglia velocità; (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là)", noi oggi diremmo che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto alla Terra. Egli giunse alla conclusione che osservando una goccia d'acqua che cade o il volo di una mosca, non si può stabilire se la nave sia ferma oppure in moto. Pertanto egli comprese che lo stato di quiete assoluta non è verificabile tramite esperimenti e che il moto dei corpi è relativo al riferimento da cui lo si osserva.

Galileo scoprì anche che il moto di caduta dei gravi è un moto uniformemente accelerato e che tutti i corpi cadono, trascurando la resistenza dell'aria, con la stessa accelerazione. Tuttavia non formalizzò i risultati ai quali era giunto in una teoria completa che descrivesse la dinamica dei corpi. Questa sintesi fu realizzata da Isaac Newton nel suo trattato *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, scritto a partire dall'autunno del 1684 e terminato nell'estate del 1686. In meno di due anni Newton formulò la teoria del moto dei corpi e la legge di gravitazione universale, che sono i fondamenti della fisica pre-relativistica. Per "fisica pre-relativistica" intendiamo quella precedente alla formulazione della Relatività Speciale e della Relatività Generale ad opera di A. Einstein.

Il moto dei corpi, che per semplicità continueremo a considerare punti materiali, è governato da tre leggi fondamentali, note come leggi di Newton o leggi della dinamica, che enunceremo nei prossimi paragrafi. È bene sottolineare che nel presentare queste leggi useremo una formulazione matematica che si discosta, nella forma ma non nella sostanza, da quella utilizzata da Newton nei Principia.

4.1 La prima legge della dinamica

Galileo realizzò un famoso esperimento, che ora descriveremo perché illustra molto bene la prima legge della dinamica. L'esperimento consiste nel far cadere una sferetta da una quota iniziale h lungo un piano inclinato e nel farla risalire su un secondo piano inclinato, come riportato in figura 4.3. Si misura la quota massima che la sferetta raggiunge sul secondo piano nell'istante in cui si ferma per poi riscendere.

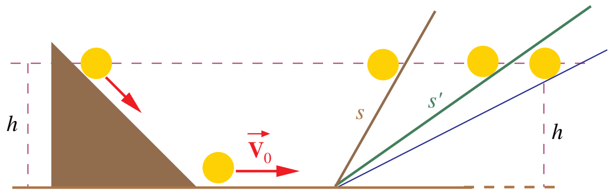


Figura 4.3
Se si fa scendere una pallina da un piano inclinato e poi la si lascia risalire su un secondo piano inclinato, in assenza di attriti la pallina raggiunge sempre la medesima quota dalla quale era partita, indipendentemente dall'inclinazione del secondo piano.

Galileo notò che variando la pendenza del secondo piano, la sferetta raggiungeva quasi la stessa quota h dalla quale era partita e attribuì la piccola differenza di quota all'effetto della resistenza dell'aria e di altre forme di attrito, ipotizzando che in assenza di attriti le due altezze sarebbero state esattamente uguali, come mostrato in figura 4.3.

Il moto della sferetta quando scende lungo il primo piano e quando sale sul secondo è uniformemente accelerato [1]. Sia v_0 la sua velocità quando arriva alla base del primo piano, e sia s la distanza che essa percorre lungo il secondo piano prima di fermarsi e ridiscendere (si veda la figura 4.4); dall'equazione (2.13), che mette in relazione lo spazio percorso con la variazione di velocità in un moto uniformemente accelerato, e considerando che quando il corpo raggiunge la massima quota sul secondo piano la sua velocità è nulla, si trova

$$0 = v_0^2 + 2as \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{v_0^2}{2s} \,.$$

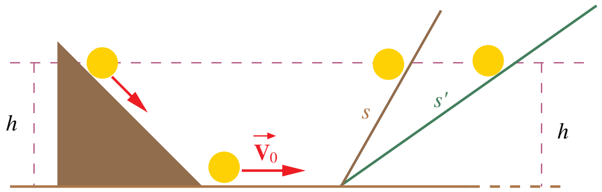


Figura 4.4
Lo spazio percorso lungo il secondo piano aumenta al diminuire della sua inclinazione, cioè $s' > s$.

Se diminuiamo l'inclinazione del secondo piano, per raggiungere la quota h la sferetta deve percorrere uno spazio s' maggiore di s; di conseguenza il modulo dell'accelerazione sul piano meno inclinato è più piccolo.

Quindi, se al limite si fa tendere a zero l'inclinazione del secondo piano, ovvero se esso diventa orizzontale, l'accelerazione deve tendere a zero. Galileo comprese che in queste condizioni la sferetta si sarebbe mossa con velocità costante e che il suo moto non si sarebbe più arrestato (si veda la figura 4.5).

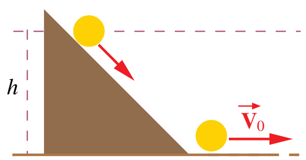


Figura 4.5
Se la pendenza del secondo piano è nulla (piano orizzontale) la sferetta, abbandonato il primo piano, si muove di moto rettilineo uniforme.

Questo naturalmente immaginando un esperimento ideale in assenza di attriti. Vediamo quali informazioni possiamo estrarre dall'esperimento di Galileo. Le forze che agiscono sulla sferetta quando si muove di moto rettilineo uniforme sul piano orizzontale privo di attrito sono la forza peso $\vec{\mathbf{P}}$, che è ortogonale al piano e diretta verso il basso, e

[1] Galileo lo dimostrò verificando che lo spazio percorso da un grave che cade partendo con velocità iniziale nulla è proporzionale al quadrato dei tempi.

la reazione vincolare $\vec{N}$, anch'essa ortogonale al piano ma diretta verso l'alto. Come abbiamo già visto la loro somma è zero perché nella direzione perpendicolare al piano non c'è moto:

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{N}} = 0\,.$$

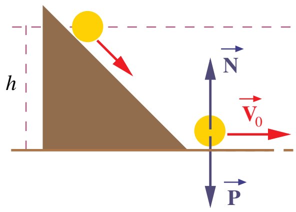


Figura 4.6
Le forze che agiscono sulla sferetta quando si muove sul piano orizzontale sono la reazione vincolare e la forza peso, e la loro risultante è nulla.

Possiamo concludere che la sferetta che si muove di moto rettilineo uniforme è soggetta a delle forze la cui risultante è nulla. A questo punto occorre chiedersi rispetto a quale sistema di riferimento il moto della sferetta è rettilineo uniforme, perché, ad esempio, se osservassimo il suo moto da un automobile che sta accelerando su un rettilineo o che sta facendo una curva, esso non apparirebbe certamente tale: il moto della sferetta risulta rettilineo uniforme soltanto rispetto ad una classe di sistemi di riferimento molto particolari che vengono chiamati **sistemi di riferimento inerziali**.

Sulla base di queste considerazioni possiamo a questo punto enunciare la

prima legge della dinamica

In un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale non soggetto a forze, o soggetto a forze la cui risultante è nulla, rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.

Questa legge è conosciuta anche come **legge d'inerzia**, in quanto l'inerzia è la proprietà di un corpo di conservare il suo stato di quiete o di moto.

Come capire se un sistema di riferimento è inerziale?

Se fossimo sicuri che su un dato corpo non agiscono forze (o equivalentemente che la risultante delle forze è nulla), allora sarebbe facile trovare un sistema di riferimento inerziale: sarebbe quello nel quale il corpo sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme. Nessuno però può assicurarci che su un corpo non agiscano forze. D'altra parte, se avessimo già trovato un sistema di riferimento inerziale, allora saremmo in grado di stabilire se la risultante delle forze che agiscono su un corpo sia nulla, utilizzando la legge d'inerzia. Come si vede siamo caduti in una definizione circolare. Newton ed i fisici che lo seguirono cercarono di aggirare questo ostacolo definendo come sistema inerziale quello che risultava fermo rispetto alle stelle fisse. Tuttavia, con il progredire delle osservazioni astronomiche, si comprese che le stelle hanno un moto proprio rispetto alla Terra; inoltre, nel 1929 E. Hubble mostrò che l'universo è in continua espansione. Il concetto di stelle fisse perse dunque validità e la definizione di sistema di riferimento inerziale ad esse riferito assume soltanto un carattere storico.

Si noti che se riuscissimo a trovare almeno un sistema di riferimento inerziale, allora sarebbe facile stabilire se qualsiasi altro sistema di riferimento sia inerziale o meno. Infatti supponiamo che un dato sistema di riferimento **O** sia inerziale e consideriamo un altro riferimento, **O**$'$, che trasla rispetto ad **O** con accelerazione $\vec{\mathbf{A}}_{O'}$. Dalle equazioni (3.65) ricaviamo come si trasforma l'accelerazione quando si passa da un riferimento all'altro:

$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{A}}_{O'} \,. \tag{4.1}$$

Supponiamo che un corpo si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad **O**; quindi per la prima legge su di esso non agiscono forze, oppure la risultante delle forze agenti è nulla, e $\vec{\mathbf{a}} = 0$. Dall'equazione (4.1) segue che rispetto ad **O**$'$ il corpo ha un'accelerazione diversa da zero pari a:

$$\vec{\mathbf{a}}' = -\vec{\mathbf{A}}_{O'} \,.$$

Quindi un osservatore posto in **O**$'$ vedrebbe il corpo accelerare senza che su di esso agiscano forze, in palese violazione della I Legge che abbiamo appena enunciato (come vedremo nel paragrafo **5.7** in questo caso per spiegare il moto della pallina dobbiamo introdurre delle forze apparenti). Concludiamo che il sistema di riferimento **O**$'$ non è un riferimento inerziale. Se invece consideriamo un secondo riferimento **O**$''$ che si muove rispetto ad **O** di moto **rettilineo uniforme**, cioè tale che $\vec{\mathbf{A}}_{O''} = 0$, dalla (4.1) segue che

$$\vec{\mathbf{a}}'' = \vec{\mathbf{a}} \,.$$

Quindi se il corpo ha accelerazione nulla in **O**, ha accelerazione nulla anche in **O**$''$; per esso vale la I Legge e di conseguenza anche il riferimento **O**$''$ è un riferimento inerziale. Quindi concludiamo che:

dato un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi di riferimento che traslano rispetto ad esso (senza rotazione degli assi) con moto rettilineo uniforme, sono anch'essi sistemi di riferimento inerziali.

4.1.1 La Terra è un riferimento inerziale?

Se lanciassimo una pallina su un piano molto lungo e privo d'attrito, vedremmo che la traiettoria non è esattamente rettilinea, ma curva (si veda la figura 4.7). Se la pallina si trovasse in un riferimento inerziale, per la prima legge della dinamica dovrebbe muoversi di moto rettilineo uniforme, dato che su di essa non agiscono forze parallele al piano. Se la traiettoria è curva, vuol dire che la Terra non è un sistema di riferimento inerziale. Questo risultato si poteva prevedere dato che la Terra ruota intorno al proprio asse con un periodo di 24 ore ed i sistemi di riferimento ruotanti non sono mai inerziali. Tuttavia, dato che il periodo di rotazione è molto grande e quindi la velocità angolare

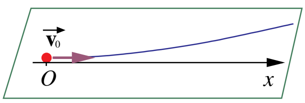


Figura 4.7
Una pallina che si muove su un piano privo d'attrito solidale con la Terra segue una traiettoria curva: la Terra non è un sistema di riferimento inerziale. Quantitativamente l'effetto è però molto piccolo.

è piccola ($\omega = 73\ \mu$rad/s), l'effetto della "non inerzialità" dei riferimenti solidali con la Terra è molto piccolo. Per esempio, per effetto della rotazione terrestre un corpo in caduta libera non cade lungo la verticale, ma subisce uno spostamento Δs verso est. Se h è l'altezza da cui cade, a 45^o di latitudine $\Delta s = 15 \times 10^{-6}\, h^{3/2}$ (h e Δs sono espressi in metri). Per $h = 100$ m si tratta di uno spostamento di soli 1.5 cm.

Per quanto riguarda il moto dei corpi che studieremo in seguito, a meno di casi particolari che indicheremo esplicitamente, possiamo dunque trattare la Terra come un sistema di riferimento inerziale; quindi considereremo tali anche tutti i riferimenti che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto ad essa.

4.2 La seconda legge della dinamica

Supponiamo di essere in un riferimento inerziale e di appoggiare una biglia di vetro ferma su un piano orizzontale privo d'attrito (si veda la figura 4.8).

Se applichiamo alla biglia una forza parallela al piano, questa acquista un'accelerazione che ha la stessa direzione e lo stesso verso della forza. Supponiamo di applicare una forza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tale che il modulo dell'accelerazione della biglia sia $a = 1$ m/s^2 (vedremo nel paragrafo **4.2.3** come si fa a misurare il modulo di una forza, per il momento basti sapere che questo è possibile). Se applichiamo una forza $\vec{\mathbf{F}} = 2\vec{\mathbf{F}}_1$, troviamo che l'accelerazione è $a = 2$ m/s^2; se invece $\vec{\mathbf{F}} = 3\vec{\mathbf{F}}_1$, allora $a = 3$ m/s^2 e così via. Vi è quindi una relazione di proporzionalità diretta tra la forza applicata e l'accelerazione risultante:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \tag{4.2}$$

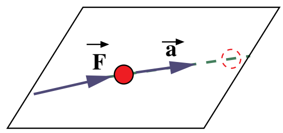


Figura 4.8
La forza applicata è proporzionale all'accelerazione risultante.

dove m è la costante di proporzionalità che chiamiamo **massa** o, più precisamente, **massa inerziale** del corpo.

Per stabilire che l'equazione (4.2) è una legge generale della fisica e non vale soltanto per la particolare biglia scelta, occorre ripetere l'esperimento prendendo biglie di massa diversa e di diverso materiale, e applicare forze con direzione arbitraria. Si otterrà sempre una relazione di proporzionalità diretta tra forza ed accelerazione che, per quanto riguarda i moduli di $\vec{\mathbf{a}}$ e $\vec{\mathbf{F}}$, è espressa dal grafico in figura 4.9. Possiamo a questo punto enunciare la

seconda legge della dinamica

In un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale al quale sia applicata una forza subisce un'accelerazione ad essa proporzionale, nella stessa direzione e con lo stesso verso:

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}\ .} \tag{4.3}$$

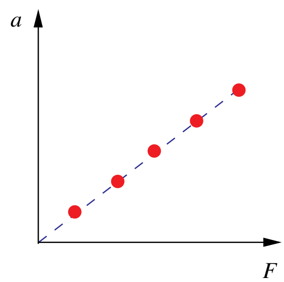


Figura 4.9
L'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza ad esso applicata.

Questa è una delle leggi più importanti della fisica.

4.2.1 La massa

Torniamo alla costante di proporzionalità tra forza ed accelerazione che abbiamo chiamato *massa*. Essa è una proprietà intrinseca del corpo. Dalla seconda legge ricaviamo

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \, ,$$

da cui si vede che, a parità di forze applicate, tanto maggiore è la massa di un corpo, tanto minore è l'accelerazione che esso acquisisce. Si può quindi dire che la massa è una misura della resistenza opposta dal corpo a cambiare il suo stato di quiete o di moto, cioè è una misura della sua "inerzia". Per questo motivo la costante m viene anche detta **massa inerziale**.

A rigore, per essere sicuri che la massa di un corpo sia effettivamente una grandezza scalare, occorre ripetere l'esperimento descritto in precedenza applicando forze di modulo uguale lungo direzioni diverse e occorre verificare che si ottengono accelerazioni tutte di modulo uguale aventi la stessa direzione della forza applicata. Ripetendo ancora l'esperimento applicando allo stesso corpo forze di modulo diverso, si ottengono accelerazioni diverse, ma tali che il rapporto tra forza ed accelerazione ($F/a = m$) è sempre lo stesso. Questo ci garantisce che la massa è una proprietà intrinseca del corpo indipendente dalla forza applicata e dalla sua accelerazione.

Alcune considerazioni sull'equazione $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$

- **La forza è una grandezza vettoriale.**
  Per dimostrarlo ricordiamo che l'accelerazione è un vettore ed m una grandezza scalare: dato che il prodotto di un vettore per uno scalare è un vettore, il prodotto $m\vec{\mathbf{a}}$ è un vettore, di modulo pari a ma, diretto come $\vec{\mathbf{a}}$, e con lo stesso verso in quanto m è sempre positiva. Di conseguenza, dato che

  $$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \, ,$$

  $\vec{\mathbf{F}}$ è un vettore.
- **La prima e la seconda legge della dinamica sono indipendenti.**
  La prima legge della dinamica definisce i sistemi di riferimento inerziali, rispetto ai quali è valida la seconda legge. La prima legge **non** è un caso particolare della seconda, come alcuni erroneamente pensano.
- **Chi è la causa e chi l'effetto.**
  L'equazione $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ esprime il fatto che una forza $\vec{\mathbf{F}}$ applicata ad un corpo di massa m gli imprime un'accelerazione $a = F/m$ nella stessa direzione e nello stesso verso, come è rappresentato nella figura 4.10. Dunque la forza è la causa, l'accelerazione è l'effetto prodotto.

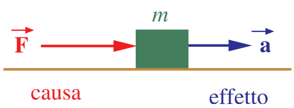


Figura 4.10

Dimensioni e unità di misura della forza

Dato che la forza è uguale al prodotto di una massa per un'accelerazione, le sue dimensioni sono:

$$[F] = [ma] \ = \ mlt^{-2} \ . \qquad (4.4)$$

L'unità di misura della forza è il **newton** , pari a:

$$1 \text{ newton} = \frac{1\text{kg} \times 1\text{m}}{1\text{s}^2} \qquad (4.5)$$

Il newton è la forza che, applicata ad una massa di un kg, produce un'accelerazione di un metro al secondo quadrato.
Se si usano come unità di misura delle grandezze fondamentali il centimetro, il grammo ed il secondo, l'unità di misura è il **dyne** così definito:

$$1 \text{ dyne} = 1 \text{ g cm/s}^2 \ .$$

La relazione tra il newton ed il dyne è la seguente:

$$1 \text{ newton} = (10^3 \text{ g})\ (10^2 \text{ cm})/(1 \text{ s}^2) = 10^5 \text{g cm/s}^2 \ ;$$

quindi

$$1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dyne} \ .$$

4.2.2 Forza risultante

Vogliamo vedere ora come si applica la seconda legge quando su un corpo agiscono più forze, come nell'esempio rappresentato nella figura 4.11. Definiamo **risultante delle forze $\vec{\mathbf{R}}$** la somma vettoriale delle singole forze:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \ . \qquad (4.6)$$

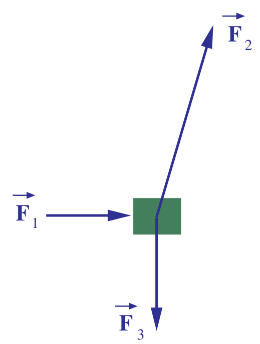


Figura 4.11
Un corpo soggetto a più forze.

Sulla base degli esperimenti possiamo affermare che vale il **principio di sovrapposizione**; esso afferma che se su un corpo di massa m agiscono più forze $\vec{\mathbf{F}}_i$, l'accelerazione $\vec{\mathbf{a}}$ che il corpo acquista è uguale a quella che avrebbe se su di esso agisse solo la forza $\vec{\mathbf{R}}$. L'accelerazione del corpo è

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{m} \ ,$$

e la seconda legge della dinamica diventa

$$\vec{\mathbf{R}} = m\vec{\mathbf{a}} \ . \qquad (4.7)$$

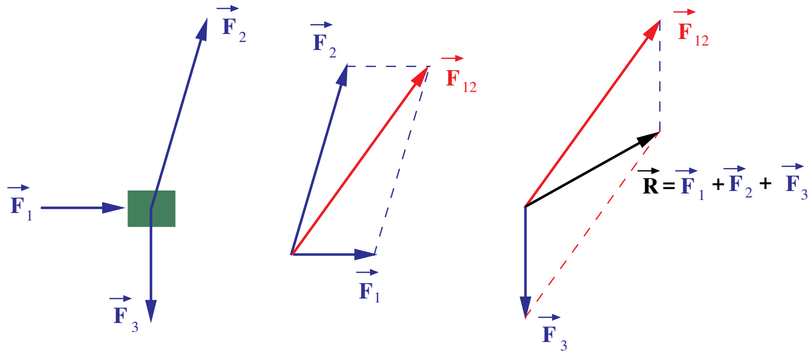


Figura 4.12
Il calcolo della risultante $\vec{\mathbf{R}}$ con il metodo del parallelogramma.

La risultante delle forze $\vec{\mathbf{R}}$ si può calcolare con la regola del parallelogramma oppure utilizzando le componenti delle forze. Ad esempio con il metodo del parallelogramma si può procedere nel modo indicato in figura 4.12: prima si sommano le forze $\vec{\mathbf{F}}_1$ ed $\vec{\mathbf{F}}_2$, ottenendo $\vec{\mathbf{F}}_{12}$, poi si somma $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ ad $\vec{\mathbf{F}}_3$ ottenendo la risultante $\vec{\mathbf{R}}$. Il metodo grafico è utile per avere un'idea qualitativa di quale sia la risultante delle forze.

Da un punto di vista quantitativo, di solito è più conveniente utilizzare il metodo della somma delle componenti dei vettori (si veda il paragrafo **3.1**). Ricordiamo come si applica riferendoci all'esempio in figura 4.13: si fissa un riferimento di assi cartesiani e si trovano le componenti delle singole forze rispetto ad esso; chiamando θ l'angolo che la forza $\vec{\mathbf{F}}_2$ forma con l'asse x, le componenti delle singole forze sono

$$\begin{cases} F_{1,x} = F_1 \\ F_{1,y} = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} F_{2,x} = F_2 \cos\theta \\ F_{2,y} = F_2 \sin\theta \end{cases} , \qquad \begin{cases} F_{3,x} = 0 \\ F_{3,y} = -F_3 \end{cases} .$$

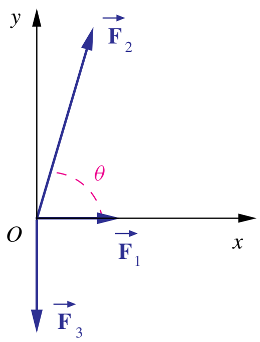


Figura 4.13
Il calcolo della risultante $\vec{\mathbf{R}}$ utilizzando le componenti.

Le componenti del vettore somma, cioè della forza risultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3$, sono date dalla somma delle componenti dei singoli vettori:

$$\begin{cases} R_x = F_1 + F_2 \cos\ \theta \\ R_y = F_2 \sin\ \theta - F_3 \end{cases} .$$

Da queste equazioni, note le forze, possiamo calcolare le componenti dell'accelerazione lungo gli assi x e y.

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{R_x}{m} \\ a_y = \dfrac{R_y}{m} \end{cases} .$$

Riassumiamo

Quando le forze che agiscono su un corpo sono note e si vuole ricavare l'accelerazione risultante, conviene seguire il seguente procedimento:

- Si fissa un sistema di assi cartesiani.
- Si determinano le forze che agiscono sul corpo e se ne calcolano le componenti (attenzione ai segni delle componenti!).
- Si trovano le componenti della forza risultante R_x, R_y, R_z sommando le componenti delle singole forze con i relativi segni.
- Dalla seconda legge della dinamica (4.7) $\vec{\mathbf{R}} = m\vec{\mathbf{a}}$ proiettata sugli assi si calcolano infine le componenti dell'accelerazione

$$\begin{cases} a_x = R_x/m \\ a_y = R_y/m \\ a_z = R_z/m \end{cases} . \tag{4.8}$$

Un commento sull'indipendenza delle equazioni del moto

Per trovare le componenti della legge oraria del moto, cioè

$$\vec{\mathbf{s}}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t)),$$

occorre integrare due volte rispetto al tempo le tre equazioni per le componenti dell'accelerazione

$$\begin{cases} a_x = R_x/m \\ a_y = R_y/m \\ a_z = R_z/m \end{cases}$$

Se le componenti della risultante delle forze, (R_x, R_y, R_z), non dipendono dalle variabili spaziali (x, y, z), oppure se la componente lungo un asse dipende solo dalla variabile di quell'asse — cioè R_x è funzione solo di x, R_y è funzione solo di y e R_z è funzione solo di z — le equazioni del moto lungo i tre assi sono tra loro indipendenti e possono essere risolte trattandole come tre moti unidimensionali indipendenti.
Gli esempi che faremo in questo testo sono tutti di questo tipo.
Può però accadere che non sia così, per esempio può essere che $R_x = f(x, y, z)$, cioè che la componente R_x dipenda, oltre che da x, anche da y e da z; in questo caso le tre equazioni del moto sono tra loro accoppiate e per trovare la legge oraria occorre risolvere un sistema di equazioni differenziali accoppiate, la cui soluzione può essere tutt'altro che semplice, e comunque va al di là dello scopo di questo libro. Tale situazione si verifica, per esempio, nel moto di caduta di un grave quando viene considerata anche la resistenza dell'aria; in questo caso il moto lungo l'asse orizzontale influenza quello lungo l'asse verticale.

ESEMPIO

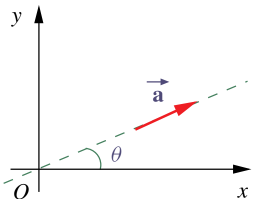


Figura 4.14

Un corpo di massa $m = 2.0$ kg si muove di moto uniformemente accelerato lungo una retta che passa per l'origine delle coordinate e forma con l'asse x un angolo $\theta = 30°$ come indicato in figura 4.14. Il modulo della sua accelerazione è $a = 5.0$ m/s^2.
Ad un certo punto si applica al corpo una forza $\vec{\mathbf{F}}_1$ in modo tale che esso si muova di moto rettilineo uniforme. Si trovi il modulo, la direzione e il verso di $\vec{\mathbf{F}}_1$ e le sue componenti lungo gli assi x e y.

Dato che il corpo inizialmente si muove di moto uniformemente accelerato, deve esserci una forza responsabile della sua accelerazione. Questa forza si ricava applicando il secondo principio della dinamica:

$$\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} \quad \Rightarrow \quad F = ma = 2.0 \times 5.0 = 10 \text{ N} .$$

Se vogliamo che il corpo di muova di moto rettilineo uniforme occorre applicare una seconda forza $\vec{\mathbf{F}}_1$ tale che la risultante $\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_1$ sia nulla:

$$\vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{F}}_1 = -\vec{\mathbf{F}} .$$

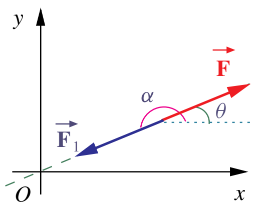


Figura 4.15

Quindi il modulo di $\vec{\mathbf{F}}_1$ è 10 N, la direzione è la stessa di $\vec{\mathbf{F}}$, cioè la retta lungo la quale si muove il corpo, ma il verso è opposto a quello della forza $\vec{\mathbf{F}}$.
La forza $\vec{\mathbf{F}}$ forma con l'asse x un angolo $\theta = 30°$, per cui la forza $\vec{\mathbf{F}}_1$ forma con l'asse x un angolo di $\alpha = \theta + 180° = 210°$ come si può vedere nella figura 4.15. Le sue componenti sono:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos\alpha = 10.0\ \cos 210° = -8.66 \text{ N} \\ F_{1y} = F_1 \sin\alpha = 10.0\ \sin 210° = -5.00 \text{ N} \end{cases} .$$

PROBLEMA 4.1

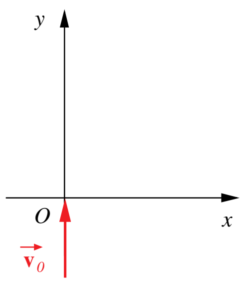


Figura 4.16

Un corpo di massa $m = 2$ kg si muove su un piano orizzontale senza attrito di moto rettilineo uniforme, con velocità $v_0 = 2$ m/s. All'istante $t = 0$ esso entra nella regione di piano $y \geq 0$, in cui agiscono due forze che, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura 4.16, hanno componenti $\vec{\mathbf{F}}_1 = (2, 3)$ N ed $\vec{\mathbf{F}}_2 = (2, -3)$ N. La posizione del corpo a $t = 0$ è $\vec{\mathbf{s}}_0 = (0, 0)$ m e la sua velocità v_0 è diretta perpendicolarmente all'asse x. Si calcoli: a) la traiettoria descritta dal corpo; b) posizione, velocità ed accelerazione al tempo $t = 2$ s.

a) Calcoliamo innanzitutto la risultante delle forze che agiscono sul corpo sommando le rispettive componenti

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} R_x = 2 + 2 = 4 \text{ N} \\ R_y = 3 - 3 = 0 \text{ N} \end{cases}$$

$\vec{\mathbf{R}}$ è dunque costante e diretta come l'asse x. Si noti che la forza agisce in ogni punto della regione di piano $y \geq 0$. Dalle equazioni (4.8) quindi troviamo

$$\begin{cases} a_x = R_x/m = 2 \quad \text{m/s}^2 \\ a_y = R_y/m = 0 \quad \text{m/s}^2 \end{cases} \tag{4.9}$$

Come la forza risultante, l'accelerazione è costante e diretta come l'asse x: il moto è uniformemente accelerato ed è quindi descritto dall'equazione oraria (3.36)

$$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{s}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}} t^2,$$

dove $\vec{\mathbf{s}}_0$ e $\vec{\mathbf{v}}_0$ sono la posizione e la velocità al tempo $t = 0$. Ricordando che a $t = 0$ il corpo si trova nell'origine, ha velocità $\vec{\mathbf{v}}_0 = (0, 2)$ m/s ed accelerazione data dalle (4.9), proiettando l'equazione oraria sugli assi si trova

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0,y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases} . \tag{4.10}$$

Ricaviamo il tempo dalla seconda equazione, $t = y/2$, e sostituiamolo nella prima:

$$x = \frac{1}{4} y^2 .$$

La traiettoria del corpo quando entra nella parte di piano $y \geq 0$ in cui agisce la forza è dunque un arco di parabola ed è riportata nella figura 4.17b.

La situazione è analoga a quella descritta nel paragrafo **3.5.2** in cui abbiamo studiato il moto di un pallone al quale veniva dato un calcio. Anche in quel caso si aveva un corpo con velocità iniziale assegnata, che era soggetto ad una forza costante in modulo, direzione e verso, e la traiettoria era un arco di parabola.

Si noti che, in generale, la velocità del corpo non ha la stessa direzione della risultante delle forze, come si vede chiaramente dalla figura: la velocità è sempre tangente alla traiettoria, mentre l'accelerazione è diretta come $\vec{\mathbf{R}}$.

b) La posizione del corpo a $t = 2$ s si ricava dalle (4.10) ponendo $t = 2$ s; si trova $x(t = 2\text{s}) = 4$ m, $y(t = 2\text{s}) = 4$ m, quindi $\vec{\mathbf{s}}(t = 2\text{s}) = (4, 4)$ m. La velocità si trova dalla seconda delle equazioni (3.36), $\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}} t$, che proiettata sugli assi dà

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0,x} + a_x t \\ v_y(t) = v_{0,y} + a_y t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x(t) = 2t \\ v_y(t) = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\mathbf{v}}(t = 2\text{s}) = (4, 2)\text{m/s} . \tag{4.11}$$

L'accelerazione è costante e quindi sempre uguale ad $\vec{\mathbf{a}} = (2, 0)$ m/s^2. I vettori $\vec{\mathbf{v}}$ ed $\vec{\mathbf{a}}$ nell'istante $t = 2$ s sono riportati in figura.

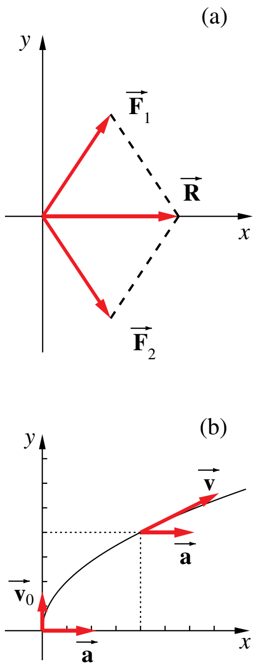


Figura 4.17

PROBLEMA 4.2

Un corpo di massa $m = 100$ g è soggetto a due forze tra loro ortogonali, $\vec{\mathbf{F}}_1$ e $\vec{\mathbf{F}}_2$, dirette come in figura 4.18. I loro moduli sono $F_1 = 3$ N e $F_2 = 5$ N. Dopo 2 s dall'istante iniziale t_0, il corpo passa per l'origine del sistema di riferimento cartesiano riportato in figura 4.18 e in tale punto la sua velocità è nulla. Si calcoli:

a) *la legge oraria del moto del corpo;*

b) *l'equazione della traiettoria;*

c) *la posizione e la velocità del corpo nell'istante iniziale.*

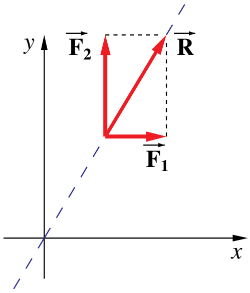


Figura 4.18

a) In componenti le due forze sono date da $\vec{\mathbf{F}}_1 = (F_1, 0)$ e $\vec{\mathbf{F}}_2 = (0, F_2)$. Quindi la risultante delle forze è

$$\vec{\mathbf{R}} = \begin{cases} R_x = F_1 + 0 = F_1 \\ R_y = 0 + F_2 = F_2 \end{cases}$$

Dalla seconda legge di Newton

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{R}}/m = (F_1/m, F_2/m) = (30, 50)\ \mathrm{m/s^2}.$$

L'accelerazione è costante e quindi il moto è uniformemente accelerato. La legge oraria è data dalla (3.36)

$$\vec{\mathbf{s}}(t) = \vec{\mathbf{s}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2,$$

dove $\vec{\mathbf{s}}_0$ e $\vec{\mathbf{v}}_0$ sono la posizione e la velocità al tempo $t = 0$. Se fissiamo l'origine dei tempi in modo che $t = 0$ corrisponda all'istante in cui il corpo passa per l'origine, dove $\vec{\mathbf{s}}_0 = (0, 0)$ m e $\vec{\mathbf{v}}_0 = (0, 0)$ m/s, essa diventa $\vec{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$. Proiettando la legge oraria sugli assi si trova

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = 15t^2 \\ y(t) = 25t^2 \end{cases}. \tag{4.12}$$

b) La traiettoria si trova eliminando il tempo dalle (4.12):

$$\frac{y}{x} = \frac{25t^2}{15t^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{3}x.$$

Si tratta di una retta che passa per l'origine. Essa corrisponde alla linea tratteggiata riportata in figura e coincide con la direzione della risultante $\vec{\mathbf{R}}$.

c) Dato che il corpo dopo due secondi dall'istante iniziale t_0 passa per l'origine, $t_0 = -2$ s. Quindi la sua posizione a $t = t_0$ è

$$x_0 = \frac{1}{2}a_x t_0^2 = 60\,\mathrm{m}, \qquad y_0 = \frac{1}{2}a_y t_0^2 = 100\,\mathrm{m}.$$

L'equazione della velocità è [si veda la (3.36)] $\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t$, che proiettata sugli assi e calcolata per $t = t_0$ dà

$$v_{0,x} = a_x t_0 = -60\,\mathrm{m/s}, \qquad v_{0,y} = a_y t_0 = -100\,\mathrm{m/s}.$$

Si noti che

- $v_{0,y} = \frac{5}{3}v_{0,x}$. In questo caso la retta che corrisponde alla traiettoria è anche la direzione della velocità $\vec{\mathbf{v}}_0$;
- la velocità iniziale ha entrambe le componenti negative; quindi all'istante iniziale $t = t_0$ punta verso l'origine.

È interessante capire qualitativamente quale sia il moto del corpo. All'istante iniziale esso si trova in (x_0, y_0) con velocità diretta verso l'origine. Dato che l'accelerazione è diretta in verso opposto (stessa direzione di $\vec{\mathbf{R}}$), velocità ed accelerazione hanno verso opposto: quindi il corpo rallenta.

Quando raggiunge l'origine si ha $\vec{\mathbf{v}}_0 = 0$ e, dato che $\vec{\mathbf{a}}$ è sempre diretta come $\vec{\mathbf{R}}$, successivamente il corpo inverte il verso del moto e ripercorre la retta in verso opposto, allontanandosi dall'origine. In questa fase la velocità cresce progressivamente perché velocità ed accelerazione hanno lo stesso verso.
Il moto è del tutto analogo a quello di un grave che viene lanciato verso l'alto: prima sale rallentando, raggiunge la massima altezza (e qui la velocità è nulla) ed infine ricade aumentando progressivamente la velocità.

Sottolineiamo di nuovo che in generale un corpo non si muove nella direzione e nel verso della forza risultante applicata. La forza determina l'accelerazione, mentre la direzione ed il verso del moto sono dati dalla direzione e dal verso della velocità. Velocità ed accelerazione possono avere direzione e verso diversi. Ad esempio, nel caso particolare di questo problema, la direzione del moto è la stessa di $\vec{\mathbf{R}}$, ma nella fase in cui il corpo si muove verso l'origine il verso del moto è opposto a quello di $\vec{\mathbf{R}}$.

4.2.3 Come si misurano le forze

Esistono due metodi generali per misurare una forza:

- misura dinamica: si misura l'accelerazione che una forza imprime ad un corpo di massa nota e si ricava il valore della forza tramite la seconda legge della dinamica;
- misura statica: si applica ad un corpo qualsiasi la forza incognita che si vuole misurare insieme ad una forza nota. Si fà in modo che le due forze si bilancino lasciando il corpo fermo. Dato che la risultante delle forze è nulla, il modulo della forza incognita è uguale al modulo della forza nota.

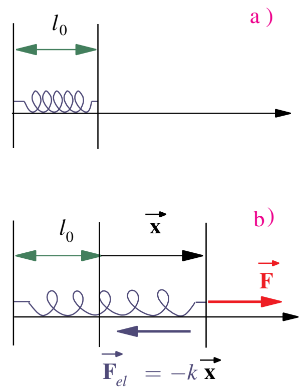


Figura 4.19
Nel caso a) la molla non è soggetta a nessuna forza e si trova nella posizione di riposo. La sua lunghezza l_0 è detta **lunghezza a riposo**. Nel caso b) viene applicata una forza $\vec{\mathbf{F}}$ che provoca un allungamento x. La lunghezza della molla è ora $l_0 + x$.

Uno strumento pratico per misurare le forze, basato sul metodo statico, è il **dinamometro**. Esso è formato da una molla attaccata ad un sostegno come illustrato nella figura 4.19.

La molla ideale è un oggetto che ha massa trascurabile e che, se allungata o compressa di un tratto x rispetto alla posizione di equilibrio, reagisce con una forza proporzionale a x e nella stessa direzione

$$\vec{\mathbf{F}}_{el} = -k\vec{\mathbf{x}}. \tag{4.13}$$

Questa è l'equazione della **forza elastica** nota anche come **legge di Hooke**. La costante k è detta **costante elastica della molla** e si misura in N/m. Il segno meno sta ad indicare che la forza ha sempre verso opposto a quello dell'allungamento o della compressione, cioè tende a riportare la molla nella posizione di equilibrio; per questo la forza elastica è anche chiamata forza di richiamo. Per misurare una forza incognita $\vec{\mathbf{F}}$ si può procedere nel modo seguente: si applica al dinamometro una forza $\vec{\mathbf{F}}_0$ che si assume unitaria. La molla si allunga e, quando $\vec{\mathbf{F}}_0$ e la forza elastica si equilibrano, si ha

$$\vec{\mathbf{F}}_0 = \vec{\mathbf{F}}_{el} \quad \Rightarrow \quad F_0 = kx_0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F_0}{x_0}\,.$$

La misura di x_0 fornisce di fatto la costante elastica della molla. Se ora si applica al dinamometro la forza incognita $\vec{\mathbf{F}}$, all'equilibrio questa produce un allungamento x tale che

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{el} \qquad \Rightarrow \qquad F = kx\ .$$

Facendo il rapporto tra F ed F_0, si ha

$$\frac{F}{F_0} = \frac{kx}{kx_0} \qquad \Rightarrow \qquad F = F_0\,\frac{x}{x_0}\ .$$

Quindi conoscendo x_0 ed F_0 (cioè k) e misurando l'allungamento x, si può determinare la forza incognita. Se ad esempio l'allungamento della molla prodotto da una forza incognita è pari a 3 volte quello della forza unitaria, allora il modulo della forza $\vec{\mathbf{F}}$ è pari a 3 newton.

4.3 La natura delle forze

Finora abbiamo studiato l'effetto che l'applicazione di una o più forze produce su un corpo di massa m: esso accelera. Vogliamo chiederci ora quale sia l'origine delle varie forze che incontriamo nella vita quotidiana; ad esempio un sasso viene attratto dalla Terra da una forza che chiamiamo forza di gravità, una calamita può attrarre dei pezzettini di ferro perché esercita una forza magnetica, all'interno del tubo catodico di un televisore gli elettroni del pennello elettronico sono accelerati dalla forza elettrica, e così via. In questi esempi la sorgente della forza ed il corpo sul quale essa agisce, la Terra e il sasso, la calamita ed i pezzetti di ferro, etc... non sono a contatto tra loro: quindi parliamo di forze che agiscono a *distanza*. Tuttavia se vogliamo spostare un oggetto nella vita quotidiana, lo dobbiamo afferrare in qualche modo: lo prendiamo con le mani, lo leghiamo con una corda, lo tocchiamo con un bastone, etc. In questo caso parliamo di forze di *contatto*. Le forze di contatto sono quelle più facili da comprendere a livello intuitivo proprio perché il "trasferimento" della forza avviene tramite il contatto tra la sorgente ed il corpo sul quale essa agisce: essi si toccano. Nel prossimo capitolo faremo molti esempi di questo tipo di forze: la reazione vincolare di un piano, la tensione di una corda, l'attrito, ecc. A livello microscopico tuttavia non esistono forze di contatto, ma soltanto interazioni a distanza, anche se la scala delle distanze è piccolissima. Le forze di contatto non sono altro che la manifestazione macroscopica delle interazioni elettromagnetiche tra le cariche elettriche che costituiscono i corpi stessi. Lo studio di queste interazioni microscopiche è alquanto complesso dato l'elevato numero di atomi in gioco; quindi si procede introducendo dei parametri macroscopici empirici che caratterizzano l'effetto complessivo delle interazioni microscopiche, come ad esempio il coefficiente di attrito nel caso della forza di attrito o la costante elastica nel caso della deformazione di una molla.

Le interazioni a distanza hanno da sempre costituito un problema di difficile comprensione per i fisici delle varie epoche. Oggi sappiamo come spiegarle tramite il concetto di campo introdotto da Faraday nel 1800, ma uno studio approfondito di questo problema va al di là degli scopi di questo libro.

Le interazioni fondamentali

Uno degli scopi primari della fisica è quello di trovare delle leggi generali che siano in grado di descrivere il maggior numero possibile di fenomeni diversi. Questo ha portato nel corso degli anni all'unificazione delle leggi che regolano fenomeni apparentemente distinti. Ad esempio nel 1864 Maxwell unificò in un'unica teoria forze elettriche, forze magnetiche ed onde luminose, che sono aspetti diversi della medesima interazione elettromagnetica.
Ad oggi le interazioni fondamentali della natura sono quattro:

- **Interazione gravitazionale**.

Due corpi puntiformi di massa gravitazionale m_{g1} e m_{g2} si attraggono con una forza il cui modulo è

$$F = G\frac{m_{g1}m_{g2}}{r^2} \ ,$$

dove r è la distanza tra i due corpi e G è la costante di gravitazione universale. L'interazione gravitazionale è solo attrattiva. Questa legge fu formulata da Newton ed è nota come **Legge di gravitazione universale**. Sebbene sia di gran lunga la più debole delle quattro interazioni, è quella che domina su grande scala e fa sì che i pianeti ruotino intorno al Sole e che si formino stelle e galassie. La teoria moderna della gravità, che generalizza la legge della gravitazione di Newton, è la teoria della Relatività Generale formulata da A. Einstein nel 1915.

- **Interazione elettromagnetica**.

L'interazione elettromagnetica è responsabile di tutte le interazioni di tipo elettrico e magnetico e dei fenomeni luminosi. Tutte le forze di contatto (attrito, reazioni vincolari, tensioni delle funi, ecc...) sono manifestazioni macroscopiche dell'interazione elettromagnetica. Essa è anche alla base delle forze nell'atomo (legame tra elettroni e nucleo) e nelle molecole, dei legami e delle reazioni chimiche, quindi dei processi biologici. La forza elettrica tra due cariche puntiformi q_1 e q_2 in quiete è descritta dalla legge di Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2},$$

dove r è la distanza tra le due cariche ed ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. La forza elettrica può essere sia attrattiva che repulsiva.

• Interazione nucleare forte

Questa è la forza che tiene legati tra loro i protoni ed i neutroni nei nuclei atomici. La sua intensità è maggiore di quella elettromagnetica ma ha un raggio di azione molto piccolo ($\sim 10^{-15}$ m) per cui essa si manifesta solo all'interno dei nuclei atomici.

• Interazione nucleare debole

Questa forza è responsabile dei decadimenti radioattivi di alcuni nuclei ed è alla base delle reazioni di fusione nelle stelle.
L'interazione nucleare debole e l'interazione elettromagnetica sono descritte da un'unica teoria, il Modello Standard, per cui a volte si parla di interazione elettrodebole per riferirsi ad entrambe le forze.
Nel paragrafo seguente parleremo più in dettaglio della forza gravitazionale newtoniana, mentre tratteremo la forza elettromagnetica più avanti. Non tratteremo in questo libro le interazioni nucleari forti e le interazioni nucleari deboli.

4.4 La legge di gravitazione universale

La legge di gravitazione universale, formulata da Newton nei *Principia Mathematica*, afferma che due corpi **puntiformi** si attraggono con una forza che è inversamente proporzionale al quadrato della reciproca distanza, e direttamente proporzionale al prodotto di due costanti, che caratterizzano rispettivamente i due corpi e che chiamiamo **masse gravitazionali**. Il modulo della forza gravitazionale pertanto è

$$F_G = G\,\frac{m_{g1}\, m_{g2}}{r^2}, \tag{4.14}$$

dove m_{g1} e m_{g2} sono le masse gravitazionali. G è la costante di gravitazione universale, il cui valore nel Sistema Internazionale è pari a

$$G = 6.67259 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\ . \tag{4.15}$$

La (4.14) viene detta "legge di gravitazione universale" in quanto Newton intuì che essa non solo spiega perché e come la Terra attrae una mela che si stacca dall'albero, ma anche perché e come la Luna ruota intorno alla Terra, i pianeti orbitano attorno al Sole e qualsiasi corpo celeste interagisce con gli altri.

Come abbiamo detto all'inizio di questo paragrafo, la legge di gravitazione (4.14) si applica a corpi puntiformi. Nel caso di corpi estesi, quali sono ad esempio il Sole e la Terra, occorrerebbe calcolare la forza di attrazione tra ciascun elemento infinitesimo di massa dm_{g1} del Sole e ciascun elemento infinitesimo di massa dm_{g2} della Terra, e fare poi la somma vettoriale di tutte le forze infinitesime risultanti. Questo problema ha impegnato Newton per circa 20 anni portandolo all'invenzione del calcolo infinitesimale. La sua soluzione è molto

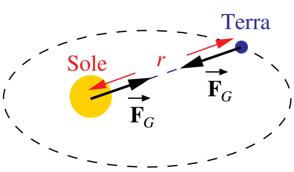


Figura 4.20
Il Sole e la Terra si attraggono con la forza gravitazionale $\vec{\mathbf{F}}_G$.

semplice grazie alla dipendenza della legge di gravitazione universale dall'inverso del quadrato della distanza ($F \propto 1/r^2$); infatti si può dimostrare che

la forza gravitazionale esercitata da un corpo a simmetria sferica (tali sono con ottima approssimazione la Terra, la Luna, il Sole) di massa m_g è uguale a quella esercitata da un corpo puntiforme di uguale massa posto al centro del corpo esteso.

Daremo la dimostrazione di questo risultato più avanti, quando discuteremo la legge di Gauss nell'ambito dell'elettrostatica.

4.4.1 Il principio di equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale

In linea di principio non c'è nessun motivo per cui la massa gravitazionale m_g che compare nella (4.14) sia in relazione con la massa inerziale dei due corpi, cioè con la costante di proporzionalità che entra nella seconda legge della dinamica $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$. Infatti mentre la legge di gravitazione universale (4.14) definisce l'espressione di una particolare forza, cioè quella con cui si attraggono i corpi, la legge $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ è una legge generale che lega una forza qualsiasi all'accelerazione che essa produce sul corpo al quale è applicata. Quindi sono due leggi dal significato completamente differente.

Tuttavia gli esperimenti dimostrano che, dato un corpo qualsiasi, la massa gravitazionale m_g è uguale (entro una parte su 10^{12}) alla massa inerziale m che compare nella seconda legge della dinamica [2]. Vale dunque il **principio di equivalenza** tra massa gravitazionale e massa inerziale, da cui deriva una conseguenza importante. Scriviamo per esempio la II legge della dinamica per un corpo che viene attratto dalla Terra e al posto di $\vec{\mathbf{F}}$ mettiamo l'espressione della forza di gravitazione universale (4.14)

$$G\,\frac{m_g M_{gT}}{d^2} = ma\ ;$$

in questa equazione M_{g_T} è la massa gravitazionale della Terra, d è la distanza tra il centro della Terra ed il corpo e m e m_g sono rispettivamente la massa inerziale e la massa gravitazionale del corpo. Per il principio di equivalenza massa gravitazionale e massa inerziale sono uguali, quindi possiamo scrivere $m_g = m$ e $M_{gT} = M_T$ e l'equazione precedente diventa

$$G\,\frac{mM_T}{d^2} = ma \qquad \Rightarrow \qquad a = G\frac{M_T}{d^2}\ .$$

Come si vede da questa equazione, l'accelerazione con cui un corpo viene attratto dalla Terra non dipende dalla sua massa:

[2] In realtà si trova che le due masse sono proporzionali tra loro; con una scelta opportuna delle unità di misura, il che equivale a fissare opportunamente il valore di G, si può fare in modo che i valori delle due masse coincidano.

a parità di distanza Terra-corpo, tutti i corpi cadono sulla Terra con la stessa accelerazione.

Supponiamo ora che siano presenti tre masse m_1, m_2, m_3: vogliamo calcolare la forza gravitazionale che agisce sulla massa 1; essa è la somma (vettoriale) delle interazioni gravitazionali tra le masse 1,2 e 1,3, calcolate utilizzando la legge (4.14). Questa proprietà, tutt'altro che ovvia, viene chiamata **principio di sovrapposizione**, e deriva dal fatto che l'interazione tra due masse, secondo la teoria di Newton, è sempre data dalla (4.14) indipendentemente dalla presenza di altri corpi.

ESEMPIO

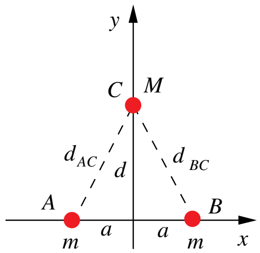


Figura 4.21

Si consideri il sistema di assi cartesiani riportato in figura 4.21. Nel punto A di coordinate $(-a, 0)$ e nel punto B di coordinate $(a, 0)$ si trovano due masse uguali $m = 2$ kg. Nel punto C di coordinate $(0, d)$ si trova una massa $M = 1$ kg. Si trovi la forza gravitazionale che agisce sulla massa M. Si assuma $a = 0.2$ m e $d = 0.7$ m.

Come abbiamo detto, vale il principio di sovrapposizione, per cui la forza gravitazionale totale che agisce su M è data dalla somma delle due forze $\vec{\mathbf{F}}_{AC}$ e $\vec{\mathbf{F}}_{BC}$ che le masse m poste in A e in B esercitano su M. Calcoliamole quindi separatamente. La distanza tra i punti B e C è data dal teorema di Pitagora: $d_{BC} = \sqrt{a^2 + d^2}$. Quindi il modulo di $\vec{\mathbf{F}}_{BC}$ è:

$$F_{BC} = G\frac{Mm}{d_{BC}^2} = G\frac{Mm}{a^2 + d^2} .$$

Per calcolare le componenti, dobbiamo determinare il coseno ed il seno dell'angolo θ.

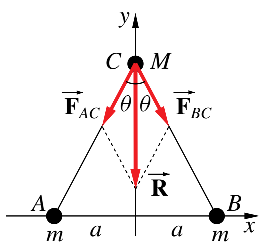


Figura 4.22

Utilizzando le note relazioni trigonometriche otteniamo $\cos\theta = \frac{d}{d_{BC}}$ e $\sin\theta = \frac{a}{d_{BC}}$. Quindi abbiamo (attenzione: la componente y della forza $\vec{\mathbf{F}}_{BC}$ è negativa)

$$\vec{\mathbf{F}}_{BC} = (F_{BC}\ \sin\theta, -F_{BC}\ \cos\theta) = \left(\frac{GMma}{(a^2 + d^2)^{3/2}}, -\frac{GMmd}{(a^2 + d^2)^{3/2}}\right) .$$

Il calcolo di $\vec{\mathbf{F}}_{AC}$ è analogo. Infatti $d_{AC} = d_{BC}$; i moduli di $\vec{\mathbf{F}}_{AC}$ e di $\vec{\mathbf{F}}_{BC}$ sono uguali e θ è lo stesso:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{AC} &= (-F_{AC}\ \sin\theta, -F_{AC}\ \cos\theta) = \\ &= \left(-\frac{GMma}{(a^2 + d^2)^{3/2}}, -\frac{GMmd}{(a^2 + d^2)^{3/2}}\right) .\end{aligned}$$

Si noti che in questo caso anche la componente x è negativa. La risultante quindi è

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{R}} &= \left(\frac{GMma}{(a^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{GMma}{(a^2 + d^2)^{3/2}}, -\frac{GMmd}{(a^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{GMmd}{(a^2 + d^2)^{3/2}}\right) \\ &= \left(0, -2\frac{GMmd}{(a^2 + d^2)^{3/2}}\right) ,\end{aligned}$$

diretta come l'asse y e in verso opposto. Numericamente si ha $R = 4.8 \cdot 10^{-10}$ N.

4.4.2 La forza di gravità vicino alla Terra

Come già visto più volte, un corpo di massa m posto nelle vicinanze della superficie terrestre è soggetto ad una forza attrattiva, che chiamiamo forza peso $\vec{\mathbf{P}}$, data da

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}} \qquad \text{dove} \qquad g \simeq 9.8 \text{ m/s}^2.$$

La forza peso è una forma approssimata della forza di gravitazione di Newton (4.14) tra la Terra e i corpi. Vediamo perché.

Supponiamo che un corpo di massa m si trovi sulla superficie della Terra, la cui massa e il cui raggio medio indichiamo rispettivamente con M_T e con R_T. R_T è definito facendo la media delle distanze centro-superficie dei punti diversi del globo. Infatti la Terra non è una sfera perfetta ma è leggermente schiacciata ai poli; per esempio il *raggio equatoriale* (distanza tra il centro della Terra e l'equatore) è di circa 6378 km ed il *raggio polare* (distanza tra il centro della Terra ed uno dei poli) è di circa 6357 km.

La forza di attrazione gravitazionale tra la Terra ed il corpo data dalla (4.14) vale dunque:

$$F_g = G\frac{mM_T}{R_T^2} = m\left(G\frac{M_T}{R_T^2}\right),$$

dove

$$M_T = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \qquad R_T = 6371 \text{ km} = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Quindi l'accelerazione di gravità media g sulla superficie della Terra è

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} = 6.673 \cdot 10^{-11}\frac{5.974 \cdot 10^{24}}{(6.371 \cdot 10^6)^2} = 9.82 \text{ m/s}^2. \tag{4.16}$$

$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$ è dunque la forza di gravitazione universale di Newton calcolata sulla superficie della Terra.

Si noti che il valore di g dato nella (4.16) non corrisponde esattamente al valore di g misurato in tutti i punti della superficie terrestre: ad esempio a Roma $g = 9.804$ m/s^2. Queste differenze hanno varie origini. Innanzitutto bisogna tener conto della rotazione della Terra (si veda il problema 5.17); inoltre, come già detto, la Terra non è una sfera omogenea e questo dà luogo ad una piccola variazione di g con la latitudine: al polo $g \approx 9.83$ m/s^2 mentre all'equatore il contributo puramente gravitazionale è 9.81 m/s^2. È poi necessario tener conto dell'altitudine: l'accelerazione di gravità diminuisce con essa, come discuteremo nel prossimo esempio. Negli esercizi di questo libro utilizzeremo sempre il valore:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2.$$

NOTARE CHE: in molti casi, soprattutto quando si considerano gli effetti fisiologici delle accelerazioni, queste si riportano in termini di g.

Per esempio, riferendosi alle accelerazioni in aerei o astronavi si parla spesso di accelerazione massima sostenibile dal pilota senza perdere conoscenza. Tale accelerazione è uguale approssimativamente a $5g$ (ossia approssimativamente 50 m/s^2). Speciali tute permettono di raggiungere 9-10g.

ESEMPIO

Come varia g con l'altezza

Sapendo che $g = 9.804$ m/s^2 a Roma, calcoliamo g sul Gran Sasso a 2000 m di quota.
Il Gran Sasso e Roma hanno approssimativamente la stessa latitudine per cui gli effetti dovuti alla variazione del raggio terrestre ed alla rotazione della Terra sono approssimativamente uguali nei due luoghi. Si tratta quindi di calcolare solo la variazione con l'altezza h. In generale, se un corpo si trova a un'altezza h dalla superficie della Terra, ripetendo i calcoli fatti in questo paragrafo, troviamo

$$g(h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}.$$

Quindi la differenza tra $g(h)$ e l'accelerazione ad $h = 0$ (Roma è al livello del mare) calcolata nella (4.16), che indichiamo con $g(0)$, è

$$\begin{aligned} g(h) - g(0) &= \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} - \frac{GM_T}{R_T^2} = GM_T \frac{R_T^2 - (R_T + h)^2}{(R_T + h)^2 R_T^2} \\ &= -GM_T \frac{h(2R_T + h)}{(R_T + h)^2 R_T^2} \simeq -2GM_T \frac{h}{R_T^3}. \end{aligned}$$

Dato che $R_T \gg h$, nell'ultimo passaggio abbiamo trascurato h rispetto a $2R_T$ nel numeratore, e h rispetto a R_T nel denominatore. Essendo $GM_T/R_T^2 = g(0)$ [si veda l'equazione (4.16)], possiamo scrivere infine

$$g(h) - g(0) = -2g(0)\frac{h}{R_T}, \qquad \Rightarrow \qquad g(h) = g(0)(1 - 2h/R_T).$$

La variazione con h è quindi piccola, inferiore all'1 per mille se h è inferiore ai 3 km. Per esempio, se $h = 2000$ m allora $g = 9.798$ m/s^2.

Il chilogrammo peso

In passato è stata spesso usata come unità di misura delle forze il chilogrammo peso che rappresenta la forza peso di una massa di un kg. Questa unità dipende da g che come abbiamo visto non è una quantità costante. La Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure ha pertanto definito un valore convenzionale per g (accelerazione normale di gravità): $g = 9.80665$ m/s^2. Quindi 1 chilogrammo peso è per definizione uguale a 9.80665 N.

ESEMPIO

La bilancia

Quando ci si riferisce ad una bilancia, si usa dire che essa misura il *peso* di un oggetto o di una persona e si usa riportare tale peso in grammi o chilogrammi, che sono invece le unità usate per la massa. Ma cosa misura veramente la bilancia? Il peso o la massa? La risposta a questa domanda dipende da quale dispositivo utilizziamo come bilancia. Per esempio la bilancia di precisione a due braccia utilizzata dagli orefici misura la massa di un oggetto, confrontandola con varie masse campione. Così pure la stadera, usata per la vendita al dettaglio, misura la massa facendo riferimento ad una massa campione fissa.

Figura 4.23

Nelle nostre case è spesso presente una bilancia elastica, che funziona invece come il dinamometro e pertanto non misura la massa di un oggetto, bensì il suo peso P. Il principio di funzionamento è il seguente. La bilancia è costituita da un dispositivo elastico di qualsiasi tipo che risponde in modo lineare alla compressione, per esempio una molla. Possiamo schematizzare la bilancia come un piatto di peso p_0 poggiato sulla molla di costante elastica k. Se non viene posto alcun peso sulla bilancia, la molla risulta compressa di una quantità $x_0 = p_0/k$ [si veda il paragrafo 4.2.3]. Se ora aggiungiamo un ulteriore peso P la compressione diventa $x = (P + p_0)/k = P/k + x_0$. Quindi $x - x_0 = P/k$: la compressione ulteriore della molla dipende linearmente dal peso posto sulla bilancia (cioè è proporzionale a P). Quindi, calcolata la costante k (il che si può fare utilizzando un peso campione e corrisponde alla cosiddetta taratura dello strumento), una misura di $x - x_0$ fornisce una misura del peso P. La costante k è una proprietà fissa del sistema elastico e quindi, dopo la necessaria taratura, la bilancia fornisce sempre il corretto valore del peso. Di solito la bilancia elastica riporta il peso in chilogrammi che sono una unità di massa. Tale valore corrisponde in realtà al rapporto P/g_0, dove g_0 è un valore prossimo a 9.8 m/s^2 e corrisponde all'accelerazione di gravità nella località dove è stata costruita la bilancia. Quindi la massa misurata dalla bilancia è in realtà la quantità mg/g_0.
Dato che g dipende dal luogo, la bilancia elastica fornisce un valore diverso per lo stesso oggetto a seconda del luogo in cui si esegue la misura. Per esempio, supponiamo che una signora si pesi all'Equatore e che la bilancia fornisca un *peso* di 60 kg. Cosa troverebbe con la stessa bilancia al Polo? Dato che $g_{\mathrm{Eq}} = 9.789$ m/s^2 all'Equatore e $g_P = 9.832$ m/s^2 al Polo, otteniamo

$$m_P = mg_P/g_0 \qquad m_{\mathrm{Eq}} = mg_{\mathrm{Eq}}/g_0,$$

dove m è la massa della signora, m_P ed m_{eq} sono i valori indicati dalla bilancia al Polo ed all'Equatore. Quindi

$$\frac{m_P}{m_{\mathrm{Eq}}} = \frac{g_P}{g_{\mathrm{Eq}}},$$

da cui $m_P = m_{\mathrm{Eq}} g_P / g_{\mathrm{Eq}} = 60.26$ kg. Apparentemente, nel viaggio dall'Equatore al Polo, la signora ha preso due etti e mezzo di peso!

NOTARE CHE: una bilancia misura sostanzialmente la componente normale della risultante delle forze che agiscono sulla sua superficie; questa, come sappiamo, è uguale alla reazione vincolare normale N. Quindi possiamo anche dire che la bilancia misura la forza normale N.

4.5 La terza legge della dinamica

La terza legge della dinamica si riferisce alle forze di interazione tra due corpi A e B ed è anche nota come legge di azione-reazione. Essa afferma:

terza legge della dinamica

Se un corpo A esercita sul corpo B la forza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{AB}}$, allora il corpo B esercita sul corpo A la forza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{BA}}$, che ha lo stesso modulo, $F_{\mathbf{BA}} = F_{\mathbf{AB}}$, la stessa direzione, ma verso opposto ($\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{BA}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{AB}}$).

NOTARE CHE: le due forze sono applicate a corpi diversi.

Ad esempio, la Terra, di massa M_T, esercita su una pallina di massa m la forza gravitazionale $F_{AB} = \dfrac{GM_T m}{r^2}$; essa è diretta lungo la retta che congiunge i centri dei due corpi, il suo verso va dalla pallina alla Terra, ed è applicata al centro della pallina. A sua volta, la pallina esercita sulla Terra una forza $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$, uguale in modulo a $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$, avente la stessa direzione, ma verso opposto: questa forza è applicata al centro della Terra.

Dunque, se il corpo cade sulla Terra, perché la Terra non cade sul corpo?

In realtà la Terra cade sul corpo, ma con un'accelerazione piccolissima che possiamo calcolare. Fissiamo un sistema di riferimento come indicato in figura e chiamiamo a_T l'accelerazione della Terra ed a_m quella del corpo. Scriviamo la II legge della dinamica per la Terra e per il corpo. Riferendoci unicamente alla componente y (per semplicità nelle formule che seguono omettiamo il pedice y):

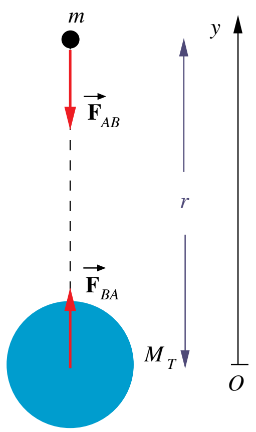


Figura 4.24

$$\begin{cases} M_T a_T = \dfrac{GM_T m}{r^2} \\ m a_m = -\dfrac{GM_T m}{r^2} \end{cases} \tag{4.17}$$

Quindi otteniamo

$$a_T = \frac{G}{r^2}\, m, \qquad a_m = -\frac{G}{r^2}\, M_T. \tag{4.18}$$

Se calcoliamo il rapporto tra le due accelerazioni troviamo che è inversamente proporzionale al rapporto delle masse:

$$\frac{a_T}{a_m} = -\frac{m}{M_T}\,.$$

Dato che la massa della Terra è molto più grande di quella del corpo, segue che la sua accelerazione è trascurabile rispetto all'accelerazione del corpo.

ESEMPIO

Possiamo calcolare le accelerazioni della Terra e del corpo esplicitamente, assumendo per esempio $m = 1$ kg e approssimando la distanza tra il centro della Terra e il corpo con il raggio medio della Terra R_T

$$r \simeq R_T = 6371 \text{ km}.$$

Il fattore G/r^2 che compare in entrambe le accelerazioni (4.18) è

$$\frac{G}{r^2} = \frac{6.673 \cdot 10^{-11}}{(6.371 \cdot 10^6)^2} = 1.644 \cdot 10^{-24} \text{ m/(kg s}^2) \ .$$

Ricordando che $M_T = 5.974 \cdot 10^{24}$ kg, le accelerazioni sono

$$a_T = \frac{G}{r^2} m = 1.644 \cdot 10^{-24} \times 1 = 1.644 \cdot 10^{-24} \text{ m/s}^2$$

$$a_m = -\frac{G}{r^2} M_T = -1.644 \cdot 10^{-24} \times 5.974 \cdot 10^{24} = -9.82 \text{ m/s}^2.$$

Come si vede a_T è piccolissima rispetto all'accelerazione del corpo a_m che coincide con l'usuale accelerazione di gravità.

Torniamo alla III Legge della dinamica. Come abbiamo visto in precedenza, se un corpo è appoggiato fermo su un tavolo, esso rimane in quiete perché le forze che agiscono su di esso, cioè la forza peso $\vec{\mathbf{P}}$ e la reazione vincolare $\vec{\mathbf{N}}$ (discuteremo come si definisce $\vec{\mathbf{N}}$ nel prossimo capitolo) sono uguali, hanno la stessa direzione e verso opposto, e quindi si annullano. Potremmo allora pensare che $\vec{\mathbf{P}}$ ed $\vec{\mathbf{N}}$ siano una coppia azione-reazione, **ma non è così** .

Infatti sono entrambe applicate allo stesso corpo, mentre in una coppia azione-reazione **le due forze sono applicate a corpi diversi**. $\vec{\mathbf{P}}$ fa coppia azione-reazione con la forza di attrazione gravitazionale che il corpo esercita sulla Terra (come visto prima); invece $\vec{\mathbf{N}}$ fa coppia azione-reazione con una forza $-\vec{\mathbf{N}}$ uguale ed opposta, applicata al centro di massa del tavolino.

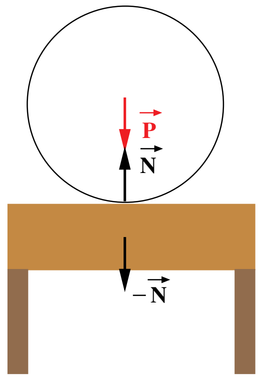


Figura 4.25

Come facciamo a camminare

Noi riusciamo a camminare grazie al terzo principio della dinamica. Infatti con la suola della scarpa spingiamo il suolo all'indietro (rispetto al verso nel quale vorremmo muoverci); il suolo reagisce spingendo la scarpa, e quindi noi stessi, in avanti. Per camminare dobbiamo pertanto applicare con la scarpa una forza parallela al suolo, e non ortogonale ad esso (in realtà è presente sia una componente orizzontale che verticale). Affinché questo meccanismo funzioni però, la scarpa non deve scivolare, ma deve fare "presa" e spingere effettivamente il suolo all'indietro. La "presa" della scarpa si realizza per mezzo dell'attrito, del quale parleremo nel prossimo capitolo.
Se l'attrito è assente o molto piccolo, come ad esempio sul ghiaccio, diventa impossibile camminare perché viene a mancare la reazione orizzontale del suolo sulla nostra scarpa.

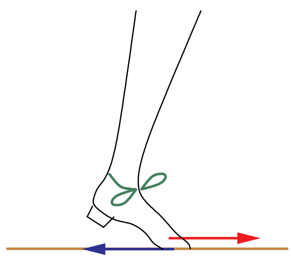
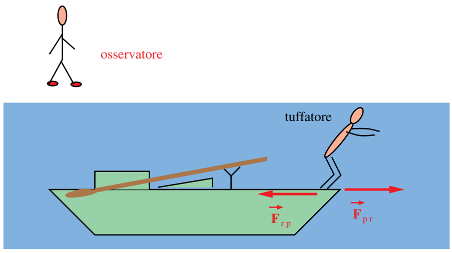


Figura 4.26

ESEMPIO

Un ragazzo vuole tuffarsi da un pattino che galleggia fermo sul mare, disposto parallelamente alla riva. Inizialmente il ragazzo sta fermo in piedi sul pattino ed un osservatore dalla riva lo vede fermo rispetto al pattino ed al mare. Quando il ragazzo si tuffa dal lato corto del pattino, l'osservatore sulla riva lo vede muoversi ed allontanarsi dal pattino parallelamente alla direzione lunga di questo, ma osserva anche che il pattino si muove nella stessa direzione in verso contrario. Se la massa del ragazzo è $m_r = 60$ kg e quella del pattino è $m_p = 120$ kg, supponendo che il ragazzo eserciti una forza di 1200 N sul pattino per tuffarsi, con quali accelerazioni iniziali (trascuriamo l'attrito del pattino con il mare) si muovono il ragazzo ed il pattino relativamente al sistema di riferimento fisso del mare calmo e della riva?



In base alla III legge della dinamica, il ragazzo nel tuffarsi esercita una forza F_{rp} sul pattino, mentre il pattino esercita una forza uguale e contraria F_{pr} sul ragazzo, cioè $\vec{\mathbf{F}}_{rp} = -\vec{\mathbf{F}}_{pr}$. Dato che $F_{rp} = m_p a_p = 1200$ N, l'accelerazione del pattino causata dall'azione del ragazzo è $a_p = F_{rp}/m_p = 10\ \mathrm{m/s^2}$. L'accelerazione del ragazzo è invece (avendo definito come positivo il verso dell'accelerazione del pattino):

$$a_r = -F_{pr}/m_r = -20\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Riassumiamo

- **I legge della dinamica**: In un sistema di riferimento inerziale un punto materiale non soggetto a forze, o soggetto a forze la cui risultante è nulla, rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.
- **II legge della dinamica**: Un corpo di massa m soggetto a forze la cui risultante è $\vec{\mathbf{R}}$ si muove con accelerazione $\vec{\mathbf{a}}$ data da

$$\vec{\mathbf{R}} = m\vec{\mathbf{a}}.$$

- **III legge della dinamica**: Se un corpo A esercita su un corpo B una forza $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$, allora il corpo B esercita sul corpo A una forza $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$, tale che $\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}$; quindi $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ ed $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ hanno lo stesso modulo, la stessa direzione, verso opposto e diverso punto di applicazione: $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ è applicata al corpo B, $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ è applicata al corpo A.

- **Legge di gravitazione universale**: Due masse puntiformi m_1 ed m_2 poste ad una distanza r si attirano con una forza di modulo pari a
$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$
dove $G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Tale forza è attrattiva e diretta lungo la congiungente le due masse. La stessa legge vale per corpi omogenei di forma sferica; in questo caso r è la distanza tra i centri dei corpi.
- **Forza peso**: Nelle vicinanze della Terra, una massa m è soggetta alla forza peso $\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{g}}$. L'accelerazione di gravità g è indipendente dalla natura e dalla massa del corpo; il suo modulo è approssimativamente uguale a $g = GM_T/R_T^2$, dove M_T ed R_T sono rispettivamente la massa ed il raggio medio della Terra.

4.6 Esercizi

4.1 *Quattro forze complanari agiscono su un corpo di massa* 40 kg. *Il modulo di ciascuna forza e l'angolo che essa forma con l'asse x sono:* 100 N, −60°; 80 N, 45°; 120 N, −90°; 150 N, −75°. *a) Trovare il modulo della forza risultante e l'angolo che la sua direzione forma con l'asse x (suggerimento: calcolare le componenti delle singole forze, quindi quelle della risultante e, da queste, modulo e angolo). b) Trovare l'accelerazione risultante del corpo, esprimendola in termini delle sue componenti lungo gli assi x e y.*

4.2 *Su un corpo posto su un piano agiscono due forze, la prima di modulo* 60 N *e la seconda di modulo* 80 N. *L'angolo tra le due forze è di 45°. Trovare il modulo e l'angolo rispetto alla direzione della prima forza, di una terza forza da applicare al corpo in modo che la risultante delle forze sia nulla.*

4.3 *Un corpo di massa* 6.0 kg *passa per l'origine di un sistema di riferimento bidimensionale con una velocità di* 30 m/s *diretta lungo l'asse y. In quel momento inizia ad agire sul corpo una forza di* 24 N *diretta lungo l'asse x. a) Calcolare il modulo della velocità dell'oggetto dopo* 10 s; *b) calcolare l'angolo che la velocità forma con l'asse x; c) trovare la sua posizione nello stesso istante.*

4.4 *Una forza incognita produce un'accelerazione di* 12 m/s^2 *su un corpo di massa* m_1 *e di* 6 m/s^2 *su un corpo di massa* m_2. *a) Trovare il rapporto tra le due masse* m_2/m_1; *b) Trovare l'accelerazione che la stessa forza produrrebbe sulla somma delle due masse* $(m_1 + m_2)$.

4.5 *Un corpo viene spinto in linea retta, su una superficie orizzontale, da una forza di modulo costante. La sua velocità aumenta di* 5 m/s *in un intervallo di tempo di* 20 s. *Ad un certo punto, oltre alla prima forza, sul corpo viene applicata una seconda forza costante avente la stessa direzione e verso della prima, e si nota che la velocità del corpo aumenta di* 7.5 m/s *in un intervallo di tempo di* 10 s. *Si trovi il rapporto dei moduli delle due forze.*

4.6 *Su un corpo di* 8 kg *agiscono due forze:* $\vec{\mathbf{F}}_1 = (3\ \text{N})\hat{\mathbf{i}} + (-3\ \text{N})\hat{\mathbf{j}}$ *e* $\vec{\mathbf{F}}_2 = (5\ \text{N})\hat{\mathbf{i}} + (8\ \text{N})\hat{\mathbf{j}}$. *Al tempo* $t = 0$ *il corpo si trova nell'origine delle coordinate con velocità nulla. a) Si trovino le componenti e il modulo dell'accelerazione del corpo, e l'angolo che essa forma con l'asse x; b) si trovi il modulo della velocità per* $t = 4$ s*; c) si trovi la posizione del corpo per* $t = 4$ s.

4.7 *Un'automobile ha una massa di* 1500 kg *ed una velocità iniziale di* 80 km/h. *Il guidatore inizia a frenare e l'auto si ferma dopo un minuto. a) Assumendo che durante la frenata il moto sia stato uniformemente accelerato, si trovi la forza applicata dai freni; b) trovare lo spazio percorso dall'inizio della frenata fino all'arresto.*

4.8 *Un vagone merci di massa* $50 \cdot 10^4$ kg *percorre un binario orizzontale alla velocità di* 0.30 m/s *trascinandosi dietro una fune. Una stima ragionevole della forza massima che si potrebbe applicare per arrestare il vagone tirando la fune è di* 250 N. *a) Quanto tempo occorrerebbe per arrestare il vagone? b) A dieci metri dal punto in cui si comincia a tirare la fune si trova, fermo, un altro vagone. Vi sarà un urto?*

4.9 *Una mamma sta giocando con il proprio bambino su un lago ghiacciato. Il bambino è seduto fermo su uno slittino di* 6 kg*, la madre gli dà una spinta di* 90 N *per* 2 s *ed il bambino raggiunge una velocità di* 6.0 m/s. *a) Qual è la massa del bambino? b) Se il bambino ha in braccio il suo gatto ed è fermo sullo slittino, a parità di spinta della madre, raggiunge la velocità di* 5.3 m/s*; qual è la massa del gatto? c) Quale dovrebbe essere la forza applicata dalla madre nel caso b) per raggiungere la stessa velocità di* 6 m/s*? Si trascurino gli attriti.*

4.10 *Un pallino di piombo di* 10 g*, che si muove alla velocità di* 120 km/h, *si conficca in un albero e penetra per* 5 cm. *Si trovi la forza media esercitata dall'albero.*

4.11 *Un paracadutista di* 75 kg *in caduta libera raggiunge, dopo un certo tempo, la velocità limite e da quel momento prosegue il moto con velocità costante. Si trovi la forza di resistenza esercitata dall'aria in queste condizioni.*

4.12 *Un ragazzo si trova ai bordi di una piscina dove l'acqua è profonda* 1.5 m. *Egli osserva che, se appoggia sull'acqua una pallina di gomma piena di sabbia, essa impiega* 1.6 s *per toccare il fondo della piscina. Assumendo che la massa della pallina sia* $m = 300$ g *e che il suo moto sia uniformemente accelerato, trovare: a) l'accelerazione della pallina; b) la forza che l'acqua esercita sulla pallina.*

4.13 *Un ascensore di massa* 150 kg *è tirato verso l'alto da una fune che può sopportare una tensione massima di* 2000 N. *a) In condizioni di tensione massima, qual è il tempo necessario per portare, in totale assenza di attriti, l'ascensore dal primo al quinto piano tra cui c'è un dislivello di* 12 m*? b) Quale sarebbe invece il tempo se fosse anche presente una forza frenante (dovuta all'attrito) di* 400 N*? (in entrambi i casi trascurare il tempo di decelerazione dell'ascensore).*

4.14 *Un canoista sta spingendo la propria imbarcazione ad una velocità costante di* 8.0 m/s*; ad un certo punto smette di pagaiare e la canoa si ferma dopo aver percorso* 16 m *con accelerazione costante. Se la massa della canoa più l'atleta è di* 120 kg*, trovare la forza esercitata dall'acqua sulla canoa.*

4.15 *Un rimorchio di* 500 kg *viene agganciato ad un trattore di* 1800 kg. *Il trattore parte con un'accelerazione di* 1.5 m/s^2*, trascinando con sé il rimorchio. a) Qual è la forza che in quel momento il trattore sta esercitando* *sul rimorchio? b) Qual è la forza che il rimorchio sta esercitando sul trattore? c) Quale forza deve esercitare il motore sul trattore per imprimere questa accelerazione?*

4.16 *Un montacarichi sta sollevando una cassa di* 120 kg *con un'accelerazione costante verso l'alto di* 0.5 m/s^2. *a) Quanto vale la risultante delle forze che agiscono sulla cassa? b) Quanto vale la forza che il montacarichi esercita sulla cassa? c) Quanto vale la forza che la cassa esercita sul montacarichi? Si assumano nulli gli attriti.*

4.17 *Trovare la forza gravitazionale che la Terra esercita sulla Luna sapendo che la massa della Terra è* $5.98 \cdot 10^{24}$ kg*, la massa della Luna è* $7.36 \cdot 10^{22}$ kg *e la distanza Terra-Luna è di* $3.82 \cdot 10^{8}$ m.

4.18 *Un astronauta arriva su un pianeta sconosciuto; prima di atterrare è riuscito a stimare che il diametro del pianeta è di* 6800 km*. Una volta sul pianeta, utilizza una bilancia per pesarsi e nota che essa indica un peso di* 22 kg*, mentre la stessa bilancia sulla Terra indicava che il suo peso era di* 80 kg *(si ricordi che la bilancia misura il peso, ma la sua risposta viene data in* kg*). Stimare la massa del pianeta sconosciuto.*