Compito scritto di Elettromagnetismo e di recupero degli esoneri
Proff. S. Giagu, F. Lacava, S. Rahatlou, a.a. 2015/16, 4 Luglio 2016

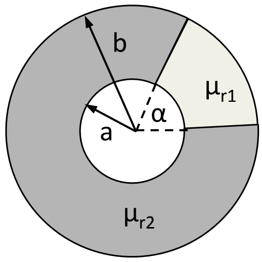
- recupero prima prova di esonero: problema 1 con domanda d); tempo a disposizione 1.5h;
- recupero seconda prova di esonero: problema 3 con domande c) e d); tempo a disposizione 1.5h;
- compito scritto: problemi 1, 2 e 3; tempo massimo a disposizione 4h;

Problema 1

Tre conduttori sferici concentrici hanno raggi $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm. Sul conduttore più interno viene posta una carica $Q = 1$ nC. Si calcoli:
a) il potenziale del conduttore più interno e la d.d.p. tra i due più esterni.
Lo spazio tra i due conduttori più esterni viene riempito con un liquido con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3.5$. Si determini:
b) il potenziale del conduttore più interno e la d.d.p. tra i due conduttori più esterni,
c) la variazione di energia elettrostatica per effetto dell'inserimento del liquido dielettrico.
Solo per il recupero dell'esonero 1 si risolva anche il seguente quesito:
d) le densità di carica di polarizzazione presenti nel dielettrico,

Problema 2

Due superfici cilindriche di lunghezza praticamente infinita e con raggi $a = 1$ cm e $b = 3$ cm, hanno come asse comune l'asse z. Su di esse, parallelamente all'asse del sistema e distribuite uniformemente sulle due superfici, scorrono due correnti uguali I = 62 A con direzioni opposte. Quella interna nella direzione positiva dell'asse z. Tra le due superfici, per un angolo $\alpha = \pi/2$ intorno all'asse è posto un materiale con permeabilità magnetica relativa $\mu_{r1} = 10$ e per un angolo $(2\pi - \alpha)$ un materiale di permeabilità magnetica relativa $\mu_{r2} = 100$ come mostrato in figura. Assumendo che le linee di forza del campo magnetico siano delle circonferenze intorno all'asse z, si determinino:
a) le espressioni del campo magnetico nei due mezzi tra le superfici cilindriche;
b) le espressioni delle intensità di magnetizzazione;
c) i valori delle correnti di magnetizzazione presenti sulle superfici interne ed esterne dei due mezzi.



Problema 3

Un circuito elettrico è composto da una sbarretta di lunghezza $l = 0.2$ m e di resistenza R=10 Ω . La sbarretta è mantenuta ferma ed è collegata da due molle conduttrici uguali, di costate elastica $k = 0.1$ N/m, a un'asticella conduttrice, anch'essa di lunghezza l e di massa $m = 20$ g, parallela alla sbarretta resistiva (si veda la figura). Un campo B =1 T è perpendicolare al piano orizzontale, privo di attrito, sul quale è posto il circuito. Al tempo $t = 0$ l'asticella è lasciata libera di muoversi da una posizione con le due molle allungate di un tratto $A =$ 3 cm.

a) Si scriva l'equazione del moto dell'asticella conduttrice,

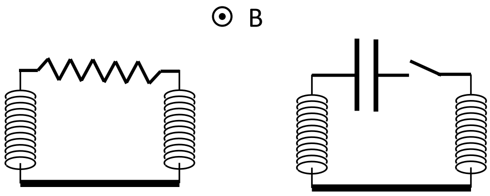
b) si risolva l'equazione calcolando i valori dei parametri che caratterizzano il moto.

Solo per il recupero dell'esonero 2 si risolva anche la seguente parte:

Si sostituisca alla sbarretta resistiva una sbarretta con un condensatore di capacità $C = 10$ nF con depositata una carica $Q_0 = 100$ nC, che all'istante iniziale viene connesso alle molle nella posizione di riposo. In questa nuova configurazione:

c) si scriva e si risolva l'equazione del moto dell'asticella calcolando i valori dei parametri che caratterizzano il moto,

d) si determini come varia nel tempo la carica sul condensatore.



Soluzione 1

a) I conduttori sono tutti isolati quindi si realizza induzione completa e senza dielettrico, la configurazione di potenziali che si realizza e'

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 449\ V \qquad \Delta V_{23} = V(R_2) - V(R_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = 45\ V\ .$$

b) Nel caso in cui si inserisca il dielettrico tra i due gusci esterni si ha

$$V(R_1)' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\right] = 417\ V \qquad \Delta V'_{23} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = 12.9\ V\ .$$

c) Dalla definizione di energia immagazzinata nell sistema di tre condensatori in questione, si ha

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \Delta U = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_i}\right) = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_r C_{23}} - \frac{1}{C_{23}}\right) = \frac{Q^2}{2C_{23}}\left(\frac{1-\epsilon_r}{\epsilon_r}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1-\epsilon_r}{\epsilon_r}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = -16\ nJ\ .$$

d) Dal potenziale calcolato in precedenza si puo' ricavare che il campo radiale e di conseguenza la polarizzazione valgono

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \qquad P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\ .$$

La densita' di carica di volume e' nulla poiche' il dielettrico e' omogeneo e vale

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P(r))}{\partial r} = 0\ .$$

Le densita' di cariche superficiali valgono invece

$$\sigma_p(R_2) = -\frac{Q}{4\pi}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{1}{R_2}^{2} = -3,8\ 10^{-8}\ C/m^2$$

e

$$\sigma_p(R_2) = -\frac{Q}{4\pi}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{1}{R_2}^{2} = 2.3\ 10^{-8}\ C/m^2\ .$$

Soluzione 2

a)Applicando il teorema della circuitazione di Ampère (in un sistema di coordinate cilindriche (r,ϕ,z))

$$H_1 r\alpha + H_2 r(2\pi - \alpha) = I \qquad \text{con } H_1 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_{r1}}\ ,\ H_2 = \frac{B_2}{\mu_0\mu_{r2}}$$

e ricordando che $B_1 = B_2 = B$ per le condizioni di continuita' sulla superficie di separazione

$$B = \frac{\mu_0 I}{r}\frac{\mu_{r1}\mu_{r2}}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))}$$

e

$$H_1 = \frac{I}{r}\frac{\mu_{r2}}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))} \qquad H_2 = \frac{I}{r}\frac{\mu_{r1}}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi - \alpha))}$$

tutti diretti lungo la direzione ϕ.

b) Le intensita' di magnetizzazione nei due mezzi valgono

$$M_1 = \frac{I}{r}\frac{\mu_{r2}(\mu_{r1}-1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi-\alpha))} \qquad M_2 = \frac{I}{r}\frac{\mu_{r1}(\mu_{r2}-1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi-\alpha))}$$

sempre diretto lungo ϕ.

c) Le densita' di correnti amperiane sulle superfici interne ed esterne sono

$$\vec{j}_s = \vec{M} \times \vec{n}$$

e valgono sulla superficie interna ed esterna

$$j_{s1,2}(a) = M_{1,2}(r=a)\hat{z} \qquad j_{s1,2}(b) = -M_{1,2}(r=b)\hat{z}$$

quindi le correnti totali, fissato $\alpha = \pi/2$ valgono

$$I_1(a) = a\alpha j_{s1}(a) = I\alpha\frac{\mu_{r2}(\mu_{r1}-1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi-\alpha))} = 429\ A$$

$$I_2(a) = a(\pi-\alpha)j_{s2}(a) = I(2\pi-\alpha)\frac{\mu_{r1}(\mu_{r2}-1)}{(\mu_{r2}\alpha + \mu_{r1}(2\pi-\alpha))} = 1416\ A$$

sulla superficie piu' interna, e identicamente su quella esterna.

Soluzione 3

a) Sull'asticella mobile agisce una forza elastica che, ponendo lo 0 dell'asse x lungo cui si sposta la molla nella posizione di riposo della molla L_0, si puo' scrivere come

$$F_{el} = -2kx\ ;$$

uno spostamento dell'asticella provoca una variazione del flusso di B concatenato producendo una f.e.m. data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz ed una corrente corrispondente date da

$$f.e.m. = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} \qquad i = \frac{f.e.m.}{R}$$

e l'asticella percorsa dalla corrente i risentira' di una forza

$$F = ilB = -\frac{B^2l^2}{R}\frac{dx}{dt}$$

quindi l'equazione differenziale del moto dell'asticella sara'

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx - \frac{B^2l^2}{R}\frac{dx}{dt} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{mR}\frac{dx}{dt} + \frac{2k}{m}x = 0\ .$$

b) La soluzione dell'equazione differenziale trovata si puo' ottenere considerando il corrispondente polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad a_1 = \frac{B^2l^2}{mR} \qquad a_0 = \frac{2k}{m}$$

che, ha due zeri complessi coniugati $\lambda_\pm = -\alpha \pm i\beta$ con

$$\alpha = \frac{a_1}{2} = \frac{B^2l^2}{2mR} = 0.1\ s^{-1} \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k}{m} - \frac{B^4l^4}{m^2R^2}} = 3.16\ rad/s.$$

Le soluzioni saranno del tipo

$$x(y) = e^{-\alpha t}\left(c1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)\right)$$

ove, imponendo $x(0) = A$ e $v(0) = 0$ si ricava

$$c_1 = A\ ,\ c_2 = A\frac{\alpha}{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = Ae^{-\alpha t}\left(\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right)\ .$$

c) Nel caso si ponga un condensatore con carica iniziale Q_0 e le molle a riposo si ha che

$$f.e.m. = \frac{Q(t)}{C} = -Bl\frac{dx}{dt}$$

derivando la quale si ottiene

$$\frac{i(t)}{C} = -Bl\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{i(t)}{CBl}\ .$$

L'equazione meccanica corrispondente

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx + Bli(t) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x + \frac{Bl}{m}i(t)$$

e sostituendo nell'ultima espressione l'espressione di $i(t)$ in funzione dell'accelerazione trovata prima si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x - \frac{Bl}{m}CBl\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x - \frac{CB^2l^2}{m}\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}\left(1 + \frac{CB^2l^2}{m}\right) = -\frac{2k}{m}x$$

riscrivibile come il moto di un oscillatore armonico

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{(m + CB^2l^2)}x = 0 \qquad x(t) = D'\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{2k}{(m + CB^2l^2)}} = 3.16\, rad/s$$

sulla quale vanno poste le condizioni iniiali

$$x(0) = D'\sin(\phi) = 0\ ,\ \phi = 0 \qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = D'\omega\cos(0) = \frac{Q_0}{CBl}\ ,\ D' = \frac{Q_0}{CBl\omega} = \ 15.8\, m.$$

L'equazione del moto quindi

$$x(t) = \frac{Q_0}{CBl\omega}\sin(\omega t)$$

d) La corrispondente espressione della carica del condensatore si ricava da un'espressione ricavata prima

$$Q(t) = CBl\frac{dx(t)}{dt} = CBL\frac{Q_0}{CBl\omega}\omega\cos(\omega t) = Q_0\cos(\omega t)\ .$$