MATERIALE DEI CORSI DI

METODI MATEMATICI DELLA FISICA

E DI

COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA

a cura di Paolo Maria Santini

http://www.roma1.infn.it/people/santini/

Docente del corso: Paolo Maria Santini

email: paolo.santini@roma1.infn.it

ufficio 43, primo piano, ed. Marconi - tel. 0649914239

Esercitatore: Ugo Aglietti

email: ugo.aglietti@roma1.infn.it

ufficio BIB-1, secondo piano, ed. Marconi - tel. 0649914855

March 22, 2006

AA 2003-04; PROGRAMMA E ARGOMENTI PER L'ESAME ORALE

AA 2004-05; PROGRAMMA E ARGOMENTI PER L'ESAME ORALE

AA 2005-06; PROGRAMMA E ARGOMENTI PER L'ESAME ORALE

TESTI CONSIGLIATI

RACCOLTA DI ESERCIZI PROPOSTI

ESONERI E SCRITTI PROPOSTI

1 AA 2003-04 (per Fisica e Astrofisica)

1.1 PROGRAMMA DEL CORSO

1.1.1 Analisi Complessa

Il piano complesso
Numeri complessi. Rappresentazione cartesiana, polare e piano di Argand. Interpretazione geometrica delle operazioni elementari sui numeri complessi. Disuguaglianze triangolari: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Radice ennesima e suo significato geometrico. Intorno, dominio, frontiera, chiusura di un dominio. Domini semplicemente e multiplamente connessi. Sfera di Riemann e punto all'infinito (cenni).
Funzioni analitiche
Funzioni complesse di variabile complessa. Funzioni monodrome e polidrome. Funzione composta. Funzione inversa. Corrispondenza biunivoca. Parte reale ed immaginaria di una funzione complessa: $f = u(x, y) + iv(x, y)$. Funzione continua. Funzione derivabile e condizioni di Cauchy-Riemann. Funzione analitica in un dominio. Parti reale ed immaginaria di una funzione analitica come funzioni armoniche. Ortogonalità delle curve di livello $u = cost$ e $v = cost$. Funzioni elementari monodrome: z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$. Funzioni elementari polidrome: $(z - z_0)^{\frac{1}{n}}$, $Log\ (z - z_0)$ e punti di diramazione. Le funzioni z^n, $z^{\frac{1}{n}}$ e le trasformazioni tra settori; le funzioni e^z, $Log\ z$ e le trasformazioni tra settori e strisce.
Integrazione di funzioni complesse
Definizione di integrale $\int_\gamma f(z)dz$ di una funzione complessa lungo una curva regolare γ del piano complesso. Disuguaglianza di Darboux. Esempi elementari in cui $f(z) = |z|,\ |z|^2,\ z^p,\ p \in \mathcal{Z}$ e γ è un arco di circonferenza o una spezzata. Teorema di Cauchy ed esistenza della primitiva di una funzione analitica. Il teorema di Cauchy in domini multiplamente connessi. La funzione polidroma $Log\ z$ come primitiva di $1/z$; numero di avvolgimenti. La rappresentazione integrale di Cauchy. Derivata n-esima di una funzione analitica e sua rappresentazione integrale. Teorema di Morera. Integrali su archi infiniti e infinitesimi.
Serie di Taylor, di Laurent e teorema dei residui
Riepilogo delle seguenti nozioni relative alle serie di funzioni: {convergenza; convergenza assoluta e uniforme; M-test di Weierstrass; continuità e analiticità della somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue e analitiche; scambio di integrale e somma per serie uniformemente convergenti; serie di potenze e formule di Cauchy - Hadamard e d'Alambert per il raggio di convergenza}. Serie di Taylor e di Laurent. Singolarità isolate polari ed essenziali. Serie di Taylor e di Laurent di funzioni elementari. Il teorema dei residui. Calcolo di residui. Uso del teorema dei residui per il calcolo dei seguenti integrali: integrale di una funzione razionale su tutta la retta; trasformata di Fourier e

trasformata inversa di Laplace; integrale di una funzione circolare sull'intervallo $(0, 2\pi)$; integrale al valor principale; integrale di funzioni polidrome del tipo $x^p R(x)$, con p reale e $R(x)$ razionale, sul semi-asse reale positivo.

1.1.2 Distribuzioni, Serie ed Integrali di Fourier

Distribuzioni

La densità di massa di un punto materiale e la funzione delta di Dirac $\delta(x)$. Definizione di distribuzione come funzionale lineare singolare. Derivata di una distribuzione. Esempi principali: la funzione gradino di Heaviside $\theta(x)$, la funzione delta di Dirac $\delta(x)$ e la sua derivata $\delta'(x)$. Distribuzioni come limiti di successioni di funzioni. La funzione di Green e suo significato fisico; rappresentazioni integrali con la funzione di Green.

Serie ed integrali di Fourier

Ortonormalità, completezza e la funzione δ di Dirac. La base di Fourier discreta $\{e^{inx}\}$ e lo sviluppo in serie di Fourier. Proprietà dello sviluppo in serie di Fourier. Formule di Parseval e teorema di convoluzione. Sviluppo in serie di Fourier di funzioni elementari e di distribuzionii. Sviluppi nelle serie del seno e del coseno. La base di Fourier continua $\{e^{ikx}, \ k \in \mathcal{R}\}$ e la trasformata di Fourier. Formule di Parseval. La trasformata di Fourier come analizzatore di un segnale. Proprietà della trasformata di Fourier; prodotto di convoluzione. Trasformata di Fourier di funzioni elementari e di distribuzioni. La trasformata di Fourier e la funzione di Green fondamentale.

1.1.3 Applicazioni Fisico - Matematiche

Funzioni armoniche in Fisica

Campi vettoriali piani irrotazionali, solenoidali e funzioni armoniche. Il potenziale cz e il campo uniforme. Il potenziale $cLog\ (z - z_0)$ e i campi radiali e circolari. Il potenziale cz^ν ed il moto di un fluido ideale nel settore $0 < \theta < \pi/\nu$.

Problemi evolutivi causali e Funzioni di Green

Funzione di Green fondamentale per problemi del primo e secondo ordine. Esempi: moto di un grave soggetto a forze ritardanti; oscillatore armonico smorzato e non. Funzioni di Green ritardata, avanzata e di Feynmann col teorema dei residui. Problemi evolutivi lineari, causali e invarianti per traslazione temporale studiati nello spazio di Fourier; analiticità della trasformata di Fourier.

Problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali

Soluzione del problema di Cauchy sulla retta per le equazioni del calore e di Schrödinger non stazionaria con la trasformata di Fourier. Soluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann sul segmento per le equazioni del calore, delle onde e di Schrödinger non stazionaria con la serie di Fourier.

1.2 ELENCO DEGLI ARGOMENTI PER L'ESAME ORALE; AA 2003-04

L'esame orale consiste nella presentazione di una delle seguenti tesine, a scelta del candidato.

1.2.1 Funzioni analitiche

Confronto tra le tre definizioni di funzione analitica introdotte in questo corso:
i) Definizione "alla Riemann": funzione derivabile e condizioni di Cauchy-Riemann. Funzione derivabile in un dominio e analiticità.
ii) Definizione "alla Cauchy-Morera": teoremi di Cauchy e di Morera; funzione analitica in $\mathcal{D}$ come funzione ivi continua tale che il suo integrale lungo un contorno chiuso qualsiasi in $\mathcal{D}$ è nullo.
iii) Definizione "alla Weierstrass": serie di Taylor; dominio di convergenza, assoluta ed uniforme. Continuità e analiticità dello sviluppo in serie di Taylor.

1.2.2 Funzioni armoniche in Fisica

Funzioni analitiche, funzioni armoniche e la loro profonda relazione con campi vettoriali piani irrotazionali e solenoidali. Il potenziale cz e il campo uniforme. Il potenziale $cLog\ (z - z_0)$ e i campi radiali e circolari.

1.2.3 Integrazione di funzioni analitiche

Definizione di integrale di una funzione complessa lungo una curva del piano complesso. Teorema di Cauchy ed esistenza della primitiva di una funzione analitica. La rappresentazione integrale di Cauchy.

1.2.4 Serie di Taylor, di Laurent e teorema dei residui

Serie di Taylor e di Laurent. Singolarità polari ed essenziali. Il teorema dei residui. Uso del teorema dei residui per il calcolo di integrali rilevanti in fisica.

1.2.5 Distribuzioni

La densità di massa di un punto materiale e la funzione delta di Dirac $\delta(x)$. Distribuzioni come limiti di successioni di funzioni. Definizione di distribuzione come funzionale lineare singolare. Derivata di una distribuzione. Esempi principali: la funzione gradino di Heaviside $\theta(x)$, la funzione delta di Dirac $\delta(x)$ e la sua derivata $\delta'(x)$. La funzione di Green e suo significato fisico; la funzione di Green fondamentale.

1.2.6 Trasformata di Fourier

Completezza della base continua di Fourier e trasformata di Fourier. Suo significato come analizzatore in armoniche di un segnale fisico. Proprietà principali della trasformata di Fourier. La funzione di Green fondamentale. Uso della trasformata di Fourier per risolvere equazioni differenziali alle derivate ordinarie.

1.2.7 Problemi evolutivi causali e funzione di Green

Funzione di Green fondamentale per problemi del primo e secondo ordine. Ambiguità della funzione di Green: funzioni di Green ritardata e avanzata. Esempi: moto di un grave soggetto a forze viscose; oscillatore armonico smorzato e non. Problemi evolutivi lineari, causali e invarianti per traslazione temporale studiati nello spazio di Fourier; analiticità della trasformata di Fourier.

1.2.8 Problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali

Uso della Trasformata di Fourier per risolvere il problema di Cauchy sulla retta per le equazioni del calore e di Schrödinger non stazionaria. Uso della serie di Fourier per risolvere i problemi di Dirichlet e di Neumann sul segmento per le equazioni delle onde, del calore e di Schrödinger non stazionaria.

1.2.9 La serie di Fourier

La base di Fourier discreta $\{e^{inx}\}$ e lo sviluppo in serie di Fourier. Proprietà dello sviluppo in serie di Fourier. Formule di Parseval e teorema di convoluzione. Sviluppo in serie di Fourier di funzioni elementari e di distribuzioni.

2 AA 2004-05 (Corso di Laurea in Fisica)

2.1 PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI COMPLESSA

2.1.1 Il piano complesso

Numeri complessi. Rappresentazione cartesiana, polare e piano di Argand. Interpretazione geometrica delle operazioni elementari sui numeri complessi. Disuguaglianze triangolari: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Radice ennesima e suo significato geometrico. Intorno, dominio, frontiera, chiusura di un dominio. Domini semplicemente e multiplamente connessi. Sfera di Riemann e punto all'infinito (cenni).

2.1.2 Funzioni analitiche

Funzioni complesse di variabile complessa. Funzioni monodrome e polidrome. Funzione composta. Funzione inversa. Corrispondenza biunivoca. Parte reale ed immaginaria di una funzione complessa: $f = u(x, y) + iv(x, y)$. Funzione continua. Funzione derivabile e condizioni di Cauchy-Riemann. Funzione analitica in un dominio. Parti reale ed immaginaria di una funzione analitica come funzioni armoniche. Ortogonalità delle curve di livello $u = cost$ e $v = cost$. Funzioni elementari monodrome: z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$.

2.1.3 Integrazione di funzioni complesse

Definizione di integrale $\int_\gamma f(z)dz$ di una funzione complessa lungo una curva regolare γ del piano complesso. Disuguaglianza di Darboux. Esempi elementari in cui $f(z) = |z|,\ |z|^2,\ z^p,\ p \in \mathcal{Z}$ e γ è un arco di circonferenza o una spezzata. Teorema di Cauchy ed esistenza della primitiva di una funzione analitica. Il teorema di Cauchy in domini multiplamente connessi. La funzione polidroma $Log\ z$ come primitiva di $1/z$; numero di avvolgimenti. La rappresentazione integrale di Cauchy. Derivata n-esima di una funzione analitica e sua rappresentazione integrale. Teorema di Morera. Integrali su archi infiniti e infinitesimi.

2.1.4 Serie di Taylor e di Laurent, teorema dei residui e calcolo di integrali

Riepilogo delle seguenti nozioni relative alle serie di funzioni: {convergenza; convergenza assoluta e uniforme; M-test di Weierstrass; continuità e analiticità della somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue e analitiche; scambio di integrale e somma per serie uniformemente convergenti; serie di potenze e formule di Cauchy - Hadamard e d'Alambert per il raggio di convergenza}. Serie di Taylor e di Laurent. Singolarità isolate polari ed essenziali. Serie di Taylor e di Laurent di funzioni elementari. Il teorema dei residui. Calcolo di residui. Uso del teorema dei residui per il calcolo dei seguenti integrali: integrale di una funzione razionale su tutta la retta; trasformata di

Fourier e trasformata inversa di Laplace; integrale di una funzione circolare sull'intervallo $(0, 2\pi)$; integrale al valor principale.

2.1.5 Polidromia

Funzioni polidrome elementary: $(z - z_0)^{\frac{1}{n}}$, $Log\ (z - z_0)$ e punti di diramazione. Le funzioni z^n, $z^{\frac{1}{n}}$ e le trasformazioni tra settori; le funzioni e^z, $Log\ z$ e le trasformazioni tra settori e strisce. Piano complesso tagliato, fogli e superficie di Riemann (cenni). Calcolo di integrali di funzioni polidrome del tipo $x^p R(x)$, con p reale e $R(x)$ razionale, e del tipo $log(x)R(x)$, sul semi-asse reale positivo.

2.1.6 Funzioni armoniche in Fisica

Campi vettoriali piani irrotazionali, solenoidali e funzioni armoniche. Il potenziale cz e il campo uniforme. Il potenziale $cLog\ (z - z_0)$ e i campi radiali e circolari. Il potenziale cz^ν ed il moto di un fluido ideale nel settore $0 < \theta < \pi/\nu$.

2.2 ELENCO DEGLI ARGOMENTI PER L'ESAME ORALE; AA 2004-05

L'esame orale consiste nella presentazione di una delle seguenti tesine, a scelta del candidato.

2.2.1 Funzioni analitiche

Confronto tra le tre definizioni di funzione analitica introdotte in questo corso:
i) Definizione "alla Riemann": funzione derivabile e condizioni di Cauchy-Riemann. Funzione derivabile in un dominio e analiticità.
ii) Definizione "alla Cauchy-Morera": teoremi di Cauchy e di Morera; funzione analitica in $\mathcal{D}$ come funzione ivi continua tale che il suo integrale lungo un contorno chiuso qualsiasi in $\mathcal{D}$ è nullo.
iii) Definizione "alla Weierstrass": serie di Taylor; dominio di convergenza, assoluta ed uniforme. Continuità e analiticità dello sviluppo in serie di Taylor.

2.2.2 Funzioni armoniche in Fisica

Funzioni analitiche, funzioni armoniche e la loro profonda relazione con campi vettoriali piani irrotazionali e solenoidali. Il potenziale cz e il campo uniforme. Il potenziale $cLog\ (z - z_0)$ e i campi radiali e circolari.

2.2.3 Integrazione di funzioni analitiche

Definizione di integrale di una funzione complessa lungo una curva del piano complesso. Teorema di Cauchy ed esistenza della primitiva di una funzione analitica. La rappresentazione integrale di Cauchy.

2.2.4 Serie di Taylor, di Laurent e teorema dei residui

Serie di Taylor e di Laurent. Singolarità polari ed essenziali. Il teorema dei residui. Uso del teorema dei residui per il calcolo di integrali rilevanti in fisica.

2.2.5 Polidromia

Funzioni polidrome elementari. Piano complesso tagliato e superfici di Riemann. Calcolo di integrali di funzioni polidrome col teorema dei residui.

3 AA 2005-06 (Corso di Laurea in Fisica)

3.1 PROGRAMMA DEL CORSO DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA

3.1.1 Il piano complesso

Numeri complessi. Rappresentazione cartesiana, polare e piano di Argand. Interpretazione geometrica delle operazioni elementari sui numeri complessi. Disuguaglianze triangolari: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Radice ennesima e suo significato geometrico. Intorno, dominio, frontiera, chiusura di un dominio. Domini semplicemente e multiplamente connessi. Sfera di Riemann e punto all'infinito (cenni).

3.1.2 Funzioni analitiche

Funzioni complesse di variabile complessa. Funzioni monodrome e polidrome. Funzione composta. Funzione inversa. Corrispondenza biunivoca. Parte reale ed immaginaria di una funzione complessa: $f = u(x, y) + iv(x, y)$. Funzione continua. Funzione derivabile e condizioni di Cauchy-Riemann. Funzione analitica in un dominio. Parti reale ed immaginaria di una funzione analitica come funzioni armoniche. Ortogonalità delle curve di livello $u = cost$ e $v = cost$. Funzioni monodrome elementari: z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$. Funzioni polidrome elementari: $(z - z_0)^{\frac{1}{2}}$, $Log\ (z - z_0)$, punti di diramazione e piano tagliato (cenni).

3.1.3 Integrazione di funzioni complesse

Definizione di integrale $\int_\gamma f(z)dz$ di una funzione complessa lungo una curva regolare γ del piano complesso. Disuguaglianza di Darboux. Esempi elementari in cui $f(z) = |z|,\ |z|^2,\ z^p,\ p \in \mathcal{Z}$ e γ è un arco di circonferenza o una spezzata. Teorema di Cauchy ed esistenza della primitiva di una funzione analitica. Il teorema di Cauchy in domini multiplamente connessi. La funzione polidroma $Log\ z$ come primitiva di $1/z$; numero di avvolgimenti. La rappresentazione integrale di Cauchy. I due teoremi di Liouville. Il teorema del massimo e minimo modulo. Derivata n-esima di una funzione analitica e sua rappresentazione integrale. Teorema di Morera. Integrali su archi infiniti e infinitesimi.

3.1.4 Serie di Taylor e di Laurent, teorema dei residui e calcolo di integrali

Riepilogo delle seguenti nozioni relative alle serie di funzioni: {convergenza; convergenza assoluta e uniforme; M-test di Weierstrass; continuità e analiticità della somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue e analitiche; scambio di integrale e somma per serie uniformemente convergenti; serie di potenze e formule di Cauchy - Hadamard e d'Alambert per il raggio di convergenza}. Serie di Taylor e di Laurent. Singolarità isolate polari ed essenziali. Serie di Taylor e di Laurent di funzioni elementari. Il teorema dei residui. Calcolo di residui. Uso del teorema dei residui per il calcolo dei seguenti integrali: integrale di una funzione circolare sull'intervallo $(0, 2\pi)$; integrale di una funzione razionale su tutta la retta; integrale al valor principale. Teorema dell'indice e principio dell'argomento. Teorema di Rouché e teorema fondamentale dell'algebra.

3.2 PROGRAMMA DEL CORSO DI COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA

3.2.1 Polidromia e superfici di Riemann

Funzioni polidrome elementari: $(z - z_0)^{\frac{1}{n}}$, $Log\ (z - z_0)$ e punti di diramazione. Piano tagliato e discontinuità attraverso il taglio. Superfici di Riemann. Esempi: i) le superfici di Riemann di $z^{1/2}$ e di $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)}$ sono (topologicamente equivalenti al)la sfera di Riemann; ii) la superficie di Riemann di $\sqrt{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ è topologicamente equivalente al toro. Le superfici di Riemann di $\ln z$ e di z^p, $p \in \mathbb{R}$ consistono di infiniti fogli e non sono compatte.

3.2.2 Integrali col teorema dei residui

Applicazione del teorema dei residui al calcolo di integrali. Trasformata di Fourier. Integrali di funzioni polidrome del tipo $x^p R(x)$, con p reale e $R(x)$ razionale, e del tipo $(log(x))^k R(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ sul semi-asse reale positivo.

3.2.3 Rappresentazioni integrali

Proprietà di analiticità di rappresentazioni integrali. Esempi significativi: l'integrale di Laplace, quello di Fourier e la rappresentazione integrale della Γ di Euler. Il prolungamento analitico (cenni). Il prolungamento analitico della Γ.

3.2.4 Funzioni armoniche in Fisica

Campi vettoriali piani irrotazionali, solenoidali e funzioni armoniche. Il potenziale complesso cz e il campo uniforme. Il potenziale $cLog\ (z - z_0)$ e i campi radiali e circolari. Il potenziale cz^ν ed il moto di un fluido ideale nel settore $0 < \theta < \pi/\nu$ (o il campo elettrico tra piastre piane che formano l'angolo ν). Il potenziale $v_0(z + a^2/z)$ ed il moto di un fluido ideale intorno ad un ostacolo circolare.

3.3 ELENCO DEGLI ARGOMENTI PER L'ESAME ORALE; AA 2005-06

L'esame orale consiste nella discussione di uno dei seguenti argomenti, a scelta del candidato. Non si deve portare nulla di scritto!

———————————————————————

Corso di Metodi Matematici della Fisica

3.3.1 Funzioni analitiche

Confronto tra le tre definizioni di funzione analitica introdotte in questo corso:
i) Definizione "alla Riemann": funzione derivabile e condizioni di Cauchy-Riemann. Funzione derivabile in un dominio e analiticità.
ii) Definizione "alla Cauchy-Morera": teoremi di Cauchy e di Morera; funzione analitica in $\mathcal{D}$ come funzione ivi continua tale che il suo integrale lungo un contorno chiuso qualsiasi in $\mathcal{D}$ è nullo.
iii) Definizione "alla Weierstrass": serie di Taylor; dominio di convergenza, assoluta ed uniforme. Continuità e analiticità dello sviluppo in serie di Taylor.

3.3.2 Integrazione di funzioni analitiche

Definizione di integrale di una funzione complessa lungo una curva del piano complesso. Teorema di Cauchy ed esistenza della primitiva di una funzione analitica. La rappresentazione integrale di Cauchy. I due teoremi di Liouville. Il teorema del massimo e minimo modulo. Derivata n-esima di una funzione analitica e sua rappresentazione integrale.

3.3.3 Serie di Taylor, di Laurent e teorema dei residui

Serie di Taylor e di Laurent. Singolarità polari ed essenziali. Il teorema dei residui. Uso del teorema dei residui per il calcolo di integrali rilevanti in fisica.

———————————————————————————

Corso di Complementi di Metodi Matematici della Fisica

3.3.4 Polidromia

Funzioni polidrome elementari. Piano complesso tagliato e superfici di Riemann.

3.3.5 Integrali col teorema dei residui

Applicazione del teorema dei residui al calcolo di integrali. Trasformata di Fourier. Integrali di funzioni polidrome del tipo $x^p R(x)$, con p reale e $R(x)$ razionale, e del tipo $(log(x))^k R(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ sul semi-asse reale positivo.

3.3.6 Funzioni armoniche in Fisica

Funzioni analitiche, funzioni armoniche e la loro profonda relazione con campi vettoriali piani irrotazionali e solenoidali. Il potenziale cz e il campo uniforme. Il potenziale $cLog\ (z - z_0)$ e i campi radiali e circolari.

3.3.7 Rappresentazioni integrali

Proprietà di analiticità di rappresentazioni integrali. Esempi significativi: l'integrale di Laplace, quello di Fourier e la rappresentazione integrale della Γ di Euler. Il prolungamento analitico (cenni). Il prolungamento analitico della Γ.

4 TESTI CONSIGLIATI

Gli argomenti svolti in questo corso sono un sottoinsieme di quelli contenuti nel libro (attenzione agli errori di stampa!):

1) C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, "Metodi Matematici della Fisica", Carocci Editore, Roma, 2002.

Si consiglia anche:

2) F. Calogero, "Metodi Matematici della Fisica", Dispense Istituto di Fisica, Universita' di Roma, 1975.

3) P. Dennery, A. Krzwicki, "Mathematics for Physicists", Harper and Row, 1967.

Inoltre, per ulteriori approfondimenti relativi alla prima Sezione:

4) A. I. Markusevich, "Elementi di Teoria delle Funzioni Analitiche", Editori Riuniti, 1988

5) L. V. Alhfors, "Complex Analysis", McGraw-Hill, 1966

6) M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, "Complex Variables", Cambridge University Press, 1997

7) J. B. Conway, "Functions of One Complex Variable", Springer-Verlag, 1978

8) A. Kyrala, "Applied Functions of a Complex Variable", Wiley - Interscience, 1972

9) V. Smirnov, "Corso di Matematica Superiore", Volume III, Editori Riuniti, 1977

5 RACCOLTA DI ESERCIZI PROPOSTI

5.1 Analisi Complessa

5.1.1 Il piano complesso

1) Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana.

$i)\ (2+i3)^3,\ \ ii)\ 2e^{i\pi/3},\ \ iii)\ \frac{a+ib}{c+id},\ \ iv)\ 3e^{i\frac{\pi}{4}},\ \ v)\ 2e^{i\frac{\pi}{2}},\ \ vi)\ \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}},\ \ vii)\ 2e^{i\frac{4\pi}{3}},$ $viii)\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}},\ \ ix)\ i^n,\ \ x)\ 2e^{-i\frac{\pi}{3}},\ \ xi)\ 3e^{\frac{2}{3}\pi i}$

Risp. $i)\ -46+9i,\ \ ii)\ 1+i\sqrt{3},\ \ iii)\ \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2},\ \ iv)\ \frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{3}{\sqrt{2}},\ \ v)\ 2i,$ $vi)\ -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ vii)\ -1-i\sqrt{3},\ \ viii)\ \sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}},\ \ ix)\ (-1)^p,\ n=2p;\ i(-1)^p,\ n=2p+1,\ p\in\mathbb{N},\ \ x)\ 1-i\sqrt{3},\ \ xi)\ \frac{3}{2}(-1+\sqrt{3})$

2) Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare (con $0 \le arg\ z < 2\pi$):

$i)\ \sqrt{3}+i,\ \ ii)\ 2-i2\sqrt{3},\ \ iii)\ 4-4i,\ iv)\ -2+2i,\ \ v)\ -2\sqrt{3}+2i$

Risp. $i)\ 2e^{i\frac{\pi}{6}},\ \ ii)\ 4e^{i\frac{5\pi}{3}},\ \ iii)\ 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}},\ \ iv)\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\ \ v)\ 4e^{\frac{5}{6}\pi i}$

3) Mostrare che, se $z = re^{i\theta}$,

$\bar{z} = re^{-i\theta},\ \ |z|^2 = z\bar{z} = r^2,\ \ Re\ z = \frac{z+\bar{z}}{2},\ \ Im\ z = \frac{z-\bar{z}}{2i},\ \ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$ $arg\ (z_1 z_2) = arg\ (z_1) + arg\ (z_2),\ \ arg\ (z^n) = n\ arg\ (z),\ \ arg\ (z^{\frac{1}{n}}) = \frac{arg\ (z)}{n}$

4) Mostrare che $Re(\bar{z}_1 z_2) = \mathbf{z_1}\cdot\mathbf{z_2}$, $Im(\bar{z}_1 z_2) = |\mathbf{z_1}\wedge\mathbf{z_2}|$, dove $\mathbf{z}_j$, $j=1,2$ sono i vettori di componenti (x_j, y_j), e quindi che le equazioni $Re(\bar{z}_1 z_2) = 0$, $Im(\bar{z}_1 z_2) = 0$, $z_1, z_2 \neq 0$ eprimono rispettivamente l'ortogonalità e il parallelismo dei vettori $\mathbf{z_1}$ e $\mathbf{z_2}$.

5) Si verifichi che:
i) $z(t) = tz_2 + (1-t)z_1,\ t\in\mathcal{R},\ (t\in[0,1])$ è l'equazione parametrica della retta passante per z_1 e z_2 (del segmento che congiunge z_1 e z_2), percorsa da z_1 a z_2..
ii) $\bar{c}z + c\bar{z} = 1$ è l'equazione della retta che incontra l'asse reale nel punto $z = 1/(2Re\ c)$, formando con esso l'angolo $arg\ (ic)$.
iii) $arg\ z = \varphi$ è l'equazione della semiretta che parte dall'origine e forma con l'asse reale l'angolo φ.
iv) $z(t) = z_0 + Re^{it},\ t\in[0,2\pi]$, è l'equazione parametrica della circonferenza di raggio R e centro z_0, percorsa in senso antiorario.
v) $|z-z_0| = R$ e/o $|z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} = R^2 - |z_0|^2$ sono equazioni (equivalenti) della circonferenza di raggio R centrata in z_0.

6) Verificare che la retta $\bar{c}z + c\bar{z} = 1$ è parallela all'asse immaginario se $c\in\mathcal{R}$, mentre è parallela all'asse reale se $c\in i\mathcal{R}$.

7) Scrivere l'equazione di una circonferenza passante per l'origine.

8) Si disegni la circonferenza $|z-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}|=1$ e si determinino le sue intersezioni con gli assi reale ed immaginario e con la bisettrice del primo quadrante.

Risp. $1, \quad i, \quad (\sqrt{2}\pm 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$

9) Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

$Re\ z \le |z|, \quad Im\ z \le |z|, \quad |z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2| \le 2|z_1 z_2|, \quad |z_1\pm z_2| \le |z_1|+|z_2|,$
$|z_1|-|z_2| \le |z_1\pm z_2|$

10) Determinare tutti i valori di:

$i)\ i^{\frac{1}{3}}, \quad ii)\ (2i)^{\frac{1}{2}}, \quad iii)\ (-1)^{\frac{1}{3}}, \quad iv)\ 1^{\frac{2}{3}}, \quad v)\ (-2)^{\frac{1}{4}}, \quad vi)\ (\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{5}}, \quad vii)\ (2+i2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}, \quad viii)\ 1^{\frac{1}{n}}, n\in\mathbb{N}$

Risp. $i)\ \frac{\sqrt{3}+i}{2};\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ -i;\ ii)\ \pm(1+i);\ iii)\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},\ -1;\ iv)\ 1,\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2};\ v)\ \frac{\pm 1+i}{2^{\frac{1}{4}}},\ \frac{\pm 1-i}{2^{\frac{1}{4}}};\ vi)\ 2^{\frac{1}{5}}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{5})}, k=0,1,2,3,4,\ \ vii)\ 4^{\frac{1}{3}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}, k=0,1,2,\ \ viii)\ e^{\frac{2k\pi}{n}i}, k=1,..,n-1$

11) Determinare tutti i valori di:

$i)\ 2Log\ (1+i), \quad ii)\ Log\ (-1), \quad iii)\ Log\ 3, \quad iv)\ Log(\sqrt{3}+i), \quad v)\ Log(\sqrt{3}-3i), \quad vi)\ Log(2i), \quad vii)\ Log(4-4i), \quad viii)\ \sin^{-1}(1/2), \quad ix)\ \cos^{-1}(1/2), \quad x)\ \sin^{-1}(\sqrt{3}/2), \quad xi)\ \tan^{-1}\sqrt{3}, \quad xii)\ \tan^{-1}(2i)$

Risp. $i)\ \log 2+i(\frac{\pi}{2}+4k\pi),\ k\in\mathcal{Z};\ ii)\ i(\pi+2k\pi);\ iii)\ \log 3+i2k\pi;\ iv)\ log 2+i(\frac{\pi}{6}+2k\pi),\ v)\ log(2\sqrt{3})+i(-\frac{\pi}{3}+2k\pi),\ vi)\ log 2+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi),\ vii)\ log(4\sqrt{2})+i(\frac{7\pi}{4}+2k\pi),\ viii)\ \frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ ix)\ \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi;\ x)\ \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ xi)\ \frac{\pi}{3}+k\pi;\ xii)\ \frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{i}{2}\log 3$

12) *Proiezione stereografica.* La sfera di raggio 1 è adagiata sul piano xy, in modo che il suo polo Sud coincida con l'origine: $S=(0,0,0)$ ed il polo Nord con il punto $N=(0,0,2)$ (vedi figura). Sia $P=(x,y,0)$ un punto del piano xy e $P'=(\xi,\eta,\zeta)$ l'intersezione della retta passante per P e N con la superficie sferica.
i) Mostrare geometricamente che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano xy ed i punti P' della superficie sferica privata del polo Nord, e che il punto ∞ del piano xy è in corrispondenza biunivoca con il polo Nord:

$$P\leftrightarrow P', \qquad \infty\leftrightarrow N.$$

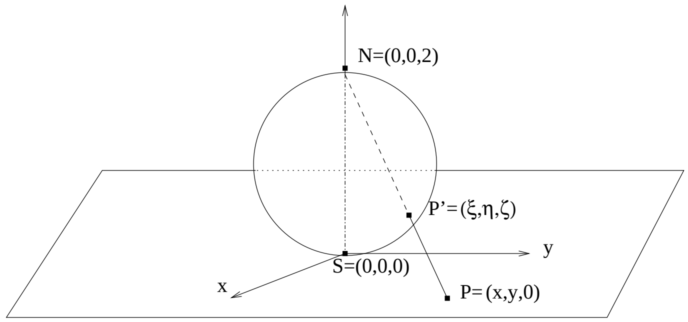
ii) Mostrare che la trasportazione $P\to P'$ è descritta dalle equazioni

$$\xi=\frac{4x}{4+x^2+y^2}, \quad \eta=\frac{4y}{4+x^2+y^2}, \quad \zeta=\frac{2(x^2+y^2)}{4+x^2+y^2},$$

mentre la trasformazione inversa $P'\to P$ è descritta dalle equazioni

$$x=\frac{2\xi}{2-\zeta}, \quad y=\frac{2\eta}{2-\zeta},$$

dove ξ,η,ζ soddisfano all'equazione: $\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2=1$.



iii) Si osservi infine che, identificando il piano xy con il piano complesso z ($z = x + iy$), le trasformazioni $P \to P'$ e $P' \to P$ diventano rispettivamente:

$$\xi + i\eta = \frac{4z}{4 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{2|z|^2}{4 + |z|^2},$$

$$z = \frac{2(\xi + i\eta)}{2 - \zeta}, \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1.$$

Sugg. Poiché P' è l'intersezione della retta passante per P e N con la superficie sferica, le sue coordinate ξ, η, ζ sono la soluzione del sistema algebrico

$$\xi = -\frac{x}{2}(\zeta - 2), \quad \eta = -\frac{y}{2}(\zeta - 2), \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1.$$

5.1.2 Funzioni analitiche

1) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.
i) Si dia la definizione di funzione continua in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.
ii) Si dimostri che CNES affinché $f(z)$ sia continua in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ è che le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ siano continue in (x_0, y_0).

2) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.
i) Si dia la definizione di funzione derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ e quella di funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$.
ii) Mostrare che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y esistono in $\mathcal{D}$ e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann.
iii) Mostrare che, se le funzioni reali di due variabili reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili in un aperto connesso (dominio) di $\mathbb{R}^2$ e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann, allora sono analitiche nel corrispondente dominio di $\mathbb{C}$.

3) i) Si verifichi che $\partial/\partial z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ e $\partial/\partial\bar{z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$.
ii) Si deduca che le condizioni di Cauchy - Riemann in un dominio $\mathcal{D}$ sono equivalenti alla condizione $\partial f/\partial\bar{z} = 0$, cioè alla proprietà che f depende solo dalla variabile z in $\mathcal{D}$.

4) Esprimere le seguenti funzioni complesse di variabile complessa $f = u(x,y) + iv(x,y)$ come funzioni di z e $\bar{z}$ e dedurre quali di esse sono analitiche in $\mathbb{C}$.

$i)\ f = x - iy;\ \ ii)\ f = x^2 + y^2;\ \ iii)\ f = -y + ix;\ \ iv)\ f = x^2 + y^2 + i2xy;\ \ v)\ f = x^2 - y^2 + i2xy;\ \ vi)\ \sin(x^2 + y^2)$

Risp. $i)\ f = \bar{z};\ \ ii)\ f = z\bar{z};\ \ iii)\ f = iz;\ \ iv)\ f = z\bar{z} + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2};\ \ v)\ f = z^2;\ \ vi)\ \sin(z\bar{z})$

5) Determinare le regioni di $\mathbb{C}$ nelle quali le funzioni $f(z,\bar{z})$ dell'esercizio precedente sono continue, derivabili e analitiche.

Risp. tutte continue in $\mathbb{C}$; i) non è derivabile e analitica da nessuna parte; ii) derivabile in $z = 0$ e analitica da nessuna parte; iii) e v) derivabili e analitiche in $\mathbb{C}$; iv) derivabile sull'asse reale e analitica da nessuna parte; vi) derivabile in $z = 0$ e sulle circonferenze $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$, analitica da nessuna parte

6) Dire, senza fare conti, se le seguenti funzioni complesse di variabile complessa sono continue e analitiche in $\mathcal{C}$ e, se analitiche, calcolarne le derivate.

$i)\ \sin|z|,\ \ ii)\ e^{z^2},\ \ iii)\ arg\ z^2,\ \ iv)\ \bar{z}^2 z,\ \ v)\ \cos z^3$

Risp. tutte continue in $\mathbb{C}$; sono analitiche in $\mathbb{C}$: $ii)$ e $v)$ con $(e^{z^2})' = 2ze^{z^2}$; $(\cos z^3)' = -3z^2 \sin z^3$

7) Date le funzioni dell'esercizio precedente, stabilirne derivabilità ed analiticità in $\mathbb{C}$ usando le condizioni di Cauchy-Riemann.

8) Sia $f(z)$ una funzione analitica nel dominio $\mathcal{D}$; dire se le seguenti funzioni composte sono analitiche, stabilirne il dominio di analiticità e calcolarne la derivata.

$i)\sin(f(z)),\ \ ii)\ |f(z)|,\ \ iii) f(f(z)),\ \ iv)\tan(f^2(z)),\ \ v)\ 1/f(z),\ \ vi)\ arg\ f(z),$
$vii)\ \overline{f(\bar{z})}$

Risp. $i)$ sì, in $\mathcal{D}$, $(\sin(f(z)))' = \cos(f(z))f'(z)$; $ii)$ no; $iii)$ sì, in $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}' = \{f(z),\ z \in \mathcal{D}\}$, $(f(f(z)))' = f'(f(z))f'(z)$; $iv)$ sì, in $\mathcal{D} - \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{z:\ f^2(z) = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathcal{Z}\}$, $(\tan(f^2(z)))' = \frac{2f(z)f'(z)}{\cos(f^2(z))}$; $v)$ sì, in $\mathcal{D} - \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{z:\ f(z) = 0\}$, $(1/f(z))' = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$; $vi)$ no; $vii)$ sì, in $\tilde{\mathcal{D}} = \{z:\ \bar{z} \in \mathcal{D}\}$, $(\overline{f(\bar{z})})' = \overline{f'(\bar{z})}$

9) Si mostri che, se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora:
i) $u,\ v$ sono funzioni armoniche in $\mathcal{D}$: $\Delta u = \Delta v = 0$;
ii) le curve di livello $u = cost,\ v = cost$ formano un reticolo ortogonale.
iii) Se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$ e $f'(z_0) \neq 0,\ z_0 \in \mathcal{D}$, allora la trasformazione $w = f(z)$ dal piano complesso z a quello w gode delle seguenti proprietà. a) Due curve passanti per z_0 vengono ruotate dello stesso angolo $arg(f'(z_0))$; quindi

l'angolo tra di esse resta invariato (una trasformazione di questo tipo è detta *conforme*). b) L'ingrandimento lineare in z_0 è dato da $|f'(z_0)|$.

10) Sia $u(x,y)$ una funzione armonica nel dominio $\mathcal{D}$ del piano.
i) Si mostri che la funzione

$$v(x,y) := cost + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-u_y dx + u_x dy),$$

dove γ è un contorno arbitrario da (x_0,y_0) a (x,y), è armonica in $\mathcal{D}$.
ii) Si mostri che la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

11) Sia $v(x,y)$ una funzione armonica nel dominio $\mathcal{D}$ del piano.
i) Si mostri che la funzione

$$u(x,y) := cost + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (v_y dx - v_x dy),$$

dove γ è un contorno arbitrario da (x_0,y_0) a (x,y), è armonica in $\mathcal{D}$.
ii) Si mostri che la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

12) Dire se le seguenti funzioni reali sono la parte reale (o immaginaria) di funzioni analitiche. Nel caso affermativo, assumendo che siano la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, costruire la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

i) x^2+y^2, *ii)* x^2-y^2, *iii)* xy, *iv)* $e^x \sin y$, *v)* $e^y \cos x$, *vi)* $\sin x \cos y$, *vii)* $\sin(x^2-y^2)\cosh(2xy)$, *viii)* $e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$, *ix)* x^3-3xy^2, *x)* $e^{-y}\sin x$, *xi)* $\log\sqrt{x^2+y^2}$, *xii)* $\tan^{-1}(y/x)$

Risp. *i) no*; *ii)* $v = 2xy + c$, $f = z^2 + k$; *iii)* $v = \frac{y^2-x^2}{2} + c$, $f = -i\frac{z^2}{2} + k$; *iv)* $v = -e^x \cos y + c$, $f = -ie^z + k$; *v)* $v = -e^y \sin x + c$, $f = e^{-iz} + k$; *vi) no*; *vii)* $v = \cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) + c$, $f = \sin z^2 + k$; *viii)* $v = -e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + c$, $f = -ie^{z^2} + k$; *ix)* $v = 3x^2y - y^3 + c$, $f = z^3 + k$; *x)* $v = -e^{-y}\cos x + c$, $f = -ie^{iz} + k$; *xi)* $v = \tan^{-1}\frac{y}{x} + c$, $f = Log\ z + k$; *xii)* $v = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$, $f = -iLogz + k$

13) Dire per quali valori dei parametri reali α, β la funzione $u(x,y) = x^2 + \alpha y^2 + \beta y$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. Per quei valori, costruire tale f come funzione della sola z.

Risp. $\alpha = -1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$. $f = z^2 - i\beta z + cost.$

14) Date le funzioni analitiche: z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, determinare le corrispondenti funzioni inverse con il loro dominio di analiticità e calcolare le derivate.

15) Studiare la trasformazione $w = z^2 = u+iv$. Per quali valori di z è conforme? Disegnare nel piano z il reticolo ortogonale curvilineo $u = cost$, $v = cost$.

Costruire le immagini dei punti $z = 1,\ 0,\ i,\ -1$ e del settore $0 < \theta < \alpha$ nel piano w.

16) Determinare le immagini dei punti $A = 1,\ B = (\sqrt{2}+1)e^{i\frac{\pi}{4}},\ D = i,\ E = (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{\pi}{4}},\ C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ secondo la trasformazione $w = z^2$ e si disegni l'immagine del cerchio unitario centrato in C.

17) *Studio della funzione* $z^n,\ n \in \mathbb{N}$. Mostrare che tale funzione è monodroma, continua e analitica in $\mathbb{C}$ e si calcoli la sua derivata. Calcolare l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1-i$ e, più in generale, del dominio $\mathcal{D} = \{0 < arg\ z < \alpha,\ 1 < |z| < 2\}$. Scrivere le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e disegnare le corrispondenti curve di livello del settore $0 < arg\ z < \pi/n$.

18) *Studio della funzione* $w = 1/z$. Si mostri che la trasformazione $z \to w = 1/z$ è una trasformazione invertibile (l'inversa è se stessa) e realizza una corrispondenza biunivoca tra $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, essendo $w = \infty$ l'immagine di $z = 0$ e viceversa; che è inoltre analitica per $z \neq 0$ e $(1/z)' = -z^{-2}$. Si determini il significato geometrico della trasformazione e si costruisca l'immagine del punto z nei tre casi $|z| < 1,\ |z| = 1,\ |z| > 1$. Si mostri che tale trasformazione mappa la regione $|z - z_0| \leq R$ nella regione $|w - w_0| \geq \tilde{R}$ (per $R > |z_0|$) o nella regione $|w - w_0| \leq \tilde{R}$ (per $R < |z_0|$) del piano w, con

$$w_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$$

Si mostri che tale cerchio si riduce alla retta

$$\bar{z}_0 \bar{w} + z_0 w = 1$$

quando $|z_0| = R$; quando cioè la circonferenza $|z - z_0| = R$ passa per $z = 0$. Disegnare le linee di livello $u = cost$ e $v = cost$ di tale funzione usando coordinate polari.

19) In che cosa sono trasformate i) la retta $2iz - 2i\bar{z} = 1$ e ii) la circonferenza $|z - i| = 2$ dalla trasformazione conforme $z \to 1/z$?

Risp. $i)$ $|w - 2i| = 2$; $ii)$ $|w - \frac{i}{3}| = \frac{2}{3}$

5.1.3 Integrazione di funzioni complesse

1) *Definizione di integrale* $\int_\gamma f(z)dz$ *di una funzione complessa di variabile complessa.*

Sia γ una curva continua e rettificabile di $\mathbb{C}$, parametrizzata dalla funzione $z(t):\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, con $z(t) = x(t) + iy(t),\ x(t), y(t) \in C[a,b]$. Sia inoltre $f(z)$ una funzione continua su γ. La partizione $t_0 = a, t_1, .., t_{n-1}, t_n = b$ del segmento $[a,b]$ induce una partizione $z_0, z_1, .., z_{n-1}, z_n$ del contorno γ, con $z_0 = z(a), z_n = z(b)$ e $z_k = z(t_k),\ k = 1, .., n$. Inoltre sia $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ un punto qualsiasi dell'arco $(z_{k-1}, z_k),\ k = 1, .., n$ e si consideri la somma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1})] +$$

$$i\sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)(y_k-y_{k-1})+v(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})]$$

Introdotto $\mu = max_k|t_k - t_{k-1}|$, nel limite $\mu \to 0$ (con μn finito), la somma S_n tende ad un limite preciso, indicato con

$$\int_\gamma f(z)dz := \lim_{\mu\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Se, inoltre, $z(t)$ è differenziabile a tratti ($x(t), y(t) \in C^1[a,b]$ a tratti), allora $dz = z'(t)dt$ a tratti, ed il calcolo dell'integrale si riduce a quello del seguente integrale di una funzione complessa di variabile reale t:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

2) Si mostri che:

$$I_n := \int_{z_0}^{z} \zeta^n d\zeta = \frac{z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

dove γ è un contorno qualsiasi che congiunge z_0 e z, costruendo un'opportuna somma che converga all'integrale da calcolare. Ad esempio, per $n = 0$:

$$I_0 \leftarrow S = \sum_{k=1}^{N}(z_k - z_{k-1}) = (z_1 - z_0) - (z_2 - z_1) - .. = z - z_0.$$

Per $n = 1$, dato che entrambe le somme:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}), \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{N} z_k(z_k - z_{k-1})$$

convergono all'integrale: $S_1, S_2 \to I_1$, anche la loro media aritmetica convergerà ad esso: $S := (S_1 + S_2)/2 \to I_1$. D'altra parte:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} = \frac{z^2 - z_0^2}{2}.$$

Per $n = 2$, dato che entrambe le somme:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N} z_{k-1}^2(z_k - z_{k-1}), \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{N} z_k^2(z_k - z_{k-1})$$

convergono all'integrale: $S_1, S_2 \to I_3$, anche la combinazione $S := (S_1 + 2S_2)/3$ convergerà ad esso. D'altra parte:

$$S = \frac{S_1 + 2S_2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{z_{k-1}^2 + 2z_k^2}{3}(z_k - z_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^{N}[\frac{z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2}{3}(z_k - z_{k-1}) + \frac{z_k(z_k - z_{k-1})^2}{3}] =$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} + \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k(z_k - z_{k-1})^2}{3} = \frac{z^3 - z_0^3}{3} + \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k(z_k - z_{k-1})^2}{3}.$$

Poichè, nel limite, l'ultima somma converge a 0, il risultato è così dimostrato. La generalizzazione ad un n generico è ora immediata.

3) Se γ è un contorno regolare a tratti di lunghezza finita L e $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni continue lungo γ, si dimostri le seguenti proprietà:

i) $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz$;

ii) $\int_\gamma [\alpha f(z)dz + \beta g(z)]dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$.

iii) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

iv) la disuguaglianza di Darboux:

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq ML,$$

dove M è il massimo di $|f(z)|$ su γ.

4) Si trovi una parametrizzazione dei seguenti contorni:
γ_1: arco di circonferenza da 2 a $2i$; γ_2: il segmento da 1 a $1+i$
e la si usi per calcolare gli integrali, lungo γ_1 e γ_2, delle seguenti funzioni: z^2, $\bar{z}^3$, $|z|^2$.

Risp. $z^2: \; -\frac{8}{3}(1+i), \; -1+2i/3$; $\bar{z}^3: \; 16, \; 5/4$; $|z|^2: \; -8(1-i), \; 4i/3$

5) Si calcoli l'integrale della funzione $|z|^2$ lungo la spezzata γ_1 che congiunge i punti 0, 1 e $1+i$ e lungo la spezzata γ_2 che congiunge i punti 0, i e $1+i$. Si deduca che il valore dell'integrale della funzione $|z|^2$ lungo il contorno chiuso $\gamma_1 - \gamma_2$,dato dalla spezzata che congiunge i punti 0, 1, $1+i$, i, 0, è diverso da zero e vale: $-1+i$.

6) Si calcoli l'integrale della funzione $|z|$ lungo l'arco di cfr. γ_3 da 1 a i e lungo la spezzata γ_4 che congiunge i punti 1, 0 e i. Si deduca che il valore dell'integrale della funzione $|z|$ lungo il contorno chiuso $\gamma_3 - \gamma_4$ è diverso da zero e vale: $(-1+i)/2$.

Risp. $\int_{\gamma_3} dz|z| = i - 1$; $\int_{\gamma_4} dz|z| = (i-1)/2$

7) i) Si mostri che, per $p \in \mathbb{Z}$,

$$\int_\gamma (z - z_0)^p dz = \{ \begin{array}{l} R^{p+1} \frac{e^{i\alpha(p+1)}-1}{p+1}, \ p \neq -1; \\ i\alpha, \quad p = -1 \end{array} \tag{1}$$

lungo un qualunque arco γ della circonferenza centrata in z_0 e di raggio R, che sottende l'angolo α, percorso in senso antiorario.

ii) Si deduca che

$$\oint_\gamma (z - z_0)^p dz = 2\pi i \delta_{p,-1}, \ p \in \mathcal{Z}$$

lungo la circonferenza γ centrata in z_0 e di raggio R, percorsa in senso antiorario.

8) *Teorema di Cauchy.* Facendo uso del Lemma di Green e del fatto che, se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora $f'(z)$ è una funzione continua in $\mathcal{D}$, si dimostri il seguente teorema.

Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$, allora

$$\oint_\gamma f(z) dz = 0$$

lungo una qualunque curva chiusa γ regolare contenuta in $\mathcal{D}$.

9) Si dimostri il seguente risultato.

Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso e z_0, z sono due punti di $\mathcal{D}$, allora l'integrale di $f(z)$ lungo una curva γ, interamente contenuta in $\mathcal{D}$, che congiunge i punti z_0 e z, non dipende dalla curva γ, ma solo dagli estremi di integrazione.

Si osservi che questo risultato implica *l'esistenza* di una funzione monodroma $F(z)$ in $\mathcal{D}$, definita da:

$$F(z) := F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(z') dz'.$$

10) *Teorema della primitiva* Si dimostri il seguente risultato.

Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso e sia $F(z)$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Allora $F(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$ e ivi $F'(z) = f(z)$ (è, cioè, la primitiva di $f(z)$).

Si osservi che due primitive della stessa funzione analitica $f(z)$ differiscono per una costante:

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z} f(z') dz'.$$

11) Come applicazione del teorema di Cauchy e della primitiva, si calcolino i seguenti integrali del tipo $\int_\gamma f(z) dz$, dove:

i) $f(z) = z^n, \ n \in \mathcal{N}$; estremi d'integrazione: $1, \ i$

ii) $f(z) = 1/z$; estremi d'integrazione: $1,\ i$
iii) $f(z) = z^2 + z$; estremi d'integrazione: $1,\ 2i$
iv) $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$; estremi d'integrazione: $2,\ 2i$
v) $f(z) = z^{1/2}$; estremi d'integrazione: $1,\ i$ ramo tale che: $1^{\frac{1}{2}} = 1$
vi) $f(z) = z^{\frac{1}{n}},\ n \in \mathcal{N}$; estremi d'integrazione: $1,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; ramo tale che: $1^{\frac{1}{n}} = 1$
(γ è un contorno qualsiasi che congiunge gli estremi indicati, che non passa per l'origine e che non gira intorno all'origine) nei seguenti due modi diversi:
a) usando il teorema della primitiva (il metodo più conveniente, se la primitiva è nota);
b) sciegliendo un contorno conveniente per fare calcoli.

Risp. *i)* $\frac{i^{n+1}-1}{n+1}$; *ii)* $i\frac{\pi}{2}$; *iii)* $-\frac{17}{6} - \frac{8i}{3}$; *iv)* $-4 + i\frac{\pi}{2}$; *v)* $\frac{2}{3}(e^{\frac{3}{4}\pi i} - 1)$; *vi)* $\frac{n}{n+1}[e^{i\frac{\pi}{4}\frac{n+1}{n}} - 1]$

12) *Teorema di Cauchy per domini multiplamente connessi.* Si dimostri il seguente risultato.
Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ multiplamente connesso (caratterizzato da un insieme finito di n "buchi") e sia γ una curva chiusa percorsa in senso antiorario, contenuta in $\mathcal{D}$ e contenente gli n buchi. Allora:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz,$$

dove γ_k è la curva chiusa che delimita il k-esimo buco, percorsa in senso antiorario.

13) Mostrare che:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso regolare che gira una volta intorno a z_0 in senso antiorario.

14) Come applicazione del teorema di Cauchy su domini multiplamente connessi, si calcolino i seguenti integrali del tipo $\int_\gamma f(z)dz$, dove:
i) $f(z) = 1/z$; estremi d'integrazione: $1,\ i$
ii) $f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$; estremi d'integrazione: $1,\ 1+i$
lungo un contorno γ qualsiasi che congiunge gli estremi indicati girando, rispettivamente:
i) m volte in senso antiorario e n volte in senso orario intorno a 0;
ii) m volte in senso antiorario intorno a i e n volte in senso orario intorno a 0;
(Suggerimento: si decomponga le funzioni razionali in fratti semplici).

Risp. *i)* $i\pi[\frac{1}{2} + 2(m-n)]$; *ii)* $2\pi(m+n) + i\log 2$

15) *Formula integrale di Cauchy.* Si dimostri che, *se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$, la curva γ ed il suo interno G sono contenuti in $\mathcal{D}$ e $z \in G$, allora:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z')}{z' - z}.$$

16) *Teorema della media.* Si dimostri la seguente proposizione.
i) *Se $f(z)$ è analitica all'interno del cerchio di raggio R di centro z_0 ed è continua sulla sua circonferenza, allora il valore al centro $f(z_0)$ è pari alla media aritmetica dei valori assunti sulla circonferenza:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

ii) *Se $u(x, y)$ è una funzione armonica all'interno della circonferenza di raggio R e centro (x_0, y_0), allora il valore al centro $u(x_0, y_0)$ è pari alla media aritmetica dei valori assunti sulla circonferenza:*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta) d\theta.$$

17) *Teorema del massimo e minimo modulo.* Si dimostri il seguente risultato.
i) *Se $f(z)$ è analitica nel dominio $\mathcal{D}$ ed è continua in $\partial\mathcal{D}$, allora $|f(z)|$ non può raggiungere il suo massimo (ed il suo minimo) in un punto interno.* (Per dimostrare il teorema del minimo modulo, basta ripetere le considerazioni svolte nel teorema del massimo per la funzione $1/f(z)$, supponendo che non abbia zeri in $\mathcal{D}$).
ii) *Se la funzione $u(x, y)$ è armonica in un dominio di $\mathbb{R}^2$, allora $u(x, y)$ non può raggiungere il suo massimo ed il suo minimo in un punto interno.*

18) *Formula integrale di Cauchy per la derivata n-esima.* Si dimostri la seguente proposizione.
Se $f(z)$ è analitica nel dominio $\mathcal{D}$, essa ammette derivate $f^{(n)}(z)$ di ogni ordine in $\mathcal{D}$ (quindi analitiche in $\mathcal{D}$), che hanno la seguente rappresentazione integrale:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}}.$$

19) Si dimostrino i seguenti teoremi di Liouville.
i) 1^0 *teorema di Liouville.* Una funzione analitica e limitata in $\mathcal{C}$ è costante.
i) 2^0 *teorema di Liouville.* Se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{C}$ e

$$|f(z)| < M|z|^m, \quad |z| \to \infty, \quad M > 0, \ m \in \mathcal{N},$$

allora $f(z)$ è un polinomio di grado $\leq m$.

20) *Teorema di Morera.* Si dimostri il seguente risultato.

Se $f(z)$ è continua nel dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso, e se $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ lungo qualunque curva chiusa γ contenuta in $\mathcal{D}$, allora $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

21) *Integrale al valor principale.*
a) *Definizione.* Si consideri un contorno γ di estremi z_a e z_b in $\mathcal{C}$ ed una funzione $g(z)$ che ha una singolarità non sommabile in un punto $z_0 \in \gamma$ (ad es.: $g(z) \sim (z-z_0)^{-p}, \ p \geq 1, \ z \sim z_0$). Si consideri una circonferenza centrata in z_0 di raggio ϵ e siano z_1, z_2 i punti di intersezione di tale circonferenza con la curva γ, sia inoltre γ_1 il sottoinsieme di γ che ha per estremi z_a, z_1 e γ_2 il sottoinsieme di γ che ha per estremi z_2, z_b. Se il limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz)$$

esiste (attraverso un meccanismo di cancellazione delle singolarità dei due integrali), esso viene definito *integrale nel senso del valor principale di $g(z)$ lungo γ* e indicato nel seguente modo:

$$P\int_\gamma g(z)dz := \lim_{\epsilon \to 0} (\int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz).$$

b) Solitamente $g(z) = f(z)/(z-\zeta), \ \zeta \in \gamma$ e l'integrale al valor principale diventa:

$$P\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}dz, \quad \zeta \in \gamma.$$

Si dimostri che tale integrale esiste se e solo se $f(z)$ è una funzione di Lipshitz (Holder) su γ; cioè se:
esistono due costanti positive κ, μ tali che

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \kappa |z_1 - z_2|^\mu, \quad z_1, z_2 \in \gamma$$

22) Si consideri l'integrale

$$I := \int_a^b \frac{dt}{(t-x)^n}, \quad x \in [a,b].$$

i) È definito come integrale improprio? Se sì, quanto vale?
ii) È definito come integrale nel senso del valor principale? Se sì, quanto vale?
Risp. i) L'integrale improprio non è definito perchè, per $\epsilon \to 0^+$, entrambi gli integrali:

$$\int_a^{x-\epsilon} \frac{dt}{(t-x)^n} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(-)^n}{1-n}[\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{\epsilon^{n-1}}], & n \neq 1, \\ \ln\epsilon - \ln(x-a), & n = 1, \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\int\limits_{x+\epsilon}^{b} \frac{dt}{(t-x)^n} = \{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-n}[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{\epsilon^{n-1}}], & n \neq 1, \\ \ln(b-x) - \ln\epsilon, & n = 1 \end{array} \tag{3}$$

divergono. Il valor principale dell'integrale è invece ben definito se e solo se n è dispari. In questo caso:

$$I = P\int\limits_{a}^{b} \frac{dt}{(t-x)^n} = \{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-n}[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{(a-x)^{n-1}}], & n \neq 1, \\ \ln(b-x) - \ln(x-a), & n = 1. \end{array} \tag{4}$$

23) *Rappresentazione integrale di Cauchy di una funzione analitica.* Si consideri la funzione $\Phi(z)$ definita da:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}, \quad z \notin \gamma,$$

con $f(z)$ funzione di Lipshitz sul contorno chiuso γ, percorso in senso antiorario. Si dimostri i seguenti risultati.
a) $\Phi(z)$ è analitica $\forall\ z \notin \gamma$ e

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i z}\oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}, \quad z \notin \gamma.$$

(La dimostrazione è molto simile a quella relativa alla formula integrale di Cauchy).
b) $\Phi(z) = (1/2\pi i z)\oint_\gamma f(z)dz + o(1/|z|), \quad |z| >> 1.$
c) *Formule di Plemelj - Sokhotski* Il limite in cui z tende ad un punto del contorno è descritto dalle seguenti formule:

$$\lim_{z\to\zeta\in\gamma} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}P\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-\zeta} \pm \frac{1}{2}f(\zeta), \quad \zeta \in \gamma,$$

dove i segni + e - stanno a indicare i limiti per z che tende al punto ζ del contorno γ rispettivamente da sinistra e da destra, rispetto al verso positivo di percorrenza del contorno (la dimostrazione è assai semplice se si assume che $f(z)$ sia analitica in una striscia, piccola a piacere, intorno alla curva γ; farlo in questo modo).

24) *Integrali su archi infiniti ed infinitesimi.* Sia γ_R è un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R. Dimostrare i seguenti risultati.
a) Se $zf(z) \to 0$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z| = R \to \infty$ (cioè se $|zf(z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to \infty$), allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

b) Se $zf(z) \to A$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z| = R \to \infty$ (cioè se $|z(f(z) - A/z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to \infty$), allora

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = i\alpha A,$$

dove α è l'angolo sotteso da γ_R.
c) Se $(z-z_0)f(z) \to 0$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z-z_0| = R \to 0$ (cioè se $|(z-z_0)f(z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to 0$), allora

$$\lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

d) Se $(z-z_0)f(z) \to A$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z| = R \to 0$ (cioè se $|(z-z_0)(f(z) - A/(z-z_0))| < \phi(R) \to 0$, per $R \to 0$), allora

$$\lim_{R\to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = i\alpha A,$$

dove α è l'angolo sotteso da γ_R.
e) *Lemma di Jordan* Sia γ_R la semi-circonferenza di centro 0 e raggio R del semipiano superiore; se $f(z) \to 0$ uniformemente su γ_R (cioè se $|f(z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to \infty$), allora

$$\lim_{R\to \infty} \int_{\gamma_R} e^{ikz} f(z)dz = 0, \quad k > 0.$$

25) Si mostri che, per le seguenti funzioni $f(z)$:
i) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$; *ii)* $f(z) = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}(z+1)}$, *iii)* $\frac{1}{\log z(z+i)}$
vale la proprietà che $zf(z) \to 0$ uniformemente su γ_R, per $|z| = R \to \infty$ e per $|z| \to 0$; e che quindi:

$$\lim_{R\to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

5.1.4 Serie di Taylor, di Laurent e teorema dei residui

1) Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

di funzioni $f_n(z)$ definite in $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$,
i) si diano le definizioni di serie convergente, assolutamente ed uniformemente convergente alla funzione $f(z)$ in $\mathcal{A}$.
ii) Si mostri che l'assoluta convergenza implica la convergenza; si illustri che il viceversa non è vero con l'esempio: $\sum_n (-)^n/n$.

2) Si mostri che la serie geometrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ converge a $1/(1-z)$ per $|z| < 1$, è assolutamente convergente per $|z| < 1$ ed è uniformemente conergente per $|z| \le \rho < 1$. Ma non è uniformemente convergente per $|z| < 1$.

Risp. Per l'ultimo punto, si osservi che $sup(\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}) = \infty, \ |z| < 1, \ \forall \ n \in \mathcal{N}$.

3) Si mostri che la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) = -\frac{1}{1+nz} + \frac{1}{1+(n-1)z}$$

è convergente in un intorno $\mathcal{U}$ di $z = 0$ contenente $z = 0$, ma è uniformemente convergente solo escludendo $z = 0$; cioè in $\mathcal{U} - \{|z| < \epsilon\}$.

4) L'uniforme convergenza è la proprietà chiave che permette di trasferire alla somma della serie le proprietà delle somme parziali. Dimostrare, ad esempio, i seguenti risultati.
a) Sia $f(z)$ la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

uniformemente convergente in una regione $\mathcal{A}$ del piano complesso. Si dimostri che, se le funzioni $f_n(z)$ sono continue in $\mathcal{A}$, allora $f(z)$ è continua in $\mathcal{A}$.
b) Si dimostri che la somma $f(z)$ di una serie uniformemente convergente di funzioni analitiche in un dominio $\mathcal{D}$ del piano complesso è essa stessa analitica in $\mathcal{D}$. (Suggerimento: si usi il teorema di Morera)
c) Si dimostri che, se la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ di funzioni continue su una curva γ è uniformemente convergente su γ, allora è possibile scambiare la somma con l'integrale:

$$\int_{\gamma} dz \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} dz f_n(z)$$

5) *Teorema di Cauchy-Hadamard.* Si dimostri il seguente teorema.
Data la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$*, sia* R *il numero positivo definito da*

$$\lim_{n\to\infty} sup(|c_n|^{1/n}) = \frac{1}{R};$$

allora la serie converge assolutamente per $|z-z_0| < R$ *e diverge per* $|z-z_0| > R$*.*
R è detto *raggio di convergenza della serie.*

6) Mostrare che, se la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ è assolutamente convergente per $|z-z_0| < R$ alla funzione somma $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

allora:
i) la serie è uniformemente convergente in ogni cerchio $|z-z_0| \le \rho < R$;

ii) la somma $f(z)$ è analitica in $\{z: \ |z-z_0|<R\}$, la derivata $n-esima$ di $f(z)$ è anch'essa analitica in $\{z: \ |z-z_0|<R\}$ e ammette lo sviluppo

$$f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdot\cdot(k-n+1)c_k(z-z_0)^{k-n}$$

il cui raggio di convergenza è ancora R.
iii) Il coefficiente c_n può essere riscritto nella forma $c_n=f^{(n)}(z_0)/n!$, e quindi:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Quest'ultimo sviluppo è detto *serie di Taylor della somma $f(z)$, di centro z_0 e raggio R.* Quindi:
ogni serie di potenze con raggio di convergenza $R>0$ è la serie di Taylor della sua somma $f(z)$, che è analitica per $|z-z_0|<R$

7) *Unicità dello sviluppo di Taylor.* Usare il risultato del precedente esercizio per mostrare che, se le serie di potenze $\sum_n a_n(z-z_0)^n$, $\sum_n b_n(z-z_0)^n$ hanno la stessa somma e lo stesso raggio di convergenza, allora $a_n=b_n=f^{(n)}(z_0)/n!$.

8) Date le seguenti serie di Taylor:
$i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n};\quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}z^n;\quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty}(nz)^n;\quad iv)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a},\ a\in\mathbb{R},\quad v)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(z-z_0)^n,\ a\in\mathbb{R};\quad vi)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n^2+1};\quad vii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\log n)^n};\quad viii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)(z-z_0)^n;$
$ix)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n!)^a},\ a>0;\quad x)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n;\quad xi)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}z^n\quad xii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)^n}{(n+1)!}z^n$
a) usare la formula di Cauchy-Hadamard e/o quella di D'Alambert:

$$\lim_{n\to\infty} sup^n\sqrt{|c_n|}=\frac{1}{R},\qquad \lim_{n\to\infty} sup\ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\frac{1}{R}$$

per determinarne il raggio di convergenza R.
b) Studiare il comportamento delle serie sulla circonferenza di convergenza $|z-z_0|=R$.

Risp. $a)$: $i)\ R=\infty;\ ii)\ R=1;\ iii)\ R=0;\ iv)\ R=1;\ v)\ R=e/|a|;\ vi)\ R=1;\ vii)\ R=\infty;\ viii)\ R=1;\ ix)\ R=\infty;\ x)\ R=1/4;\ xi)\ R=1;\ xii)\ R=1/(2e)$.
$b)$: $ii)$ *diverge per* $|z|=1$; $iv)$ $a>1$: *converge ass. e unif.*; $0<a\leq 1$: *diverge in* $z=1$, *converge per* $|z|=1,\ z\neq 1$; $a\leq 0$: *diverge.*

9) Dimostrare che, se la serie numerica $\sum_n c_n$ è assolutamente convergente, allora la serie di funzioni $\sum_n c_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente per $|z-z_0|\leq 1$.

10) Mostrare che il prodotto di due serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ convergenti nello stesso disco è dato dalla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k,$$

essa stessa convergente nello stesso disco. Calcolare esplicitamente i primi 4 coefficienti $c_n,\ n=0,1,2,3$ in funzione di a_n e b_n.

11) Scrivere il rapporto tra due serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) / \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right), \quad a_0 \neq 0$$

convergenti nello stesso disco, come serie di potenze, esprimendo i primi 3 coefficienti in funzione dei coefficienti c_n e a_n. Suggerimento: utilizzare i risultati dell'esercizio precedente.

Risp. $b_0 = \frac{c_0}{a_0},\quad b_1 = \frac{c_1 a_0 - c_0 a_1}{a_0^2},\quad b_2 = \frac{a_1^2 c_0 - a_0 a_2 c_0 - a_0 a_1 c_1 + a_0^2 c_2}{a_0^3}$

12) Se R è il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, mostrare che il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^m z^n$ è R^m.

13) Si mostri che ogni funzione analitica può essere sviluppata in serie di Taylor nell'intorno di un suo punto di analiticità. Questo risultato, ottenibile partendo dalla formula integrale di Cauchy, è la controparte del risultato contenuto nell'esercizio teorico **6)** ii).

14) Trovare le rappresentazioni in serie di potenze di Mc Laurin (serie di Taylor di centro $z_0 = 0$) delle seguenti funzioni elementari
$i)$ e^{iz}; $ii)$ e^{z^2}; $iii)$ $\sin z$; $iv)$ $\cos z$; $v)$ $\sinh z$; $vi)$ $\cosh z$; $vii)$ $\cosh z^{\frac{1}{2}}$
e determinare i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. $i)$ $e^{iz} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n,\ R=\infty$; $ii)$ $e^{z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!},\ R=\infty$; $iii)$ $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ R=\infty$; $iv)$ $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} z^{2n},\ R=\infty$; $v)$ $\sinh z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R=\infty$; $vi)$ $\cosh z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ R=\infty$; $vii)$ $\cosh z^{1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!},\ R=\infty$.

15) Costruire le serie di Taylor di centro $z_0 = 0$ delle seguenti funzioni:
$i)$ $\frac{\sin z}{z}$; $ii)$ $\frac{\cosh z - 1}{z^2}$; $iii)$ $\frac{e^z}{1-z}$ e determinare i raggi di convergenza di tali serie.

Risp. $i)$ $\frac{\sin z}{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n},\ R=\infty$; $ii)$ $\frac{\cosh z-1}{z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+2)!},\ R=\infty$; $iii)$ $\frac{e^z}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (k!)^{-1},\ R=1$.

16) Costruire le serie di Taylor centrate in z_0 dei seguenti rami di funzioni polidrome:
$i)$ $\ln z,\ z_0 = 1\ (\ln 1 = 0)$; $ii)$ $(z+1)^{\frac{1}{n}},\ z_0 = 0\ (1^{\frac{1}{n}} = 1)$,
e determinare i raggi di convergenza di tali serie.

Risp. $i)$ $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{n}(z-1)^n$, $R=1$; $ii)$ $(z+1)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/n}{k} z^k$, $R=1$.

17) *Regola di De L'Hopital.* Se $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni analitiche nell'intorno di z_0 e se

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) = 0, \quad k = 0,1,..,n, \qquad g^{(n+1)}(z_0) \neq 0,$$

si mostri che

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{g^{(n+1)}(z_0)}$$

18) Sia $\mathcal{U}$ l'intorno di un punto. Si mostri che le seguenti tre affermazioni:
i) $f(z)$ è derivabile in $\mathcal{U}$ (Riemann);
ii) $f(z)$ è continua in $\mathcal{U}$ e il suo integrale lungo un contorno chiuso qualsiasi contenuto in $\mathcal{U}$ è nullo (Cauchy-Morera);
iii) $f(z)$ è sviluppabile in una serie di potenze positive, convergente in ogni disco contenuto in $\mathcal{U}$ (Weierstrass);
sono tre modi equivalenti di caratterizzare una funzione analitica in $\mathcal{U}$.

19) *Teorema sullo sviluppo di Laurent* Si mostri che ogni funzione $f(z)$ analitica in una corona circolare di centro z_0 e raggi $R_1 < R_2$ può essere sviluppata nella serie di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso, percorso in senso antiorario, contenuto all'interno della corona circolare, che gira una volta intorno al buco della stessa.

20) *Il residuo di una funzione.* Sia $f(z)$ una funzione che ha una singolarità isolata (polare od essenziale) in $z_0 \in \mathbb{C}$ ed è analitica in un suo intorno. Si definisce residuo di $f(z)$ in z_0 il seguente integrale:

$$Res\,(f(z), z_0) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz, \tag{5}$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso , percorso in senso antiorario, che gira intorno a z_0 una volta, senza includere altre eventuali singolarità (per il teorema di Cauchy, l'integrale non dipende dai dettagli del contorno e quindi il residuo è definito senza ambiguità).

Si usi la teoria delle serie di Laurent per mostrare che:

$$Res\,(f(z), z_0) = c_{-1},$$

dove c_{-1} è il coefficiente della potenza -1 dello sviluppo di Laurent di f nell'intorno di z_0.

21) *Teorema dei residui.* Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate. Allora

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\,(f(z), z_j)\,,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso percorso in senso antiorario e contenuto in $\mathcal{D}$, e $z_j,\ j = 1, .., n$ sono le singolarità isolate contenute all'interno di γ.

22) *Residuo all'∞ e teorema sulla somma dei residui in $\bar{\mathbb{C}}$.*
i) Si consideri una funzione $f(z)$ che possiede all'∞ una singolarità isolata, polare o essenziale, e si osservi che la definizione di residuo precedentemente data diventa, nel caso in cui $z_0 = \infty$:

$$Res\,(f(z), \infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} f(z)dz,$$

dove C_R è una circonferenza centrata in 0 e di raggio R sufficientemente grande da contenere tutte le singolarità di f al finito, *percorsa in senso orario.*
ii) Si mostri che, attraverso il cambiamento di variabili $t = 1/z$, un'eventuale singolarità in $z = \infty$ della funzione $f(z)$ diventa una singolarità in $t = 0$ della funzione $f(1/t)$, e che:

$$Res\,(f(z), \infty) = -Res\left(\frac{1}{t^2}f(\frac{1}{t}), 0\right).$$

Si osservi quindi che la funzione $f(z)$ può avere un residuo non nullo all'∞ pur essendo analitica all'∞; ad esempio:

$$Res\left(\frac{z+1}{z}, \infty\right) = -1.$$

iii) *Teorema sulla somma dei residui.* Si dimostri che, se la funzione $f(z)$ è analitica in $\bar{\mathbb{C}}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_j,\ j = 1, .., n$ e della singolarità isolata all'∞, allora la somma dei residui in tutte queste singolarità è 0:

$$\sum_{j=1}^{n} Res\,(f(z), z_j) + Res\,(f(z), \infty) = 0.$$

23) Determinare gli sviluppi della funzione $1/(1-z)$ in serie di potenze con centro $z_0 = 0$ e $z_0 = 1$ convergenti in tutto il piano complesso.

Risp. $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n,\ \ |z| < 1,\ \ Taylor;\quad \frac{1}{1-z} = -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} z^n,\ \ |z| > 1,\ \ Laurent.$

24) Sviluppare la funzione $f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$ in serie di potenze centrate in $z = 0$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1 - 2^{-(n+1)})z^n,\quad |z| < 1;\quad -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ \ 1 < |z| < 2;\quad \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2^{n+1}} - 1)z^n,\ \ |z| > 2.$

25) Sviluppare la funzione $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ in serie di potenze centrate in $z = 1$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. $-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n},\ |z-1|<1;\quad \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^{2n},\ |z-1|>1.$

26) Sviluppare la funzione

$$f(z)=\frac{3}{z(z-1)(z-2)}$$

in serie di potenze con centro $z_0=0,1,2$ in tutto il piano complesso.

27) Date le funzioni $f_1(z)=e^{az}/z^2,\ f_2(z)=e^{\frac{1}{z}},\ f_3(z)=\sin(1/z),\ f_4(z)=e^{4z^2}/z^2$,
i) ottenere i loro sviluppi in serie di potenze in tutto il piano complesso, centrato in $z_0=0$ e in $z_0=\infty$.
ii) Studiare le loro singolarità in $\bar{\mathcal{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui delle singolarità al finito e all'∞, verificando il teorema sulla somma dei residui.

Risp. *i)* $e^{az}/z^2=\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{(n+2)!}z^n,\ \textit{polo doppio in } 0,\ Res(f_1,0)=a,$
$\zeta=1/z:\ \ \zeta^2e^{a/\zeta}=\sum_{n=-\infty}^{2}\frac{a^{2-n}}{(2-n)!}\zeta^n,\ \textit{sing. ess. in } z=\infty,\ Res(f_1,\infty)=-Res(e^{a/\zeta},0)=-a.$
ii) $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^m}{(-m)!},\ \textit{sing. ess. in } 0,\ Res(f_2,0)=1,$
$\zeta=1/z:\ e^{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!},\ \textit{anal. in } z=\infty,\ Res(f_2,\infty)=-Res(\zeta^{-2}e^{\zeta},0)=-1.$
iii) $\sin(1/z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{-(2n+1)},\ \textit{sing. ess. in } 0,\ Res(f_3,0)=1,$
$\zeta=1/z:\ \sin\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}\zeta^{2n+1},\ \textit{anal. in } z=\infty,\ Res(f_3,\infty)=-Res(\zeta^{-2}\sin\zeta,0)=-1.$
iv) $e^{4z^2}/z^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}z^{2(n-1)},\ \textit{polo doppio in } 0,\ Res(f_4,0)=0,$
$\zeta=1/z:\ \ \zeta^2e^{4\zeta^{-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}\zeta^{2(1-n)},\ \textit{sing. ess. in } z=\infty,\ Res(f_4,\infty)=-Res(e^{4\zeta^{-2}},0)=0.$

28) Sviluppare la funzione $f(z)=(z^2+1)^{-1}$ in serie di potenze, centrate in $z_0=i$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza. Calcolare inoltre i residui nei punti singolari.

Risp. $\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i}{2})^n(z-i)^n,\ 0<|z-i|<2\ \Rightarrow\ Res(i)=\frac{1}{2i};$
$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i(z-i)}+\sum_{n=-\infty}^{-1}(-2i)^{-n-2}(z-i)^n,\ 2<|z-i|.$

29) Studiare le singolarità della funzione

$$f(z)=\frac{4z+1}{z^5+2z^3+z}=\frac{4z+1}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

in $\bar{C}$ e calcolare i corrispondenti residui, verificando il teorema sulla somma dei residui.

Risp. 0 *polo sempl.* $Res(0) = 1$; $\pm i$ *poli doppi* $Res(\pm i) = -\frac{1\pm 2i}{2}$

30) Studiare le singolarità delle funzioni $f_1(z) = \frac{1}{\sin z}$, $f_2(z) = \frac{1}{\cos z}$, $f_3(z) = \tan z$, $f_4(z) = \frac{1}{\cos z}$, $f_5(z) = \frac{z}{\cosh z - 1}$ in $\overline{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui. Mostrare, in particolare, che il punto $z = \infty$ è un punto di accumulazione di singolarità polari e che quindi non ammette sviluppo di Laurent e non esiste il suo residuo.

Risp. $\frac{1}{\sin z}$: $z_n = \pi n$, *poli sempl.*, $c_{-1} = (-)^n$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
$\frac{1}{\cos z}$: $z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, *poli sempl.*, $c_{-1} = (-)^{n+1}$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
$\tan z$: $z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, *poli sempl.*, $c_{-1} = -1$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
lungo asse reale, per $z \to 0$: $\tan z \to i$, *da sopra*, $\tan z \to -i$, *da sotto*
$\frac{z}{\cos z}$: $z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, *poli sempl.*, $c_{-1} = (-)^{n+1}\frac{\pi}{2}(2n+1)$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
$\frac{z}{\cosh z - 1}$: $z = 0$ polo semplice, Res(0) = 2. $z_n = 2n\pi i$, $n = \pm 1, \pm 2, ..$ poli doppi, $\text{Res}(z_n) = 2$. $z = \infty$ punto d'accumulazione di poli doppi.

31) Studiare le singolarità delle funzioni $1/\sin(1/z)$, $1/\cos(1/z)$, $\tan(1/z)$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $1/\sin(1/z)$: $1/\pi n$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, poli semplici, $\text{Res}(1/\pi n) = (-)^{n+1}\pi^2 n^2$;
$z = \infty$ polo, $\text{Res}(\infty) = 1/3!$; $z = 0$ punto di acc. di poli sempl.

32) Studiare le singolarità delle seguenti funzioni in $\bar{\mathbb{C}}$
i) $\frac{1}{z^2+1}$; *ii)* $\frac{1}{z^3-z^2}$; *iii)* $\frac{\sin z - z}{z^k}$, $k = 1, 2, 3, 4$
e calcolare i corrispondenti residui. Nel calcolo del residuo all'∞, usare sia la definizione di residuo, sia il teorema sulla somma dei residui in $\bar{\mathbb{C}}$.

Risp. $\frac{1}{z^2+1}$: $z = \pm i$ *poli sempl.*, $Res(\pm i) = \pm\frac{1}{2i}$;
$\frac{1}{z^3-z^2}$: 0 *polo doppio* $Res(0) = -1$, 1 *polo sempl.* $Res(1) = 1$.
$\frac{\sin z - z}{z^k}$: $k = 1$: *anal. in* $\mathbb{C}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 0$;
$k = 2$: *anal. in* $\mathbb{C}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 0$
$k = 3$: *anal. in* $\mathbb{C}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 0$
$k = 4$: 0 *polo sempl.* $Res(0) = -1/3!$, *anal. in* $\mathbb{C} - \{0\}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 1/3!$

33) Mostrare che, se la funzione $f(z)$ possiede un numero finito di singolarità isolate z_j, $j = 1, .., N$ in $\mathbb{C}$ al finito, e se ammette inoltre lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad R < |z - z_0| < \infty$$

per un qualche R finito, allora $\sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j) = c_{-1}$. (Sugg.: si usi la nozione di residuo all'∞).

34) Studiare le singolarità della funzione $f(z) = \frac{z+1}{1-\cos z}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $2n\pi,\ n \in \mathcal{Z}$ *poli doppi* $Res(2n\pi) = 2,\ \infty$ *punto d'acc. poli*

35) Studiare le singolarità di ogni ramo delle funzioni

$i)\ \frac{Log\ z}{z-z_0},\ z_0 \neq 0;\ \ ii)\ \frac{(z-1)^{\frac{1}{3}}}{z+i}$

in $\bar{\mathcal{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $\frac{Log\ z}{z-z_0}$: *polidroma, inf. determinazioni,* 0 *punto diram.*;
z_0 *polo sempl. di ogni ramo,* $Res_k(z_0) = \ln|z_0| + i[arg(z_0) + 2k\pi],\ k \in \mathcal{Z}$.
$\frac{(z-1)^{\frac{1}{3}}}{z+i}$: *polidroma,* 3 *determinazioni,* 1 *punto diram.*;
$-i$ *polo sempl. di ogni ramo,* $Res_k(-i) = ie^{\frac{2k\pi i}{3}},\ k = 0, 1, 2$

36) Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Mostrare che:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Delta_\gamma Arg\ f(z),$$

dove $\frac{1}{2}\Delta_\gamma Arg\ f(z)$, la variazione dell'argomento di $f(z)$ lungo il contorno chiuso γ (rapportata a 2π), è anche detto "indicatore logaritmico (o indice) di $f(z)$ lungo γ".

37) Mostrare che l'indicatore logaritmico della funzione $f = z$ lungo un qualunque contorno chiuso che gira n volte, in senso antiorario e m volte in senso orario intorno all'origine è $n - m$. Esso è nullo, invece, se il contorno non contiene l'origine.

38) Mostrare che l'indicatore logaritmico della funzione $f = 1 + \phi(z)$ lungo un qualunque contorno chiuso γ tale che $|\phi(z)| < 1,\ z \in \gamma$ è nullo.

39) *Teorema dell'indice.* Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ e tale che $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.

40) *Principio dell'argomento.* Si osservi che, dai risultati dei due esercizi precedenti segue che:

La differenza tra il numero M degli zeri e N dei poli (contati con la loro molteplicità) di una funzione $f(z)$ in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$ in cui essa è meromorfa è pari alla variazione dell'argomento di $f(z)$ lungo $\partial\mathcal{D}$:

$$\Delta_{\partial\mathcal{D}} Arg\ f(z) = M - N.$$

41) *Teorema di Rouché.* Se $f(z)$ e $g(z)$ sono due funzioni analitiche in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ e $|f(z)| > |g(z)|\ \forall z \in \partial\mathcal{D}$, mostrare che le funzioni $f(z) + g(z)$ e $f(z)$ hanno lo stesso numero di zeri in $\mathcal{D}$.

42) *Teorema fondamentale dell'algebra.* Il polinomio di grado n

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j$$

possiede n radici. Dimostrare il teorema come conseguenza del teorema di Rouché applicato alle funzioni $f(z) = \alpha_n z^n$ e $g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j z^j$.

Calcolo di integrali col teorema dei residui

1) Usando il teorema dei residui o la nozione di residuo all'∞, mostrare che

$$\oint_\gamma \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}\frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

dove γ è un qualunque percorso chiuso, percorso in senso antiorario una volta, che racchiude tutte le singolarità dell'integrando.

2) Calcolare i seguenti integrali del tipo $I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$:

i) $R = \frac{1}{a+b\cos\theta}$, $0 < b < a$; *ii)* $R = \frac{1}{a+b\sin\theta}$, $0 < b < a$; *iii)* $R = \frac{1}{a^2+\sin^2\theta}$, $a > 0$; *iv)* $R = \sin^2\theta$; *v)* $R = \cos^2\theta$; *vi)* $R == \sin^4\theta$; *vii)* $R = \cos^4\theta$

Risp. *i)* $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$; *ii)* $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$; *iii)* $\frac{2\pi}{a\sqrt{1+a^2}}$; *iv)* π; *v)* π; *vi)* $\frac{3\pi}{4}$; *vii)* $\frac{3\pi}{4}$

3) Calcolare i seguenti integrali del tipo $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)$:

i) $R = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$; *ii)* $R = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a \neq b$, $a, b > 0$; *iii)* $R = \frac{1}{x^4+4a^4}$, $a > 0$; *iv)* $R = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$; *v)* $R = \frac{1}{x^2-2x+2}$; *vi)* $R = \frac{x}{(x^2+a^2)(x-ib)}$, $a, b > 0$; *vii)* $R = \frac{1}{(x^2+1)(x-2i)}$; *viii)* $R = \frac{1}{(x-i)(x-2i)}$

Risp. *i)* $\frac{\pi}{a}$; *ii)* $\frac{\pi}{ab(a+b)}$; *iii)* $\frac{\pi}{4a^3}$; *iv)* $\frac{\pi}{2a^3}$; *v)* π; *vi)* $\frac{\pi}{a+b}$; *vii)* $\frac{\pi i}{3}$; *vii)* 0

4) Verificare che

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c}^{+i\infty+c} \frac{dz}{z^2-1}, \quad c \in \mathbb{R}$$

vale: $I = -(1/2)$, per $|c| < 1$ e $I = 0$ per $|c| > 1$. (Il cammino d'integrazione è parallelo all'asse immaginario ed interseca l'asse reale nel punto $z = c$)

5) Calcolare i seguenti integrali di Fourier $I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} R(x)$, $k \in \mathbb{R}$, dove le funzioni $R(x)$ sono definite nell'esercizio precedente. Calcolare, di conseguenza, gli integrali $C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos kx R(x)$, $k \in \mathbb{R}$, $S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin kx R(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Risp. *i)* $I(k) = \frac{\pi e^{-|k|a}}{a}$; *ii)* $I(k) = \frac{\pi}{b^2-a^2}(\frac{e^{-a|k|}}{a} - \frac{e^{-b|k|}}{b})$; *iii)* $I(k) = \frac{\pi}{4a^3}e^{-|k|a}[\cos(a|k|) + \sin(a|k|)]$; *iv)* $\frac{\pi}{2a^3}(1 + a|k|)e^{-|k|a}$; *v)* $\pi e^{ik-|k|}$

6) Verificare che

$$I(k, c) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x-c} = \theta(k)e^{-ick},$$

dove k è un numero reale non nullo, $Im\ c < 0$, $\theta(k) = 0$ per $k < 0$ e $\theta(k) = 1$ per $k > 0$.

7) Verificare che

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}, \ a > 0.$$

8) Calcolare le seguenti anti-trasformate di Laplace: $I(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{B}} dz e^{zt} R(z)$, $t > 0$, dove le funzioni $R(z)$ sono definite nell'esercizio precedente e $\mathcal{B}$ è il contorno $Re\ z =$ cost che ha tutte le singolarità di $R(z)$ a sinistra.

Risp. $i)$ $\frac{\sin(at)}{a}$; $ii)$ $\frac{1}{b^2-a^2}(\frac{\sin(at)}{a} - \frac{\sin(bt)}{b})$; $iii)$ $\frac{1}{4a^3}[\cosh(at)\sin(at) - \sinh(at)\cos(at)]$; $iv)$ $\frac{1}{2a^3}[\sin(at) - at\cos(at)]$; $v)$ $\frac{e^t}{2}(\sin t - t\cos t)$

9) Usare il teorema dei residui per calcolare i seguenti integrali al valor principale:
$i)$ $P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)} = 0$; $ii)$ $P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{\pi}{2}$; $iii)$ $P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-i)} = \frac{\pi i}{i-1}$; $iv)$ $P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x}dx = \pi i \text{ sgn } k,\ k \in \mathbb{R}$; $v)$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x}dx = \pi \text{ sgn } k,\ k \in \mathbb{R}$

10) Verificare che

$$P\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos bx}{x^2 - a^2} = -\frac{\pi}{a}\sin(ab),\ b > 0$$

5.1.5 Polidromia

1) *Studio della funzione* $w = z^{\frac{1}{2}}$. Si mostri che tale funzione è monodroma e analitica nel settore $0 < arg\ z < 2\pi$. Si calcoli l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1 - i\epsilon,\ 0 < \epsilon << 1$ e, più in generale, della circonferenza $|z| = cost$ e del piano tagliato $0 < arg\ z < 2\pi$. Si verifichi che la discontinuità della funzione attraverso il semi-asse reale positivo è: $\Delta(z^{\frac{1}{2}}) = -2\sqrt{r}$. Si mostri che i due rami della funzione sono ottenibili ruotando 2 volte intorno a $z = 0$. Si mostri che non si verificano altre discontinuità ruotando intorno ad ogni punto $z \neq 0$ e che perciò $z = 0$ è l'unico punto di diramazione (di ordine 1 della funzione). Si concluda che la funzione $w = z^{\frac{1}{2}},\ 0 < arg\ z < 2\pi$ è analitica in ogni dominio $\mathcal{D} \subset \{0 < arg\ z < 2\pi\}$ e la sua derivata è $(z^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$.

2) Mostrare che è necessario ruotare due volte intorno a $z = 0$ affinchè $w = z^{1/2}$ riprenda il valore iniziale. Introdurre quindi due copie (due fogli) del piano complesso z tagliato da 0 a $+\infty$ e mostrare che le immagini dei due fogli secondo $w = z^{1/2}$ ricoprono tutto il piano complesso w. Unire i due fogli in modo da rispettare le proprietà di continuità di $w = z^{1/2}$, costruendo cosi la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = z^{1/2}$ e mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann (i cui due emisferi passanti per i poli coincidono con i due fogli).

3) Si studi la funzione $w = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}$ utilizzando la rappresentazione polare $z = z_0 + re^{i\theta}$. Si mostri, in particolare, come vengono generalizzati i risultati dei due esercizi precedenti.

4) *Studio della funzione* $w = ((z - z_1)(z - z_2))^{\frac{1}{2}}$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2. Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma bipolare:

$$\sqrt{r_1 r_2}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \le \theta_{1,2} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso il segmento (z_1, z_2), con discontinuità $|\Delta((z-z_1)(z-z_2))^{\frac{1}{2}}| = 2\sqrt{r_1 r_2}$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tale segmento si rende la funzione, con le restrizioni $0 < arg\ (z - z_{1,2}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore. Si mostri infine che la sua derivata in tale piano tagliato è: $(z - \frac{z_1+z_2}{2})((z-z_1)(z-z_2))^{-\frac{1}{2}}$, $0 < arg\ (z - z_{1,2}) < 2\pi$.

5) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = ((z-z_1)(z-z_2))^{\frac{1}{2}}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann.

6) *Studio della funzione* $w = ((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{\frac{1}{2}}$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2, z_3, z_4. Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma quadripolare:

$$\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}},$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2} = z_3 + r_3 e^{i\theta_3} = z_4 + r_4 e^{i\theta_4}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \le \theta_{1,2,3,4} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso i segmenti (z_1, z_2) e (z_3, z_4), con discontinuità $|\Delta| = 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tali segmenti si rende la funzione, con le restrizioni $0 \le arg\ (z - z_{1,2,3,4}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore.

7) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = ((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{\frac{1}{2}}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann con una maniglia (o al toro).

8) *Studio della funzione* $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathcal{N}$. Si mostri che tale funzione è monodroma e analitica in $0 < arg\ z < 2\pi$. Si calcoli l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1 - i\epsilon$, $0 < \epsilon << 1$ e, più in generale, della circonferenza $|z| = cost$ e del piano tagliato $0 < arg\ z < 2\pi$. Si verifichi che la discontinuità della funzione attraverso il semi-asse reale positivo è: $\Delta(z^{\frac{1}{n}}) = r^{\frac{1}{n}}(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1)$. Si mostri che tutte le n determinazioni della funzione sono ottenibili ruotando n volte intorno a $z = 0$. Si mostri che non si verificano altre discontinuità ruotando intorno ad ogni punto $z \neq 0$ e che perciò $z = 0$ è l'unico punto di diramazione (di ordine $n - 1$ della funzione). Quante volte è necessario ruotare intorno a $z = 0$ affinchè w riprenda il valore iniziale? Si concluda che la funzione $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathcal{N}$, $0 <\ arg\ z < 2\pi$ è analitica in ogni dominio $\mathcal{D} \subset \{0 <\ arg\ z < 2\pi\}$ e la sua derivata è $(z^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} z^{(\frac{1}{n}-1)}$.

9) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathcal{N}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann.

10) *Studio della funzione Log* z. Si ripetano le considerazioni svolte nel precedente esercizio, mostrando che tale funzione ha il solo punto di diramazione

$z = 0$; che $\Delta(Log\ z) = 2\pi i$, $(Log\ z)' = 1/z$; che, ruotando nello stesso verso intorno a $z = 0$, $Im\ w$ continuerà a crescere e la funzione w non riprenderà più il valore iniziale (punto di diramazione di ordine infinito). Si mostri che sono necessari gli infiniti piani tagliati $2k\pi < arg\ z < 2(k+1)\pi$ per ricoprire il piano complesso w (la superficie di Riemann di $Log\ z$ è quindi a infiniti fogli). Si disegni infine, nel piano z, il reticolo curvilineo ortogonale $u = cost$ e $v = cost$.

11) Si mostri che la funzione $w = Log\ z$ trasforma il settore $0 < \alpha_1 < arg\ z < \alpha_2 < 2\pi$ nella striscia $0 < \alpha_1 < v < \alpha_2 < 2\pi$ del piano $w = u + iv$.

12) *Studio della funzione* $Log\ (z - z_2) - Log\ (z - z_1) = Log\ \frac{z-z_2}{z-z_1}$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2. Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma bipolare:

$$\log \frac{r_2}{r_1} + i(\theta_2 - \theta_1)$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \leq \theta_{1,2} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso il segmento (z_1, z_2), con discontinuità $\Delta = -2\pi i$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tale segmento si rende la funzione, con le restrizioni $0 < arg\ (z - z_{1,2}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore. Se ne calcoli infine la derivata.

13) Verificare che:

$i)$ $P\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(1-x)} = -\pi \cot p\pi, 0 < p < 1$; $ii)$ $\int_0^\infty \frac{1}{x^p(x+a)} = \frac{1}{a^{1/p}\sin(\pi p)}, a > 0, 0 < p < 1$; $iii)$ $\int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a^{1-p}\cos(\pi p/2)}$, $a > 0, |p| < 1$

14) Verificare che:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)^3} = \frac{3\pi}{8a^{5/2}}, \quad a > 0$$

15) Partendo da opportuni integrali del tipo $\int_0^\infty dx (\ln x)^n R(x)$, si mostri che:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}; \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi \ln a}{2a}, \ a > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2} = \ln 2; \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+3x+2}dx = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^2};$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{a}; \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2} dx = \frac{\ln a}{a}$$

5.1.6 Analiticità di rappresentazioni integrali. Prolungamento analitico di rappresentazioni integrali e di serie

1) Sia $I(z)$ una funzione complessa di variabile complessa definita dall'integrale:

$$I(z) = \int_\gamma dt f(z,t),$$

con: i) f definita in $\mathcal{D} \times \gamma$, ii) f analitica nella variabile z per $z \in \mathcal{D}$, $\forall\, t \in \gamma$, iii) continua in $t \in \gamma$, $\forall\, z \in \mathcal{D}$, iv) derivata prima $f'(z,t)$ di f rispetto a z continua in $\mathcal{D} \times \gamma$. Sia $\{\gamma_n\}$ una successione di intervalli di lunghezza finita tali che

$$\cdots \subset \gamma_n \subset \gamma_{n+1} \subset \ldots, \qquad \gamma_n \to \gamma, \quad n \to \infty.$$

Dimostrare che, se la successione di funzioni

$$I_n(z) = \int_{\gamma_n} dt f(z,t)$$

converge uniformemente a $I(z)$ in $\mathcal{D}$, allora $I(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

2) Si mostri che la rappresentazione integrale di Laplace

$$L(z) := \int_0^\infty dt e^{-zt} f(t), \quad |f(t)| \le M e^{\delta t}, \quad M > 0,\ \delta \in \mathcal{R}, \quad t > 0$$

è analitica per $Re\ z > \delta$. In particolare, se la funzione $f(t)$ è razionale, allora $L(z)$ è analitica per $Re\ z > 0$.

3) Data la funzione $\Gamma(z)$ di Euler, definita dalla rappresentazione integrale:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} dt$$

si mostri che:
i) $\Gamma(n) = (n+1)!$, $n \in \mathcal{N}$ (Si integri per parti n volte).
ii) $\Gamma(z)$ è analitica per $Re\ z > 0$. Suggerimento: si introduca la successione di funzioni intere

$$\Gamma_n(z) = \int_{1/n}^\infty dt e^{-t} t^{z-1} dt$$

e si stabilisca la sua uniforme convergenza in $Re\ z \geq a > 0$. La rappresentazione integrale della Gamma fornisce quindi "il prolungamento" del fattoriale nel semipiano $Re\ z > 0$.

4) Data la serie geometrica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

i) Si mostri che definisce una funzione analitica per $|z| < 1$.
ii) Si calcoli la sua somma e si mostri che tale somma costituisce il prolungamento analitico di $f(z)$ per $z \in \mathcal{C} - \{1\}$.

5) *L'integrale gaussiano* Dato l'integrale Gaussiano:

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\nu x^2}$$

i) si mostri che $I(\nu)$ è analitica per $Re\ \nu > 0$.
ii) Si calcoli esplicitamente tale integrale assumendo $\nu > 0$ e usando il cambiamento di variabili $y = \sqrt{\nu}x$, verificando che:

$$I(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}, \quad \nu > 0$$

iii) Si deduca quindi che il prolungamento analitico dell'integrale gaussiano è dato dalla funzione analitica

$$I(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu^{1/2}}, \quad -\pi < arg\ \nu < \pi.$$

iv) Si mostri che la discontinuità di tale funzione sull'asse reale negativo è:

$$\Delta I(\nu) := I(|\nu|e^{i\pi}) - I(|\nu|e^{-i\pi}) = -2i\sqrt{\frac{\pi}{|\nu|}}, \quad \nu < 0$$

v) Calcolare $I(\nu)$ per $\nu = \mp ip,\ p > 0$, ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm ipx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \quad p > 0$$

e calcolare quindi gli integrali di Fresnel, rilevanti nella teoria della diffrazione, ottenendo:

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x dx = \int_0^{\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

6) Data la funzione $I(\nu, \mu)$, definita dall'integrale gaussiano generalizzato:

$$I(\nu, \mu) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu x^2 + \mu x}$$

i) si mostri che tale funzione è analitica nella variabile complessa ν nel semipiano $Re\ \nu > 0$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, ed intera in μ $\forall \nu$ nel semipiano $Re\ \nu > 0$.
ii) Si mostri che, per $\nu > 0$ e $\mu \in \mathcal{R}$, tale integrale vale:

$$I(\nu,\mu) = e^{\frac{\mu^2}{4\nu}} \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu(x-\frac{\mu}{2\nu})^2} = e^{\frac{\mu^2}{4\nu}} \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}},\ \nu > 0,\ \mu \in \mathcal{R}$$

iii) Si deduca che la funzione complessa delle due variabili complesse μ e ν:

$$I(\nu,\mu) = \sqrt{\pi}\nu^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}}, \quad -\pi < arg\ \nu < \pi, \quad \mu \in \mathcal{C}$$

costituisce il prolungamento analitico, in entrambe le variabili, dell'integrale gaussiano generalizzato.
iv) Si verifichi che la sua discontinuità sul semi-asse reale negativo è $\Delta = -2i\sqrt{\pi/|\nu|}e^{\frac{\mu^2}{4\nu}}$.
v) Si calcoli $I(\nu,\mu)$ per $\nu = \gamma t,\ t > 0,\ \gamma > 0$ e $\mu = -ix,\ x \in \mathbb{R}$, ottenendo:

$$T(x,t) = \int_{\mathbb{R}} d\xi e^{-\gamma t \xi^2 t - ix\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma t}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

$T(x,t)$, soluzione dell'equazione del calore, descrive, ad esempio, l'evoluzione, nel tempo $t \geq 0$, della temperatura in una sbarra metallica infinitamente estesa (da $x = -\infty$ a $x = +\infty$), se la temperatura iniziale è infinitamente concentrata in $x = 0$.
vi) Si calcoli $I(\nu,\mu)$ per $\nu = \mp it,\ t > 0$ e $\mu = -ix,\ x \in \mathcal{R}$, ottenendo:

$$\psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} d\xi e^{\pm it\xi^2 - ix\xi} = \pi e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\mp i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

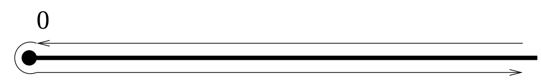
$\psi(x,t)$, soluzione dell'equazione di Schrödinger non stazionaria per la particella libera, descrive l'evoluzione, nel tempo $t \geq 0$, di un pacchetto d'onde infinitamente localizzato, al tempo $t = 0$, in $x = 0$.

7) *Prolungamento analitico della* Γ *di Euler.* Dato che la limitazione $Re\ z > 0$ al dominio di analiticità della $\Gamma(z)$, trovata nell'esercizio 2) è dovuta essenzialmente alla singolarità dell'integrando in $t = 0$, siamo motivati ad introdurre l'integrale

$$G(z) = \int_{H_+} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

dove H_+ è il contorno in figura.
i) Mostrare che questo integrale converge uniformemente $\forall z$ appartenente a un qualunque compatto di $\mathbb{C}$, e che quindi $G(z)$ è una funzione intera (analitica per $z \in \mathbb{C}$).
ii) Usare il teorema dei residui per mostrare che

$$G(m) = 0,\ m = 1,2,3,\ldots, \quad G(m) = 2\pi i \frac{(-)^m}{(-m)!},\ m = 0,-1,-2,\ldots.$$



iii) Mostrare che:

$$G(z) = (e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z), \quad Re\ z > 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \frac{G(z)}{e^{2\pi iz} - 1}, \quad Re\ z > 0.$$

iii) Osservare che quest'ultima formula, che descrive il prolungamento analitico di $\Gamma(z)$ a tutto il piano complesso, ci dice che Γ è meromorfa, con poli semplici in $z = 0, -1, -2, \ldots$, con residui

$$Res\,(\Gamma(z), m) = \frac{(-)^m}{(-m)!}, \ m = 0, -1, -2, \ldots.$$

8) *Prolungamento analitico dell'integrale di Laplace.* Dall'esercizio .. sappiamo che l'integrale di Laplace

$$L(z) = \int_0^\infty dt e^{-zt} R(t),$$

con $R(t)$ razionale, è analitico in $\mathcal{D} = \{-\frac{\pi}{2} < arg\ z < \frac{\pi}{2}\}$. Si sfrutti l'analiticità dell'integrando per introdurre l'integrale

$$L_\varphi(z) := \int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-xt} R(t) dt$$

mostrando che esso è analitico nel dominio $\mathcal{D}_\varphi = \{-\frac{\pi}{2} - \varphi < arg\ z < \frac{\pi}{2} - \varphi\}$. Si mostri quindi, usando il teorema dei residui, che

$$L(z) = L_\varphi(z) + 2\pi i \sum_j Res(e^{-zt} R(t), t_j), \quad z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\varphi$$

dove $\{t_j\}$ sono i poli di $R(t)$ nel dominio $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\varphi$.

Questa formula costituisce il prolungamento analitico dell'integrale di Laplace al di fuori del semipiano $Re\ z > 0$.

9) *L'integrale delle fluttuazioni anarmoniche* ....

5.1.7 Funzioni armoniche in Fisica

1) Mostrare che, se $\phi(x, y)$ è armonica in un dominio $\mathcal{D}$, allora si hanno le seguenti implicazioni.
i) $\phi(x, y)$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica

$$\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Introdotto il campo vettoriale

$$\mathbf{v} = \nabla\phi(x,y),$$

si mostri che:
ii)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\overline{\frac{d\Phi(z)}{dz}}) \\ Im(\overline{\frac{d\Phi(z)}{dz}}) \end{pmatrix},$$

iii) $\mathbf{v}$ è un campo a divergenza nulla in $\mathcal{D}$ (assenza di sorgenti in $\mathcal{D}$) ed è inoltre conservativo in $\mathcal{D}$ (se $\mathcal{D}$ è semplicemente connesso).
iv) Dopo aver verificato che anche il viceversa è vero (se $\mathbf{v}$ è un campo conservativo e a divergenza nulla in $\mathcal{D}$, allora il potenziale di $\mathbf{v}$ esiste ed è armonico in $\mathcal{D}$), si deduca che i campi gravitazionale, elettrico, magnetico, e il campo di velocità di un fluido ideale, in condizioni di simmetria piana (indipendenza dalla variabile z), in assenza di sorgenti in $\mathcal{D}$ e in condizioni stazionarie, sono descritti da un potenziale $\phi(x,y)$ armonico in $\mathcal{D}$.
vi) Si osservi infine che le curve $\phi(x,y) = cost$ sono le curve equipotenziali, mentre le curve $\psi(x,y) = cost$ sono le linee di flusso del campo.

2) Mostrare che la funzione $\Phi(z) = v_0 e^{-i\alpha} z,\ v_0 > 0$, analitica in $\mathcal{C}$, descrive un campo uniforme $\mathbf{v} = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$.

3) Usando il risultato dell'esercizio 16 e la trasformazione tra settori, si determini i) la funzione analitica che descrive il campo elettrico generato da due conduttori piani allo stesso potenziale che delimitano il settore di angolo $\pi/2$. Si calcolino poi le curve equipotenziali, le linee di flusso e si disegni tali linee. Si calcoli infine il campo elettrico.

Risp. $i)\ -iE_0 z^2$; $ii)\ \phi = 2E_0 xy = cost,\ \psi = E_0(y^2 - x^2) = cost$; $iii)\ \mathbf{E} = (2E_0 y, 2E_0 x)$

4) Si generalizzi l'esercizio precedente al caso del settore di angolo $\frac{\pi}{\nu}$.

5) Usando il risultato dell'esercizio 16 e la trasformazione tra settori, si determini la funzione analitica che descrive il moto di un fluido ideale all'interno del quadrante. Si ottenga quindi l'equazione delle linee di flusso, si disegni tali linee e si verifichi che i bordi del settore sono due linee di flusso degeneri. Si calcoli infine il campo di velocità del fluido.

Risp. $\Phi(z) = v_0 z^2$; $\phi = v_0(x^2 - y^2),\ \psi = 2v_0 xy$; $\mathbf{v} = (2v_0 x, -2v_0 y)$

6) Si generalizzi l'esercizio precedente al caso del settore di angolo $\frac{\pi}{\nu}$.

7) Si mostri che la funzione $\Phi(z) = v_\infty(z + \frac{a^2}{z}),\ a > 0$, è analitica per $z \neq 0$. Si esprimano $\phi = Re\ \Phi$ e $\psi = Im\ \Phi$ in coordinate polari e si mostri che l'asse reale e la circonferenza $|z| = a$ sono le linee di flusso $\psi = 0$. Si deduca quindi che la funzione $\Phi(z)$ descrive il moto di un fluido ideale che, all'∞, si muove di moto uniforme con velocità $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0)$ e, al finito, aggira l'ostacolo cilindrico

$|z| \leq a$. Si calcoli il campo di velocità (in coordinate polari). Si verifichi infine che i punti di ristagno del fluido sono $r = a, \ \theta = 0, \pi$.

Risp. $\mathbf{v} = (v_\infty(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta), -v_\infty \frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta)$

8) Si costruisca la funzione analitica che descrive il moto di un fluido ideale con le seguenti proprietà: è uniforme all'∞ con velocità $\mathbf{v}_\infty = (0, v_\infty)$ e al finito gira intorno ad un ostacolo circolare di raggio $r_0 = 2$ centrato nel punto $(1, 0)$. Si determini il campo di velocità.

Risp. *i)* $\Phi(z) = -iv_\infty(z - 1 + \frac{4}{z-1})$; *ii)*

9) Si mostri che, se $f(z)$ è una funzione analitica in $\mathcal{D} \supset \{|z| \leq a\}$, allora la funzione $\overline{f(a^2/\bar{z})}$ è analitica in $|z| > a$. Si verifichi inoltre che la funzione

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f(a^2/\bar{z})}$$

i) è analitica in $\mathcal{D} - \{|z| \leq a\}$.
ii) per $|z| = a$, $\Phi(z) = f(z) + \overline{f(z)} \in \mathcal{R}$, e quindi $\psi = 0$. Si deduca quindi che la funzione $\Phi(z)$ descrive il moto di un fluido ideale in $\mathcal{D} - \{|z| \leq a\}$ che aggira l'ostacolo rappresentato dal cilindrico $|z| \leq a$ (teorema di Milne-Thomson).

10) Come applicazione del teorema di Milne-Thomson del precedente esercizio, si mostri che la funzione

$$\Phi(z) = v_\infty[z^2 + (\frac{a^2}{z - z_0} + \bar{z}_0)^2]$$

descrive il moto di un fluido perfetto all'interno del primo quadrante, in presenza di ostacolo cilindrico di raggio a e centro in z_0 contenuto nel quadrante.

11) Data la funzione $\Phi(z) = kLog\ z = \phi + i\psi, \ k \in \mathcal{R}$; si mostri che $\mathbf{v} = \bigtriangledown\phi$ descrive un campo vettoriale radiale che può essere interpretato
i) come il campo elettrico generato da un filo rettilineo uniformemente carico;
ii) come il campo di velocità di un fluido ideale generato da una sorgente.
Il campo è uscente se $k > 0$ (carica positiva o rubinetto); è entrante se $k < 0$ (carica negativa o pozzo).

12) Data la funzione $\Phi(z) = -ikLog\ z = \phi + i\psi, \ k \in \mathcal{R}$; si mostri che $\mathbf{v} = \bigtriangledown\phi$ descrive ora un campo vettoriale circolare che può essere interpretato
i) o come il campo elettrico generato da due lastre di materiale conduttore a potenziali diversi, che intersecano il piano (x,y) perpendicolarmente, lungo due raggi qualsiasi;
ii) o come il campo magnetico generato da un filo di conduttore percorso da corrente elettrica;
iii) o come il vortice di un fluido ideale. Il verso è antiorario se $k > 0$, (corrente uscente dal foglio) e orario per $k < 0$ (corrente entrante).

13) Si mostri che la funzione $\Phi(z) = q(Log\ (z - z_0) - Log\ z), \ q \in \mathcal{R}^+$ descrive
i) il campo elettrico generato da due fili uniformemente carichi di carica opposta, passanti per 0 e z_0;
ii) un fluido ideale in presenza di una sorgente in z_0 e di un pozzo in 0.

Si disegnino le linee di flusso di tale campo e si determini il campo vettoriale in tutti i punti del piano diversi da 0 e z_0.

14) Si mostri che, per $z_0 \to 0$ e $|z_0|q \to k$, la funzione Φ dell'esercizio precedente ha il seguente limite:

$$\Phi(z) \to -\frac{ke^{iargz_0}}{z}$$

Si deduca che la funzione monodroma $\frac{ke^{iargz_0}}{z}$ rappresenta un dipolo piano centrato in $z = 0$ e il cui asse forma con l'asse reale l'angolo $argz_0$. Si scriva l'equazione delle linee di flusso del dipolo (in coordinate polari) e si disegni tali linee.

15) Si determini i) la funzione analitica che descrive il campo elettrico generato da due fili rettilinei indefiniti uniformemente carichi, perpendicolari al piano (x, y), e passanti uno per l'origine e l'altro per il punto $(0, 1)$. ii) Si calcoli il campo elettrico $\mathbf{E}$ in ogni punto del piano (x, y).

Risp. $i)$ $\Phi(z) = \lambda_1 Log\ (z - i) + \lambda_2 Log\ z$, $\quad ii)$ $\mathbf{E} = (\frac{\lambda_1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \cos\gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\gamma_2, \frac{\lambda_1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \sin\gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\gamma_2)$, $\gamma_1 = \tan^{-1}\frac{y-1}{x}$, $\gamma_2 = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

16) Si faccia uso della funzione logaritmo complessa per determinare la funzione $\phi(x, y)$, armonica nel settore di angolo α, che descrive il potenziale elettrostatico generato da due conduttori piani a potenziali diversi V_1 e V_2 che delimitano il settore. Si calcolino infine le curve equipotenziali, le linee di flusso del campo elettrico, il campo elettrico e la distribuzione di carica sui conduttori.

Risp. $i)$ $\Phi = -i\frac{V_2-V_1}{\alpha} Log\ z + V_1$, $\quad ii)$ $\mathbf{E} = (-\frac{V_2-V_1}{\alpha}\frac{\sin\theta}{r}, \frac{V_2-V_1}{\alpha}\frac{\cos\theta}{r})$

6 COMPITI D'ESONERO E SCRITTI PROPOSTI

6.1 1^0 Compito d'Esonero del 28/01/03; AA 2002/03

1) **[4/30]** Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana
$i)\ (2-i\sqrt{3})^2;\quad ii)\ 3e^{\frac{3}{2}\pi i};\quad iii) 2e^{\frac{2}{3}\pi i};\quad iv)\ \sqrt{3}e^{\frac{5}{6}\pi i}$

2) **[4/30]** Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare
$i)\ 2+2i;\quad ii)\ 1+i\sqrt{3};\quad iii)\ 3-i\sqrt{3}$

3) **[3/30]** Dimostrare che $|z_1|-|z_2| \leq |z_1 \pm z_2|,\ \forall z_{1,2} \in \mathcal{C}$

4) **[5/30]** Determinare tutti i valori di:
$i)\ Log\ (-3);\quad ii)\ (-3)^{\frac{1}{3}};\quad iii)\ (-2i)^{\frac{1}{2}}$

5) **[5/30]** Data la funzione complessa: $f = y^3-3x^2y+i(x^3-\alpha xy^2)$, determinare le regioni del piano complesso in cui è continua, derivabile e analitica al variare del parametro reale α. Nel dominio di analiticità, si scriva f come funzione della sola z e si calcoli $f'(z)$.

6) **[5/30]** Dire se le seguenti funzioni reali sono la parte reale (o immaginaria) di funzioni analitiche. Nel caso affermativo, assumendo che siano la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f = u+iv$ come funzione della sola z.
$i)\ -4xy;\quad ii)\ \sin(x^2-y^2)\sinh(2xy);\quad iii)\ \tan^{-1}(\frac{y+2}{x-1})$

7) **[6/30]** Si studi la funzione $f = (z-z_0)^{\frac{1}{3}}$. In particolare: i) Si mostri che è polidroma in z_0. ii) Si calcoli la sua discontinuità attraverso la retta $Im\ z = Im\ z_0$, scegliendo il ramo $0 \leq arg\ (z-z_0) < 2\pi$. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 la funzione riprende il suo valore di partenza? iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto. (Suggerimento: si usi, per i punti i)-iv), la rappresentazione polare: $z-z_0 = re^{i\theta}$)

8) **[7/30]** Data la funzione $w = z^4$, si stabilisca in quali regioni del piano complesso è continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. In quale dominio realizza una trasformazione conforme? Qual'è l'immagine del primo quadrante $0 < arg\ z < \pi/2$? Si scriva le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e si disegni le corrispondenti linee di livello nel settore $0 < arg\ z < \pi/4$.

9) **[6/30]** Si determini la funzione analitica $\Phi(z) = \phi + i\psi$ che descrive il moto di un fluido ideale in un settore di angolo $\pi/3$. Si ottengano le equazioni delle linee equipotenziali $\phi = cost$ e delle linee di flusso $\psi = cost$ e si disegni tali linee. Si determini infine il campo di velocità. In quali parti del settore il campo di velocità trovato risulta più lontano dalla realtà (in presenza, cioè, di attrito)?

6.2 2^0 Compito d'Esonero del 25/02/03; AA 2002/03

1) [**6/30**] Si calcolino i seguenti integrali del tipo $I = \int_\gamma f(z)dz$:
i) $f_1(z) = |z|$, $\gamma =$ arco di cfr da $2i$ a -2; *ii)* $f_2(z) = \bar{z}$, $\gamma =$ spezzata 0-1-$(1+i)$.
2) [**6/30**] Come applicazione del teorema di Cauchy, si calcoli il seguente integrale

$$\int_2^{2i} dz \frac{1-2z^2}{z},$$

dove γ è un contorno qualsiasi che congiunge gli estremi indicati, senza passare per l'origine e senza girare intorno ad essa. Per il calcolo dell'integrale si usi sia il teorema della primitiva, sia un contorno conveniente.
3) [**4/30**] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = 1/(z-2)$ e la si sviluppi in serie di potenze con centro $z_0 = 1$ in tutto il piano complesso, indicando i raggi di convergenza di tali sviluppi.
4) [**6/30**] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = e^{2z}/z^2$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. La si sviluppi in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e si calcoli il corrispondente residuo.
5) [**6/30**] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = 1/\cos z$ in $\mathcal{C}$ e all'∞ e, se isolate, si calcolino i corrispondenti residui.
6) [**5/30**] Sia γ_R un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R. Si mostri che, per la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+1}$, vale la proprietà:
$zf(z) \to 0,\ |z| \to \infty,\ |z| \to 0$ uniformemente su γ_R; e che quindi

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad R \to \infty, \quad R \to 0$$

7) [**14/30**] Si usi il teorema dei residui per valutare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-4ix}}{x^2+1}; \quad I_3 = P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x-1}, \quad k \in \mathcal{R}.$$

6.3 3^0 Compito d'Esonero del 21/03/03; AA 2002/03

1) [**5/30**] Si mostri che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx}[\theta(x) f(x)] = f(\infty)$$

2) [**5/30**] Dato l'integrale: $2\pi \int_0^\infty dx \delta(x^2 - \pi^2) \cos x$, a quale dei seguenti valori è uguale? La risposta va motivata.
i) -1; *ii*) 0; *iii*) 2

3) [**9/30**] Si mostri che:

$$\int_0^\infty \delta(\cos x) e^{-x} dx = \frac{1}{2\sinh(\pi/2)}, \qquad \int_0^4 \frac{d}{dx}[\delta(x^2-1)]\varphi(x) dx = -\varphi'(1)/2$$

4) [**6/30**] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y) I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(ik+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$ e si verifichi che $R(x) = \theta(x-1)e^{-(x-1)}$.

5) [**5/30**] Dato l'operatore $L = d/dt + 2$ e la distribuzione $g(t) = \theta(t)e^{-\gamma t}$, si calcoli $Lg(t)$ e si determini il valore di γ per il quale $g(t-t')$ è una funzione di Green dell'operatore L.

6) [**18/30**] Si consideri la seguente funzione $g(x)$:

$$g(x) = \int_\gamma \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{4-k^2}, \quad x \in \mathcal{R}$$

dove γ è un contorno da $-\infty$ a ∞ da specificare ulteriormente per evitare le singolarità dell'integrando.
i) Si determini l'operatore differenziale di cui $g(x-x')$ è la funzione di Green fondamentale.
ii) Si calcoli $g(x)$ nei seguenti tre casi.
a) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita le singolarità sull'asse reale da sotto.
b) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita le singolarità sull'asse reale da sopra.
c) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ inteso nel senso del valor principale.

6.4 Scritto del 27/03/03; AA 2002-03

1) [**5/30**] Determinare tutti i valori di:

i) $Log\ (i)$; *ii)* $(-1)^{\frac{1}{3}}$

2) [**5/30**] Dire se la funzione $e^{3x}\sin 3y$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica. Nel caso affermativo, assumendo che sia la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

3) [**6/30**] Si determini la funzione analitica $\Phi(z) = \phi + i\psi$ che descrive il moto di un fluido ideale in un settore di angolo $\pi/4$. Si ottengano le equazioni delle linee equipotenziali $\phi = cost$ e delle linee di flusso $\psi = cost$ e si disegnino tali linee. Si determini infine il campo di velocità. In quali parti del settore il campo di velocità trovato risulta più lontano dalla realtà (in presenza, cioè, di attrito)?

4) [**6/30**] Studiare le singolarità della funzione $f(z) = e^{-z}/z^4$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. Svilupparla in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e calcolare il corrispondente residuo.

5) [**14/30**] Si usi il teorema dei residui per valutare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + 2}; \quad I_3 = P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - 3}, \quad k \in \mathcal{R}.$$

6) [**5/30**] Dato l'integrale $\int_0^{\pi/2} dx \delta(x^2 - \pi^2/16) \tan x$, a quale dei seguenti numeri è uguale? *i)* $2/\pi$; *ii)* $\pi/2$; *iii)* 0; *iv)* 1. (La risposta va motivata)

7) [**6/30**] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y) I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(k^2+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$, e si verifichi che $R(x) = e^{-|x-1|}/2$.

8) [**18/30**] Si consideri la seguente funzione $g(x)$:

$$g(x) = \int_{\gamma} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{ik(2+ik)}, \quad x \in \mathcal{R}$$

dove γ è un contorno da $-\infty$ a ∞ da specificare ulteriormente per evitare la singolarità dell'integrando sull'asse reale.

i) Si determini l'operatore differenziale del quale $g(x - x')$ è la funzione di Green fondamentale.

ii) Si calcoli $g(x)$ nei seguenti casi.

a) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita la singolarità sull'asse reale da sotto.

b) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita la singolarità sull'asse reale da sopra.

c) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ inteso nel senso del valor principale.

6.5 1^0 Compito d'Esonero del 29/01/04; AA 2003/04

1) ([**3/30**] per uno dei due; [**5/30**] per entrambi) Passare dalla forma cartesiana a quella polare, o viceversa.
$i)$ $3e^{i\pi/4}$; $ii)$ $2 - i2\sqrt{3}$

2) ([**3/30**] per uno dei due; [**5/30**] per entrambi) Determinare, in forma cartesiana, tutti i valori di:
$i)$ $Log\ (-2i)$; $ii)$ $(3i)^{1/3}$

3) ([**5/30**]) i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = y^3 - \alpha x^2 y$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Quindi si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

4) ([**6/30**] per uno dei due; [**9/30**] per entrambi) *Studio delle funzioni:* $f_1 = z^{\frac{1}{5}}$; $f_2 = Log(z - i)$. i) Si mostri che sono polidrome e si individui i rispettivi punti di diramazione z_0. ii) Si calcoli la loro discontinuità attraverso la retta $arg\ (z - z_0) = 0$, scegliendo il ramo $0 \leq arg\ (z - z_0) < 2\pi$. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 le funzioni riprendono il loro valore di partenza? iv) Come tagliare il piano complesso per renderle analitiche? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto. (Suggerimento: si usi, per i punti i)-iv), la rappresentazione polare: $z - z_0 = re^{i\theta}$).

5) ([**7/30**]) Data la funzione $w = z^3$, i) si stabilisca in quali regioni del piano complesso è monodroma, continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. ii) Si costruisca l'immagine del dominio $\mathcal{D} = \{0 < arg\ z < \pi/2,\ 1 < |z| < 2\}$ iii) Si scrivano le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e si disegnino le corrispondenti curve di livello nel settore $0 < arg\ z < \pi/3$.

6)([**4/30**] per uno dei due; [**6/30**] per entrambi) Data la funzione $f(z) = |z|^2$, si calcoli $\int_\gamma dz f(z)$ lungo i seguenti contorni. a) γ_1 è l'arco di circonferenza di raggio 1 da $z_0 = 1$ a $z_1 = i$. b) γ_2 è la spezzata determinata dai punti: $1, 0, i$.

7) ([**6/30**]) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.
i) Dare la definizione di funzione derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{C}$ e quella di funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$.
ii) Mostrare che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y esistono in $\mathcal{D}$ e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann.

6.6 2^0 Compito d'Esonero del 26/02/03; AA 2003/04

1) ([**5/30**]) Si calcoli il seguente integrale $\int_\gamma \frac{dz}{z-1}$, dove γ è un qualunque contorno da 2 a $1+i$ che gira intorno a 1 n volte in senso antiorario.

2) ([**5/30**]) Si sviluppi la funzione $1/(z-3)$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 0$, in tutto il piano complesso. Specificare se gli sviluppi sono di Taylor o di Laurent e determinare i loro raggi di convergenza..

3) ([**6/30**]) Si sviluppi la funzione $z^{-3}e^{-z}$ nelle serie di potenze centrate in 0 e ∞; si discuta inoltre il carattere delle singolarità in 0 e ∞ e si calcolino i corrispondenti residui.

4) ([**4/30**] per i); [**5/30**] per ii)) Individuare le singolarità delle seguenti funzioni nel piano complesso esteso e calcolare i residui corrispondenti alla sola singolarità z_0 indicata.

i) $\frac{\sin z}{z-\pi/2}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$; *ii)* $\frac{z}{\cos z}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$

5) ([**6/30**]) Si dimostri il seguente risultato. Se una funzione è analitica nel disco $\mathcal{D} = \{|z-z_0| < R\}$, essa è sviluppabile in serie di Taylor centrata in z_0 e di raggio di convergenza R.

6) ([**5/30**] per i); [**6/30**] per ii)). Si usi il teorema dei residui per calcolare i seguenti integrali.

$$i)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+2}dx, \quad k \in \mathcal{R}; \qquad ii)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-2i)}$$

6.7 3^0 Compito d'Esonero del 18/03/04; AA 2003/04

1) (**[6/30]**) Calcolare il prodotto di convoluzione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x')H(x')dx'$$

sapendo che le trasformate di Fourier di $G(x)$ e $H(x)$ sono rispettivamente $\hat{G}(k) = 1/(k - i)$ e $\hat{H}(k) = ie^{2ik}$.

2) (**[5/30]**) Data la successione di funzioni $bne^{-2n|x|}$, si determini per quale valore di b essa è una buona rappresentazione della $\delta(x)$ nel limite $n \to \infty$, e perchè?

3) (**[4/30]** per i), **[2/30]** per ii), **[3/30]** per iii))
i) Si verifichi che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 3, & se \;\; x > 0, \\ -3, & se \;\; x < 0 \end{cases} \tag{6}$$

ammette il seguente sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

ii) Disegnare (e confrontare) i grafici di $g(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale.
iii) Utilizzare la formula di Parseval ed il risultato i) per ottenere la somma di un'opportuna serie numerica.

4) (**[5/30]**) Si calcoli l'integrale:

$$\int_0^{\pi} \delta(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) \sin x dx$$

5) (**[3/30]** per i); **[4/30]** per ii)) i) Si costruisca la funzione di Green $G(t)$ fondamentale dell'operatore $\frac{d^2}{dt^2} + 4$ nella rappresentazione integrale di Fourier.
ii) Si usi il teorema dei residui per calcolare $G(t)$, usando il contorno da $-\infty$ a ∞ che passa sopra alle eventuali singolarità dell'integrando sull'asse reale.

6) (**[5/30]**) Si mostri che $(x^2\theta(-x))' = 2x\theta(-x)$ nel senso delle distribuzioni (cioè sotto integrale e usando una funzione di prova).

6.8 Scritto del 20/03/04; AA 2003/04

1) [4/30] Determinare tutti i valori di:
i) $Log\ (-2)$; *ii)* $i^{\frac{1}{3}}$

2) **[5/30]** Determinare il parametro γ tale che la funzione $u(x,y) = x^4 + y^4 - \gamma x^2 y^2$ possa essere interpretata come la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. Costruire la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f(z) = u + iv$ come funzione della sola z.

3) **[5/30]** Individuare le singolarità della funzione $f(z) = e^{z^2}/z^3$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. Sviluppare la funzione in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e calcolare i corrispondenti residui.

4) **[8/30]** Calcolare i seguenti integrali usando il teorema dei residui:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ipx}}{x^2+4}, \quad p \in \mathcal{R}.$$

5) **[4/30]** Si calcoli l'integrale $\int_0^{2\pi} dx \delta(x^2 - \pi^2) \cos x$.

6) **[5/30]** Si determini la funzione di Green fondamentale $G(t-t')$ dell'operatore $L = d/dt + 2$ e la si calcoli usando il teorema dei residui.

7) **[5/30]** Sviluppare la funzione $|x|$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; confrontare i grafici di $|x|$ e della somma della serie su tutto l'asse reale.

6.9 Scritto del 15/09/04; AA 2003/04

1) [**4/30**] Determinare tutti i valori di:
i) $Log\ (-2)$; *ii*) $(-3)^{\frac{1}{3}}$

2) [**4/30**] Dire se la funzione $e^{-y}\cos x$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica. Nel caso affermativo, assumendo che sia la parte reale $u(x, y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

3) [**5/30**] Si studi le singolarità della funzione $f(z) = e^{z^2}/z$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. La si sviluppi in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e si calcoli i corrispondenti residui.

4) [**10/30**] Calcolare gli integrali:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}; \quad I_2(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ipx}}{x^2 + 9}, \ p \in \mathcal{R}$$

usando il teorema dei residui.

5) [**4/30**] Si calcoli l'integrale $\int_0^{\pi/2} dx \delta(x^2 - \pi^2/9) \cos x$.

6) [**5/30**] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y) I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(ik+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$, e si verifichi che $R(x) = \theta(x-1)e^{-(x-1)}$.

7) [**6/30**] Sviluppare la funzione $-2\theta(-x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; confrontare il grafico di questa funzione con quello della somma della serie su tutto l'asse reale.

6.10 Test del 28/01/05; AA 2004/05

1) ([**3/30**] per uno dei due; [**5/30**] per entrambi) Passare dalla forma cartesiana a quella polare, o viceversa.
$i)$ $5e^{-i\pi/4}$; $ii)$ $3 - i\sqrt{3}$

2) ([**3/30**] + [**3/30**]) Determinare tutti i valori di:
$i)$ $Log(1+i)$; $ii)$ $(-2i)^{1/3}$

3) ([**4/30**]) Individuare in quali regioni del piano complesso $\mathbb{C}$ la funzione $f = 3x^2y + ixy^2$ è continua, derivabile e analitica.

4) ([**5/30**]) i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = x(x+2) - \alpha y^2$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

5) ([**6/30**]) Data la funzione $w = z^3$, i) si stabilisca in quali regioni del piano complesso è monodroma, continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. ii) Si costruisca l'immagine del dominio $\mathcal{D} = \{0 < arg\ z < \pi/2,\ 1 < |z| < 2\}$ iii) Si scrivano le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e si disegnino le corrispondenti curve di livello nel settore $0 < arg\ z < \pi/3$.

6.11 Esonero del 10/02/05; AA 2004/05

1) ([**12/30**])
Utilizzando il teorema della primitiva, calcolare l'integrale

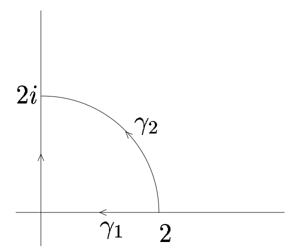
$$\int_2^0 \frac{z^2-3}{z-1}\,dz$$

lungo un qualunque percorso γ_1 che non giri intorno al punto $z=1$ e lungo un qualunque percorso γ_2 che giri intorno a $z=1$ una volta in senso antiorario. Infine si calcoli l'integrale lungo γ_1 usando un contorno parametrizzabile in maniera conveniente. Si suggerisce di riscrivere z^2-3 nella forma $(z-1)^2+\alpha(z-1)+\beta$ per opportuni α e β.

2) ([**7/30**])
Calcolare l'integrale

$$\int_2^{2i} |z|^3\,dz$$

sia lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2,0)\cup(0,2i)$), sia lungo l'arco γ_2 di raggio 2, nonché lungo il contorno chiuso $\gamma_2-\gamma_1$.



3) ([**5/30**])
Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z)=f(z)$.

4) ([**3/30**] per uno dei due, [**5/30**] per entrambi)
Passare dalla forma polare a quella cartesiana e viceversa

$$3e^{-i\pi/6}; \qquad 1-\frac{i}{\sqrt{3}}$$

5) ([**3/30**]+[**3/30**])
Determinare tutti i valori di

$$Log(4-4i); \qquad (-1-i)^{1/3}$$

6) ([**5/30**])
i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u=3x^2y+\alpha y^3$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e iii) la funzione $f=u+iv$ come funzione della sola z.

6.12 Test dell' 01/03/05; AA 2004/05

1) ([**4**]) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+4)!}{(2n+1)^n} (z-2)^n.$$

2) ([**5**]) Sviluppare la funzione

$$\frac{1}{3z-i}$$

in serie di potenze centrate in $z_0 = 1$ in tutto il piano complesso e calcolarne i raggi di convergenza.

3) ([**6**]) Trovare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{z^2 - \pi^2}{\sin z}$$

e discuterne la natura. Calcolare infine i residui relativi alle singolarità isolate.

4) ([**5**]) Trovare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{e^{-2z}}{z^3};$$

costruire lo sviluppo di Laurent intorno ad esse e calcolare i residui relativi alle singolarità al finito.

6.13 Esonero del 15/03/05; AA 2004/05

1) ([**4**]) Si sviluppi la funzione $\frac{1}{z^2+4}$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 2i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza.

2) ([**4**]) Si usi il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\oint_\gamma z^2 e^{3/z} dz,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso, al finito, che gira intorno all'origine una volta, in senso antiorario.

3) ([**6**]) Si dimostri il seguente teorema (di Laurent):
Una funzione analitica in una corona circolare D di centro z_0 e raggi r ed R è sviluppabile in serie di potenze positive e negative, secondo la formula

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ove γ è un'arbitraria curva chiusa interna alla corona, e lo sviluppo è uniformemente convergente in ogni corona chiusa contenuta in D.

4) [**5**] *Studio della funzione*: $f(z) = z^{\frac{1}{5}}$. i) Si mostri che è polidroma e si individuino i suoi punti di diramazione z_0 in $\mathbb{C}$. ii) Si calcoli la sua discontinuità, girando una volta intorno a z_0. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 la funzione riprende il suo valore di partenza? E perchè? iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto in tale piano tagliato. vi) La superficie di Riemann associata a $z^{\frac{1}{5}}$ è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann o al toro?

5) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6x^2}{(x^2+4)^2(x-i)} dx.$$

6) ([**5**]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{x - 2i} dx, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

7) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)} dx.$$

6.14 Scritto del 30/03/05; AA 2004/05

1) ([**5/30**]) Determinare per quali valori del parametro a la funzione $u(x,y) = x^2 + ay^2 + 2y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$. Per quei valori di a costruire la parte immaginaria e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

2) ([**6/30**], **esercizio obbligatorio**) Si introduca la nozione di residuo di una funzione in un punto e si dimostri il seguente teorema (dei residui):
Se $f(z)$ è una funzione analitica nel dominio $\mathcal{D}$ e continua su $\partial\mathcal{D}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_1, .., z_n \in \mathcal{D}$, allora

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), z_k),$$

dove l'integrale è percorso in senso antiorario.

3) ([**5/30**]) Studiare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{z^2 - \pi^2/4}{\cos z}$$

e, se isolate, calcolarne i corrispondenti residui.

4) ([**5/30**]) Sviluppare la funzione $1/(z^2 + a^2)$, $a > 0$, in serie di potenze centrate in $z_0 = ia$ in tutto il piano complesso, individuando i rispettivi raggi di convergenza.

5) ([**5/30**]) *Studio della funzione* $\ln(z-1)$.
i) Si mostri che è polidroma e si individuino i suoi punti di diramazione z_0 in $\mathbb{C}$. ii) Si calcoli la sua discontinuità, girando una volta intorno a z_0. iii) La funzione riprende il suo valore di partenza dopo un certo numero di giri nello stesso verso, intorno a z_0? Giustificare la risposta. iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto in tale piano tagliato.

6) ([**5/30**] per un integrale, [**9/30**] per due, [**13/30**] per tre).
Usando il teorema dei residui, calcolare gli integrali:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx\sqrt{x}}{x^2+4}, \quad I_2 = P\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x-2)(x^2+9)}, \quad I_3 = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx e^{ix}}{(x^2+4)^2}$$

6.15 Scritto del 14/09/05; AA 2004/05

1) ([**5/30**]) Determinare per quali valori dei parametri a e n la funzione $u(x,y) = y^3 + ax^n y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$. Per quei valori di a e n costruire la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

2) ([**6/30**]**; esercizio obbligatorio,** [**-3/30**] **se non svolto**) Si enunci e si dimostri il teorema di Laurent.

3) ([**6/30**] ([**2/30**]+[**2/30**]+[**2/30**])) i) Studiare le singolarità della funzione $(z(z-1))^{1/2}$ nel piano complesso esteso $\bar{\mathbb{C}}$. ii) Dopo aver individuato i punti di diramazione, tagliare il piano complesso per renderla monodroma. iii) Studiare la superficie di Riemann associata a tale funzione e stabilire se tale superficie è topologicamente equivalente ad una sfera o ad un toro.

4) ([**5/30**]+[**5/30**]) Calcolare i seguenti integrali usando il teorema dei residui.

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{(x^2+9)^2}, \quad k \in \mathbb{R}; \qquad ii) \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+5)}$$

5) ([**6/30**]) Sviluppare la funzione $\frac{1}{z^2+2}$ in serie di Laurent centrate in $z_0 = i\sqrt{2}$, in tutto il piano complesso, determinandone anche i raggi di convergenza.

6) ([**6/30**] ([**2/30**]+[**2/30**]+[**2/30**])) i) Studiare le singolarità della funzione $f(z) = e^{-z^2} z^{-3}$ nel piano complesso esteso $\bar{\mathbb{C}}$. ii) Svilupparla in serie di Laurent centrate in $z_0 = 0$ e $z_0 = \infty$. iii) Calcolare i residui della funzione nei punti singolari.

6.16 1^o esonero del 07/02/06; AA 2005/06

1) ([**3**]+[**3**])
Utilizzando il teorema della primitiva, i) calcolare l'integrale

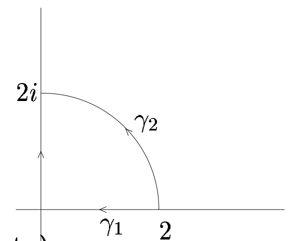
$$\int_0^{2i} \frac{z^2 - 3iz - 4}{z - i}\, dz$$

lungo un qualunque percorso γ_1 (disegnarlo!) che non giri intorno al punto $z = i$ e ii) lungo un qualunque percorso γ_2 (disegnarlo!) che giri intorno a $z = i$ una volta in senso antiorario. Si suggerisce di riscrivere $z^2 - 3iz - 4$ nella forma $(z - i)^2 + \alpha(z - i) + \beta$ per opportuni α e β.

2) ([**3**]+[**2**]+[**1**])
Calcolare l'integrale

$$\int_2^{2i} |z|\, dz$$

i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2, 0) \cup (0, 2i)$), ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 2, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$.



3) [5], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)
Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z) = f(z)$.

4) ([**1**]+[**2**]+[**3**])
Data la funzione $w = z^3$, i) dire dove è analitica e calcolarne la derivata; ii) in quale insieme trasforma il dominio $\mathcal{D} = \{1 < |z| < 3,\ 0 < argz < \pi/4\}$? iii) Disegnare le curve di livello $u = cost,\ v = cost$ nel settore $0 < argz < \pi/3$.

5) ([**2**]+[**2**])
Determinare tutti i valori di

$$Log(\frac{3}{\sqrt{2}}(-1 + i)); \qquad \left(2(1 - i\sqrt{3})\right)^{\frac{1}{3}}$$

6) ([**4**])
i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = \alpha x^3 - 6xy^2$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

7) ([**2**]+[**2**])
Data la serie di funzioni $\sum_n c_n(z - 1)^n$, che ha raggio di convergenza R, individuare le regioni di $\mathbb{C}$ nelle quali la serie di funzioni $\sum_n n^2 c_n(z - 1)^n$ i) converge assolutamente e ii) converge uniformemente.

6.17 2^o esonero del 02/03/06; AA 2005/06

1) ([**2**]+[**3**]) Data la funzione $\frac{1}{z^2+9}$, i) individuare le sue singolarità e la loro natura; ii) svilupparla in serie di potenze centrate in $z_0 = 3i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza e disegnando le corrispondenti corone circolari.

2) ([**3**]+[**2**]) Data la funzione $f(z) = z^2 e^{3/z}$, i) discutere la natura delle sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i correspondenti residui; ii) usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$I_R = \oint_{\gamma_R} f(z)dz,$$

dove γ_R è la circonferenza $|z-1| = R$, percorsa in senso antiorario, sia per $R < 1$ che per $R > 1$.

3) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)
Si dimostri il seguente teorema. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D}$, continua in $\bar{\mathcal{D}}$ e tale che $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.

4) [**3**]+[**3**] Data la funzione $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui e verificare che la loro somma è nulla.

5) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+5)(x-i)}dx.$$

6) ([**5**]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{\sin\theta}{2}}\, d\theta\ .$$

7) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+9)}dx.$$

6.18 Esonero di CMMF del 20/03/06; AA 2005/06

1) ([**6**]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(x+3)}dx$$

2) ([**6**]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+9}dx$$

3) ([**6**]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+4}dx$$

4) ([**6**])
Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{x-i}dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

5) ([**1**]+[**1**]+[**2**]+[**2**])
i) Individuare le singolarità della funzione $f(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e stabilirne la natura. ii) In caso di punti di diramazione, tagliare in modo opportuno il piano complesso per rendere f analitica (disegno!), e ivi calcolare $f'(z)$. iii) Calcolare la variazione Δf attraverso il taglio scelto. iv) Costruire la superficie di Riemann di $f(z)$ e chiarire se sia topologicamente equivalente alla sfera di Riemann o al toro.

6) ([**3**]+[**3**])
Date le funzioni $f(z)$ e $g(z)$ definite dalle seguenti rappresentazioni integrali:

$$i) \quad f(z) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{izx}}{x^2+1}dx; \qquad ii) \quad g(z) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-zx}}{x^2+1}dx$$

Determinare le regioni del piano complesso nelle quali esse sono analitiche (e dimostrarlo).

7) ([**3**]+[**2**]+[**2**])
Data la funzione complessa $\Phi(z) = 2i\ln(z-1) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$, i) disegnare le linee $\phi(x,y) = cost$ e $\psi(x,y) = cost.$ e indicare quali di esse coincidono con le linee di flusso del campo vettoriale $\vec{V} = \nabla\phi$. ii) Mostrare che $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. iii) Dare qualche interpretazione fisica al campo vettoriale $\vec{V}$. Suggerimento: usare le coordinate polari $z = 1 + re^{i\theta}$.