

# Interazione radiazione–materia

Prof. Giovanni Organtini  
Dip.to di Fisica "Sapienza", Università di Roma

March 25, 2014

## 1 Richiami sulla costituzione della materia.

Secondo l'attuale Modello Standard della Fisica delle Particelle Elementari, la materia è costituita di due classi di fermioni: i *leptoni* e i *quark*. I leptoni non sono soggetti all'interazione forte, mentre i quark sí. Questi ultimi rappresentano i costituenti elementari dei nucleoni (protoni e neutroni), i quali a loro volta formano i nuclei atomici.

La classe dei leptoni conta sei particelle: l'elettrone ( $e$ ), il muone ( $\mu$ ) e il tau ( $\tau$ ), tutte di carica elettrica  $-1$  (in unità di carica del protone) e i rispettivi neutrini  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ , tutti di carica elettrica nulla. Anche i quark sono sei: up ( $u$ ), down ( $d$ ), charm ( $c$ ), strange ( $s$ ), top ( $t$ ) e bottom ( $b$ ). I quark  $u$ ,  $c$  e  $t$  hanno carica elettrica pari a  $+2/3$ , mentre gli altri hanno carica  $-1/3$ . Accanto a queste 12 particelle se ne contano altrettante, dette antiparticelle, i cui numeri quantici sono l'opposto di quelli delle rispettive particelle. Ad esempio, il positrone ( $e^+$ ) è identico all'elettrone, ma la sua carica elettrica è positiva.

Protoni e neutroni sono particelle composte, ciascuna da tre quark ( $uud$  e  $udd$  rispettivamente) detti di *valenza*. Da quanto detto si evince che la materia ordinaria è composta solo da tre delle particelle elencate, oltre che dai neutrini. Le altre particelle  $\mu$ ,  $\tau$ , e i quark diversi da  $u$  e  $d$  sono piú pesanti delle particelle componenti della materia ordinaria e sono instabili, decadendo rapidamente nelle particelle piú leggere secondo regole di selezione che conservano i numeri quantici.

Quark e antiquark sono anche i componenti di un gran numero di particelle piú pesanti del neutrone, scoperte nel secolo scorso, come  $\Lambda$ ,  $K$ ,  $\pi$ ,  $\Sigma$ , etc. Anche queste particelle sono instabili e pertanto non si trovano di norma nella materia, ma si possono produrre nelle interazioni delle altre particelle con la materia o nei raggi cosmici.

Le interazioni tra le particelle si descrivono con la meccanica quantistica. Consideriamo uno stato iniziale di particella libera  $|\Phi\rangle = |i\rangle$  che è soggetta, a un tempo  $t$  successivo, a un qualche tipo d'interazione, descritta da un potenziale  $V(x)$ . Lo stato che descrive la particella evolve secondo l'equazione di Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\Phi\rangle = V(x) |\Phi\rangle,$$

per cui, integrando e sviluppando in serie (cosa che si può fare solo se  $V$  è *piccola*),

$$|\Phi\rangle = e^{-iV(x)t} |i\rangle \simeq |i\rangle - (-i)V(x)t|i\rangle + \frac{(-i)^2}{2} V(x)V(x')tt'|i\rangle + \dots$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo, se la particelle ha interagito, il suo stato è descritto da

$$S|i\rangle,$$

dove  $S$ , per quanto detto sopra, non è altro che

$$\sum_0^{\infty} \frac{-i^n}{n!} \int \dots \int dt_1 dt_2 \dots dt_n V(x_1) V(x_2) \dots V(x_n)$$

Tale stato è in realtà una sovrapposizione di tutti i possibili stati che si possono realizzare attraverso l'interazione con la matrice  $S$ . L'ampiezza di probabilità di trovare lo stato  $\langle f|$  nello stato finale (cioè l'ampiezza di probabilità di osservare lo stato  $\langle f|$  a seguito dell'interazione) è dunque

$$\langle f|S|i\rangle.$$

Considerando solo il primo termine dello sviluppo il risultato è nullo se  $|f\rangle \neq |i\rangle$  e pari a 1 se  $|f\rangle = |i\rangle$ . In altre parole il primo termine dello sviluppo descrive la propagazione di una particella libera, non soggetta a interazioni. Tale stato non può cambiare nel tempo, dunque nello stato finale si osserva con probabilità 1 quello iniziale. La probabilità di osservare uno stato finale diverso è nulla.

Il termine successivo dello sviluppo si scrive come

$$i \int dt \langle f|V(x)|i\rangle.$$

In questo caso l'operatore  $V$  deve contenere un operatore di distruzione delle particelle nello stato  $i$  e un operatore di distruzione di quelle nello stato  $f$  (che a sinistra agisce come un operatore di creazione), oltre ad almeno un altro campo che rappresenta l'interazione. Per semplicità supponiamo che nello stato finale siano presenti particelle dello stesso tipo di quelle presenti nello stato iniziale. Possiamo perciò scrivere  $V$  come  $V = \Phi^\dagger A \Phi$ , dove  $\Phi$  è l'operatore che descrive il campo delle particelle e  $A$  quello che descrive il campo dell'interazione. Ciascuno dei campi può contenere operatori di creazione e distruzione di particelle, che indichiamo con i segni  $+$  e  $-$ , rispettivamente. Il prodotto dà luogo a otto possibili combinazioni:

$$\begin{aligned}
(\Phi^+ + \Phi^-)^\dagger (A^+ + A^-) (\Phi^+ + \Phi^-) = & \Phi^{+\dagger} A^+ \Phi^+ + \\
& \Phi^{+\dagger} A^+ \Phi^- + \\
& \Phi^{+\dagger} A^- \Phi^+ + \\
& \Phi^{+\dagger} A^- \Phi^- + \\
& \Phi^{-\dagger} A^+ \Phi^+ + \\
& \Phi^{-\dagger} A^+ \Phi^- + \\
& \Phi^{-\dagger} A^- \Phi^+ + \\
& \Phi^{-\dagger} A^- \Phi^- .
\end{aligned}$$

Consideriamo solo il primo termine e supponiamo che il campo  $\Phi$  rappresenti elettroni e  $A$  rappresenti fotoni. L'operatore  $\Phi^+$  crea elettroni, l'operatore  $A^+$  crea fotoni, mentre l'operatore  $\Phi^{+\dagger}$  crea elettroni se applicato a destra di un *bra* e distrugge elettroni se applicato a sinistra di un *ket*.

Quando si applica l'operatore  $A^+\Phi^+$  a uno stato  $|i\rangle$ , questo diventa  $|i, e^-, \gamma\rangle$ , cioè uno stato in cui, oltre alle particelle già presenti, compaiono un elettrone e un fotone (indicato con la lettera  $\gamma$ ). Applicando successivamente l'operatore  $\Phi^{+\dagger}$  si distrugge un elettrone, che può essere presente nello stato  $|i\rangle$  oppure può essere quello creato dall'applicazione del primo operatore.

In definitiva abbiamo un operatore che nel caso più semplice crea uno stato nel quale è comparsa una nuova particella (il fotone), senza modificare lo stato di quelle già esistenti nello stato iniziale. È del tutto ovvio che questa situazione è impossibile perché non si conserverebbe nulla: energia, momento angolare, impulso, etc.. Ripetendo analoghe analisi sugli altri sette operatori si trova sempre lo stesso risultato. In sostanza tutte le ampiezze di transizione determinate dal termine al primo ordine dello sviluppo perturbativo devono essere nulle.

Il termine successivo nello sviluppo è più complesso. Per poterlo scrivere agevolmente si ricorre al teorema di Wick, il quale afferma che il prodotto di  $N$  operatori si può sempre scrivere come un prodotto *normale*  $N(O_1 O_2 \cdots O_N)$  di tutti gli operatori più tutti i possibili prodotti normali ottenuti *contraendo* a coppie gli operatori  $O_i$ . Un prodotto di operatori si dice *normale* quando questi sono ordinati in modo da avere tutti gli operatori di distruzione a destra e tutti quelli di creazione a sinistra. Una contrazione tra due operatori  $O_i$  e  $O_j$  consiste nella loro sostituzione con lo scalare  $\langle 0|T(O_i O_j)|0\rangle$  dove  $T$  rappresenta l'operatore di ordinamento temporale. Lo scalare  $\langle 0|T(O_i O_j)|0\rangle$  si chiama *propagatore* perché rappresenta l'ampiezza di probabilità che, avendo creato uno stato con l'operatore  $O_j$  dal vuoto, questo si propaghi fino a un punto in cui viene distrutto dall'operatore  $O_i$ .

Nel nostro caso abbiamo dunque che il prodotto  $V(x)V(x')$  si scrive come la somma di diversi termini. Scriviamo

$$V(x)V(x') = \Phi^\dagger(x)A(x)\Phi(x)\Phi^\dagger(x')A^\dagger(x')\Phi(x').$$

Sviluppando ogni operatore come somma di operatori di creazione e distruzione

si può scrivere l'operatore  $V(x)V(x')$  come la somma di  $8 \times 8$  operatori. Usando il teorema di Wick possiamo ridurre il numero di prodotti da valutare ordinando opportunamente gli operatori di creazione e distruzione ed eseguendo le contrazioni.

Invece di analizzare tutte le possibilità, facciamo una scelta e vediamo a quali conseguenze porta. Sarà poi facile generalizzare ai casi meno particolari. Supponiamo che  $\Psi(x) = \Psi^+(x)$ , sia cioè un operatore di creazione di elettroni, analogamente a  $\Psi(x')$ . Sia anche  $A(x) = A^-(x)$  e  $A(x') = A^+(x')$ . Ricordiamo che se  $\Psi^+(x)$  è un operatore di creazione, l'operatore  $\Psi^{+\dagger}(x)$  è un operatore di distruzione. Dal teorema di Wick abbiamo dunque che il prodotto normale di tutti gli operatori si scrive come

$$A^+(x')\Phi^+(x)\Phi^+(x')A^-(x)\Phi^{+\dagger}(x)\Phi^{+\dagger}(x')$$

Nel punto  $x$  quest'operatore distrugge un fotone ( $A^-(x)$ ), crea un elettrone ( $\Psi^+(x)$ ) e ne distrugge un altro ( $\Psi^{+\dagger}(x)$ ). Nel punto  $x'$  invece crea un fotone e un elettrone e distrugge un elettrone. Nessuno di questi due processi conserva il quadrimpulso. Il primo di essi rappresenta l'assorbimento di un fotone da parte di un elettrone (nello stato iniziale devono esserci un elettrone con una data energia e un fotone, mentre nello stato finale ci deve essere solo un elettrone). Detto  $P_e = (\vec{p}_e, E_e)$  il quadrimpulso dell'elettrone prima dell'assorbimento,  $P_\gamma = (\vec{p}_\gamma, p_\gamma)$  quello del fotone e  $P'_e$  quello dell'elettrone nello stato finale abbiamo che

$$m_e^2 + 2P_e P_\gamma = m_e^2,$$

che non ammette soluzione, se non che  $P_\gamma = 0$ . D'altra parte l'operatore è semplicemente il prodotto di due operatori di ordine 1 che agiscono rispettivamente nei punti  $x$  e  $x'$  e abbiamo visto che questi danno sempre contributo nullo.

Il termine successivo dello sviluppo di Wick si ottiene contraendo due operatori tra quelli presenti. Cominciamo col vedere cosa succede se si contraggono i due operatori di fotone:  $\langle 0|A^-(x)A^+(x')|0\rangle = \Pi_\gamma(x - x')$ . Il propagatore così ottenuto rappresenta un fotone che si propaga da  $x'$  a  $x$ . Abbiamo infatti l'operatore  $A^+(x')$  che crea dal vuoto un fotone, il quale viene distrutto nel punto  $x$  dall'altro operatore. L'operatore che ne risulta è

$$\Pi_\gamma(x - x')\Phi^+(x)\Phi^+(x')\Phi^{+\dagger}(x)\Phi^{+\dagger}(x')$$

In questo caso nel punto  $x$  viene creato e distrutto un elettrone, così come in  $x'$ . Nel momento in cui in  $x'$  un elettrone viene distrutto si produce anche un fotone che si propaga fino al punto  $x$  e viene quindi distrutto, là dove avviene la creazione e la distruzione di un altro elettrone. In altre parole si tratta di un processo nel quale nello stato iniziale ci sono due elettroni (uno in  $x$  e l'altro in  $x'$ ), così come nello stato finale. Gli elettroni dello stato finale possono avere uno stato diverso da quello iniziale, ma emergono dagli stessi punti nei quali sono *scomparsi* gli elettroni dello stato iniziale. Si tratta in sostanza di un fenomeno di diffusione di elettroni. Durante questo fenomeno un fotone viene

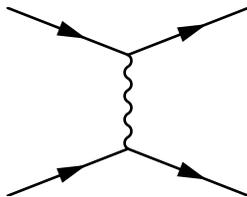


Figure 1: Un diagramma di Feynman che illustra la reazione di diffusione  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ .

emesso e riassorbito. Per questo diciamo che l'interazione che provoca in questo caso l'allontanamento dei due elettroni è il risultato della mediazione di una particella, che nella fattispecie è il fotone  $\gamma$  che possiamo pensare essere emesso da uno degli elettroni in  $x'$  e assorbito dall'altro in  $x$  o viceversa. Il singolo processo è vietato per la conservazione del quadrimpulso, ma complessivamente è permesso perché nello stato finale si trovano comunque due elettroni (tanti quanti ne sono presenti nello stato iniziale). Il fotone scambiato è inosservabile e pertanto si può ammettere che localmente si verifichi una violazione  $\Delta E$  del principio di conservazione dell'energia purché questa avvenga in un tempo  $\Delta t$  tale che  $\Delta t \leq \hbar/\Delta E$ .

Possiamo rappresentare il processo graficamente come in Figura 1, nella quale i punti  $x$  e  $x'$  sono i vertici nei quali convergono le linee che rappresentano gli elettroni (quelle continue con le frecce) e quella che rappresenta il fotone (la linea ondulata). Lo stato iniziale in questo caso è a sinistra della figura, mentre quello finale si trova a destra.

Se si ruota il diagramma di  $90^\circ$  in senso orario, assumendo sempre che il tempo scorra da sinistra a destra, possiamo interpretare il diagramma di Feynman come rappresentativo di un processo che vede un elettrone (linea continua entrante) annichilarsi con un positrone (linea continua uscente) producendo un fotone, il quale si propaga fino a che non dà origine a una nuova coppia  $e^+e^-$  (o una qualunque altra coppia come  $\mu^+\mu^-$ ). Dall'equazione di Dirac, infatti, i positroni sono come elettroni che si propagano indietro nel tempo. L'operatore di creazione dei positroni è il complesso coniugato dell'operatore di distruzione degli elettroni.

Il diagramma di Feynman, dunque, è a tutti gli effetti uno strumento di calcolo e a partire da esso si possono scrivere le ampiezze di transizione dei processi rappresentati. Non si tratta dunque di una mera rappresentazione pittorica di ciò che accade, né, a essere precisi, di una fedele rappresentazione di quanto avviene a livello microscopico. In effetti è impossibile osservare il fenomeno descritto dal diagramma in tutti i suoi dettagli perché, per poter avvenire, il fotone scambiato tra gli elettroni deve esistere per un tempo brevissimo, tale da consentire una violazione del principio di conservazione dell'energia nei due vertici:  $\Delta t \leq \Delta E/\hbar$ . Dunque possiamo *interpretare* il diagramma dicendo che l'interazione tra particelle avviene attraverso lo scambio di una particella *me-*

*diatore* che funge da mezzo di trasporto della forza. In fisica delle particelle dunque le forze sono rappresentate da particelle che possono essere scambiate tra le particelle di materia. Mentre queste ultime sono sempre fermioni, i mediatori delle forze devono essere bosoni, sia per rispettare la conservazione del momento angolare e degli altri numeri quantici, sia perché è necessario poterne produrne in quantità e in stati arbitrari. I fotoni sono i mediatori della forza elettromagnetica. Per la forza debole si sono scoperti tre mediatori: i bosoni  $W^\pm$  e  $Z$ . La forza forte agisce attraverso otto mediatori detti gluoni, indicati genericamente attraverso la lettera  $g$ . Si suppone che un meccanismo analogo esista per l'interazione gravitazionale, ma non è mai stato osservato un *gravitone*.

In sostanza l'uso dei diagrammi di Feynman permette di calcolare le ampiezze di transizione dei processi fisici senza dover calcolare l'elemento di matrice più generale possibile. Ricorrendo al teorema di Wick si procede in senso inverso: prima si disegna il diagramma del processo cui si è interessati e da esso si calcola l'ampiezza di probabilità di transizione, che si ottiene dalla somma di uno o più termini nello sviluppo di Wick della matrice  $S$ . Gli altri termini sono nulli, o perché qualche legge di conservazione lo impone oppure perché rappresentano un processo diverso.

Il calcolo dei diagrammi di Feynman esula dagli scopi di questo corso. L'importante, in questo caso, è comprenderne la natura, il significato e lo scopo. È importante, in particolare, il fatto che il diagramma non rappresenta una descrizione fedele del processo microscopico, ma un mezzo di calcolo che, tuttavia, consente di interpretare i fenomeni che si osservano come se avvenissero proprio come descritto dai diagrammi.

È anche importante notare che lo stesso processo può avvenire attraverso più di un diagramma. In questo caso, per calcolare la probabilità di transizione, si devono sommare le ampiezze relative a tutti i diagrammi ed elevare al quadrato il risultato.

## 2 Strumenti per lo studio delle interazioni.

Per studiare un fenomeno fisico è necessario definire le grandezze operative che lo descrivono. Nel caso delle interazioni delle particelle con la materia quello che si vuole studiare è la frequenza con la quale si osservano tali interazioni, che può dipendere da diverse grandezze fisiche come l'angolo di emissione dei prodotti della reazione e l'energia della particella incidente su un bersaglio.

Supponiamo di avere un fascio di particelle di densità uniforme, composto di  $N_b$  particelle. Il numero  $dN_b$  di particelle del fascio che subiranno un'interazione nell'attraversare una lastra infinita di materiale di spessore  $dx$  sarà proporzionale

- al numero di particelle originariamente nel fascio  $N_b$ ;
- allo spessore della lastra  $dx$ ;
- alla densità dei centri diffusori del materiale di cui è fatta la lastra  $N_t/V$ .

In formule:

$$dN_b = -N_b \frac{N_t}{V} \sigma dx = -N_b \sigma \rho dx, \quad (1)$$

dove abbiamo definito  $\rho = N_t/V$  e introdotto la costante di proporzionalità  $\sigma$  che si chiama *sezione d'urto* e il segno  $-$  indica che il numero di particelle nel fascio diminuisce a seguito dell'interazione. Osserviamo fin da subito che  $dN_b$ ,  $N_b$  e  $N_t$  sono tutti adimensionali, perciò la sezione d'urto deve avere le dimensioni di una superficie essendo  $[V] = [L^3]$  e  $[dx] = [L]$ . L'unità di misura della sezione d'urto è il *barn* che si indica con la lettera  $b$ :  $1 b = 10^{-24} \text{ cm}^2$ .

La sezione d'urto è in principio funzione dell'energia della particella incidente e delle caratteristiche di questa e del bersaglio, così come può dipendere dall'angolo solido  $\Omega$  entro il quale si osservano i prodotti della reazione. In generale  $\sigma = \sigma(E, \Omega)$  per cui si introduce la sezione d'urto differenziale  $d\sigma/d\Omega$  tale che

$$\sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega.$$

Essendo  $d\Omega = d \cos \theta d\phi$  ed essendo le interazioni invarianti per rotazioni, possiamo integrare in  $\phi$  e scrivere

$$\sigma(E) = 2\pi \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d \cos \theta.$$

La sezione d'urto di una reazione è legata alla probabilità con la quale la stessa si verifica. Non bisogna però confondere la sezione d'urto con la probabilità: le dimensioni fisiche non sono le stesse e la sezione d'urto non rispetta le regole della normalizzazione proprie della probabilità.

Possiamo integrare la relazione (1) per separazione di variabili ottenendo

$$\frac{dN_b}{N_b} = -\sigma \rho dx,$$

da cui si ricava che il numero di particelle  $N_b(x)$  sopravvissute nel fascio dipende dallo spessore  $x$  attraversato ed è dato da

$$N_b(x) = N_b(0) e^{-\rho \sigma x} = N_b(0) e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad (2)$$

avendo definito  $\lambda = (\rho \sigma)^{-1}$ , detto *cammino libero medio* o *lunghezza d'interazione*.  $\lambda$  ha infatti le dimensioni di una lunghezza. L'equazione 2 stabilisce che il numero di particelle in un fascio diminuisce esponenzialmente con l'aumentare dello spessore del bersaglio. Il rapporto  $N_b(x)/N_b(0)$  rappresenta la frazione di particelle rimaste nel fascio dopo aver attraversato un bersaglio di spessore  $x$  ed è un numero compreso tra 0 e 1. Dal punto di vista frequentistico questo numero rappresenta la probabilità di transizione: è infatti il numero di particelle interagenti diviso il numero totale di particelle. È questa grandezza dunque che esprime la probabilità d'interazione, che si può calcolare attraverso la meccanica quantistica.

### 3 Calcolo della probabilità di transizione.

Supponiamo di disporre di uno stato qualunque descritto dalla funzione d'onda  $\Psi(t)$ . Tale stato è sempre esprimibile come una sovrapposizione di autostati dell'Hamiltoniana libera  $\phi_n$ , la dipendenza temporale essendo solamente nel fattore di fase e nei coefficienti  $c_n$  che rappresentano i pesi relativi con cui ciascuna autofunzione entra nella descrizione dello stato:

$$\Psi(t) = \sum_n c_n(t) \phi_n e^{-iE_n t}. \quad (3)$$

Le autofunzioni  $\phi_n$  sono soluzione dell'equazione agli autovalori

$$H\phi_n = E_n\phi_n, \quad (4)$$

mentre la funzione  $\Psi(t)$  è soluzione dell'equazione di Schroedinger in cui sia presente un potenziale d'interazione  $V$ :

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = (H + V)\Psi(t).$$

Sostituendo l'espressione (3) nell'equazione sopra scritta si ottiene

$$i\frac{\partial}{\partial t} \sum_n c_n(t) \phi_n e^{-iE_n t} = (H + V) \sum_n c_n(t) \phi_n e^{-iE_n t}.$$

da cui

$$\begin{aligned} i \sum_n \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} \phi_n e^{-iE_n t} + \sum_n c_n(t) E_n \phi_n e^{-iE_n t} = \\ \sum_n c_n(t) H \phi_n e^{-iE_n t} + \sum_n c_n(t) V \phi_n e^{-iE_n t}. \end{aligned}$$

Usando l'equazione (4) quest'ultima equazione diventa

$$i \sum_n \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} \phi_n e^{-iE_n t} = \sum_n c_n(t) V \phi_n e^{-iE_n t}.$$

Moltiplichiamo ora per l'autofunzione  $\phi_k^*$  a sinistra:

$$i \sum_n \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} \phi_k^* \phi_n e^{-iE_n t} = \sum_n c_n(t) \phi_k^* V \phi_n e^{-iE_n t}.$$

Siccome le autofunzioni sono normalizzate in modo che  $\phi_k^* \phi_n = \delta_{kn}$ , solo un termine sopravvive nella prima somma e si ha

$$i \frac{\partial c_k(t)}{\partial t} e^{-iE_k t} = \sum_n c_n(t) \phi_k^* V \phi_n e^{-iE_n t} = \sum_n c_n(t) M_{kn} e^{-iE_n t},$$

in cui abbiamo introdotto l'elemento di matrice  $M_{kn} = \phi_k^* V \phi_n$ . Moltiplichiamo entrambi i membri per  $e^{iE_k t}$  e integriamo:

$$c_k = -i \int \sum_n c_n M_{kn} e^{-i(E_n - E_k)t} dt.$$

Se inizialmente avevamo uno stato quasi puro di autostati  $n$  si ha  $c_n \simeq 1$  e per effetto della normalizzazione tutti gli altri coefficienti devono essere nulli (o comunque molto piccoli). L'integrando si riduce a un solo addendo e, indicando con  $\Delta E$  la differenza  $E_n - E_k$ :

$$\begin{aligned} c_k &\simeq -i \int c_n M_{kn} e^{-i(E_n - E_k)t} dt = \frac{1}{E_n - E_k} M_{kn} \left( e^{-i(E_n - E_k)t} - 1 \right) = \\ &= -\frac{M_{kn}}{\Delta E} (1 - e^{-i\Delta E t}) = \frac{M_{kn}}{\Delta E} e^{-i\frac{\Delta E}{2}t} \left( e^{i\frac{\Delta E}{2}t} - e^{-i\frac{\Delta E}{2}t} \right) = \\ &= -i M_{kn} e^{-i\frac{\Delta E}{2}t} \frac{\sin \frac{\Delta E}{2}t}{\frac{\Delta E}{2}}. \end{aligned}$$

Il modulo quadro di quest'espressione dà la probabilità di trovare lo stato  $k$  nello stato finale al tempo  $t$ . La probabilità  $W$  di osservare la transizione allo stato  $k$  dunque è data da

$$W = \frac{1}{t} \int |c_k(t)|^2 dN = \frac{1}{t} \int |c_k(t)|^2 \frac{dN}{dE} dE,$$

dove  $dN$  è il numero di stati finali con energia  $k$  e  $dN/dE$  è detto densità degli stati. Sostituiamo a  $c_n(t)$  la sua espressione ed eseguiamo l'integrazione per sostituzione, ponendo

$$x = \frac{\Delta E}{2} t$$

$$W = \frac{1}{t} |M_{kn}|^2 \int \frac{\sin^2 x}{x^2} t^2 \frac{dN}{dE} \frac{2}{t} dx.$$

In quest'espressione le variabili  $t$  si semplificano tutte tra loro, la densità degli stati si può portare fuori dal segno d'integrazione e resta un integrale notevole il cui valore è dato da  $\pi$  per cui

$$W = 2\pi |M_{kn}|^2 \frac{dN}{dE}.$$

La densità degli stati si calcola osservando che l'impulso di una particella limitata in un volume cubico di lato  $L$  è quantizzato e vale

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z),$$

da cui

$$dn_x = \frac{L}{2\pi} dp_x$$

e analogamente per  $dn_y$  e  $dn_z$ . Essendo  $dN = dn_x dn_y dn_z$  si ha

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p,$$

avendo indicato con  $V$  il volume della scatola. Possiamo dunque scrivere la probabilità di transizione come

$$W = 2\pi |M_{kn}|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{dE}. \quad (5)$$

L'elemento di matrice  $M_{kn}$  è quello che si calcola usando i diagrammi di Feynman. Si noti che il valore di  $W$  alla fine non dipenderà, come può sembrare, dal volume di normalizzazione  $V$ . Questo non sarebbe accettabile. In effetti la relazione che lega  $d^3p$  a  $d^3n$  impone che le funzioni d'onda delle particelle (i campi che compaiono all'interno di  $M_{kn}$ ) siano normalizzate in modo tale che  $|M_{kn}|^2 \propto V^{-1}$ , cosicché la dipendenza da  $V$  scompare.

## 4 Decadimenti.

Alcune particelle, come ad esempio il muone, non sono stabili, ma decadono spontaneamente in altre particelle. La probabilità di transizione, in questo caso, è costante e si può scrivere

$$dN = -NW dt,$$

essendo il numero di particelle che scompare  $dN$  proporzionale alle particelle iniziali  $N$  e al tempo trascorso  $dt$ . Integrando per separazione di variabili si ottiene

$$N(t) = N(0)e^{-Wt} = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}},$$

con  $\tau = W^{-1}$  detto tempo di vita medio. La relazione sopra scritta indica che il tasso di decadimento è tale per cui, dato un campione di  $N$  particelle, dopo un tempo  $\tau$  ne saranno rimaste una frazione  $1/e$ . Quando si dice che il muone ha una vita media di circa  $2 \mu s$ , dunque, non si intende che tutti i muoni decadono trascorso tale tempo dalla loro produzione, ma che il numero di muoni che decade nel corso del tempo segue una legge esponenziale con parametro  $\tau \simeq 2 \mu s$ .

## 5 Radiazioni ionizzanti.

In meccanica quantistica il comportamento ondulatorio e quello corpuscolare coesistono nel medesimo oggetto. Pertanto per radiazione si intende un fascio di particelle che investe un bersaglio. Le radiazioni ionizzanti sono costituite di particelle elettricamente cariche.

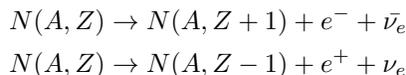
I raggi cosmici sono un'abbondante sorgente di radiazioni ionizzanti. Questi sono costituiti per lo più di protoni e, per una frazione minore dell'1%, di nuclei

piú pesanti. Questi, detti raggi cosmici primari, colpiscono continuamente gli strati alti dell'atmosfera producendo reazioni nucleari che danno luogo a una molteplicità di particelle (raggi cosmici secondari) che si propaga verso il suolo. La maggior parte di esse, essendo instabile, decade in volo o interagisce ulteriormente con l'atmosfera, producendo a sua volta altre particelle o venendo assorbite. Al suolo giungono soltanto muoni, neutrini a una piccola frazione di elettroni e fotoni, che in questo corso trascureremo perchè poco abbondante. I neutrini interagiscono solo debolmente con la materia e dunque, a tutti gli effetti pratici, la loro presenza si può trascurare completamente. I muoni sono prodotti per lo piú dal decadimento di  $\pi$  carichi, a loro volta prodotti dai raggi cosmici primari. Al suolo si misurano dell'ordine di 100 muoni al secondo per metro quadro.

I muoni perdono energia nella materia per ionizzazione trasferendo energia agli elettroni della materia di cui è costituito il bersaglio.

Possiamo classificare le altre sorgenti di radiazioni ionizzanti in base al meccanismo di produzione: radiazioni  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$ .

Le radiazioni  $\beta$  sono costituite di elettroni e prendono il nome dall'omonima reazione nucleare che in molti casi avviene spontaneamente per cui un nucleo  $N(A, Z)$  di numero atomico  $Z$  e peso atomico  $A$  si trasforma in un altro nucleo con l'emissione di elettroni (positroni) e neutrini, secondo le reazioni

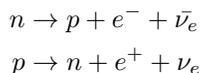


Le radiazioni  $\alpha$  consistono nell'emissione di un nucleo di elio (particella  $\alpha$ ) da parte di un nucleo pesante. La radiazione  $\alpha$  è particolarmente complessa dal punto di vista dei processi elementari che danno luogo a questo fenomeno.

Le radiazioni  $\gamma$  non sono propriamente radiazioni ionizzanti, essendo costituite di fotoni. Tuttavia spesso si annoverano tra queste perché danno luogo a fenomeni di natura elettromagnetica strettamente legati a quelli cui sono soggetti le particelle cariche.

## 5.1 Radiazioni $\beta$ .

Come detto nel capitolo precedente le radiazioni  $\beta$  sono costituite di elettroni prodotti in reazioni di decadimento nucleari. I processi elementari che danno luogo alla reazione sono



La prima di queste due reazioni si può osservare direttamente e ha un tempo di decadimento  $\tau = 925$  s. La seconda può avvenire soltanto nei nuclei perché il protone è piú pesante del neutrone. Nei nucleo atomici la reazione è resa possibile dal fatto che la massa dei costituenti del nucleo può essere alterata dal cosiddetto *difetto di massa*, cioè dall'energia di legame tra i nucleoni.

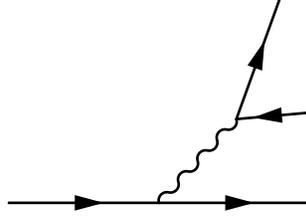


Figure 2: Diagramma di Feynmane del decadimento  $\beta$ . Un quark  $d$  emette un bosone  $W$  che a sua volta decade in  $e\nu$ .

A livello ancor piú elementare la reazione di decadimento del neutrone si interpreta come la trasformazione, ad opera dell'interazione debole, di un quark  $d$  in un quark  $u$ . Il neutrone, infatti, costituito dai quark  $(d, d, u)$  diventa un protone  $(d, u, u)$  se un  $d$  decade in  $u$ . La reazione prevede lo scambio di un bosone  $W$ , come nel diagramma di Figura 2.

Lo spettro dei raggi  $\beta$  emessi dai nuclei si calcola in maniera piuttosto semplice, usando la relazione (5). Nel caso in esame abbiamo tre particelle nello stato finale, gli impulsi delle quali però non sono tutti indipendenti. Nel calcolare il fattore di densità degli stati dunque bisognerà prendere in considerazione l'impulso dell'elettrone  $\mathbf{p}_e$  e quello del neutrino  $\mathbf{p}_\nu$ . L'elemento di matrice si può considerare costante, perché la transizione avviene praticamente solo e sempre nel canale che stiamo studiando.

Siccome in questo caso abbiamo due impulsi indipendenti nello stato finale  $W$  è funzione di due variabili perciò

$$dW = 2\pi|M_{kn}|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_e d^3p_\nu}{dE}, \quad (6)$$

dove  $E$  è l'energia a disposizione dello stato finale, data dalla differenza tra l'energia iniziale e quella finale del nucleone che transisce da uno stato all'altro. Consideriamo la reazione di decadimento del neutrone in un nucleo atomico (la reazione di trasmutazione del protone è del tutto analoga). Per la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$E_\nu + E_e + E_p = E,$$

con ovvio significato dei simboli. Siccome il protone che resta nel nucleo è praticamente fermo possiamo porre  $E_p \simeq 0$ . da cui  $E_\nu = E - E_e$  e  $dE_\nu = dE$ . Poiché per il neutrino  $m_\nu \simeq 0$  si ha  $p_\nu \simeq E_\nu$ , da cui  $dp_\nu = dE$ . Mettiamoci in un sistema di riferimento polare:

$$d\phi = \frac{d^3p_e d^3p_\nu}{dE} = \frac{p_e^2 d\Omega dp_e p_\nu^2 d\Omega dp_\nu}{dE}$$

e integriamo sull'angolo solido, sostituendo a  $dE_\nu$  e  $p_\nu$  le loro espressioni:

$$d\phi = (4\pi)^2 \frac{p_e^2 dp_e (E - E_e)^2 dE}{dE} \propto p_e^2 (E - E_e)^2 dp_e.$$

Il numero di transizioni che si osservano in un determinato intervallo di tempo e con un dato volume di atomi è evidentemente proporzionale a  $dW$ . Se riportiamo in un istogramma la radice del numero di transizioni in cui l'impulso dell'elettrone è  $p_e$ , diviso per  $p_e^2$ , ci aspettiamo dunque che esso sia proporzionale a  $(E - E_e)^2$

$$\sqrt{\frac{N(p_e)}{p_e^2}} \propto (E - E_e).$$

Quindi l'istogramma si presenta come una retta il cui coefficiente angolare è negativo e che incontra l'asse delle ascisse nel punto di energia  $p_e \simeq E$  pari alla differenza di energia tra il nucleo iniziale e finale. Un tale grafico prende il nome di grafico di Kurie. Da questo grafico si comprende che sono favoriti i decadimenti in cui il rapporto sopra detto è piccolo. Il corrispondente spettro d'impulso degli elettroni è tale da presentare un massimo piuttosto largo tra  $p_e = 0$  e  $p_e = p_{MAX} \simeq E$ .

Le sorgenti di radiazione  $\beta$  piú comunemente usate sono il  $^{60}Co$ , che emette elettroni di energia massima  $E = 0.545$  MeV, il  $^{137}Cs$  che ha due emissioni  $\beta$ , una con  $E = 0.514$  MeV e l'altra con  $E = 1.176$  MeV, lo  $^{90}Sr$ , in cui  $E = 0.546$  MeV e il  $^{22}Na$  che è un emettitore  $\beta^+$ , cioè emette positroni.

I positroni emessi dal sodio annichilano immediatamente con la materia circostante e producono tipicamente due o tre fotoni  $\gamma$ . Il processo di annichilazione tra particella e antiparticella è descritto piú avanti. L'annichilazione in due fotoni è particolarmente interessante in fisica sanitaria perché in questo processo i fotoni sono monocromatici e hanno  $E_\gamma = m_e c^2 = 0.511$  MeV e sono emessi in direzione opposte l'uno rispetto all'altro. Il processo è sfruttato nell>PET (*Positron Emission Tomography*), una tecnica di diagnostica per immagini che si basa sulla rivelazione dei fotoni emessi dall'annichilazione. Correlando la posizione e i tempi di arrivo dei fotoni si può infatti ricostruire il punto dal quale sono stati emessi con grande precisione. Nella PET si usa inserire degli emettitori  $\beta^+$  ( $^{11}C$ ,  $^{13}N$ ,  $^{15}O$ , etc.) in molecole che si fissano ai tessuti biologici di interesse. In essi danno luogo alle annichilazioni che sono quindi rivelate da appositi strumenti.

## 5.2 Radiazioni $\alpha$

La radiazione  $\alpha$  consiste nell'emissione, da parte di un nucleo, di una particella composta da due neutroni e due protoni, cioè di un nucleo di elio. Si tratta dunque dell'emissione di una particella di carica  $+2$ .

La trattazione teorica del processo è complessa perché è dovuta a un misto di interazioni forti ed elettromagnetiche, per le quali (in particolare per le prime) lo sviluppo perturbativo non è ammesso dal momento che la costante di accoppiamento è grande. Per descrivere il fenomeno si ricorre a modelli nei quali il nucleo

è trattato come un fluido oppure come una semplice buca di potenziale, che può essere attraversata dalla particella  $\alpha$  per effetto tunnel. Per questa ragione lo spettro delle radiazioni  $\alpha$  è monoenergetico, essendo determinato unicamente dallo spessore della barriera di potenziale che trattiene la particella nel nucleo.

Le particelle  $\alpha$  sono molto pesanti e hanno carica elettrica doppia rispetto alla maggior parte delle altre particelle che si possono impiegare in fisica sanitaria. Grazie a queste caratteristiche sono particolarmente adatte, come si vede nel Capitolo 6.1, a produrre una forte ionizzazione, limitata in estensione, attraverso il mezzo attraversato. Si possono dunque impiegare, in fisica sanitaria, per trattare le cellule tumorali: la forte ionizzazione localizzata prodotta provoca la distruzione di queste, infatti.

Tra le sorgenti  $\alpha$  più comuni ci sono il  $^{228}\text{Th}$ , l' $^{241}\text{Am}$  e il  $^{252}\text{Cf}$ . Le energie tipiche dell'emissione  $\alpha$  sono di diversi MeV.

### 5.3 Radiazioni $\gamma$

I fotoni sono le particelle che rappresentano la radiazione elettromagnetica, il cui spettro di frequenze è vastissimo. Per radiazione  $\gamma$  si intende, in genere, solo la porzione di spettro che va dai raggi X e si estende fino ai raggi gamma. La radiazione X, dal punto di vista elettromagnetico classico, è un'onda di frequenza compresa tra i  $10^{16}$  e i  $10^{19}$  Hz, ma è più opportuno trattarla come l'emissione di fotoni di energia compresa tra 0.1 e 100 keV, circa. I raggi gamma, invece, consistono nell'emissione di fotoni di altissima energia, che va dal centinaio di keV in su.

I fotoni  $\gamma$  possono essere emessi nelle transizioni nucleari, quando un nucleo passa da un livello energetico eccitato a un livello di energia più stabile, come nel caso del decadimento del  $^{60}\text{Co}$ , che, dopo essersi trasformato in uno stato eccitato di  $^{60}\text{Ni}$  per decadimento  $\beta$ , passa attraverso l'emissione di due fotoni  $\gamma$ , nello stato stabile.

Un buon numero di fotoni  $\gamma$  si riscontra anche nei raggi cosmici, per lo più frutto dello sviluppo di sciami elettromagnetici, descritti nel Capitolo 8.

Anche nelle reazioni nucleari nelle quali una particella accelerata colpisce un bersaglio si possono produrre  $\gamma$  in grandi quantità perché in esse sono prodotti, grazie all'interazione forte, un gran numero di  $\pi$ , tra cui i  $\pi^0$  neutri che decadono molto rapidamente, praticamente nel 100 % dei casi, in due fotoni, che nel sistema di riferimento del  $\pi^0$  hanno una massa pari a  $m_\pi/2 \simeq 70$  MeV.

Un modo molto efficace di produrre raggi  $\gamma$  e X è rappresentato dal fenomeno della *bremsstrahlung*, o radiazione di frenamento, consistente nell'emissione, da parte di una particella carica soggetta a forti accelerazioni, di fotoni di alta energia. Il fenomeno della *bremsstrahlung* è trattato in dettaglio nel Capitolo 6.4. Tale fenomeno si sfrutta per la realizzazione di impianti per le radiografie a raggi X nei quali in un tubo a vuoto sono accelerati elettroni che, urtando contro una piastra metallica (di solito di tungsteno), sono fortemente decelerati ed emettono radiazione elettromagnetica nella banda X. Un'altra applicazione tecnologica del fenomeno della *bremsstrahlung* consiste nell'uso della radiazione di sincrotrone. I sincrotroni sono acceleratori circolari nei quali elettroni di alta

energia sono costretti a muoversi lungo una traiettoria curva subendo dunque un'accelerazione centripeta. A causa di questa accelerazione gli elettroni emettono radiazione elettromagnetica molto collimata, in direzione tangente alla traiettoria. L'energia della radiazione dipende dall'energia delle particelle. Di solito si situa nella regione compresa tra i raggi X e i raggi  $\gamma$  e si può impiegare per l'analisi e le lavorazioni meccaniche di precisione dei materiali o per l'esecuzione di scintigrafie ad alta risoluzione temporale e spaziale, grazie alla grande intensità.

## 6 Interazioni delle particelle cariche con la materia

Le particelle costituenti la radiazione (siano esse ionizzanti o meno) danno luogo a diversi fenomeni quando attraversano un mezzo. In particolare il mezzo attraversato può essere rappresentato dal tessuto biologico di un paziente e pertanto l'interazione delle particelle con la materia risulta di particolare interesse per il fisico sanitario.

La maggior parte dei fenomeni cui va incontro una particella ionizzante nell'attraversare un mezzo è dovuta all'interazione elettromagnetica e si può spesso trattare usando l'elettromagnetismo classico, sebbene per raggiungere risultati più precisi sia necessario far ricorso alla meccanica quantistica.

### 6.1 Perdita di energia per ionizzazione

Tutte le particelle elettricamente cariche che attraversano un mezzo subiscono una serie di interazioni di tipo elettromagnetico interagendo con gli elettroni e i nuclei del mezzo, che sono elettricamente carichi. Attraverso queste interazioni cedono parte della loro energia cinetica al mezzo stesso, che quindi subisce il fenomeno della ionizzazione. In questo contesto il termine ionizzazione indica sia la perdita di un elettrone da parte di un atomo, per cui l'elettrone diventa libero di muoversi, sia il passaggio a uno stato eccitato, per cui l'elettrone non è completamente libero di muoversi, ma risulta comunque meno legato.

Per calcolare la perdita di energia per ionizzazione da parte di una particella carica consideriamo una particella di carica  $ze$ , che si muova con velocità  $v$  lungo l'asse orizzontale. Nell'attraversare un mezzo essa interagisce per lo più con gli elettroni degli atomi che lo compongono. La carica elettrica di questi, infatti, scherma la carica elettrica dei nuclei, che si trovano a grande distanza da essi, rispetto alle dimensioni del nucleo stesso. Supponiamo dunque che la particella incidente passi a distanza  $b$  da un elettrone, la cui carica è  $e$ .

Sia l'elettrone che la particella subiscono una variazione del loro impulso  $\Delta P$  che per l'elettrone vale

$$\Delta P = \int F dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}, \quad (7)$$

dove  $E_{\perp}$  rappresenta la componente perpendicolare alla direzione di moto della particella del campo elettrico prodotto da quest'ultima. La componente parallela, infatti, nell'integrale lungo l'intero percorso della particella, si annulla per simmetria.

La componente perpendicolare del campo elettrico si calcola usando il teorema di Gauss, prendendo come superficie di Gauss un cilindro con l'asse coincidente con la traiettoria della particella incidente e come base un cerchio di raggio pari a  $b$ . Sempre per ragioni di simmetria il contributo al flusso del campo elettrico attraverso la superficie di Gauss viene solo dalla superficie laterale del cilindro:

$$\int E_{\perp} 2\pi b dx = 4\pi z e ,$$

da cui si ricava che

$$\int E_{\perp} dx = \frac{2ze}{b} ,$$

che sostituita nell'equazione (7) dà

$$\Delta P = 2 \frac{ze^2}{bv} .$$

L'energia trasferita dalla particella incidente all'elettrone del mezzo è dunque

$$\Delta E = \frac{\Delta P^2}{2m} = 2 \frac{z^2 e^4}{b^2 v^2 m} , \quad (8)$$

dove  $m$  rappresenta la massa dell'elettrone. Nell'attraversare uno spessore  $dx$  di un mezzo con una densità  $N_e$  di elettroni per unità di volume, la perdita di energia  $-dE$  della particelle incidente per effetto della ionizzazione degli atomi presenti in una corona cilindrica di spessore  $db$  e raggio  $b$  è dunque

$$-dE = \Delta E N_e dV = \Delta E N_e 2\pi b db dx = 2 \frac{z^2 e^4}{b^2 v^2 m} N_e 2\pi b db dx$$

Per ottenere la perdita di energia per unità di percorso dobbiamo integrare sull'intero volume, perciò in  $db$ . I limiti d'integrazione però non vanno da 0 a  $\infty$ , ma da una distanza  $b_{min}$  a una distanza  $b_{MAX}$ , per ragioni che sono illustrate nel seguito. Ammettendo per ora che ciò sia vero avremo

$$-dE = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} N_e \int \frac{db}{b} dx = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} N_e \log \frac{b_{MAX}}{b_{min}} dx$$

Spieghiamo ora l'esistenza dei limiti. La massima energia trasferibile  $E_M$  all'elettrone da parte di una particella molto più pesante è data da

$$E_M = \frac{1}{2} m (2v)^2 \gamma ,$$

il fattore di Lorentz  $\gamma$  essendo presente per velocità relativistiche. Imponendo che  $\Delta E$  (data dall'equazione (8)) sia minore di questo valore si ottiene

$$\frac{1}{b_{min}} \simeq v^2.$$

Il fatto che  $b < b_{MAX}$  è invece dovuto al fatto che per grandi parametri d'impatto la particella incidente non riesce sostanzialmente a vedere la carica delle particelle lontano, perché schermata dalle particelle più vicine.

La perdita di energia per unità di percorso è dunque data dalla meccanica classica da

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{mv^2} N_e \log \frac{b_{MAX}}{b_{min}}.$$

Bethe e Bloch hanno calcolato la perdita di energia per ionizzazione usando un modello più raffinato e facendo ricorso alla meccanica quantistica, trovando un'espressione più accurata, ma sostanzialmente simile:

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \log \left( \frac{2m\gamma^2 \beta^2 W_M}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right],$$

in cui  $N_A$  è il numero di Avogadro,  $r_e$  è il raggio classico dell'elettrone,  $\rho$  la densità del mezzo attraversato,  $Z$  e  $A$  sono rispettivamente il numero atomico e il peso atomico di questo,  $W_M$ ,  $C$ ,  $\delta$  e  $I$  sono costanti e  $\beta$  è la velocità della particella espressa in unità della velocità della luce  $c$ .

È utile mettere in luce alcune proprietà della formula di Bethe-Bloch.

- La perdita di energia per ionizzazione è proporzionale a  $\pi r_e^2$ , cioè all'area efficace dell'elettrone. Per quanto detto all'inizio di queste dispense, il processo di diffusione non si deve intendere come un vero e proprio urto contro una superficie, rigida, ma la proprietà di cui sopra in qualche modo dice che gli urti avvengono mediamente quando il parametro d'impatto è dell'ordine del raggio classico dell'elettrone.
- La perdita specifica  $dE/dx$  è proporzionale a  $Zz^2$ . L'interazione tra una carica  $z$  e una carica  $e$ , per quanto visto sopra, produce un termine  $z^2$ . Se ci sono  $Z$  elettroni tale termine è moltiplicato per  $Z$ . Il fatto che la ionizzazione vada come  $z^2$  comporta che le particelle  $\alpha$ , ad esempio, producano una ionizzazione quattro volte superiore a quella di un protone.
- La perdita specifica  $dE/dx$  è proporzionale a  $\rho/A$ . Essa infatti deve essere proporzionale al numero di centri diffusori, che è dato dalla densità di questi  $dn/dV$  diviso la loro massa  $m_d$ . Tanto maggiore è la densità del materiale tanti più centri diffusori saranno presenti, per cui  $dn/dV \propto \rho$  e tanto maggiore è il peso atomico del materiale tanto più alta è la massa dei centri diffusori  $m_d \propto A$ .
- La perdita di energia per ionizzazione è inversamente proporzionale a  $\beta^2$ . Come abbiamo visto quando una particella che si muove con velocità  $v$  trasferisce energia a un elettrone, la quantità di energia trasferita è proporzionale a  $1/v^2$ .

- Anche nella formula di Bethe–Bloch è presente un termine logaritmico che va come  $\log(\beta^2/I^2)$ . Anche nel caso classico avevamo trovato che  $b_{min} \simeq v^{-2}$ , per cui ci si aspetta che la perdita di energia specifica cresca come il logaritmo del quadrato della velocità della particella incidente. Avevamo anche indicato l'esistenza di un parametro massimo d'impatto che nella formula di Bethe–Bloch è rappresentato da  $I$  detto potenziale medio di ionizzazione, che vale circa  $10 Z$  eV.

Riportando su un grafico la perdita di energia per ionizzazione in funzione della velocità  $v = p/m = \beta\gamma$  della particella incidente si nota che per basse velocità il  $dE/dx$  tende a infinito, ma decresce rapidamente come  $\beta^{-2}$ , per raggiungere un minimo intorno a  $\beta\gamma \simeq 3$  e poi risalire lentamente, grazie al termine logaritmico.

La perdita di energia misurata in unità di spessore equivalente d'acqua  $dE/\rho dx$ , espressa dunque in  $\text{MeV g}^{-1}\text{cm}^2$  è abbastanza indipendente dalla natura del materiale. Infatti dipende soltanto dal rapporto  $Z/A$  che è piuttosto costante e pari a circa 0.5 per tutte le specie atomiche, a eccezione dell'idrogeno per cui vale 1. Mediamente, una particella al minimo di ionizzazione, di carica  $\pm 1$ , perde circa  $1 \text{ MeV g}^{-1}\text{cm}^2$ . Essendo il processo di tipo stocastico, le perdite di energia possono fluttuare attorno a tale valore medio. La distribuzione statistica si presenta di forma approssimativamente gaussiana con una lunga coda sulla destra e prende il nome di distribuzione di Landau. La forma della distribuzione suggerisce che le perdite di energia più probabili conducano a una cessione di energia leggermente inferiore al valor medio.

L'effetto provocato nei tessuti umani dalla ionizzazione consiste nell'eccitazione degli atomi costituenti il tessuto. In alcuni casi, quando la perdita di ionizzazione risulta molto grande (quindi nei casi descritti dalla coda della distribuzione di Landau) la ionizzazione può causare l'estrazione di uno o più elettroni dagli atomi i quali si trovano in condizioni energetiche instabili. Inoltre gli elettroni estratti possono a loro volta ionizzare il materiale circostante. La forte ionizzazione può provocare la rottura dei legami chimici e quindi il collasso delle strutture molecolari delle cellule interessate che possono dunque smettere di funzionare provocando la morte della cellula. Per questa ragione si può impiegare il fenomeno della ionizzazione per il trattamento dei tumori: causando una ionizzazione localizzata nei tessuti tumorali si riesce a ucciderne le cellule senza danneggiare apprezzabilmente i tessuti circostanti.

## 6.2 Range.

Quando una particella perde energia, la sua velocità diminuisce. Al diminuire della velocità, come abbiamo visto, aumentano le perdite di energia per ionizzazione. Le perdite si fanno molto forti quando l'energia della particella scende sotto il valore corrispondente al minimo di ionizzazione, cioè quando si appresta a fermarsi.

Una particella di una data energia iniziale  $E_0$  dunque, appena penetra in un materiale, comincia a perdere energia fino ad arrestarsi. Lo spazio percorso si chiama *range* e dipende sia dalla natura della particella che dalla sua energia.

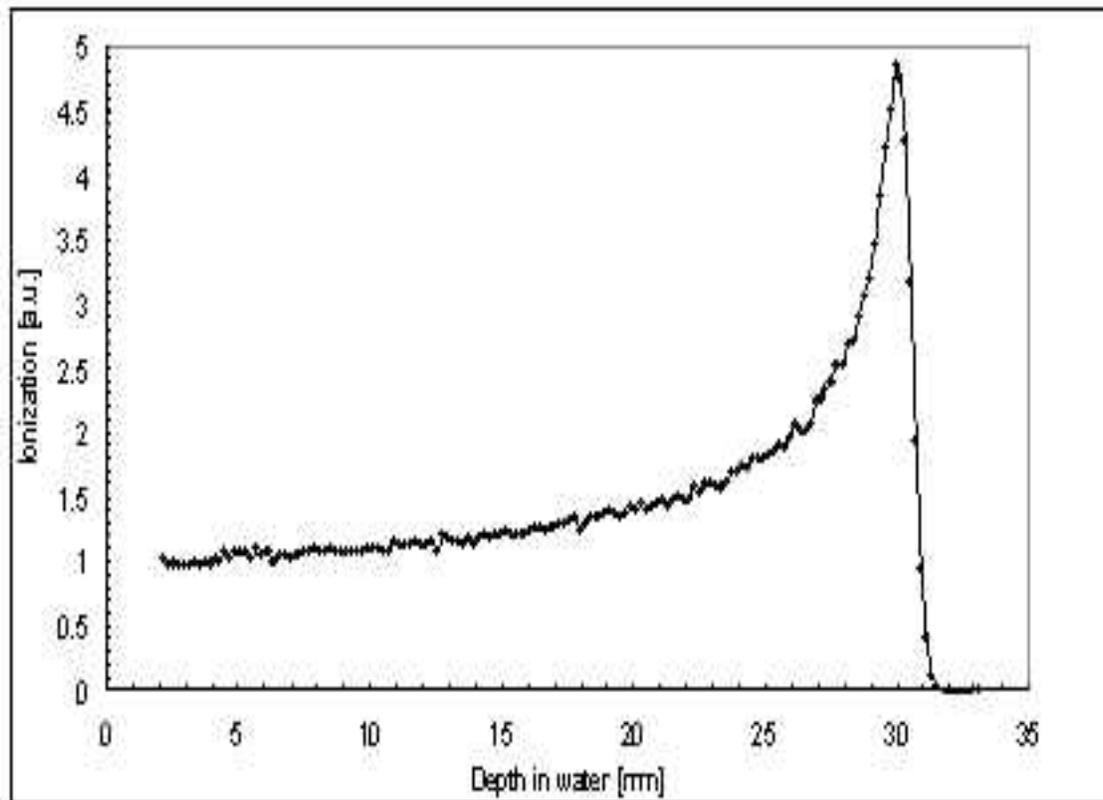


Figure 3: Ionizzazione dovuta al passaggio di una particella carica in funzione della profondità

Il range, misurato in unità di  $\text{g cm}^{-2}$ , è abbastanza indipendente dal materiale, essendo la dipendenza solo nel rapporto  $Z/A$  che è piuttosto costante per i materiali più pesanti dell'idrogeno, e nel potenziale di ionizzazione  $I$  che però si trova nel termine logaritmico.

La perdita di energia per ionizzazione lungo il percorso presenta perciò un andamento caratteristico, come quello mostrato in Figura 3. A energie relativamente alte le perdite si possono considerare quasi costanti (con una leggera diminuzione all'aumentare della profondità raggiunta). Superato il minimo di ionizzazione le perdite si fanno molto più intense e la particella si arresta dopo un breve tratto. Il picco a destra della figura rappresenta proprio il caso in cui una particella si trova sotto al minimo di ionizzazione al termine del suo range e presenta una notevole intensità di ionizzazione. Tale picco prende il nome di *picco di Bragg*.

Il range  $R$  delle particelle cariche dipende dalla massa di queste. In effetti,

detta  $K$  l'energia cinetica della particella carica, e indicando con il pedice  $in$  i valori iniziali,

$$R = \int dx = - \int_0^{K_{in}} \frac{dK}{\left(\frac{dK}{dx}\right)} = \int_0^{K_{in}} \frac{dK}{f(\beta)} = \int_0^{\beta_{in}} \frac{\frac{dK}{d\beta} d\beta}{f(\beta)}.$$

Per definizione  $\gamma = E/m$  e dunque l'energia cinetica  $K = m(\gamma - 1)$ . Differenziando si ottiene

$$\frac{dK}{d\beta} = \frac{dK}{d\gamma} \frac{d\gamma}{d\beta} = m \frac{d\gamma}{d\beta} = mg(\beta)$$

e sostituendo

$$R = \int_0^{\beta_{in}} \frac{\frac{dK}{d\beta} d\beta}{f(\beta)} = m \int_0^{\beta_{in}} \frac{g(\beta)}{f(\beta)} d\beta = mF(\beta_{in}).$$

La presenza del picco di Bragg nella distribuzione della ionizzazione specifica è alla base dei trattamenti sanitari radioterapici con adroni. Supponendo infatti di dover trattare un tumore a una profondità  $d$ , si possono inviare su di essi adroni il cui range è proprio pari a  $d$ , in modo tale che, nel corso della loro penetrazione, essi rilascino una quantità modesta della loro energia sui tessuti sani, e concentrino tutto il loro potere ionizzante nel punto d'interesse.

### 6.3 Diffusioni Coulombiane.

Una particella carica incidente su un mezzo può interagire, invece che con gli elettroni del mezzo, con i nuclei. In questo caso, se il nucleo è sufficientemente pesante, l'interazione si può rappresentare con un potenziale  $V(r)$  e la probabilità di transizione, data dalla (6), si scrive tenendo conto che l'elemento di matrice è dato da

$$M_{kn} = \int \psi_n^* V(r) \psi_k dV$$

dove  $\psi_i$  sono le funzioni d'onda della particella nello stato iniziale ( $i = k$ ) e finale ( $i = n$ ) rispettivamente. Nel termine di spazio delle fasi è presente solo l'impulso della particella finale. Siccome stiamo assumendo che il nucleo sia infinitamente pesante rispetto alla particella, l'energia iniziale e finale della particella sarà la stessa: solo il suo impulso cambia. Detti  $\mathbf{p}_i$  e  $\mathbf{p}_f$  gli impulsi iniziale e finale della particella incidente, l'impulso trasferito ad essa dal nucleo è

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f.$$

La sezione d'urto può dipendere solo da questo. La forma esatta della sezione d'urto si calcola, al solito, usando le regole di Feynman, ma in questo caso è facile stabilirne l'andamento. La sezione d'urto differenziale  $d\sigma/dq^2$ , infatti, ha le dimensioni di una superficie diviso un impulso al quadrato. In unità naturali ( $c = 1$  e  $\hbar = 1$ ) le distanze si misurano in unità di energia inversa, mentre

gli impulsi in unità di energia. Dunque la sezione d'urto differenziale ha le dimensioni di  $E^{-4}$ . Siccome deve dipendere solo da  $\mathbf{q}$ , deve essere una costante divisa per  $q^4$ , con  $q = |\mathbf{q}|$ . Si ottiene così immediatamente il risultato in termini dell'angolo di diffusione  $\theta$  della particella, infatti

$$q^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f \cos \theta \simeq 2p_i^2 - 2p_i^2 \cos \theta = 2p_i^2(1 - \cos \theta) = 2p_i^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Il fattore di spazio delle fasi introduce un termine  $p_i^2 dp_i / dE \simeq p_i^2$ , per cui, globalmente

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \simeq \frac{1}{p_i^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Dunque una particella carica, interagendo con i nuclei del materiale, subisce in continuazione deviazioni rispetto alla sua direzione originaria. Le deviazioni a piccolo angolo sono più probabili. Anche in questo caso si tratta di un processo stocastico. Nel piano individuato dalla direzione della particella prima e dopo la diffusione, la probabilità di essere diffusa in una direzione è uguale a quella di essere diffusa nella direzione opposta, perciò il moto complessivo è del tutto simile a un *random walk* e la distribuzione finale degli angoli di diffusione al termine di un cammino di lunghezza  $l$  è una gaussiana centrata in zero con una deviazione standard  $\sigma(\theta) \simeq \sqrt{l} = \sqrt{\frac{t}{X_0}}$ , dove  $t$  è lo spessore attraversato in unità di *lunghezza di radiazione*  $X_0$ , una lunghezza caratteristica del mezzo la cui definizione esatta è data più sotto. In sostanza  $X_0$  incorpora la dipendenza dal tipo di materiale. Più precisamente l'angolo medio di diffusione è nullo e la sua deviazione standard è data da

$$\sigma(\theta) = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta p} z \sqrt{\frac{t}{X_0}}.$$

La dipendenza dalla velocità della particella  $p\beta$  si comprende perché l'ampiezza dell'angolo di diffusione a ogni collisione dipende da  $p^{-2}$ , ma è tanto più piccola quanto maggiore è la massa della particella incidente. Nel derivare l'andamento della sezione d'urto abbiamo trascurato questo elemento che però può diventare importante per masse relativamente grandi. Ad esempio, i muoni, che pesano circa 200 volte più di un elettrone, sono diffusi mediamente meno rispetto a questi ultimi.

## 6.4 Perdita di energia per irraggiamento.

Le cariche elettriche, sottoposte ad accelerazione, irraggiano onde elettromagnetiche, secondo la teoria classica dell'elettromagnetismo. In meccanica quantistica questo fenomeno si traduce nell'emissione di fotoni, talvolta di alta energia, come raggi X o  $\gamma$ .

L'irraggiamento da parte delle cariche elettriche accelerate è descritto dalla formula di Larmor, che deriviamo qui per una carica  $q$  in moto con velocità

$v$  lungo l'asse  $z$ :  $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ . A distanza  $r$  dalla carica si osserva un campo elettromagnetico. Dalla soluzione generale delle leggi di Maxwell si ricava che il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  prodotto da questa carica in moto è

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\mathbf{v} \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

cioè il campo prodotto nel punto a distanza  $r$  è quello corrispondente alla velocità della carica all'istante precedente  $t - r/c$ . Siccome la velocità ha componenti solo lungo  $z$ , il campo magnetico prodotto  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  ha la componente  $B_z = 0$ . La componente  $B_x$  si ricava da

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} q \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v \left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right).$$

La derivata ha due termini: il primo è la derivata di  $v$  rispetto a  $y$  divisa per  $r$ , che vale

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v \left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{1}{rc} \frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{a}{c} \frac{y}{r^2}$$

e il secondo è  $v$  volte la derivata di  $r^{-1}$  rispetto a  $y$ ,  $-y/r^3$ . Complessivamente

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} q \left( - \frac{ay}{cr^2} - \frac{vy}{r^3} \right).$$

Il secondo addendo non è altro che il campo prodotto da una corrente di intensità  $qv$ . Il primo addendo invece si osserva solo quando la carica è accelerata. È questo termine che causa l'irraggiamento, cioè l'emissione di un campo elettromagnetico aggiuntivo a quello che si osserva per una carica in moto rettilineo uniforme, che si propaga anche lui a velocità  $c$ . Calcoliamo dunque l'intensità del campo irraggiato. Per evidenti ragioni di simmetria  $B_y$  si scrive come  $B_x$  in cui al posto della  $y$  si mette la  $x$ . Il modulo quadro del campo magnetico totale si trova sommando i quadrati delle due componenti e vale

$$|B|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \left( \frac{a^2 R^2}{c^2 r^4} \right),$$

dove  $R^2 = x^2 + y^2$ . Se chiamiamo  $\theta$  l'angolo polare nel sistema di assi cartesiani ortogonali centrato sulla carica in moto abbiamo

$$R = r \sin \theta,$$

per cui possiamo riscrivere

$$|B|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \left( \frac{a^2 \sin^2 \theta}{c^2 r^2} \right).$$

La densità di energia trasportata da questo campo, mediata su tutti gli angoli, si trova moltiplicando  $|B|^2$  per  $\epsilon_0 c^2 / 2$  e facendo la media di  $\sin^2 \theta$ . Per fare quest'ultima osserviamo che

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \langle 1 - \cos^2 \theta \rangle = 1 - \frac{\langle x^2 \rangle}{r^2}.$$

Su un guscio sferico centrato sulla carica  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle = r^2/3$ , e dunque  $\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{2}{3}$ . Perciò il valor medio della densità d'energia  $U$  su tale guscio è

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4} \left( \frac{2}{3} \frac{a^2}{c^2 r^2} \right) = \frac{q^2 a^2}{48\pi^2 \epsilon_0 c^4 r^2}.$$

L'energia  $dE$  contenuta nel guscio sferico di raggio  $r$  e spessore  $cdt$  si ottiene moltiplicando  $U$  per il volume del guscio:

$$dE = U 4\pi r^2 c dt = \frac{q^2 a^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} dt.$$

Questa è l'energia associata al campo magnetico. Naturalmente ce ne sarà altrettanta associata al campo elettrico, che pure sarà prodotto, perciò complessivamente la potenza  $W$  irradiata sotto forma di onde elettromagnetiche è

$$W = \frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3},$$

che è detta formula di Larmor. Quando abbiamo ricavato il campo magnetico abbiamo implicitamente assunto che l'accelerazione fosse diretta lungo  $z$  e abbiamo osservato che il campo prodotto è perpendicolare alla direzione del moto, dunque anche all'accelerazione. Non è difficile immaginare che, se l'accelerazione è diretta in modo diverso, il campo irradiato sarà sempre diretto perpendicolarmente a essa. Per esempio, se la carica percorre una traiettoria circolare attorno a un asse  $z$  l'accelerazione è centripeta e il campo è irraggiato tangenzialmente alla traiettoria.

La distribuzione dell'energia irradiata dunque è simmetrica e ricorda quella di un dipolo (Figura 4), avendo una distribuzione del tipo  $\sin^2 \theta$ , per cui l'emissione è massima per  $\theta = \pi/2$ . Se però la carica si muove ad alta velocità, la trasformazione di Lorentz aumenta l'irraggiamento in direzione del moto che risulta molto più intenso lungo questa direzione. Si osserva dunque una forte anisotropia nella direzione di moto della particella. Il campo inoltre è irraggiato nella direzione perpendicolare all'accelerazione perciò il risultato è un fascio di luce tangente alla direzione di moto della particella irradiante e diretto nel verso di questa (Figura 5). La configurazione cinematica dello stato finale si comprende bene usando la conservazione della quantità di moto: se la particella subisce una variazione della sua quantità di moto ortogonalmente alla sua traiettoria originale, per la conservazione di questa occorre che venga emessa una particella in direzione opposta alla variazione, in modo da lasciare invariata la quantità di moto originale.

Queste osservazioni permettono di realizzare sorgenti di raggi X e  $\gamma$  abbastanza collimate. Nei comuni dispositivi per le radiografie, ad esempio, un

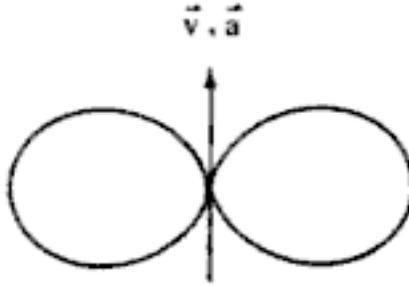


Figure 4: La distribuzione dell'energia irradiata da una carica che si muove lungo la direzione verticale, accelerata nella stessa direzione.

fascio di elettroni è accelerato da una differenza di potenziale  $V$  e inviato su un bersaglio, tipicamente di tungsteno. Nell'urto gli elettroni si arrestano e irradiano preferenzialmente in corrispondenza di un angolo  $\theta > 0$  rispetto al loro moto iniziale. Lo spettro che si osserva è uno spettro continuo la cui energia massima è  $E_M = eV$ . Poiché l'energia di un fotone è legata alla sua frequenza dalla relazione  $E = h\nu$  si ha che i fotoni emessi hanno una frequenza massima  $\nu_M = \frac{eV}{h}$  o, il che è lo stesso, una lunghezza d'onda minima  $\lambda_m = \frac{hc}{eV}$ .

La distribuzione in energia, per un bersaglio sottile, si può considerare piatta per energie comprese tra 0 ed  $E_M$ . Se si usa un bersaglio spesso, si può dividere questo in tante fette sottili. Quando la particella carica irradia fotoni evidentemente perde energia, cedendola ai fotoni irradiati, e all'uscita di ogni fetta la particella ha energia più bassa e quindi il valore della massima energia irradiabile diminuisce sempre più. La distribuzione dell'energia dei fotoni emergenti dunque è diversa all'uscita di ogni strato ed è la somma di distribuzioni rettangolari il cui limite destro diminuisce sempre di più, come nella Figura 6.

Complessivamente la forma dello spettro atteso è dunque triangolare. Tuttavia i fotoni di più bassa energia sono riassorbiti dallo stesso materiale, dunque si osserverà un taglio sulla sinistra, come nella Figura 7.

Da questa figura si vede come, all'aumentare della differenza di potenziale, la frequenza massima si sposti verso destra. I picchi che si osservano nello spettro sono caratteristici del materiale del bersaglio e corrispondono alla radiazione emessa dagli elettroni del materiale che *cadono* da un livello energetico più elevato a uno più basso dopo che la radiazione incidente abbia estratto uno degli elettroni più interni. Questi fotoni sono evidentemente monocromatici.



Figure 5: La distribuzione dell'energia irradiata da una carica che si muove a velocità relativistica lungo la direzione verticale, che subisce un'accelerazione lungo l'asse orizzontale.

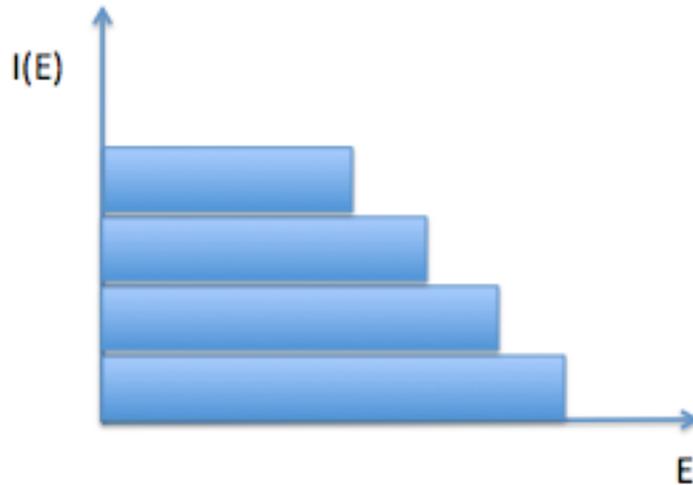


Figure 6: Spettro di emissione di fotoni per particelle di energia via via decrescente.

Negli acceleratori circolari di elettroni, invece, l'energia è irradiata secondo la distribuzione di Figura 5, cioè nella direzione di volo dell'elettrone, tangenzialmente alla sua traiettoria. In questi acceleratori le accelerazioni sono molto forti e si possono produrre anche raggi  $\gamma$  molto intensi. Il flusso di fotoni si può usare in fisica sanitaria per l'esecuzione di scintigrafie ad alta risoluzione temporale. La radiazione di sincrotrone è molto più intensa per gli elettroni che per i protoni. Se si tratta l'irraggiamento usando la cinematica relativistica si trova la formula di Larmor moltiplicata per un fattore  $\gamma^n$ , dove  $n$  dipende dall'angolo tra l'accelerazione e la velocità della particella. Per accelerazioni perpendicolari alle velocità, cioè per particelle che percorrono orbite circolari  $n = 4$ . Eseguiamo il calcolo in queste condizioni.

L'accelerazione di una particella è, nel caso relativistico, un quadri-vettore. Se  $(U)$  è la quadri-velocità di un punto materiale, la sua quadri-accelerazione è  $(a) = d(U)/d\tau$ , con  $\tau$  pari al tempo proprio della particella accelerata. A sua volta la quadri-velocità è definita come  $(U) = d(x)/d\tau$ , dove  $(x)$  rappresenta il quadri-vettore  $(t, \mathbf{x})$  (sempre in unità naturali  $c = 1$ ). Di conseguenza, le componenti della quadri-velocità sono

$$(U) = \frac{d}{d\tau}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{d\tau}(\gamma\tau, \mathbf{x}) = \left( \gamma, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) = \left( \gamma, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = \left( \gamma, \gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right),$$

Measured spectra from Atkins et al (1975).

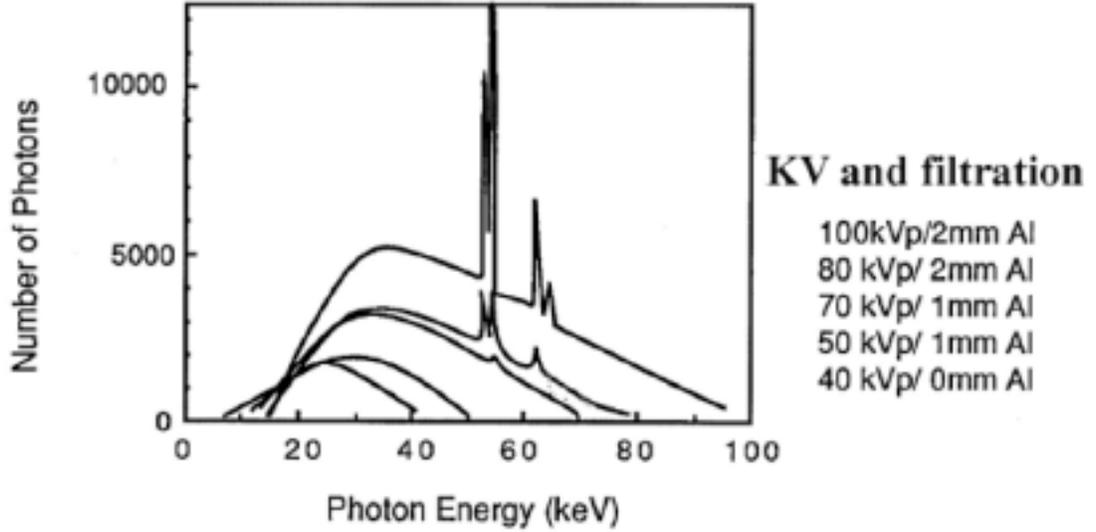


Figure 7: Lo spettro della radiazione emessa da un tubo a raggi X.

dove  $\gamma$  è il fattore di Lorentz. Essendo  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$  pari alla velocità della particella abbiamo

$$(U) = \gamma(1, \mathbf{v}).$$

L'accelerazione si ottiene derivando  $(U)$  rispetto al tempo proprio  $\tau$ . Nel sistema di riferimento in cui la particella è in quiete  $\gamma = 1$  e quindi

$$(a_0) = \frac{d(U)}{d\tau} = (0, \mathbf{a}_0)$$

dove  $\mathbf{a}_0 = d\mathbf{v}/d\tau$  rappresenta il vettore accelerazione misurato dalla particella nel suo sistema di riferimento. Nel sistema del laboratorio avremo

$$(a) = \frac{d(U)}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau}(1, \mathbf{v}) + \gamma \left( 0, \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \right).$$

La derivata di  $\gamma$  rispetto al tempo proprio è<sup>1</sup>

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{1-v^2} \frac{1}{2\sqrt{1-v^2}} 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \gamma^2 \gamma \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \gamma^3 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}$$

<sup>1</sup>Osserviamo che quando si esegue la derivata di  $v^2$ , questa non è banalmente  $2v$ , ma essendo  $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  è uguale a  $\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = 2\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \cdot \mathbf{v}$

e ricordando ancora una volta che  $\gamma = dt/d\tau$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma^4 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

La quarta componente della quadri-accelerazione è dunque

$$a_4 = \gamma^4 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^4 \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}.$$

La componente vettoriale del quadrivettore invece vale

$$\frac{d\gamma}{d\tau} \mathbf{v} + \gamma \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \gamma^4 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \gamma \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^4 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a}.$$

Imponiamo che il modulo quadro del quadri-vettore accelerazione sia un invariante:

$$(a_0)^2 = (a)^2$$

da cui segue che

$$\mathbf{a}_0^2 = |\gamma^4 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a}|^2 - \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 = \gamma^8 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 (\mathbf{v}^2 - 1) + \gamma^4 \mathbf{a}^2 + 2\gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2$$

ed essendo  $1 - \mathbf{v}^2 = \gamma^{-2}$

$$\mathbf{a}_0^2 = \gamma^4 \mathbf{a}^2 + \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2.$$

La formula di Larmor diventa dunque

$$W = \frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\gamma^4 \mathbf{a}^2 + \gamma^6 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2).$$

Se la particella segue una traiettoria circolare, come in molti acceleratori,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$  e

$$W = \frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \mathbf{a}^2,$$

che differisce da quella classica per un fattore  $\gamma^4$ .

Siccome  $\gamma = E/m$ , a parità di energia, un protone perde per irraggiamento una frazione di energia

$$R \propto \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^4 \simeq \left(\frac{1}{2000}\right)^4 \simeq 62 \times 10^{-15},$$

rispetto a un elettrone.

Una particella carica che attraversi un mezzo qualsiasi, per lo stesso motivo, perde energia, oltre che per ionizzazione, per irraggiamento. Per quanto detto sopra questo fenomeno assume una particolare rilevanza per gli elettroni e risulta trascurabile, nella maggioranza dei casi pratici di interesse per un fisico sanitario, per tutte le altre particelle, molto più pesanti dell'elettrone. La perdita di

energia per unità di percorso di un elettrone  $-dE/dx$  è proporzionale alla sua energia iniziale

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0}. \quad (9)$$

$X_0$  è una costante di proporzionalità che evidentemente dipende dalle caratteristiche del mezzo e si chiama *lunghezza di radiazione*. Dall'equazione sopra scritta si ricava che l'energia persa in media  $\langle E \rangle$  per irraggiamento nell'attraversare uno spessore  $x$  finito da parte di un elettrone di energia  $E_0$  è

$$\langle E \rangle = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}},$$

per cui  $X_0$  si può interpretare come la distanza che un elettrone deve percorrere in un mezzo per perdere una frazione  $1/e$  della sua energia iniziale. Il valore di  $X_0$  si può stimare approssimativamente per ciascun materiale come

$$X_0 \simeq 180 \frac{A}{Z^2},$$

in unità di  $\text{g cm}^{-2}$ . Per ottenere  $X_0$  in unità del sistema internazionale occorre dunque dividere il numero ottenuto per la densità. Maggiore è la densità del materiale, minore è la lunghezza di radiazione. Siccome per gli elementi più pesanti dell'idrogeno  $A \simeq 2Z$  si ha

$$X_0 \simeq \frac{1}{Z},$$

e all'aumentare del numero atomico diminuisce il valore di  $X_0$ . Da queste considerazioni si capisce che gli elementi più pesanti della tavola periodica, che hanno anche le densità più elevate, siano quelli con le lunghezze di radiazione più corta, dunque i più idonei ad assorbire l'energia delle particelle. Per i materiali composti una buona stima di  $X_0$  si ottiene facendo una media pesata delle lunghezze di radiazione di ciascun componente.

## 6.5 Energia critica.

Una particella carica che attraversa un mezzo è soggetta sia alla perdita di energia per ionizzazione che a quella per irraggiamento. La prima è descritta dalla formula di Bethe-Bloch, mentre la seconda dall'equazione (9). Ad alta energia dunque dominano le perdite di energia per ionizzazione, almeno per le particelle più leggere come gli elettroni. Man mano che l'elettrone, nell'attraversare un mezzo, perde energia, è sempre più soggetto alle perdite per ionizzazione. L'energia  $E_c$  alla quale le perdite di energia per ionizzazione sono uguali a quelle per irraggiamento si chiama *energia critica* e si può stimare, per gli elettroni, come

$$E_c = \frac{600 \text{ MeV}}{Z}.$$

Elettroni di energia molto superiore a  $E_c$  tendono a perdere la maggior parte della loro energia irradiando fotoni per bremsstrahlung. Al contrario, elettroni di bassa energia tendono a produrre ionizzazione.

## 7 Interazioni dei fotoni con la materia.

I fotoni interagiscono con la materia perché sono i mediatori dell'interazione elettromagnetica. I fenomeni prodotti dunque sono descrivibili attraverso l'elettrodinamica quantistica, esattamente come quelli prodotti dalle particelle cariche. Per la loro diversa natura però i tipi d'interazione cui danno luogo sono diversi.

### 7.1 Effetto fotoelettrico.

L'effetto fotoelettrico consiste nell'assorbimento, da parte di un elettrone legato a un atomo, dell'energia trasportata da un fotone ed è uno dei fenomeni storicamente più importanti per lo sviluppo della fisica in quanto la sua interpretazione ha consentito di dare avvio alla meccanica quantistica.

Scoperto alla fine del 1800, l'effetto si manifestava come la generazione di una debole corrente elettrica da parte di alcuni metalli illuminati da luce di alta frequenza (blu o violetta). Indipendentemente dall'intensità della luce, non si osservava effetto fotoelettrico per basse frequenze (luce gialla). All'epoca la luce era ancora interpretata come un'onda elettromagnetica e il fenomeno non era spiegabile. Infatti, se si poteva facilmente stabilire che gli elettroni venivano estratti dal metallo grazie all'energia assorbita dalla luce, non si spiegava come mai il fenomeno presentasse una dipendenza dalla frequenza della luce anziché dall'intensità. In effetti le onde trasportano energia, ma questa è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, dunque l'emissione di elettroni doveva dipendere dall'intensità della luce e non dalla frequenza.

Albert Einstein, nel 1905, propose di assumere per buona l'ipotesi di Planck che considerava la luce di frequenza  $\nu$  composta di corpuscoli di energia pari a  $h\nu$ . Così facendo l'effetto si spiega benissimo. Infatti i corpuscoli possono essere assorbiti dagli elettroni solo se hanno energia sufficiente a strapparli dall'attrazione Coulombiana del nucleo. L'energia  $E$  degli elettroni uscenti dal metallo deve dunque essere pari a

$$E = W - h\nu$$

dove  $W$  rappresenta il potenziale di estrazione tipico del metallo. In effetti questi è ciò che si osserva sperimentalmente.

Da quanto detto si evince che l'effetto fotoelettrico, consistente con l'assorbimento totale del fotone e la conseguente emissione di un elettrone, si può verificare solo se l'energia del fotone (cioè la sua frequenza) supera una certa soglia. La sezione d'urto dunque presenta una salita ripidissima in corrispondenza di questa soglia e poi diminuisce all'aumentare dell'energia del fotone perché diviene sempre meno probabile che un fotone di altissima energia venga catturato da un elettrone legato a un atomo. Attraverso l'elettrodinamica quantistica si calcola la

sezione d'urto che va come  $Z^n E^{-3}$ , dove  $E$  è l'energia del fotone incidente,  $Z$  il numero atomico del materiale assorbente e  $n \simeq 4 - 5$ .

La dipendenza da  $Z$  si ricava osservando che la sezione d'urto deve essere proporzionale al modulo quadro dell'elemento di matrice di transizione tra uno stato iniziale costituito da un elettrone legato in un atomo di numero atomico  $Z$  e uno finale in cui sono presenti un elettrone libero e un fotone libero. La funzione d'onda di un elettrone legato nell'atomo dipende dal potenziale dell'atomo e si trova che

$$\psi_i = \frac{(Ze^2m)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Ze^2mr}.$$

Osserviamo che  $[m] = [r]^{-1}$  in unità naturali e che la funzione d'onda dei fermioni ha le dimensioni di un'energia alla 3/2. In effetti le funzioni d'onda sono normalizzate in modo tale che l'integrale su tutto lo spazio della funzione per il suo complesso coniugato valga 1, perciò la funzione d'onda al quadrato ha le dimensioni di un'energia al cubo che, moltiplicata per un volume dà un numero adimensionale. Infine la funzione d'onda dell'elettrone legato deve dipendere dal potenziale  $Ze^2/r$  del nucleo e il fattore di normalizzazione può dipendere solo dalla sua massa  $m$ . La funzione d'onda dello stato finale invece è quella di un elettrone libero e quindi è un'onda piana

$$\psi_f \propto e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}.$$

L'operatore che determina  $M_{fi}$  è qualcosa che dipende dall'interazione tra l'elettrone e il fotone del campo e.m.. La sua forma si può dedurre dal fatto che un elettrone in un campo e.m. ha una quantità di moto che si scrive attraverso la sostituzione

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + ie\mathbf{A}.$$

L'energia di un elettrone in campo elettromagnetico è dunque

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} \rightarrow \frac{(\mathbf{p} + ie\mathbf{A})^2}{2m} \simeq \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + 2ie\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}.$$

Il secondo addendo rappresenta l'Hamiltoniano d'interazione tra un elettrone e un fotone e quindi è quello che va messo in  $M_{fi}$ . In definitiva abbiamo che  $M_{fi}$  è proporzionale a

$$Z^{3/2} \int dV e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} e^{-Ze^2mr}$$

e sostituendo l'operatore  $\mathbf{p}$  con  $-i\nabla$  si porta giù un ulteriore fattore  $Z$  per cui  $M_{fi} \propto Z^{5/2}$  e quindi  $\sigma \propto Z^5$ .

Gli spettri di assorbimento fotoelettrico dunque presentano generalmente un andamento decrescente con l'energia e dei picchi pronunciati in corrispondenza di ciascuna soglia.

É utile osservare che, benché l'effetto fotoelettrico coinvolga direttamente un fotone nello stato iniziale e un fotone e un elettrone nello stato finale, il diagramma di Feynman corrispondente è almeno del secondo ordine in  $\alpha$ , perché il processo  $\gamma \rightarrow \gamma e$  è proibito dalla conservazione dell'energia. Occorre almeno una quarta particella necessaria ad assorbire l'impulso trasferito, che nella pratica è l'intero atomo.

## 7.2 Effetto Compton.

L'effetto Compton consiste nella diffusione di fotoni su elettroni. La cinematica dell'effetto Compton è piuttosto semplice, assumendo inizialmente fermo l'elettrone. Per la conservazione del quadrimpulso, unità naturali, abbiamo

$$(\mathbf{p}_\gamma, E_\gamma) + (0, m_e) = (\mathbf{p}'_\gamma, E'_\gamma) + (\mathbf{p}'_e, E'_e),$$

con ovvio significato dei simboli e dove abbiamo indicato con un apice le grandezze dello stato finale. Portando a primo membro il quadrimpulso dell'elettrone nello stato finale ed eseguendo il modulo quadro si trova

$$\nu - \nu' = \frac{\nu\nu'}{m_e}(1 - \cos\theta), \quad (10)$$

da cui, dividendo per  $\nu\nu'$  si ottiene

$$\lambda - \lambda' = \frac{1}{m_e}(1 - \cos\theta).$$

Per ottenere la relazione in unità del SI basta osservare che il secondo membro deve avere le dimensioni di una lunghezza, perciò basta moltiplicarlo per  $h$  e dividerlo per  $c$ . Ricavando la frequenza  $\nu'$  dall'equazione (11) si ottiene

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{E}{m_e}(1 - \cos\theta)},$$

da cui si ricava che esiste un valore minimo dell'energia con la quale può emergere il fotone, corrispondente alla frequenza

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{E}{m_e}}.$$

Dunque un fotone non può mai perdere tutta la sua energia per effetto Compton, ma può trasferirne all'elettrone un massimo pari a una frazione  $1 + \frac{E}{m_e}$  della sua energia iniziale. Il limite superiore all'energia trasferibile si indica con il termine *Compton edge*. La sezione d'urto Compton diminuisce con l'energia come  $1/E$ .

## 7.3 Produzione di coppie.

Se l'energia del fotone  $E > 2m_e$ , questo può dare luogo al fenomeno della produzione di coppie. Attraverso la partecipazione di un nucleo, necessario a

soddisfare i principi di conservazione della quantità di moto e dell'energia, un fotone può materializzarsi in una coppia elettrone-positrone  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ .

La sezione d'urto per produzione di coppie dunque ha una soglia per  $E = 2m_e$ , al di sotto della quale non è possibile, e un andamento più o meno piatto con l'energia. Questo meccanismo dunque predomina ad alte energie.

## 8 Sciami.

Quando l'energia di adroni, fotoni ed elettroni è sufficientemente grande, questi danno luogo al fenomeno della produzione di sciami, detti *adronici* nel caso in cui siano prodotti da adroni ed *elettromagnetici* se ad originarli sono fotoni o elettroni. I due tipi di sciami si distinguono per i meccanismi di base e per le caratteristiche topologiche, che assumono forma diversa secondo il tipo di particella incidente. Elettroni e fotoni interagiscono elettromagneticamente con la materia attraverso i meccanismi sopra descritti e danno luogo agli stessi fenomeni. Gli adroni invece, oltre alla perdita per ionizzazione, subiscono l'interazione forte e possono dare luogo a reazioni nucleari nelle quali vengono prodotte numerose particelle adroniche, tra cui i  $\pi$ .

Di solito questo tipo di fenomeni non interessa molto il fisico sanitario in quanto risulta importante solo per energie relativamente alte, non in uso nei trattamenti sanitari o per la diagnosi. Tuttavia, in particolare per quanto riguarda gli sciami elettromagnetici, è utile conoscerne le caratteristiche principali.

### 8.1 Sciami elettromagnetici.

Quando un fotone di alta energia incide su un materiale pesante, l'interazione con i nuclei induce, come abbiamo visto, il fenomeno della produzione di coppie. Dopo aver percorso un tratto  $t$  di materiale, dunque, il fotone scompare e lascia il posto a un elettrone e a un positrone. Entrambe queste particelle hanno carica  $|q| = e$  e, avendo la stessa massa, danno luogo agli stessi fenomeni. In particolare, come descritto nel capitolo precedente, se l'energia è sufficientemente alta, predominano le perdite di energia per irraggiamento. Ogni elettrone (positrone), dunque irraggia un fotone e nello stato finale si contano due particelle cariche e due fotoni. Ciascuna, a sua volta, produce nuovamente i fenomeni anzidetti per quanto di competenza: i fotoni danno origine a una coppia, producendo complessivamente quattro nuove particelle cariche, e gli elettroni irraggiano, dando luogo ad altrettanti fotoni. A ogni evento l'energia delle particelle madri diminuisce e l'energia persa viene trasferita alle particelle figlie.

Questo processo va avanti fino a che i fotoni sopravvissuti non scendono sotto l'energia di soglia per la produzione di coppie  $E = 2m_e$  e fino a che gli elettroni, perdendo energia per irraggiamento, non raggiungono l'energia critica  $E_c$ , dove le perdite per ionizzazione cominciano a diventare importanti. Quando i fotoni scendono sotto l'energia di soglia vengono assorbiti per effetto fotoelettrico, mentre gli elettroni vengono termalizzati per effetto della ionizzazione.

Il risultato è uno sciame di particelle (fotoni, elettroni e positroni) che si sviluppa nel mezzo e si allunga nella direzione di volo della particella incidente per effetto della conservazione della quantità di moto.

Si può fare un modello molto semplice e tuttavia abbastanza accurato dello sviluppo dello sciame assumendo che ciascuna particella (fotone o elettrone) dia luogo a un fenomeno (produzione di coppie o bremsstrahlung) dopo aver percorso una lunghezza di radiazione  $X_0$  e che, nel fare ciò, trasferisca a ciascuna delle particelle figlie la metà della propria energia.

Il numero di particelle alla profondità  $t$  dunque sarà dato da  $N = 2^t$ , misurando  $t$  in unità di lunghezza di radiazione. Corrispondentemente l'energia di ciascuna particella giunta alla profondità  $t$  è  $E(t) = 2^{-t}E_0$ , dove  $E_0$  è l'energia della particella incidente. Lo sciame si arresta quando  $E(t) \simeq E_c$ , perciò la lunghezza dello sciame si stima osservando che deve essere

$$\ln E_c = -t_{MAX} \ln 2 + \ln E,$$

da cui

$$t_{MAX} \simeq \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{E}{E_c} \simeq 1.4 \ln \frac{E}{E_c}.$$

Dunque lo sviluppo dello sciame è logaritmico. Usando metodi più raffinati e simulazioni Monte Carlo si trovano parametrizzazioni più accurate dello sviluppo dello sciame, ma sostanzialmente in accordo con il modello semplificato.

Lo sciame, naturalmente, si sviluppa anche in senso trasversale. Grazie però al fatto che le particelle coinvolte sono in buona parte relativistiche, lo sviluppo trasversale è piuttosto contenuto. Le dimensioni trasversali di uno sciame elettromagnetico sono descritte da un parametro noto con il nome di *raggio di Molière* che rappresenta il raggio di un cilindro di lunghezza infinita all'interno del quale è contenuto il 95 % dell'energia dello sciame. Il raggio di Molière  $R_M$  dipende dal materiale attraversato e si stima con una formula empirica:

$$R_M = \frac{21 \text{ MeV}}{E_c} X_0.$$

Come si vede, il raggio di Molière è indipendente dall'energia iniziale della particella, dunque quest'ultima caratterizza solo lo sviluppo longitudinale dello sciame che risulta stretto e allungato in direzione della velocità iniziale dell'elettrone o del fotone che lo ha prodotto.

## 8.2 Sciame adronici.

Le particelle adroniche interagiscono per interazione forte. Urtando con i nuclei del materiale nel quale penetrano possono perciò dare luogo a reazioni nucleari nelle quali viene prodotto un gran numero di altre particelle, per lo più  $\pi$ . Se l'energia è sufficientemente alta, l'energia dei prodotti secondari può essere sufficiente a produrre altre reazioni nucleari e in questo modo si produce uno

sciame di particelle adroniche in maniera analoga a quanto accade per elettroni e fotoni.

Negli sciame adronici sono sempre presenti elettroni e fotoni perché i  $\pi^0$ , prodotti in abbondanza, decadono immediatamente in una coppia di fotoni che dà origine alle reazioni viste nel paragrafo precedente.

Lo sviluppo longitudinale dello sciame adronico è sempre di tipo logaritmico, ma la sua descrizione è molto più complessa e si adottano parametrizzazioni ottenute dai dati sperimentali come la parametrizzazione di Bock. La lunghezza di uno sciame adronico è sempre proporzionale al logaritmo dell'energia iniziale e si misura in *lunghezze d'interazione*  $\lambda_I$ , tipiche del materiale di cui è fatto il bersaglio.

## 9 Perdite di energia per i neutroni

I neutroni, non possedendo carica elettrica, non producono effetti di ionizzazione. Pertanto interagiscono solo debolmente con gli elettroni degli atomi del mezzo. Al contrario, possono interagire con i nuclei del bersaglio, ma anche in questo caso le interazioni, pur avendo origine dalla forza forte, non sono particolarmente intense perché la forza forte ha un range piuttosto limitato. Per interagire in maniera significativa, dunque, i neutroni devono trovarsi molto vicini ai nuclei bersaglio. Per questa ragione i neutroni di qualunque energia (tra quelle considerabili per la Fisica Medica) sono soggetti a diffusione elastica consistente nell'urto (mediato dalle interazioni forti) tra il neutrone e il nucleo bersaglio. Quando questo avviene il neutrone perde parte della sua energia cinetica, che viene ceduta al nucleo bersaglio, il quale rincula.

Per i neutroni si usa definire i seguenti regimi energetici:

Regime	Intervallo di energie
Lenti	$< 1$ meV
Termici	$< 0.5$ eV
Epitermici	$< 50$ keV
Veloci	$> 50$ keV
Medi	$> 1$ MeV
Alta energia	$> 10$ MeV

Considerando che la massa di un neutrone è dell'ordine del GeV ( $939.565379 \pm 0.000021$  MeV), si vede subito che anche neutroni di alta energia si possono considerare non relativistici, almeno sul lato sinistro dell'intervallo.

L'energia cinetica  $E$  di un neutrone che si muove con velocità  $v$  dunque si può scrivere secondo la fisica classica come

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

dove  $m$  è la massa del neutrone. Consideriamo l'urto elastico di un neutrone con un nucleo di peso atomico  $A$ , la cui massa  $M \simeq mA$ . Se il nucleo è inizialmente

fermo e l'urto è centrale, le velocità del neutrone  $u_1$  e del nucleo  $u_2$  dopo l'urto sono

$$u_1 = \frac{m - M}{m + M}v$$

e

$$u_2 = \frac{2m}{m + M}v.$$

L'energia persa dal neutrone nell'urto si scrive dunque come

$$\Delta E = E - E' = E - \frac{1}{2}m \left( \frac{m - M}{m + M} \right)^2 v^2 = E \left( 1 - \left( \frac{m - M}{m + M} \right)^2 \right)$$

Espandendo il quadrato si trova

$$\Delta E = \frac{4EmM}{(m + M)^2}$$

e considerando che  $M \simeq mA$

$$\Delta E \simeq \frac{4EA}{(1 + A)^2}.$$

Nella Figura 8 si vede la perdita di energia specifica  $\Delta E/E$  in funzione del peso atomico  $A$  del nucleo bersaglio.

Si vede subito che, all'aumentare di  $A$ , la perdita di energia diminuisce. Se quindi si vuole ottenere il massimo effetto frenante si devono usare materiali relativamente leggeri.

La diffusione dei neutroni è alla base del principio di funzionamento di alcuni rivelatori per neutroni, che misurano gli effetti di ionizzazione prodotti dal nucleo bersaglio che rincula dopo l'urto con il neutrone. Va da sé che, per essere efficienti, questi rivelatori devono essere costituiti di materiali leggeri, per favorire l'assorbimento dei neutroni e rendere massimo l'effetto di trasferimento di energia cinetica al nucleo.

L'urto può anche essere anelastico. In questo caso il nucleo bersaglio è lasciato in uno stato eccitato da cui torna allo stato fondamentale attraverso l'emissione di radiazione elettromagnetica.

In certi casi, quando il parametro d'impatto del neutrone è abbastanza piccolo, quest'ultimo può essere catturato dal nucleo bersaglio. Questo processo cambia la natura del nucleo bersaglio e provoca, solitamente, l'emissione di radiazione  $X$  o  $\gamma$  dal momento che il nucleo che così si forma è spesso in uno stato diverso da quello fondamentale. In alcuni casi il nucleo che si forma è talmente instabile che il nucleo stesso si rompe dando luogo al processo di fissione oppure all'emissione di uno o più nucleoni.

Il processo di cattura di un neutrone da parte di un nucleo bersaglio  $T$ , che dà luogo alla formazione di un nucleo  $R$ , con l'eventuale emissione di una

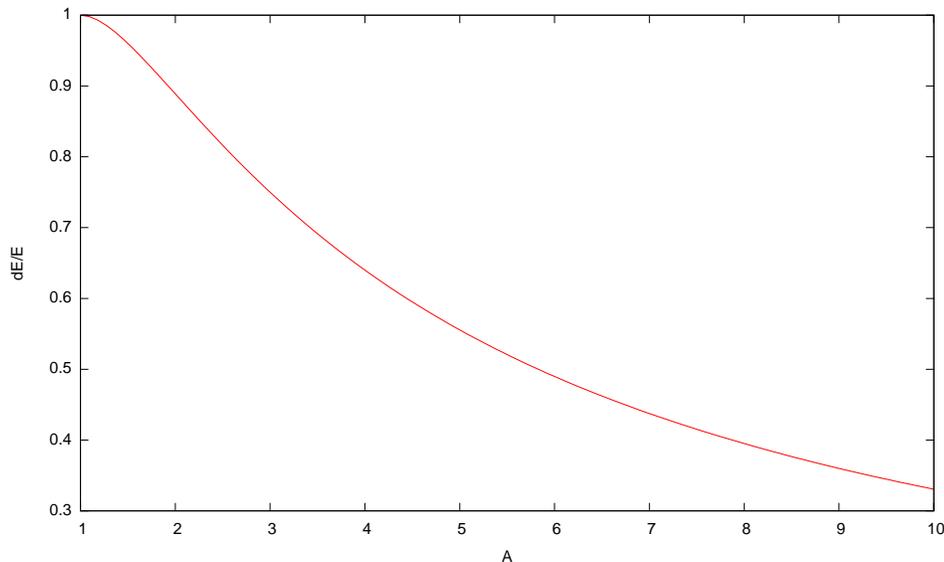
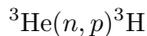


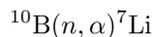
Figure 8: Perdita di energia specifica per neutroni non relativistici, nell'urto con un nucleo fermo di peso atomico  $A$ .

particella  $g$  da parte di questo si indica con  $T(n, g)R$ . Ad esempio, la cattura di un neutrone da parte di nuclei di Elio 3, si descrive come



che è un processo nel quale un nucleo di  ${}^3\text{He}$  (con 2 protoni e un neutrone) cattura un neutrone formando uno stato instabile di particella  $\alpha$  dal quale è espulso un protone. Il risultato è un nucleo formato da due neutroni e un protone (trizio  ${}^3\text{H}$ ). Il protone espulso nel processo ha un'energia di 764 keV e si può rivelare attraverso la ionizzazione prodotta. Su questo principio di basano i rivelatori a elio.

Un'altra reazione piuttosto comune è



in cui atomi di Boro (spesso in composti come  $\text{BF}_3$ ) catturano neutroni emettendo un nucleo di elio ( $\alpha$ ), trasformandosi così in Litio.

Facendo le considerazioni sulla dipendenza della sezione d'urto dalle caratteristiche del bersaglio fatte nel caso di radiazioni ionizzanti, si capisce facilmente che questa dipende abbastanza fortemente dalla densità del bersaglio. Poiché i bersagli tipici per neutroni sono leggeri e gassosi, la pressione del gas si può regolare per cambiare le caratteristiche del rivelatore.

Affinché i neutroni possano essere catturati devono avere energie cinetica relativamente modesta. In pratica neutroni con energia medio-alta ( $E \simeq 1$  MeV) provocano solo fenomeni di diffusione.

L'andamento tipico della sezione d'urto dei neutroni per urti con un materiale qualunque si può stimare ricorrendo a un semplice modello. La lunghezza d'onda di De Broglie di un neutrone di energia  $E$  è data da

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}.$$

Questa lunghezza si può interpretare come il *raggio* del neutrone. Considerando il nucleo bersaglio come un disco di raggio  $R$ , l'urto può avvenire se i due raggi si sovrappongono perciò

$$\sigma \simeq C\pi (R + \lambda)^2.$$

con  $C$  costante. Per alte energie ( $E \rightarrow \infty$ ) la sezione d'urto diventa costante. La sezione d'urto per la diffusione è quella che domina a queste energie e dunque è questo processo ad avere sezione d'urto costante, il che è ragionevole perché il fenomeno avviene indipendentemente dall'energia del neutrone, quando il neutrone passa abbastanza vicino al nucleo. A bassa energia dominano invece i termini che vanno come  $1/E$  e  $1/\sqrt{E}$ . Per

$$E \ll \frac{\hbar^2}{8mR^2} \simeq 10^{-17} \text{ eV}$$

il termine che va come  $1/E$  è molto più grande dell'altro, che invece contribuisce maggiormente per energie intermedie. Ricordando che  $E \propto v^2$ , vediamo che per energie molto basse la sezione d'urto va come  $1/v^2$  mentre per energie intermedie va come  $1/v$ . In pratica le energie dei neutroni lenti sono comunque molto maggiori di  $10^{-17}$  eV e quindi  $\sigma \propto v^{-1}$ .

La sezione d'urto di neutroni di diversa energia su un bersaglio di Uranio 235 ( $^{235}\text{U}$ ) è mostrata in Fig. 9. Si vede l'andamento generale della sezione d'urto che va come  $E^{-\frac{1}{2}}$  e si nota la presenza di diversi, numerosi picchi, detti *risonanze*.

Le risonanze sono dovute al fatto che per certi valori di energia la cattura è più probabile perché l'energia del neutrone corrisponde alla differenza di energia tra due livelli energetici diversi del nucleo atomico.

## Appendice

Nell'urto elastico tra due corpi si conservano quantità di moto ed energia. Dette  $m_{1,2}$  le masse dei due punti materiali collidenti,  $v_{1,2}$  le rispettive velocità prima dell'urto e  $u_{1,2}$  quelle dopo l'urto, nel caso di urto centrale abbiamo, per la conservazione della quantità di moto

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2)$$

e per la conservazione dell'energia

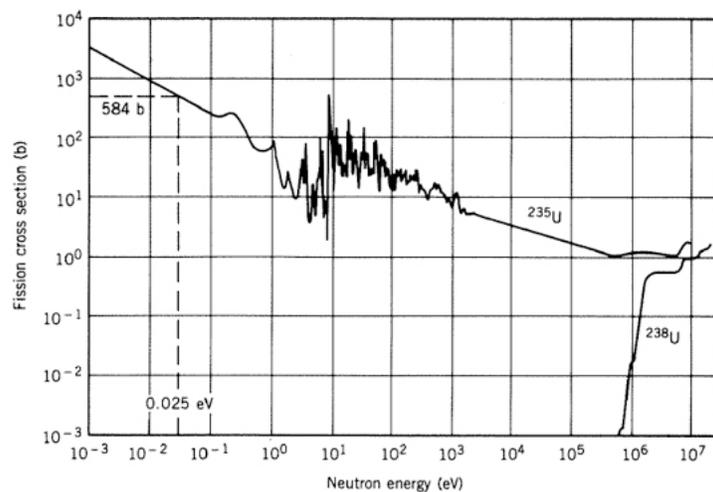


Figure 9: Andamento della sezione d'urto di cattura per neutroni di energie diverse su Uranio 235.

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) .$$

Dividendo membro a membro si ottiene

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2$$

e possiamo scrivere il sistema

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{cases}$$

che risolto dà

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$$

e

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

che, per  $v_2 = 0$ , cioè nel caso di bersaglio inizialmente fermo, diventano

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

e

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1.$$

Per  $m_1 \gg m_2$  si ha dunque che  $u_1 \simeq v_1$  e  $u_2 \simeq 2v_1$ . Quando invece è  $m_2$  a essere molto grande abbiamo  $u_1 \simeq -v_1$  e  $u_2 \simeq 0$  (il proiettile rimbalza).