Esercizio

Al Fermilab di Chicago, un fascio di protoni con $p_p =$ 400.0 GeV/c colpisce un bersaglio sottile, producendo pioni il cui impulso più probabile risulta essere p_π tale che la velocità dei pioni sia la stessa dei protoni incidenti.

1) Calcolare l'impulso p_π.

Una volta prodotti, i pioni entrano in un tunnel di lunghezza $x = 400.0$ m in cui alcuni di essi decadono secondo la reazione

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

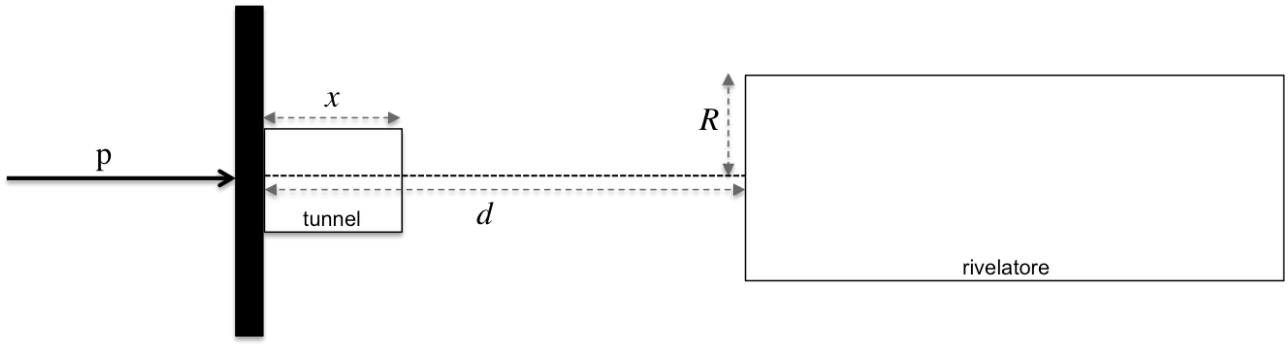
2) Calcolare la frazione dei pioni con impulso p_π che decadono nel tunnel, sapendo che il tempo di vita medio proprio dei pioni carichi è $\tau_{0\pi}$.

3) Calcolare la lunghezza del tunnel misurata da un osservatore solidale al pione.

4) Calcolare l'energia massima dei muoni nel riferimento del laboratorio.

5) Calcolare il raggio minimo R che deve avere un rivelatore cilindrico posto a distanza $d = 1.4$ km dal bersaglio, con l'asse coincidente con la direzione del fascio, affinché sia in grado di rivelare tutti i μ^+ prodotti nel tunnel.

$m_\pi = 0.1396\ \mathrm{GeV/c^2}, m_p = 0.9383\ \mathrm{GeV/c^2}, m_\mu = 0.1056\ \mathrm{GeV/c^2}, \tau_{0\pi} = 2.603 \times 10^{-8}$ s.



Soluzione

Per un protone di impulso p_p (c = 1)

$$\beta\gamma = \frac{p_p}{m_p} = \frac{400.0\ \mathrm{GeV}}{0.9383\ \mathrm{GeV}} = 426.3$$

Un π^+con lo stesso $\beta\gamma$ ha impulso

$$p_\pi = m_\pi \beta\gamma = 0.1396 \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c^2}} \times 426.3\mathrm{c} = \boxed{59.51\ \mathrm{GeV/c}}.$$

La frazione dei pioni che decadono nel tunnel è

$$1 - \frac{N(x)}{N_0} = 1 - e^{-\frac{x}{\beta c \gamma \tau_0}} = 1 - e^{-\frac{400.0\ \mathrm{m}}{426.3 \times 2.998 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times 2.603 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}}} = \boxed{11.33\ \%}.$$

Dato che

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$(\beta\gamma)^2 = \gamma^2 - 1$$

allora

$$\gamma = \sqrt{(\beta\gamma)^2 + 1} \simeq \beta\gamma \text{ e } \beta \simeq 1.$$

La lunghezza del tunnel, misurata da un osservatore solidale al pione, è

$$x' = \frac{x}{\gamma} = \frac{400.0 \text{ m}}{426.3} = \boxed{93.83 \text{ cm}}.$$

L'energia dei muoni nel sistema di riferimento del centro di massa è (c = 1)

$$E_\mu^* = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}$$

L'impulso dei muoni nel sistema di riferimento del centro di massa è (c = 1)

$$p_\mu^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}$$

L'energia massima dei muoni nel sistema di riferimento del laboratorio è (c = 1)

$$E_\mu = \gamma\left(E_\mu^* + \beta p^*\right) \simeq \gamma\left(E_\mu^* + p^*\right) = \gamma\left(\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} + \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}\right) = \gamma \times m_\pi = p_\pi = \boxed{59.51 \text{ GeV}}.$$

La velocità dei μ^+dal decadimento dei π^+ nel sistema di riferimento del centro di massa è

$$\beta_\mu^* = \frac{p_\mu^*}{E_\mu^*} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} = \frac{(0.1396^2 - 0.1056^2)\ \text{GeV}^2/\text{c}^4}{(0.1396^2 + 0.1056^2)\text{GeV}^2/\text{c}^4} = 0.272$$

Dato che la velocità del centro di massa è $\beta \simeq 1 > \beta_\mu^*$, i muoni vengono emessi tutti in avanti ed esiste un angolo massimo di emissione dei muoni θ_{max} tale che

$$\tan\theta_{\text{max}} = \frac{\beta_\mu^*}{\gamma\sqrt{\beta^2 - {\beta_\mu^*}^2}} = 6.633 \times 10^{-4}$$

Il raggio minimo R che deve avere un rivelatore cilindrico posto a distanza $d = 1.4$ km dal bersaglio affinché sia in grado di rivelare tutti i μ^+ prodotti nel tunnel è

$$R = d \times \tan\theta_{\text{max}} = 1.4 \text{ km} \times 6.633 \times 10^{-4} = \boxed{93 \text{ cm}}.$$