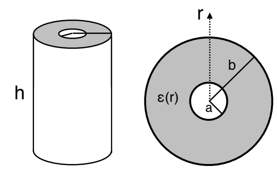
Compito scritto di Elettromagnetismo e di recupero degli esoneri
Proff. S. Giagu, F. Lacava, S. Rahatlou, a.a. 2015/16, 20 Luglio 2016

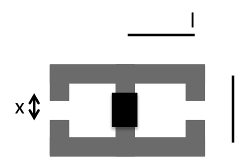
- recupero prima prova di esonero: problema 1 con domanda d); tempo a disposizione 1.5h;
- recupero seconda prova di esonero: problema 3 con domande c) e d); tempo a disposizione 1.5h;
- compito scritto: problemi 1, 2 e 3; tempo massimo a disposizione 4h;

Problema 1



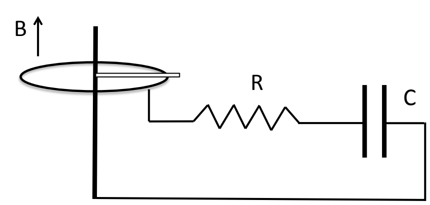
Un condensatore cilindrico di lunghezza h è costituito da un'armatura interna di raggio a e un'armatura esterna di raggio b con $a, b \ll h$. Lo spazio tra le armature è riempito con un dielettrico con costante dielettrica relativa funzione della distanza r dall'asse del condensatore: $\epsilon_r(r)$. Il condensatore viene caricato con una carica $+Q$ posta sull'armatura interna. Sapendo che la densità di energia elettrica nel condensatore è costante e vale $u_E = u_0$, determinare:
a) l'espressione della costante dielettrica relativa $\epsilon_r(r)$;
b) l'espressione del campo elettrico ad una distanza generica r dall'asse del condensatore;
c) la capacità elettrica del condensatore;
Per il recupero del primo esonero si calcoli anche:
d) le densità di carica e le cariche di polarizzazione (esplicitandone il segno) presenti sulle superfici e nel volume del dielettrico.

Problema 2



Un elettromagnete composto da materiale ferromagnetico con $\mu_r = 200$ ha la forma data in figura. Nei vari segmenti di lunghezza $l = 20$ cm, la sezione del materiale ferromagnetico è $S = 400$ cm^2 e sono presenti due traferri di altezza $x = 3$ cm. Sul segmento centrale sono avvolte 200 spire percorse da una corrente I = 2 A. Si determinino:
a) la riluttanza magnetica del circuito vista dalla bobina,
b) il campo d'induzione magnetica presente nei traferri.
Facoltativa:
c) la forza tra le espansioni polari separate dai traferri.

Problema 3



Una delle estremità di un'asticella conduttrice di lunghezza $l = 10$ cm e massa $m = 200$ g, è incernierata a un asse conduttore, di momento d'inerzia trascurabile, che le permette di ruotare liberamente intorno al centro di un supporto circolare conduttore sul quale può scorrere senza attrito l'altra estremità dell'asticella. L'asse e il supporto circolare sono connessi a una resistenza $R = 100\ k\Omega$ e a un condensatore $C = 100\ \mu F$ come in figura. Il sistema è immerso in un campo d'induzione magnetica $B = 1\ T$ uniforme e parallelo all'asse. A iniziare dal tempo $t = 0$ all'asse è connesso un motore che gli applica un momento costante $M_0 = 100\ N \cdot m$.
a) Scrivere le equazioni del circuito elettrico e del moto dell'asticella,
b) trovare come varia nel tempo la corrente.
Per il recupero del secondo esonero si calcoli anche:
c) la potenza dissipata nella resistenza al tempo t= 20 s,
d) come varia nel tempo la velocità angolare.
(Momento d'inerzia dell'asticella rispetto all'estremità. $I = ml^2/3$.)

Soluzione Problema 1

(a)

Lo spostamento elettrico **D** può essere calcolato applicando il teorema di Gauss e osservando che data la simmetria del problema il campo avrà simmetria cilindrica radiale:

$$\int \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q_{int} \implies 2\pi r h D = \lambda h \implies \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{r};$$

con $\lambda = Q/h$.

Imponendo che la densità di energia del campo elettrico sia costante e pari a u_0 avremo:

$$u_E = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon_0\epsilon_r r} = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{(2\pi)^2\epsilon_0\epsilon_r(r)}\frac{1}{r^2} = u_0$$

$$\epsilon_r(r) = \frac{\lambda^2}{2(2\pi)^2\epsilon_0 u_0}\frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^2}.$$

(b)

$\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$ per cui:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_o k}\hat{r};$$

(c)

$$\Delta V = V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E}\cdot dl = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 k}(b^2-a^2) \implies$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon_0 kh}{(b^2-a^2)}.$$

(d)

$$\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\nabla\cdot(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r})\mathbf{D};$$

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{n} = (\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r})\mathbf{D}\cdot\hat{n};$$

conviene utilizzare l'espressione della divergenza in coordinate cilindriche, per cui:

$$\rho_p = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r})\mathbf{D} = -\frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(1-\frac{r^2}{k}) = \frac{\lambda}{\pi k}$$

$$Q_p = \frac{\lambda}{\pi k}\pi(b^2-a^2)h = \frac{Q(b^2-a^2)}{k};$$

$$\sigma_p = (1-\frac{r^2}{k})\frac{\lambda}{2\pi r}\hat{r}\cdot\hat{n};$$

$$\sigma_p(a) = -\frac{(1-a^2)}{k}\frac{\lambda}{2\pi a} \Rightarrow Q_p(a) = -\frac{(1-a^2)Q}{k};$$

$$\sigma_p(b) = \frac{(1-b^2)}{k}\frac{\lambda}{2\pi b} \Rightarrow Q_p(b) = \frac{(1-b^2)Q}{k};$$

$$Q_p^{tot} = 0;$$

Soluzione Problema 2

a) Il flusso del campo B dal ramo con la bobina si ripartisce nelle parti di circuito ABCE e AFDE che sono uguali e ai fini del flusso generato dalla bobina sono in parallelo. La riluttanza magnetica di ciascuna delle due parti di circuito è la somma delle riluttanze di tre rami:

$$Ril_{ABCE} = Ril_{AFGE} = \frac{2l}{\mu S} + \frac{l-x}{\mu S} + \frac{x}{\mu_0 S}$$

La riluttanza del parallelo è:

$$\frac{1}{Ril_{par}} = \frac{1}{Ril_{ABCE}} + \frac{1}{Ril_{AFGE}} = \frac{2}{Ril_{ABCE}}$$

La riluttanza totale vista dalla bobina è:

$$Ril_{tot} = \frac{l}{\mu S} + \frac{1}{2}\left(\frac{2l}{\mu S} + \frac{l-x}{\mu S} + \frac{x}{\mu_0 S}\right) = \frac{5l + (\mu_r - 1)x}{2\mu S} = 3.5 \cdot 10^5 \ H^{-1}$$

b) Dalla legge di Hopkinson:

$$NI = \frac{5l + (\mu_r - 1)x}{2\mu S}\Phi(B) = \frac{5l + (\mu_r - 1)x}{2\mu}B_{bobina}$$

si trova per il campo $B_{traferro}$:

$$B_{traferro} = \frac{1}{2}\frac{\Phi(B)}{S} = \frac{1}{2}B_{bobina} = \frac{\mu NI}{5l + (\mu_r - 1)x} = 1.4 \cdot 10^{-2} \ T$$

perché il flusso dalla bobina si ripartisce egualmente sul due rami laterali.
c) Per trovare la forza tra le espansioni polari serve l'energia magnetica nel circuito. Questa si può calcolare dalla densità di energia magnetica nei vari rami moltiplicata per i relativi volumi oppure ricordando che l'energia magnetica in un circuito è:

$$U_M = \frac{1}{2}\Phi NI$$

poiché in questo caso il flusso di B_{bobina} è concatenato N volte con la corrente I.
dalle relazioni precedenti si trova:

$$U_M = \frac{\mu N^2 I^2 S}{5l + (\mu_r - 1)x}$$

E la forza totale tra le espansioni polari è:

$$F_m = \frac{dU_m}{dx} = -\frac{\mu N^2 I^2 (\mu_r - 1)}{(5l + (\mu_r - 1)x)^2}$$

La forza tra due espansioni è $F = F_m/2 = 82{,}3$ N.
Data la simmetria del circuito la forza trovata è quella presente che cerca di avvicinare le due espansioni dei due traferri e che la rigidità meccanica del circuito magnetico deve contrastare. Se pensiamo invece di variare la distanza in un solo traferro mantenendo fisso l'altro, l'energia va scritta considerando con variabile diversa gli spessori dei due traferri e differenziando rispetto a uno solo dei due per trovare la forza tra le espansioni del traferro corrispondente.

Soluzione Problema 3
a) Lungo l'asticella che ruota con velocità angolare ω nel campo B è presente un campo elettromotore $E = vB = \omega r B$ con direzione radiale verso l'esterno. Il suo integrale corrisponde ad una f.e.m.:

$$f = \int_0^l \omega r B \ dr = \frac{1}{2}\omega l^2 B$$

L'equazione del circuito elettrico è:

$$f - V_C = Ri$$

$$\frac{1}{2}\omega l^2 B - \frac{Q}{C} = Ri$$

Per la seconda formula di Laplace, lungo ogni elemento dell'asticella è presente una forza:

$$dF = -iBdr$$

e rispetto all'asse si ha un momento risultante:

$$M = \int dM = \int_0^l r(-iBdr) = -\frac{iBl^2}{2}$$

Quindi l'equazione del moto dell'asticella rispetto all'asse è:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_0 - \frac{iBl^2}{2}$$

b) Le due equazioni si possono mettere a sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\omega l^2 B - \frac{Q}{C} = Ri \\ I\frac{d\omega}{dt} = M_0 - \frac{iBl^2}{2} \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo la prima equazione del sistema, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}l^2 B\frac{d\omega}{dt} - \frac{i}{C} = R\frac{di}{dt} \\ I\frac{d\omega}{dt} = M_0 - \frac{iBl^2}{2} \end{cases}$$

dove abbiamo usato la relazione $i = dQ/dt$.
Ricavando $d\omega/dt$ dalla seconda e sostituendo nella prima si ottiene l'equazione per la corrente:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{2}\frac{Bl^2 M_0}{RI} - \left(\frac{1}{4}\frac{B^2 l^4}{IR} + \frac{1}{CR}\right) i$$

$$\frac{di}{dt} = \alpha - \beta i \qquad \alpha = \frac{1}{2}\frac{Bl^2 M_0}{RI} \qquad \beta = \frac{1}{4}\frac{B^2 l^4}{IR} + \frac{1}{CR}$$

che può essere facilmente integrata:

$$i(t) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

c) La potenza dissipata nella resistenza è:

$$W_R = Ri^2(t) = R\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(1 - e^{-\beta t}\right)^2$$

La corrente ha $\tau = 1/\beta = 10$ s e valore asintotico $I = \alpha/\beta = 75$ mA. La potenza dissipata a t= 20 s è $W_R = 421$ W.
d) Inserendo l'espressione trovata per $i(t)$ nella seconda equazione del sistema si trova:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_0 - \frac{Bl^2}{2}\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$d\omega = \frac{M_0}{I} - \frac{Bl^2}{2I}\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

Che integrata dà:

$$\omega(t) = \left(\frac{M_0}{I} - \frac{Bl^2}{2I}\frac{\alpha}{\beta}\right) t + \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{Bl^2}{2I}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$