

MATERIALE DEL CORSO DI
**MODELLI E METODI MATEMATICI
DELLA FISICA (1^a PARTE)**

a cura di Paolo Maria Santini

<http://www.roma1.infn.it/people/santini/>

September 22, 2010

RACCOLTA DI ESERCIZI PROPOSTI
ESEMPI DI ESONERI E SCRITTI DEL PASSATO

1 RACCOLTA DI ESERCIZI PROPOSTI (prima parte)

1.1 Analisi Complessa

1.1.1 Il piano complesso

1) Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana.

i) $(2+i3)^3$, *ii)* $2e^{i\pi/3}$, *iii)* $\frac{a+ib}{c+id}$, *iv)* $3e^{i\frac{\pi}{4}}$, *v)* $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, *vi)* $\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$, *vii)* $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$, *viii)* $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, *ix)* i^n , *x)* $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, *xi)* $3e^{\frac{2}{3}\pi i}$

Risp. *i)* $-46+9i$, *ii)* $1+i\sqrt{3}$, *iii)* $\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$, *iv)* $\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}$, *v)* $2i$, *vi)* $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *vii)* $-1-i\sqrt{3}$, *viii)* $\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, *ix)* $(-1)^p$, $n=2p$; $i(-1)^p$, $n=2p+1$, $p \in \mathbb{N}$, *x)* $1-i\sqrt{3}$, *xi)* $\frac{3}{2}(-1+\sqrt{3})$

2) Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare (con $0 \leq \arg z < 2\pi$):

i) $\sqrt{3}+i$, *ii)* $2-i2\sqrt{3}$, *iii)* $4-4i$, *iv)* $-2+2i$, *v)* $-2\sqrt{3}+2i$

Risp. *i)* $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, *ii)* $4e^{i\frac{5\pi}{3}}$, *iii)* $4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$, *iv)* $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, *v)* $4e^{\frac{5}{6}\pi i}$

3) Mostrare che, se $z = re^{i\theta} = x + iy$,

$\bar{z} = re^{-i\theta}$, $|z|^2 = z\bar{z} = r^2$, $Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$, $arg(z^n) = n arg(z)$, $arg(z^{\frac{1}{n}}) = \frac{arg(z)}{n}$

4) Usando la formula di Euler- De Moivre, esprimere $\sin 10\theta$ e $\cos 4\theta$ in funzione di $\sin \theta$ e $\cos \theta$ e mostrare che $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$.

Risp.

$$\begin{aligned} \sin 10\theta &= \sum_{k=0}^4 \binom{10}{2k+1} (-1)^k (\sin \theta)^{2k+1} (\cos \theta)^{9-2k}, \\ \cos 4\theta &= (\sin \theta)^4 - 6(\sin \theta \cos \theta)^2 + (\cos \theta)^4. \end{aligned} \quad (1)$$

5) *Somma.* Mostrare che la somma di due numeri complessi $z_S = z_1 + z_2$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$ corrisponde alla somma \vec{z}_S dei vettori \vec{z}_1 e \vec{z}_2 , con $\vec{z}_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, ed è quindi costruita attraverso la regola del parallelogramma.

6) Dimostrare le seguenti disuguaglianze (sia in modo geometrico che algebrico):

$$\begin{aligned} Re z &\leq |z|, \quad Im z \leq |z|, \quad |z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2| \leq 2|z_1 z_2|, \\ |z_1 \pm z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{disuguaglianza triangolare}), \\ ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 \pm z_2|, \\ \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |z_k|, \\ |z| &\leq |Re z| + |Im z| \end{aligned} \quad (2)$$

e usare la disuguaglianza triangolare e la sua conseguenza per mostrare che:

$$\left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right| \leq \frac{|\alpha||z| + |\beta|}{|\gamma||z| - |\delta|} \quad (3)$$

7) \mathbb{C} come spazio vettoriale normato Mostrare che l'insieme dei numeri complessi è un "campo". Mostrare che l'insieme dei numeri complessi è uno "spazio vettoriale normato", con norma $\|z\| = |z|$, e che tale norma induce la metrica $d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = |z_1 - z_2|$.

8) Moltiplicazione. Mostrare che i) la moltiplicazione di $z \in \mathbb{C}$ per un numero complesso di modulo 1 $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $z \rightarrow e^{i\alpha}z$ corrisponde alla rotazione del vettore \vec{z} dell'angolo α ; ii) la moltiplicazione per $a = |a|e^{i\arg a}$: $z \rightarrow az$ corrisponde alla combinazione della rotazione di \vec{z} dell'angolo $\arg a$ con la dilatazione (se $|a| > 1$) o contrazione (se $|a| < 1$) della sua lunghezza del fattore $|a|$; iii) la divisione per a : $z \rightarrow z/a$ alla rotazione di \vec{z} dell'angolo $-\arg a$, combinata con la dilatazione (se $|a| < 1$) o contrazione (se $|a| > 1$) della sua lunghezza del fattore $1/|a|$.

9) Mostrare che $Re(\bar{z}_1 z_2) = \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$, $Im(\bar{z}_1 z_2) = |\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2|$, dove \vec{z}_j , $j = 1, 2$ sono i vettori di componenti (x_j, y_j) , e quindi che le equazioni $Re(\bar{z}_1 z_2) = 0$, $Im(\bar{z}_1 z_2) = 0$, $z_1, z_2 \neq 0$ esprimono rispettivamente l'ortogonalità e il parallelismo dei vettori \vec{z}_1 e \vec{z}_2 . Mostrare infine che $\arg(\bar{z}_1 z_2)$ è l'angolo tra \vec{z}_1 e \vec{z}_2 .

10) Si verifichi che:

i) $z(t) = tz_2 + (1-t)z_1$, $t \in \mathbb{R}$, ($t \in \mathbb{R}$) è l'equazione parametrica della retta passante per z_1 e z_2 (se $t \in [0, 1]$ è l'equazione parametrica del segmento che congiunge z_1 e z_2).

ii) $\bar{c}z + c\bar{z} = 1$ è l'equazione della retta che incontra l'asse reale nel punto $z = 1/(2Re c)$, formando con esso l'angolo $\arg(ic)$. Dedurre che tale retta è parallela all'asse immaginario se $c \in \mathbb{R}$, mentre è parallela all'asse reale se $c \in i\mathbb{R}$. Mostrare inoltre che tale retta è perpendicolare al vettore $\vec{c} = (Re c, Im c)$.

iii) $\arg z = \varphi$ è l'equazione della semiretta che parte dall'origine e forma con l'asse reale l'angolo φ .

iv) $z(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, è l'equazione parametrica della circonferenza di raggio R e centro z_0 , percorsa in senso antiorario.

v) $|z - z_0| = R$ e/o $|z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} = R^2 - |z_0|^2$ sono equazioni (equivalenti) della circonferenza di raggio R centrata in z_0 .

11) Scrivere l'equazione di una circonferenza passante per l'origine.

12) Si disegni la circonferenza $|z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ e si determinino le sue intersezioni con gli assi reale ed immaginario e con la bisettrice del primo quadrante.

Risp. $1, i, (\sqrt{2} \pm 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$

13) Determinare le regioni del piano complesso che soddisfano alle seguenti condizioni. i) $a \leq |z - c| < b$, $c \in \mathbb{C}$, $0 < a < b$; ii) $|z - a| \leq |z - b|$, $a, b \in \mathbb{C}$, iii) $|z - a| \leq 2|z - b|$, $a, b \in \mathbb{C}$, iv) $0 \leq \arg(z - z_0) \leq \frac{\pi}{3}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Risp: i) la corona circolare centrata in c di raggi a e b , chiusa sul bordo interno.
 ii) l'unione del semipiano che contiene a , generato dalla retta passante per il punto $(a+b)/2$ e perpendicolare al vettore $b-a$, con la retta stessa; iii) l'unione dell'esterno della circonferenza centrata in $(4b-a)/3$ di raggio $2|a-b|/3$ con la circonferenza stessa; iv) il settore circolare centrato in z_0 di angolo $\pi/12$, il cui primo semi-asse è parallelo al semi-asse reale positivo.

14) Determinare tutti i valori di:

i) $i^{\frac{1}{3}}$, ii) $(2i)^{\frac{1}{2}}$, iii) $(-1)^{\frac{1}{3}}$, iv) $1^{\frac{2}{3}}$, v) $(-2)^{\frac{1}{4}}$, vi) $(\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{5}}$, vii) $(2+i\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$, viii) $1^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$

Risp. i) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}; -\frac{\sqrt{3}+i}{2}, -i$; ii) $\pm(1+i)$; iii) $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, -1$; iv) $1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; v) $\frac{\pm 1+i}{2^{\frac{1}{4}}}, \frac{\pm 1-i}{2^{\frac{1}{4}}}$; vi) $2^{\frac{1}{5}}e^{i(-\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5})}, k=0,1,2,3,4$, vii) $4^{\frac{1}{3}}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}, k=0,1,2$, viii) $e^{\frac{2k\pi}{n}i}, k=1, \dots, n-1$

15) Determinare tutti i valori di:

i) $2\text{Log}(1+i)$, ii) $\text{Log}(-1)$, iii) $\text{Log}3$, iv) $\text{Log}(\sqrt{3}+i)$, v) $\text{Log}(\sqrt{3}-3i)$, vi) $\text{Log}(2i)$, vii) $\text{Log}(4-4i)$, viii) $\sin^{-1}(1/2)$, ix) $\cos^{-1}(1/2)$, x) $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$, xi) $\tan^{-1}\sqrt{3}$, xii) $\tan^{-1}(2i)$

Risp. i) $\log 2 + i(\frac{\pi}{2} + 4k\pi), k \in \mathbb{Z}$; ii) $i(\pi + 2k\pi)$; iii) $\log 3 + i2k\pi$; iv) $\log 2 + i(\frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, v) $\log(2\sqrt{3}) + i(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, vi) $\log 2 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, vii) $\log(4\sqrt{2}) + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, viii) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; ix) $\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; x) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; xi) $\frac{\pi}{3} + k\pi$; xii) $\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{1}{2} \log 3$

16) Determinare tutti i valori di:

i) $(1+i\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$, ii) 1^i

Risp. i) $2^{\sqrt{2}}e^{i\sqrt{2}\pi(\frac{1}{3}+2k)}$, $k \in \mathbb{Z}$, ii) $e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$

17) Se $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ sono le n radici dell'equazione $z^n = 1$ (le radici n -esime dell'unità),

i) si dimostri (sia in modo algebrico che geometrico) che:

$$\sum_{k=1}^n \omega_k = 0, \quad \prod_{k=1}^n \omega_k = (-1)^{n+1}. \quad (4)$$

ii) si mostri che, se ζ è una radice n -esima di $z \in \mathbb{C}$ ($\zeta^n = z$), allora tutte le radici n -esime di z sono $\{\omega_k \zeta\}_{k=1}^n$.

18) Dimostrare la seguente identità

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \quad (5)$$

che diventa, per $z = e^{i\theta}$,

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (6)$$

19) *Proiezione stereografica.* La sfera di raggio 1 è adagiata sul piano xy , in modo che il suo polo Sud coincida con l'origine: $S = (0, 0, 0)$ ed il polo Nord con il punto $N = (0, 0, 2)$ (vedi figura). Sia $P = (x, y, 0)$ un punto del piano xy e $P' = (\xi, \eta, \zeta)$ l'intersezione della retta passante per P e N con la superficie sferica.

i) Mostrare geometricamente che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano xy ed i punti P' della superficie sferica privata del polo Nord, e che il punto ∞ del piano xy è in corrispondenza biunivoca con il polo Nord:

$$P \leftrightarrow P', \quad \infty \leftrightarrow N.$$

ii) Mostrare che la trasformazione $P \rightarrow P'$ è descritta dalle equazioni

$$\xi = \frac{4x}{4 + x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{4y}{4 + x^2 + y^2}, \quad \zeta = \frac{2(x^2 + y^2)}{4 + x^2 + y^2},$$

mentre la trasformazione inversa $P' \rightarrow P$ è descritta dalle equazioni

$$x = \frac{2\xi}{2 - \zeta}, \quad y = \frac{2\eta}{2 - \zeta},$$

dove ξ, η, ζ soddisfano all'equazione: $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1$.

iii) Si osservi infine che, identificando il piano xy con il piano complesso z ($z = x + iy$), le trasformazioni $P \rightarrow P'$ e $P' \rightarrow P$ diventano rispettivamente:

$$\xi + i\eta = \frac{4z}{4 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{2|z|^2}{4 + |z|^2},$$

$$z = \frac{2(\xi + i\eta)}{2 - \zeta}, \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1.$$

Sugg. Poiché P' è l'intersezione della retta passante per P e N con la superficie sferica, le sue coordinate ξ, η, ζ sono la soluzione del sistema algebrico

$$\xi = -\frac{x}{2}(\zeta - 2), \quad \eta = -\frac{y}{2}(\zeta - 2), \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1.$$

1.1.2 Funzioni analitiche

1) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.

i) Si dia la definizione di funzione continua in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.

ii) Si dimostri che CNES affinché $f(z)$ sia continua in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ è che le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ siano continue in (x_0, y_0) .

2) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.

i) Si dia la definizione di funzione derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ e quella di funzione analitica in un dominio \mathcal{D} .

ii) Mostrare che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathcal{D} , allora le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y esistono in \mathcal{D} e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann.

iii) Mostrare che, se le funzioni reali di due variabili reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili in un aperto connesso (dominio) di \mathbb{R}^2 e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann, allora la funzione complessa di variabile complessa $f = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica nel corrispondente dominio di \mathbb{C} .

3) i) Si verifichi che $\partial/\partial z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ e $\partial/\partial \bar{z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$.

ii) Si deduca che le condizioni di Cauchy - Riemann in un dominio \mathcal{D} sono equivalenti alla condizione $\partial f/\partial \bar{z} = 0$, cioè alla proprietà che f dipende solo dalla variabile z in \mathcal{D} .

4) Esprimere le seguenti funzioni complesse di variabile complessa $f = u(x, y) + iv(x, y)$ come funzioni di z e \bar{z} e dedurre quali di esse sono analitiche in \mathbb{C} .

i) $f = x - iy$; ii) $f = x^2 + y^2$; iii) $f = -y + ix$; iv) $f = x^2 + y^2 + i2xy$; v) $f = x^2 - y^2 + i2xy$; vi) $\sin(x^2 + y^2)$

Risp. i) $f = \bar{z}$; ii) $f = z\bar{z}$; iii) $f = iz$; iv) $f = z\bar{z} + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2}$; v) $f = z^2$; vi) $\sin(z\bar{z})$

5) Determinare le regioni di \mathbb{C} nelle quali le funzioni $f(z, \bar{z})$ dell'esercizio precedente sono continue, derivabili e analitiche.

Risp. tutte continue in \mathbb{C} ; i) non è derivabile e analitica da nessuna parte; ii) derivabile in $z = 0$ e analitica da nessuna parte; iii) e v) derivabili e analitiche in \mathbb{C} ; iv) derivabile sull'asse reale e analitica da nessuna parte; vi) derivabile in $z = 0$ e sulle circonferenze $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, analitica da nessuna parte

6) Dire, senza fare conti, se le seguenti funzioni complesse di variabile complessa sono continue e analitiche in \mathbb{C} e, se analitiche, calcolarne le derivate.

i) $\sin |z|$, ii) e^{z^2} , iii) $\arg z^2$, iv) $\bar{z}^2 z$, v) $\cos z^3$

Risp. tutte continue in \mathbb{C} ; sono analitiche in \mathbb{C} : ii) e v) con $(e^{z^2})' = 2ze^{z^2}$; $(\cos z^3)' = -3z^2 \sin z^3$

7) Date le funzioni dell'esercizio precedente, stabilirne derivabilità ed analiticità in \mathbb{C} usando le condizioni di Cauchy-Riemann.

8) Sia $f(z)$ una funzione analitica nel dominio \mathcal{D} ; dire se le seguenti funzioni composte sono analitiche, stabilirne il dominio di analiticità e calcolarne la derivata.

i) $\sin(f(z))$, ii) $|f(z)|$, iii) $f(f(z))$, iv) $\tan(f^2(z))$, v) $1/f(z)$, vi) $\arg f(z)$, vii) $\overline{f(z)}$

Risp. i) sì, in \mathcal{D} , $(\sin(f(z)))' = \cos(f(z))f'(z)$; ii) no; iii) sì, in $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}' = \{f(z), z \in \mathcal{D}\}$, $(f(f(z)))' = f'(f(z))f'(z)$; iv) sì, in $\mathcal{D} - \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{z : f^2(z) = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$, $(\tan(f^2(z)))' = \frac{2f(z)f'(z)}{\cos(f^2(z))}$; v) sì, in $\mathcal{D} - \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{z : f(z) = 0\}$, $(1/f(z))' = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$; vi) no; vii) sì, in $\tilde{\mathcal{D}} = \{z : \bar{z} \in \mathcal{D}\}$, $(\overline{f(z)})' = \overline{f'(z)}$

9) Si mostri che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathcal{D} , allora:

i) u, v sono funzioni armoniche in \mathcal{D} : $\Delta u = \Delta v = 0$;

ii) le curve di livello $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ formano un reticolo ortogonale.

iii) Se $f(z)$ è analitica in \mathcal{D} e $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \mathcal{D}$, allora la trasformazione $w = f(z)$ dal piano complesso z a quello w gode delle seguenti proprietà. a) Due curve passanti per z_0 vengono ruotate dello stesso angolo $\arg(f'(z_0))$; quindi l'angolo tra di esse resta invariato (una trasformazione di questo tipo è detta *conforme*). b) L'ingrandimento lineare in z_0 è dato da $|f'(z_0)|$.

10) Sia $u(x, y)$ una funzione armonica nel dominio \mathcal{D} del piano.

i) Si mostri che la funzione

$$v(x, y) := \text{cost} + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy),$$

dove γ è un contorno arbitrario da (x_0, y_0) a (x, y) , è armonica in \mathcal{D} .

ii) Si mostri che la funzione $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathcal{D} .

11) Sia $v(x, y)$ una funzione armonica nel dominio \mathcal{D} del piano.

i) Si mostri che la funzione

$$u(x, y) := \text{cost} + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (v_y dx - v_x dy),$$

dove γ è un contorno arbitrario da (x_0, y_0) a (x, y) , è armonica in \mathcal{D} .

ii) Si mostri che la funzione $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathcal{D} .

12) Dire se le seguenti funzioni reali sono la parte reale (o immaginaria) di funzioni analitiche. Nel caso affermativo, assumendo che siano la parte reale $u(x, y)$ di una funzione analitica $f(z)$, costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

i) $x^2 + y^2$, ii) $x^2 - y^2$, iii) xy , iv) $e^x \sin y$, v) $e^y \cos x$, vi) $\sin x \cos y$, vii) $\sin(x^2 - y^2) \cosh(2xy)$, viii) $e^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$, ix) $x^3 - 3xy^2$, x) $e^{-y} \sin x$, xi) $\log \sqrt{x^2 + y^2}$, xii) $\tan^{-1}(y/x)$

Risp. i) no; ii) $v = 2xy + c$, $f = z^2 + k$; iii) $v = \frac{y^2 - x^2}{2} + c$, $f = -i\frac{z^2}{2} + k$; iv) $v = -e^x \cos y + c$, $f = -ie^z + k$; v) $v = -e^y \sin x + c$, $f = e^{-iz} + k$; vi) no; vii) $v = \cos(x^2 - y^2) \sinh(2xy) + c$, $f = \sin z^2 + k$; viii) $v = -e^{x^2 - y^2} \cos(2xy) + c$, $f = -ie^{z^2} + k$; ix) $v = 3x^2y - y^3 + c$, $f = z^3 + k$; x) $v = -e^{-y} \cos x + c$, $f = -ie^{iz} + k$; xi) $v = \tan^{-1} \frac{y}{x} + c$, $f = \text{Log } z + k$; xii) $v = -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c$, $f = -i \text{Log } z + k$

13) Dire per quali valori dei parametri reali α, β la funzione $u(x, y) = x^2 + \alpha y^2 + \beta y$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. Per quei valori, costruire tale f come funzione della sola z .

Risp. $\alpha = -1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$. $f = z^2 - i\beta z + \text{cost}$.

14) Date le funzioni analitiche: z^n , e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, determinare le corrispondenti funzioni inverse con il loro dominio di analiticità e calcolare le derivate.

15) La trasformazione lineare $w = \alpha z + \beta$. Mostrare che tale trasformazione trasla l'origine del piano z nel punto β , cambia il modulo degli spostamenti dz per il fattore di scala $|\alpha|$ e li ruota dell'angolo $\arg \alpha$. Mostrare infine che trasforma rette in rette e cerchi in cerchi.

16) Studiare la trasformazione $w = z^2 = u + iv$. Per quali valori di z è conforme? Disegnare nel piano z il reticolo ortogonale curvilineo $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$. Costruire le immagini dei punti $z = 1, 0, i, -1$ e del settore $0 < \theta < \alpha$ nel piano w .

17) Determinare le immagini dei punti $A = 1$, $B = (\sqrt{2} + 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$, $D = i$, $E = (\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$, $C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ secondo la trasformazione $w = z^2$ e si disegni l'immagine del cerchio unitario centrato in C .

18) Studio della funzione z^n , $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che tale funzione è monodroma, continua e analitica in \mathbb{C} e si calcoli la sua derivata. Calcolare l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1 - i$ e, più in generale, del dominio $\mathcal{D} = \{0 < \arg z < \alpha, 1 < |z| < 2\}$. Scrivere le equazioni $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ in coordinate polari e disegnare le corrispondenti curve di livello del settore $0 < \arg z < \pi/n$.

19) Studio dell'inversione $w = 1/z$. Si mostri che la trasformazione $z \rightarrow w = 1/z$ è una trasformazione invertibile (l'inversa è se stessa) e realizza una corrispondenza biunivoca tra $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, essendo $w = \infty$ l'immagine di $z = 0$ e viceversa; che è inoltre analitica per $z \neq 0$ e $(1/z)' = -z^{-2}$. Si determini il significato

geometrico della trasformazione $z \rightarrow 1/z$ come combinazione di due simmetrie: la riflessione rispetto al cerchio unitario e la riflessione rispetto all'asse reale, e si costruisca l'immagine del punto z nei tre casi $|z| < 1$, $|z| = 1$, $|z| > 1$. Si mostri che tale trasformazione mappa la regione $|z - z_0| \leq R$ nella regione $|w - w_0| \geq \tilde{R}$ (per $R > |z_0|$) o nella regione $|w - w_0| \leq \tilde{R}$ (per $R < |z_0|$) del piano w , con

$$w_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$$

Si mostri che tale cerchio si riduce alla retta

$$\bar{z}_0 \bar{w} + z_0 w = 1$$

quando $|z_0| = R$; quando cioè la circonferenza $|z - z_0| = R$ passa per $z = 0$. Disegnare le linee di livello $u = \cos t$ e $v = \sin t$ di tale funzione usando coordinate polari.

20) In che cosa sono trasformate i) la retta $2iz - 2i\bar{z} = 1$ e ii) la circonferenza $|z - i| = 2$ dalla trasformazione conforme $z \rightarrow 1/z$?

Risp. i) $|w - 2i| = 2$; ii) $|w - \frac{i}{3}| = \frac{2}{3}$

21) Studio della trasformazione bilineare di Moebius

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

a) Mostrare che, per scelte opportune dei parametri, la trasformazione di Moebius si riduce all'identità, alla trasformazione lineare e all'inversione.

b) Mostrare che tale trasformazione è invertibile, con inversa: $z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$

c) Mostrare che le trasformazioni di Moebius formano un gruppo non commutativo (e unimodulare, se $\Delta = 1$).

d) Mostrare che la trasformazione di Moebius $z \rightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ è ottenibile come combinazione della traslazione $z \rightarrow \gamma z + \delta$, dell'inversione $z \rightarrow 1/z$ e della traslazione $z \rightarrow (\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma})z + \frac{\alpha}{\gamma}$, e dedurre che essa trasforma cerchi in cerchi (eventualmente cerchi in rette e rette in cerchi, intendendo la retta come cerchio di raggio infinito).

1.1.3 Integrazione di funzioni complesse

1) *Curve nel piano complesso.* Dalle definizioni di curva (un'applicazione $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, $x, y \in C[a, b]$, $a < b$), curva iniettiva (se $z(t_1) \neq z(t_2)$, quando $t_1 \neq t_2$), curva chiusa (se è continua, iniettiva e tale $z(t_a) = z(t_b)$), regolare (se $x(t), y(t) \in C^1[a, b]$ e se la curva è iniettiva), regolare a tratti (se la curva è regolare ad eccezione di un numero finito di punti),

indicare a quali classi appartengono le seguenti curve e disegnarle.

$$\begin{aligned}
 i) \quad z(t) &= Re^{it}, \quad t \in [0, \pi], \quad ii) \quad z(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \\
 iii) \quad z(t) &= Re^{it}, \quad t \in [0, \frac{5}{2}\pi], \\
 z(t) &= z_2t + (1 - z_1)t, \quad t \in [0, 1], \quad iv) \quad z(t) = t + it^2, \quad t \in [0, 1], \\
 z(t) &= \begin{cases} Re^{it}, & t \in [0, \pi], \\ 2t - 3, & t \in [1, 2]. \end{cases} \quad (7)
 \end{aligned}$$

Mostrare infine che una curva regolare (o regolare a tratti) γ è rettificabile, cioè ha una lunghezza l finita, data da

$$l = \int_{\gamma} |dz| = \int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \quad (8)$$

dove s è l'ascissa curvilinea della curva.

2) La curva di Koch è ottenuta attraverso il seguente procedimento. Dato il segmento di lunghezza l_0 , lo si divide in tre parti uguali e si sostituisce il terzo centrale (di lunghezza $l_0/3$) con due segmenti di lunghezza $l_0/3$ come in figura. Per ogni segmento di lunghezza $l_0/3$ ottenuto si ripete il procedimento, dividendolo in tre parti uguali e sostituendo la parte centrale, di lunghezza $l_0/9$ con due segmenti di lunghezza $l_0/9$. E così via. La curva ottenuta dopo n iterazioni del procedimento è un curva regolare a tratti; nel limite $n \rightarrow \infty$ essa diventa la curva di Koch, che possiede le seguenti proprietà: i) è continua (e quindi può ancora chiamarsi “curva”), ii) ha una lunghezza infinita (mostrare che, dopo n iterazioni, la lunghezza della curva è $l_n = (4/3)^n l_0 \Rightarrow l_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$), e quindi non è rettificabile, iii) non è derivabile da nessuna parte (basta osservare che una curva derivabile, a piccole distanze, somiglia a una retta, mentre la curva di Koch è invece sempre uguale a se stessa, a qualunque scala). La curva di Koch è un esempio molto semplice di frattale e viene usata anche come esempio semplificato di costa.

3) Definizione di integrale $\int_{\gamma} f(z)dz$ di una funzione complessa di variabile complessa.

Sia γ una curva continua e rettificabile di \mathbb{C} , parametrizzata dalla funzione $z(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con $z(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t), y(t) \in C[a, b]$. Sia inoltre $f(z)$ una funzione continua su γ . La partizione $t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b$ del segmento $[a, b]$ induce una partizione $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n$ del contorno γ , con $z_0 = z(a)$, $z_n = z(b)$ e $z_k = z(t_k)$, $k = 1, \dots, n$. Inoltre sia $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ un punto qualsiasi dell'arco (z_{k-1}, z_k) , $k = 1, \dots, n$ e si consideri la somma:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1})] + \\
 &\quad i \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) + v(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1})]
 \end{aligned}$$

Introdotta $\mu = \max_k |t_k - t_{k-1}|$, nel limite $\mu \rightarrow 0$ (con μn finito), la somma S_n tende ad un limite preciso, indicato con

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Se, inoltre, $z(t)$ è differenziabile a tratti ($x(t), y(t) \in C^1[a, b]$ a tratti), allora $dz = z'(t)dt$ a tratti, ed il calcolo dell'integrale si riduce a quello del seguente integrale di una funzione complessa di variabile reale t :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

4) Si mostri che:

$$I_n := \int_{z_0}^z \zeta^n d\zeta = \frac{z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

dove γ è un contorno qualsiasi che congiunge z_0 e z , costruendo un'opportuna somma che converga all'integrale da calcolare. Ad esempio, per $n = 0$:

$$I_0 \leftarrow S = \sum_{k=1}^N (z_k - z_{k-1}) = (z_1 - z_0) - (z_2 - z_1) - \dots = z - z_0.$$

Per $n = 1$, dato che entrambe le somme:

$$S_1 = \sum_{k=1}^N z_{k-1}(z_k - z_{k-1}), \quad S_2 = \sum_{k=1}^N z_k(z_k - z_{k-1})$$

convergono all'integrale: $S_1, S_2 \rightarrow I_1$, anche la loro media aritmetica convergerà ad esso: $S := (S_1 + S_2)/2 \rightarrow I_1$. D'altra parte:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} = \frac{z^2 - z_0^2}{2}.$$

Per $n = 2$, dato che entrambe le somme:

$$S_1 = \sum_{k=1}^N z_{k-1}^2(z_k - z_{k-1}), \quad S_2 = \sum_{k=1}^N z_k^2(z_k - z_{k-1})$$

convergono all'integrale: $S_1, S_2 \rightarrow I_3$, anche la combinazione $S := (S_1 + 2S_2)/3$ convergerà ad esso. D'altra parte:

$$S = \frac{S_1 + 2S_2}{3} = \sum_{k=1}^N \frac{z_{k-1}^2 + 2z_k^2}{3} (z_k - z_{k-1}) =$$

$$\sum_{k=1}^N \left[\frac{z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2}{3} (z_k - z_{k-1}) + \frac{z_k (z_k - z_{k-1})^2}{3} \right] =$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} + \sum_{k=1}^N \frac{z_k (z_k - z_{k-1})^2}{3} = \frac{z^3 - z_0^3}{3} + \sum_{k=1}^N \frac{z_k (z_k - z_{k-1})^2}{3}.$$

Poichè, nel limite, l'ultima somma converge a 0, il risultato è così dimostrato. La generalizzazione ad un n generico è ora immediata.

5) Se γ è un contorno regolare a tratti di lunghezza finita L e $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni continue lungo γ , si dimostri le seguenti proprietà:

- i) $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$;
- ii) $\int_{\gamma} [\alpha f(z) dz + \beta g(z)] dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$.
- iii) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$
- iv) la disuguaglianza di Darboux:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML,$$

dove M è il massimo di $|f(z)|$ su γ .

6) Si trovi una parametrizzazione dei seguenti contorni:

γ_1 : arco di circonferenza da 2 a $2i$; γ_2 : il segmento da 1 a $1+i$
e la si usi per calcolare gli integrali, lungo γ_1 e γ_2 , delle seguenti funzioni: z^2 , \bar{z}^3 , $|z|^2$.

Risp. z^2 : $-\frac{8}{3}(1+i)$, $-1+2i/3$; \bar{z}^3 : 16 , $5/4$; $|z|^2$: $-8(1-i)$, $4i/3$

7) Si calcoli l'integrale della funzione $|z|^2$ lungo la spezzata γ_1 che congiunge i punti 0, 1 e $1+i$ e lungo la spezzata γ_2 che congiunge i punti 0, i e $1+i$. Si deduca che il valore dell'integrale della funzione $|z|^2$ lungo il contorno chiuso $\gamma_1 - \gamma_2$, dato dalla spezzata che congiunge i punti 0, 1, $1+i$, i , 0, è diverso da zero e vale: $-1+i$.

8) Si calcoli l'integrale della funzione $|z|^p$, $p = 1, 2, 3$ lungo l'arco di cfr. γ_3 da 1 a i e lungo la spezzata γ_4 che congiunge i punti 1, 0 e i . Si deduca che il valore dell'integrale della funzione $|z|^p$ lungo il contorno chiuso $\gamma_3 - \gamma_4$ è diverso da zero e vale, per $p = 1$: $(-1+i)/2$, per $p = 2, \dots$

Risp. $p = 1$: $\int_{\gamma_3} dz |z| = i - 1$; $\int_{\gamma_4} dz |z| = (i - 1)/2$. $p = 2$:

9) i) Si mostri che, per $p \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^p dz = \begin{cases} R^{p+1} \frac{e^{i\alpha(p+1)} - 1}{p+1}, & p \neq -1; \\ i\alpha, & p = -1 \end{cases} \quad (9)$$

lungo un qualunque arco γ della circonferenza centrata in z_0 e di raggio R , che sottende l'angolo α , percorso in senso antiorario.

ii) Si deduca che

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^p dz = 2\pi i \delta_{p,-1}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

lungo la circonferenza γ centrata in z_0 e di raggio R , percorsa in senso antiorario.

10) Teorema di Cauchy. Facendo uso del Lemma di Green e del fatto che, se $f(z)$ è analitica in \mathcal{D} , allora $f'(z)$ è una funzione continua in \mathcal{D} , si dimostri il seguente teorema.

Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso \mathcal{D} , allora

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

lungo una qualunque curva chiusa γ regolare contenuta in \mathcal{D} .

11) Si dimostri il seguente risultato.

Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso e z_0, z sono due punti di \mathcal{D} , allora l'integrale di $f(z)$ lungo una curva γ , interamente contenuta in \mathcal{D} , che congiunge i punti z_0 e z , non dipende dalla curva γ , ma solo dagli estremi di integrazione.

Si osservi che questo risultato implica l'esistenza di una funzione monodroma $F(z)$ in \mathcal{D} , definita da:

$$F(z) := F(z_0) + \int_{z_0}^z f(z') dz'.$$

12) Teorema della primitiva Si dimostri il seguente risultato.

Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso e sia $F(z)$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Allora $F(z)$ è analitica in \mathcal{D} e ivi $F'(z) = f(z)$ (è, cioè, la primitiva di $f(z)$).

Si osservi che due primitive della stessa funzione analitica $f(z)$ differiscono per una costante:

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^z f(z') dz'.$$

13) Come applicazione del teorema di Cauchy e della primitiva, si calcolino i seguenti integrali del tipo $\int_{\gamma} f(z) dz$, dove:

i) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$; estremi d'integrazione: 1, i

ii) $f(z) = 1/z$; estremi d'integrazione: 1, i

iii) $f(z) = z^2 + z$; estremi d'integrazione: 1, $2i$

iv) $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$; estremi d'integrazione: 2, $2i$

v) $f(z) = z^{1/2}$; estremi d'integrazione: 1, i ramo tale che: $1^{1/2} = 1$

vi) $f(z) = z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$; estremi d'integrazione: 1, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; ramo tale che: $1^{1/n} = 1$

(γ è un contorno qualsiasi che congiunge gli estremi indicati, che non passa per l'origine e che non gira intorno all'origine) nei seguenti due modi diversi:

a) usando il teorema della primitiva (il metodo più conveniente, se la primitiva è nota);

b) scegliendo un contorno conveniente per fare calcoli.

Risp. i) $\frac{i^{n+1}-1}{n+1}$; ii) $i\frac{\pi}{2}$; iii) $-\frac{17}{6} - \frac{8i}{3}$; iv) $-4 + i\frac{\pi}{2}$; v) $\frac{2}{3}(e^{\frac{3}{4}\pi i} - 1)$; vi) $\frac{n}{n+1}[e^{i\frac{\pi}{4}\frac{n+1}{n}} - 1]$

14) Teorema di Cauchy per domini multiplamente connessi. Si dimostri il seguente risultato.

Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} multiplamente connesso (caratterizzato da un insieme finito di n "buchi") e sia γ una curva chiusa percorsa in senso antiorario, contenuta in \mathcal{D} e contenente gli n buchi. Allora:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z)dz,$$

dove γ_k è la curva chiusa che delimita il k -esimo buco, percorsa in senso antiorario.

15) Mostrare che:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso regolare che gira una volta intorno a z_0 in senso antiorario.

16) Come applicazione del teorema di Cauchy su domini multiplamente connessi, si calcolino i seguenti integrali del tipo $\int_{\gamma} f(z)dz$, dove:

i) $f(z) = 1/z$; estremi d'integrazione: $1, i$

ii) $f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$; estremi d'integrazione: $1, 1+i$

lungo un contorno γ qualsiasi che congiunge gli estremi indicati girando, rispettivamente:

i) m volte in senso antiorario e n volte in senso orario intorno a 0 ;

ii) m volte in senso antiorario intorno a i e n volte in senso orario intorno a 0 ;
(Suggerimento: si decomponga le funzioni razionali in fratti semplici).

Risp. i) $i\pi[\frac{1}{2} + 2(m-n)]$; ii) $2\pi(m+n) + i \log 2$

17) Formula integrale di Cauchy. Si dimostri che,

se $f(z)$ è analitica in \mathcal{D} , la curva γ ed il suo interno G sono contenuti in \mathcal{D} e $z \in G$, allora:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z}.$$

18) Teorema della media. Si dimostri la seguente proposizione.

i) Se $f(z)$ è analitica all'interno del cerchio di raggio R di centro z_0 ed è continua sulla sua circonferenza, allora il valore al centro $f(z_0)$ è pari alla media

aritmetica dei valori assunti sulla circonferenza:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

ii) Se $u(x, y)$ è una funzione armonica all'interno della circonferenza di raggio R e centro (x_0, y_0) , allora il valore al centro $u(x_0, y_0)$ è pari alla media aritmetica dei valori assunti sulla circonferenza:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) d\theta.$$

19) Teorema del massimo e minimo modulo. Si dimostri il seguente risultato.

i) Se $f(z)$ è analitica nel dominio \mathcal{D} ed è continua in $\partial\mathcal{D}$, allora $|f(z)|$ non può raggiungere il suo massimo (ed il suo minimo) in un punto interno. (Per dimostrare il teorema del minimo modulo, basta ripetere le considerazioni svolte nel teorema del massimo per la funzione $1/f(z)$, supponendo che non abbia zeri in \mathcal{D}).

ii) Se la funzione $u(x, y)$ è armonica in un dominio di \mathbb{R}^2 , allora $u(x, y)$ non può raggiungere il suo massimo ed il suo minimo in un punto interno.

20) Formula integrale di Cauchy per la derivata n -esima. Si dimostri la seguente proposizione.

Se $f(z)$ è analitica nel dominio \mathcal{D} , essa ammette derivate $f^{(n)}(z)$ di ogni ordine in \mathcal{D} (quindi analitiche in \mathcal{D}), che hanno la seguente rappresentazione integrale:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}}.$$

21) Si dimostrino i seguenti teoremi di Liouville.

i) 1° teorema di Liouville. Una funzione analitica e limitata in \mathcal{C} è costante.

ii) 2° teorema di Liouville. Se $f(z)$ è analitica in \mathcal{C} e

$$|f(z)| < M|z|^m, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad M > 0, \quad m \in \mathcal{N},$$

allora $f(z)$ è un polinomio di grado $\leq m$.

22) Teorema di Morera. Si dimostri il seguente risultato.

Se $f(z)$ è continua nel dominio \mathcal{D} semplicemente connesso, e se $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ lungo qualunque curva chiusa γ contenuta in \mathcal{D} , allora $f(z)$ è analitica in \mathcal{D} .

23) Integrale al valor principale.

a) *Definizione.* Si consideri un contorno γ di estremi z_a e z_b in \mathcal{C} ed una funzione $g(z)$ che ha una singolarità non sommabile in un punto $z_0 \in \gamma$ (ad es.: $g(z) \sim (z - z_0)^{-p}$, $p \geq 1$, $z \sim z_0$). Si consideri una circonferenza centrata in z_0 di raggio ϵ e siano z_1, z_2 i punti di intersezione di tale circonferenza con la curva γ ,

sia inoltre γ_1 il sottoinsieme di γ che ha per estremi z_a, z_1 e γ_2 il sottoinsieme di γ che ha per estremi z_2, z_b . Se il limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_1} g(z) dz + \int_{\gamma_2} g(z) dz \right)$$

esiste (attraverso un meccanismo di cancellazione delle singolarità dei due integrali), esso viene definito *integrale nel senso del valor principale di $g(z)$ lungo γ* e indicato nel seguente modo:

$$P \int_{\gamma} g(z) dz := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_1} g(z) dz + \int_{\gamma_2} g(z) dz \right).$$

b) Solitamente $g(z) = f(z)/(z-\zeta)$, $\zeta \in \gamma$ e l'integrale al valor principale diventa:

$$P \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz, \quad \zeta \in \gamma.$$

Si dimostri che tale integrale esiste se e solo se $f(z)$ è una funzione di Lipshitz (Holder) su γ ; cioè se:

esistono due costanti positive κ, μ tali che

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \kappa |z_1 - z_2|^\mu, \quad z_1, z_2 \in \gamma$$

24) Si consideri l'integrale

$$I := \int_a^b \frac{dt}{(t-x)^n}, \quad x \in [a, b].$$

i) È definito come integrale improprio? Se sì, quanto vale?

ii) È definito come integrale nel senso del valor principale? Se sì, quanto vale?

Risp. i) L'integrale improprio non è definito perchè, per $\epsilon \rightarrow 0^+$, entrambi gli integrali:

$$\int_a^{x-\epsilon} \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{(-)^n}{1-n} \left[\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \right], & n \neq 1, \\ \ln \epsilon - \ln(x-a), & n = 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\int_{x+\epsilon}^b \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \right], & n \neq 1, \\ \ln(b-x) - \ln \epsilon, & n = 1 \end{cases} \quad (11)$$

divergono. Il valor principale dell'integrale è invece ben definito se e solo se n è dispari. In questo caso:

$$I = P \int_a^b \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{(a-x)^{n-1}} \right], & n \neq 1, \\ \ln(b-x) - \ln(x-a), & n = 1. \end{cases} \quad (12)$$

25) Rappresentazione integrale di Cauchy di una funzione analitica. Si consideri la funzione $\Phi(z)$ definita da:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - z}, \quad z \notin \gamma,$$

con $f(z)$ funzione di Lipschitz sul contorno chiuso γ , percorso in senso antiorario. Si dimostri i seguenti risultati.

a) $\Phi(z)$ è analitica $\forall z \notin \gamma$ e

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i z} \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}}, \quad z \notin \gamma.$$

(La dimostrazione è molto simile a quella relativa alla formula integrale di Cauchy).

b) $\Phi(z) = (1/2\pi iz) \oint_{\gamma} f(z) dz + o(1/|z|)$, $|z| \gg 1$.

c) *Formule di Plemelj - Sokhotski* Il limite in cui z tende ad un punto del contorno è descritto dalle seguenti formule:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta \in \gamma} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} P \oint_{\gamma} \frac{f(z')}{z' - \zeta} \pm \frac{1}{2} f(\zeta), \quad \zeta \in \gamma,$$

dove i segni + e - stanno a indicare i limiti per z che tende al punto ζ del contorno γ rispettivamente da sinistra e da destra, rispetto al verso positivo di percorrenza del contorno (la dimostrazione è assai semplice se si assume che $f(z)$ sia analitica in una striscia, piccola a piacere, intorno alla curva γ ; farlo in questo modo).

26) Integrali su archi infiniti ed infinitesimi. Sia γ_R è un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R . Dimostrare i seguenti risultati.

a) Se $zf(z) \rightarrow 0$ uniformemente sull'arco γ_R , per $|z| = R \rightarrow \infty$ (cioè se $|zf(z)| < \phi(R) \rightarrow 0$, per $R \rightarrow \infty$), allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

b) Se $zf(z) \rightarrow A$ uniformemente sull'arco γ_R , per $|z| = R \rightarrow \infty$ (cioè se $|z(f(z) - A/z)| < \phi(R) \rightarrow 0$, per $R \rightarrow \infty$), allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = i\alpha A,$$

dove α è l'angolo sotteso da γ_R .

c) Se $(z - z_0)f(z) \rightarrow 0$ uniformemente sull'arco γ_R , per $|z - z_0| = R \rightarrow 0$ (cioè se $|(z - z_0)f(z)| < \phi(R) \rightarrow 0$, per $R \rightarrow 0$), allora

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

d) Se $(z - z_0)f(z) \rightarrow A$ uniformemente sull'arco γ_R , per $|z| = R \rightarrow 0$ (cioè se $|(z - z_0)(f(z) - A/(z - z_0))| < \phi(R) \rightarrow 0$, per $R \rightarrow 0$), allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = i\alpha A,$$

dove α è l'angolo sotteso da γ_R .

e) *Lemma di Jordan* Sia γ_R la semi-circonferenza di centro 0 e raggio R del semipiano superiore; se $f(z) \rightarrow 0$ uniformemente su γ_R (cioè se $|f(z)| < \phi(R) \rightarrow 0$, per $R \rightarrow \infty$), allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{ikz} f(z) dz = 0, \quad k > 0.$$

27) Si mostri che, per le seguenti funzioni $f(z)$:

i) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$; ii) $f(z) = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}(z+1)}$, iii) $\frac{1}{\log z(z+i)}$

vale la proprietà che $zf(z) \rightarrow 0$ uniformemente su γ_R , per $|z| = R \rightarrow \infty$ e per $|z| \rightarrow 0$; e che quindi:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

1.1.4 Serie di funzioni; serie di Taylor, di Laurent e teorema dei residui

1) Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

di funzioni $f_n(z)$ definite in $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$,

i) si diano le definizioni di serie convergente, assolutamente ed uniformemente convergente alla funzione $f(z)$ in \mathcal{A} .

ii) Si mostri che l'assoluta convergenza implica la convergenza; si illustri che il viceversa non è vero con l'esempio: $\sum_n (-)^n/n$.

2) Si mostri che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge a $1/(1-z)$ per $|z| < 1$, è assolutamente convergente per $|z| < 1$ ed è uniformemente convergente per $|z| \leq \rho < 1$. Ma non è uniformemente convergente per $|z| < 1$.

Risp. Per l'ultimo punto, si osservi che $\sup(\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}) = \infty$, $|z| < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Si mostri che la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) = -\frac{1}{1+nz} + \frac{1}{1+(n-1)z}$$

è convergente in un intorno \mathcal{U} di $z = 0$ contenente $z = 0$, ma è uniformemente convergente solo escludendo $z = 0$; cioè in $\mathcal{U} - \{|z| < \epsilon\}$.

4) L'uniforme convergenza è la proprietà chiave che permette di trasferire alla somma della serie le proprietà delle somme parziali. Dimostrare, ad esempio, i seguenti risultati.

a) Sia $f(z)$ la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

uniformemente convergente in una regione \mathcal{A} del piano complesso. Si dimostri che, se le funzioni $f_n(z)$ sono continue in \mathcal{A} , allora $f(z)$ è continua in \mathcal{A} .

b) Si dimostri che la somma $f(z)$ di una serie uniformemente convergente di funzioni analitiche in un dominio \mathcal{D} del piano complesso è essa stessa analitica in \mathcal{D} . (Suggerimento: si usi il teorema di Morera)

c) Si dimostri che, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ di funzioni continue su una curva γ è uniformemente convergente su γ , allora è possibile scambiare la somma con l'integrale:

$$\int_{\gamma} dz \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} dz f_n(z)$$

5) *Teorema di Cauchy-Hadamard.* Si dimostri il seguente teorema.

Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, sia R il numero positivo definito da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(|c_n|^{1/n}) = \frac{1}{R};$$

allora la serie converge assolutamente per $|z - z_0| < R$ e diverge per $|z - z_0| > R$. R è detto raggio di convergenza della serie.

6) Mostrare che, se la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ è assolutamente convergente per $|z - z_0| < R$ alla funzione somma $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

allora:

- i) la serie è uniformemente convergente in ogni cerchio $|z - z_0| \leq \rho < R$;
- ii) la somma $f(z)$ è analitica in $\{z : |z - z_0| < R\}$, la derivata n -esima di $f(z)$ è anch'essa analitica in $\{z : |z - z_0| < R\}$ e ammette lo sviluppo

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) c_k (z - z_0)^{k-n}$$

il cui raggio di convergenza è ancora R .

iii) Il coefficiente c_n può essere riscritto nella forma $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, e quindi:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Quest'ultimo sviluppo è detto *serie di Taylor della somma $f(z)$, di centro z_0 e raggio R* . Quindi:

ogni serie di potenze positive con raggio di convergenza $R > 0$ è la serie di Taylor della sua somma $f(z)$, che è analitica per $|z - z_0| < R$

7) *Unicità dello sviluppo di Taylor.* Usare il risultato del precedente esercizio per mostrare che, se le serie di potenze $\sum_n a_n(z - z_0)^n$, $\sum_n b_n(z - z_0)^n$ hanno la stessa somma e lo stesso raggio di convergenza, allora $a_n = b_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

8) Date le seguenti serie di Taylor:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$; ii) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$; iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n$; iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$, v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} (z - z_0)^n$, $a \in \mathbb{R}$; vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n^2 + 1}$; vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\log n)^n}$; viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) (z - z_0)^n$;
ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^a}$, $a > 0$; x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$; xi) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$ xii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^n}{(n+1)!} z^n$;
xiii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{bn}}{(n!)^a} (z - z_0)^n$, $a, b > 0$; xiv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} (z - z_0)^n$; xv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p 3^n n!}{n^n} (z - z_0)^n$, $p \in \mathbb{Z}$;

a) usare la formula di Cauchy-Hadamard e/o quella di D'Alambert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup^n \sqrt{|c_n|} = \frac{1}{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

per determinarne il raggio di convergenza R e trovare le regioni di \mathbb{C} nelle quali converge (ass. e/o unif.) o diverge.

b) Studiare il comportamento delle serie sulla circonferenza $|z - z_0| = R$.

Risp. a) : i) $R = \infty$; ii) $R = 1$; iii) $R = 0$; iv) $R = 1$; v) $R = e/|a|$; vi) $R = 1$; vii) $R = \infty$; viii) $R = 1$; ix) $R = \infty$; x) $R = 1/4$; xi) $R = 1$; xii) $R = 1/(2e)$; xiii) $R = e^{-a}$ ($b = a$), $R = 0$ ($b > a$), $R = \infty$ ($b < a$); xiv) $R = \frac{e}{3}$; xv) $R = \frac{e}{3}$.

b) : ii) *diverge per $|z| = 1$* ; iv) $a > 1$: *converge ass. e unif.*; $0 < a \leq 1$: *diverge in $z = 1$, converge per $|z| = 1, z \neq 1$* ; $a \leq 0$: *diverge*; xiii) $b = a$, $0 < a \leq 2$, *conv. non ass. se $z - z_0 \neq 1$, div. per $z - z_0 = 1$* ; $a > 2$: *con. ass. unif.*; xiv) *div.*; xv) $p \geq -\frac{1}{2}$: *div.*, $-\frac{3}{2} < p < -\frac{1}{2}$: *con. non ass. se $z - z_0 \neq 1$, div. per $z - z_0 = 1$* ; $p < -\frac{3}{2}$: *conv. ass. unif.*

9) Dimostrare che, se la serie numerica $\sum_n c_n$ è assolutamente convergente, allora la serie di funzioni $\sum_n c_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente per $|z - z_0| \leq 1$.

10) Mostrare che il prodotto di due serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ conver-

genti nello stesso disco è dato dalla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k,$$

essa stessa convergente nello stesso disco. Calcolare esplicitamente i primi 4 coefficienti c_n , $n = 0, 1, 2, 3$ in funzione di a_n e b_n .

11) Scrivere il rapporto tra due serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) / \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right), \quad a_0 \neq 0$$

convergenti nello stesso disco, come serie di potenze, esprimendo i primi 3 coefficienti in funzione dei coefficienti c_n e a_n . Suggerimento: utilizzare i risultati dell'esercizio precedente.

Risp. $b_0 = \frac{c_0}{a_0}$, $b_1 = \frac{c_1 a_0 - c_0 a_1}{a_0^2}$, $b_2 = \frac{a_1^2 c_0 - a_0 a_2 c_0 - a_0 a_1 c_1 + a_0^2 c_2}{a_0^3}$

12) Se R è il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, mostrare che il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^m z^n$ è R^m .

13) Si mostri che ogni funzione analitica in \mathcal{D} semplicemente connesso è sviluppabile in serie di Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

in ogni disco $\{|z - z_0| < R\} \subset \mathcal{D}$, dove γ è il bordo di tale disco, percorso in senso antiorario. Questo risultato, ottenibile partendo dalla formula integrale di Cauchy, è la controparte del risultato contenuto nell'esercizio teorico 6) ii).

14) Trovare le rappresentazioni in serie di potenze di Mc Laurin (serie di Taylor di centro $z_0 = 0$) delle seguenti funzioni elementari

i) e^{iz} ; ii) e^{z^2} ; iii) $\sin z$; iv) $\cos z$; v) $\sinh z$; vi) $\cosh z$; vii) $\cosh z^{\frac{1}{2}}$ e determinare i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. i) $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n$, $R = \infty$; ii) $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$, $R = \infty$; iii) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $R = \infty$; iv) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $R = \infty$; v) $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$; vi) $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; vii) $\cosh z^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}$, $R = \infty$.

15) Costruire le serie di Taylor di centro $z_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

i) $\frac{\sin z}{z}$; ii) $\frac{\cosh z - 1}{z^2}$; iii) $\frac{e^z}{1-z}$ e determinare i raggi di convergenza di tali serie.

Risp. i) $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$, $R = \infty$; ii) $\frac{\cosh z - 1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+2)!}$, $R = \infty$; iii) $\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n = \sum_{k=0}^n (k!)^{-1}$, $R = 1$.

16) Costruire le serie di Taylor centrate in z_0 dei seguenti rami di funzioni polidrome:

i) $\ln z$, $z_0 = 1$ ($\ln 1 = 0$); ii) $(z+1)^{\frac{1}{n}}$, $z_0 = 0$ ($1^{\frac{1}{n}} = 1$),
e determinare i raggi di convergenza di tali serie.

Risp. i) $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$, $R = 1$; ii) $(z+1)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/n}{k} z^k$, $R = 1$.

17) Regola di De L'Hopital. Se $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni analitiche nell'intorno di z_0 e se

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad g^{(n+1)}(z_0) \neq 0,$$

si mostri che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{g^{(n+1)}(z_0)}$$

18) Sia \mathcal{U} l'intorno di un punto. Si mostri che le seguenti tre affermazioni:

- i) $f(z)$ è derivabile in \mathcal{U} (Riemann);
- ii) $f(z)$ è continua in \mathcal{U} e il suo integrale lungo un contorno chiuso qualsiasi contenuto in \mathcal{U} è nullo (Cauchy-Morera);
- iii) $f(z)$ è sviluppabile in una serie di potenze positive, convergente in ogni disco contenuto in \mathcal{U} (Weierstrass);

sono tre modi equivalenti di caratterizzare una funzione analitica in \mathcal{U} .

19) Teorema sullo sviluppo di Laurent Si mostri che ogni funzione $f(z)$ analitica in una corona circolare di centro z_0 e raggi $R_1 < R_2$ può essere sviluppata nella serie di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso, percorso in senso antiorario, contenuto all'interno della corona circolare, che gira una volta intorno al buco della stessa.

20) Il residuo di una funzione. Sia $f(z)$ una funzione che ha una singolarità isolata (polare od essenziale) in $z_0 \in \mathbb{C}$ ed è analitica in un suo intorno. Si definisce residuo di $f(z)$ in z_0 il seguente integrale:

$$Res(f(z), z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (13)$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso, percorso in senso antiorario, che gira intorno a z_0 una volta, senza includere altre eventuali singolarità (per il teorema di Cauchy, l'integrale non dipende dai dettagli del contorno e quindi il residuo è definito senza ambiguità).

Si usi la teoria delle serie di Laurent per mostrare che:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = c_{-1},$$

dove c_{-1} è il coefficiente della potenza -1 dello sviluppo di Laurent di f nell'intorno di z_0 .

21) Teorema dei residui. Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} , ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate. Allora

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_j),$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso percorso in senso antiorario e contenuto in \mathcal{D} , e z_j , $j = 1, \dots, n$ sono le singolarità isolate contenute all'interno di γ .

22) Residuo all' ∞ e teorema sulla somma dei residui in $\bar{\mathbb{C}}$.

i) Si consideri una funzione $f(z)$ che possiede all' ∞ una singolarità isolata, polare o essenziale, e si osservi che la definizione di residuo precedentemente data diventa, nel caso in cui $z_0 = \infty$:

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z) dz,$$

dove C_R è una circonferenza centrata in 0 e di raggio R sufficientemente grande da contenere tutte le singolarità di f al finito, *percorsa in senso orario*.

ii) Si mostri che, attraverso il cambiamento di variabili $t = 1/z$, un'eventuale singolarità in $z = \infty$ della funzione $f(z)$ diventa una singolarità in $t = 0$ della funzione $f(1/t)$, e che:

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right), 0\right).$$

Si osservi quindi che la funzione $f(z)$ può avere un residuo non nullo all' ∞ pur essendo analitica all' ∞ ; ad esempio:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z+1}{z}, \infty\right) = -1.$$

iii) **Teorema sulla somma dei residui.** Si dimostri che, se la funzione $f(z)$ è analitica in $\bar{\mathbb{C}}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate z_j , $j = 1, \dots, n$ e della singolarità isolata all' ∞ , allora la somma dei residui in tutte queste singolarità è 0:

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_j) + \operatorname{Res}(f(z), \infty) = 0.$$

23) Determinare gli sviluppi della funzione $1/(1-z)$ in serie di potenze con centro $z_0 = 0$ e $z_0 = 1$ convergenti in tutto il piano complesso.

Risp. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, *Taylor*; $\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n$, $|z| > 1$, *Laurent*.

24) Sviluppare la funzione $f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$ in serie di potenze centrate in $z = 0$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-(n+1)})z^n$, $|z| < 1$; $-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$, $1 < |z| < 2$;
2; $\sum_{n=-\infty}^{-1} (\frac{1}{2^{n+1}} - 1)z^n$, $|z| > 2$.

25) Sviluppare la funzione $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ in serie di potenze centrate in $z = 1$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. $-\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{2n}$, $|z-1| < 1$; $\sum_{n=-\infty}^{-1} (z-1)^{2n}$, $|z-1| > 1$.

26) Sviluppare la funzione

$$f(z) = \frac{3}{z(z-1)(z-2)}$$

in serie di potenze con centro $z_0 = 0, 1, 2$ in tutto il piano complesso.

27) Date le funzioni $f_1(z) = e^{az}/z^2$, $f_2(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f_3(z) = \sin(1/z)$, $f_4(z) = e^{4z^2}/z^2$, $f_5(z) = e^{4z^3}/z^4$

i) ottenere i loro sviluppi in serie di potenze in tutto il piano complesso, centrati in $z_0 = 0$ e in $z_0 = \infty$.

ii) Studiare le loro singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui delle singolarità al finito e all' ∞ , verificando il teorema sulla somma dei residui.

Risp. i) $e^{az}/z^2 = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} z^n$, *polo doppio in 0*, $Res(f_1, 0) = a$,

$\zeta = 1/z$: $\zeta^2 e^{a/\zeta} = \sum_{n=-\infty}^2 \frac{a^{2-n}}{(2-n)!} \zeta^n$, *sing. ess. in $z = \infty$* , $Res(f_1, \infty) = -Res(e^{a/\zeta}, 0) = -a$.

ii) $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^m}{(-m)!}$, *sing. ess. in 0*, $Res(f_2, 0) = 1$,

$\zeta = 1/z$: $e^{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}$, *anal. in $z = \infty$* , $Res(f_2, \infty) = -Res(\zeta^{-2} e^{\zeta}, 0) = -1$.

iii) $\sin(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$, *sing. ess. in 0*, $Res(f_3, 0) = 1$,

$\zeta = 1/z$: $\sin \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} \zeta^{2n+1}$, *anal. in $z = \infty$* , $Res(f_3, \infty) = -Res(\zeta^{-2} \sin \zeta, 0) = -1$.

iv) $e^{4z^2}/z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} z^{2(n-1)}$, $0 < |z| < \infty$, *polo doppio in 0*, $Res(f_4, 0) = 0$,

$\zeta = 1/z$: $\zeta^2 e^{4\zeta^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \zeta^{2(1-n)}$, *sing. ess. in $z = \infty$* , $Res(f_4, \infty) = -Res(e^{4\zeta^{-2}}, 0) = 0$.

$$v) e^{4z^3}/z^4 = \sum_0^{\infty} \frac{4^n z^{3n-4}}{n!}, \quad 0 < |z| < \infty, \text{ polo di ordine } 4, \text{ Res}(f_5, 0) = 4,$$

$$\zeta = 1/z : f_5(1/\zeta) = \sum_0^{\infty} \frac{4^n \zeta^{-3n+4}}{n!}, \text{ sing. ess. in } z = \infty, \text{ Res}(f_4, \infty) = -4$$

28) Sviluppare la funzione $f(z) = (z^2 + 1)^{-1}$ in serie di potenze, centrate in $z_0 = i$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza. Calcolare inoltre i residui nei punti singolari.

$$\text{Risp. } \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 2 \Rightarrow \text{Res}(i) = \frac{1}{2i};$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i(z-i)} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-2i)^{-n-2} (z-i)^n, \quad 2 < |z-i|.$$

29) Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{4z+1}{z^5+2z^3+z} = \frac{4z+1}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui, verificando il teorema sulla somma dei residui.

$$\text{Risp. } 0 \text{ polo sempl. } \text{Res}(0) = 1; \quad \pm i \text{ poli doppi } \text{Res}(\pm i) = -\frac{1 \pm 2i}{2}$$

30) Studiare le singolarità delle funzioni $f_1(z) = \frac{1}{\sin z}$, $f_2(z) = \frac{1}{\cos z}$, $f_3(z) = \tan z$, $f_4(z) = \frac{1}{\cos z}$, $f_5(z) = \frac{z}{\cosh z - 1}$, $f_6(z) = \frac{z+1}{1-\cos z}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui. Mostrare, in particolare, che il punto $z = \infty$ è un punto di accumulazione di singolarità polari e che quindi non ammette sviluppo di Laurent e non esiste il suo residuo.

$$\text{Risp. } \frac{1}{\sin z} : z_n = \pi n, \text{ poli sempl.}, c_{-1} = (-)^n; \quad \infty \text{ punto d'accum. dei poli sempl.}$$

$$\frac{1}{\cos z} : z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ poli sempl.}, c_{-1} = (-)^{n+1}; \quad \infty \text{ punto d'accum. dei poli sempl.}$$

$$\tan z : z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ poli sempl.}, c_{-1} = -1; \quad \infty \text{ punto d'accum. dei poli sempl.}$$

lungo asse reale, per $z \rightarrow 0$: $\tan z \rightarrow i$, da sopra, $\tan z \rightarrow -i$, da sotto

$$\frac{z}{\cosh z - 1} : z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1), \text{ poli sempl.}, c_{-1} = (-)^{n+1} \frac{\pi}{2}(2n+1); \quad \infty \text{ punto d'accum. dei poli sempl.}$$

$$\frac{z}{\cosh z - 1} : z = 0 \text{ polo semplice, Res}(0) = 2. \quad z_n = 2n\pi i, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ poli doppi, Res}(z_n) = 2. \quad z = \infty \text{ punto d'accumulazione di poli doppi.}$$

$$\frac{z+1}{1-\cos z} : z_n = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ poli doppi, Res}(z_n) = 2; \quad \infty \text{ punto d'acc. di poli doppi.}$$

31) Studiare le singolarità delle funzioni $1/\sin(1/z)$, $1/\cos(1/z)$, $\tan(1/z)$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

$$\text{Risp. } 1/\sin(1/z): 1/\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}, \text{ poli semplici, Res}(1/\pi n) = (-)^{n+1} \pi^2 n^2; \quad z = \infty \text{ polo, Res}(\infty) = 1/3!; \quad z = 0 \text{ punto di acc. di poli sempl.}$$

$$1/\cos(1/z): z_n = (\pi(n+1/2))^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ poli semplici, Res}(z_n) = (-)^n \pi^2 (n+1/2)^2; \quad z = \infty \text{ regolare, Res}(\infty) = 0. \quad 0 \text{ punto di accumulazione di poli semplici.}$$

32) Studiare le singolarità delle seguenti funzioni in $\bar{\mathbb{C}}$

$$i) \frac{1}{z^2+1}; \quad ii) \frac{1}{z^3-z^2}; \quad iii) \frac{\sin z - z}{z^k}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

e calcolare i corrispondenti residui. Nel calcolo del residuo all' ∞ , usare sia la definizione di residuo, sia il teorema sulla somma dei residui in $\bar{\mathbb{C}}$.

Risp. $\frac{1}{z^2+1} : z = \pm i$ poli sempl., $Res(\pm i) = \pm \frac{1}{2i}$;
 $\frac{1}{z^3-z^2} : 0$ polo doppio $Res(0) = -1$, 1 polo sempl. $Res(1) = 1$.
 $\frac{\sin z-z}{z^k} : k = 1 : \text{anal. in } \mathbb{C}, \infty \text{ sing. ess. } Res(\infty) = 0$;
 $k = 2 : \text{anal. in } \mathbb{C}, \infty \text{ sing. ess. } Res(\infty) = 0$
 $k = 3 : \text{anal. in } \mathbb{C}, \infty \text{ sing. ess. } Res(\infty) = 0$
 $k = 4 : 0$ polo sempl. $Res(0) = -1/3!$, anal. in $\mathbb{C} - \{0\}$, ∞ sing. ess. $Res(\infty) = 1/3!$

33) Mostrare che, se la funzione $f(z)$ possiede un numero finito di singolarità isolate $z_j, j = 1, \dots, N$ in \mathbb{C} al finito, e se ammette inoltre lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad R < |z - z_0| < \infty$$

per un qualche R finito, allora $\sum_{j=1}^N Res(f, z_j) = c_{-1}$. (Sugg.: si usi la nozione di residuo all' ∞).

34) Studiare le singolarità della funzione $f(z) = \frac{z+1}{1-\cos z}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ poli doppi $Res(2n\pi) = 2, \infty$ punto d'acc. poli

35) Studiare le singolarità di ogni ramo delle funzioni

i) $\frac{\text{Log } z}{z-z_0}, z_0 \neq 0$; ii) $\frac{(z-1)^{\frac{1}{3}}}{z+i}$
in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $\frac{\text{Log } z}{z-z_0} : \text{polidroma, inf. determinazioni, } 0 \text{ punto diram.};$
 z_0 polo sempl. di ogni ramo, $Res_k(z_0) = \ln |z_0| + i[\arg(z_0) + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{(z-1)^{\frac{1}{3}}}{z+i} : \text{polidroma, } 3 \text{ determinazioni, } 1 \text{ punto diram.};$
 $-i$ polo sempl. di ogni ramo, $Res_k(-i) = \sqrt[6]{2} e^{\frac{5}{12}\pi i + \frac{2k\pi i}{3}}, k = 0, 1, 2$

36) Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Mostrare che:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } f(z),$$

dove $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg } f(z)$, la variazione dell'argomento di $f(z)$ lungo il contorno chiuso γ (rapportata a 2π), è anche detto "indicatore logaritmico (o indice) di $f(z)$ lungo γ ".

37) Mostrare che l'indicatore logaritmico della funzione $f = z$ lungo un qualunque contorno chiuso che gira n volte, in senso antiorario e m volte in senso orario intorno all'origine è $n - m$. Esso è nullo, invece, se il contorno non contiene l'origine.

38) Mostrare che l'indicatore logaritmico della funzione $f = 1 + \phi(z)$ lungo un qualunque contorno chiuso γ tale che $|\phi(z)| < 1, z \in \gamma$ è nullo.

39) Teorema dell'indice. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ e tale che $f(z) \neq 0, f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.

40) Principio dell'argomento. Si osservi che, dai risultati dei due esercizi precedenti segue che:

La differenza tra il numero M degli zeri e N dei poli (contati con la loro molteplicità) di una funzione $f(z)$ in un dominio semplicemente connesso \mathcal{D} in cui essa è meromorfa è pari alla variazione dell'argomento di $f(z)$ lungo $\partial\mathcal{D}$:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\mathcal{D}} \text{Arg } f(z) = M - N.$$

41) Teorema di Rouché. Se $f(z)$ e $g(z)$ sono due funzioni analitiche in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ e $|f(z)| > |g(z)| \forall z \in \partial\mathcal{D}$, mostrare che le funzioni $f(z) + g(z)$ e $f(z)$ hanno lo stesso numero di zeri in \mathcal{D} .

42) Teorema fondamentale dell'algebra. Il polinomio di grado n

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j z^j$$

possiede n radici. Dimostrare il teorema come conseguenza del teorema di Rouché applicato alle funzioni $f(z) = \alpha_n z^n$ e $g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j z^j$.

1.1.5 Calcolo di integrali col teorema dei residui

1) Usando il teorema dei residui o la nozione di residuo all' ∞ , mostrare che

$$\oint_{\gamma} \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2} \frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

dove γ è un qualunque percorso chiuso, percorso in senso antiorario una volta, che racchiude tutte le singolarità dell'integrando.

2) Calcolare i seguenti integrali del tipo $I = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$:

i) $R = \frac{1}{a+b \cos \theta}$, $0 < b < a$; ii) $R = \frac{1}{a+b \sin \theta}$, $0 < b < a$; iii) $R = \frac{1}{a^2 + \sin^2 \theta}$, $a > 0$; iv) $R = \sin^2 \theta$; v) $R = \cos^2 \theta$; vi) $R = \sin^4 \theta$; vii) $R = \cos^4 \theta$

Risp. i) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$; ii) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$; iii) $\frac{2\pi}{a\sqrt{1+a^2}}$; iv) π ; v) π ; vi) $\frac{3\pi}{4}$; vii) $\frac{3\pi}{4}$

3) Calcolare i seguenti integrali del tipo $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx R(x)$:

i) $R = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$; ii) $R = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a \neq b$, $a, b > 0$; iii) $R = \frac{1}{x^4+4a^4}$, $a > 0$; iv) $R = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$; v) $R = \frac{1}{x^2-2x+2}$; vi) $R = \frac{x}{(x^2+a^2)(x-ib)}$, $a, b > 0$; vii) $R = \frac{1}{(x^2+1)(x-2i)}$; viii) $R = \frac{1}{(x-i)(x-2i)}$

Risp. i) $\frac{\pi}{a}$; ii) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$; iii) $\frac{\pi}{4a^3}$; iv) $\frac{\pi}{2a^3}$; v) π ; vi) $\frac{\pi}{a+b}$; vii) $\frac{\pi i}{3}$; viii) 0

4) Calcolare i seguenti integrali di Fourier $I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} R(x)$, $k \in \mathbb{R}$, dove le funzioni $R(x)$ sono definite nell'esercizio precedente. Calcolare, di conseguenza, gli integrali $C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos kx R(x)$, $k \in \mathbb{R}$, $S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sin kx R(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

Risp. i) $I(k) = \frac{\pi e^{-|k|a}}{a}$; ii) $I(k) = \frac{\pi}{b^2-a^2} \left(\frac{e^{-a|k|}}{a} - \frac{e^{-b|k|}}{b} \right)$;
iii) $I(k) = \frac{\pi}{4a^3} e^{-|k|a} [\cos(a|k|) + \sin(a|k|)]$; iv) $\frac{\pi}{2a^3} (1 + a|k|) e^{-|k|a}$; v) $\pi e^{ik-|k|}$

5) Calcolare le seguenti anti-trasformate di Laplace: $I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} dz e^{zt} R(z)$, $t > 0$, dove le funzioni $R(z)$ sono definite nell'esercizio precedente e \mathcal{B} è il contorno $Re z = \text{cost}$ che ha tutte le singolarità di $R(z)$ a sinistra.

Risp. i) $\frac{\sin(at)}{a}$; ii) $\frac{1}{b^2-a^2} \left(\frac{\sin(at)}{a} - \frac{\sin(bt)}{b} \right)$; iii) $\frac{1}{4a^3} [\cosh(at) \sin(at) - \sinh(at) \cos(at)]$; iv) $\frac{1}{2a^3} [\sin(at) - at \cos(at)]$; v) $\frac{e^t}{2} (\sin t - t \cos t)$

6) Verificare che

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{+i\infty+c} \frac{dz}{z^2-1}, \quad c \in \mathbb{R}$$

vale: $I = -(1/2)$, per $|c| < 1$ e $I = 0$ per $|c| > 1$. (Il cammino d'integrazione è parallelo all'asse immaginario ed interseca l'asse reale nel punto $z = c$)

7) Verificare che

$$I(k, c) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ikx}}{x-c} = \theta(k) e^{-ick},$$

dove k è un numero reale non nullo, $Im c < 0$, $\theta(k) = 0$ per $k < 0$ e $\theta(k) = 1$ per $k > 0$.

8) Verificare che

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

9) Usare il teorema dei residui per calcolare i seguenti integrali al valor principale:

i) $P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)} = 0$; ii) $P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{\pi}{2}$; iii) $P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-i)} = \frac{\pi i}{i-1}$; iv) $P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx = \pi i \operatorname{sgn} k$, $k \in \mathbb{R}$; v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \pi \operatorname{sgn} k$, $k \in \mathbb{R}$;
vi) $P \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(1-x)} = -p \frac{\cos \pi p}{\sin \pi p}$, $0 < p < 1$

10) Verificare che

$$P \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos bx}{x^2 - a^2} = -\frac{\pi}{a} \sin(ab), \quad b > 0$$

1.1.6 Polidromia

1) *Studio della funzione* $w = z^{\frac{1}{2}}$. Si mostri che tale funzione è monodroma e analitica nel settore $0 < \arg z < 2\pi$. Si calcoli l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1 - i\epsilon, 0 < \epsilon \ll 1$ e, più in generale, della circonferenza $|z| = \text{cost}$ e del piano tagliato $0 < \arg z < 2\pi$. Si verifichi che la discontinuità della funzione attraverso il semi-asse reale positivo è: $\Delta(z^{\frac{1}{2}}) = -2\sqrt{r}$. Si mostri che i due rami della funzione sono ottenibili ruotando 2 volte intorno a $z = 0$. Si mostri che non si verificano altre discontinuità ruotando intorno ad ogni punto $z \neq 0$ e che perciò $z = 0$ è l'unico punto di diramazione (di ordine 1 della funzione). Si concluda che la funzione $w = z^{\frac{1}{2}}, 0 < \arg z < 2\pi$ è analitica in ogni dominio $\mathcal{D} \subset \{0 < \arg z < 2\pi\}$ e la sua derivata è $(z^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}$.

2) Mostrare che è necessario ruotare due volte intorno a $z = 0$ affinché $w = z^{1/2}$ riprenda il valore iniziale. Introdurre quindi due copie (due fogli) del piano complesso z tagliato da 0 a $+\infty$ e mostrare che le immagini dei due fogli secondo $w = z^{1/2}$ ricoprono tutto il piano complesso w . Unire i due fogli in modo da rispettare le proprietà di continuità di $w = z^{1/2}$, costruendo così la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = z^{1/2}$ e mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann (i cui due emisferi passanti per i poli coincidono con i due fogli).

3) Si studi la funzione $w = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}$ utilizzando la rappresentazione polare $z = z_0 + re^{i\theta}$. Si mostri, in particolare, come vengono generalizzati i risultati dei due esercizi precedenti.

4) *Studio della funzione* $w = ((z - z_1)(z - z_2))^{\frac{1}{2}}$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2 . Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma bipolare:

$$\sqrt{r_1 r_2} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}},$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \leq \theta_{1,2} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso il segmento (z_1, z_2) , con discontinuità $|\Delta((z - z_1)(z - z_2))^{\frac{1}{2}}| = 2\sqrt{r_1 r_2}$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tale segmento si rende la funzione, con le restrizioni $0 < \arg(z - z_{1,2}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore. Si mostri infine che la sua derivata in tale piano tagliato è: $(z - \frac{z_1+z_2}{2})((z - z_1)(z - z_2))^{-\frac{1}{2}}, 0 < \arg(z - z_{1,2}) < 2\pi$.

5) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = ((z - z_1)(z - z_2))^{\frac{1}{2}}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann.

6) *Studio della funzione* $w = ((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{\frac{1}{2}}$, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2, z_3, z_4 . Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma quadripolare:

$$\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2}},$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2} = z_3 + r_3 e^{i\theta_3} = z_4 + r_4 e^{i\theta_4}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \leq \theta_{1,2,3,4} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso i segmenti (z_1, z_2) e (z_3, z_4) , con discontinuità $|\Delta| = 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tali segmenti si rende la funzione, con le restrizioni $0 \leq \arg(z - z_{1,2,3,4}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore.

7) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = ((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{\frac{1}{2}}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann con una maniglia (o al toro).

8) *Studio della funzione* $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathcal{N}$. Si mostri che tale funzione è monodroma e analitica in $0 < \arg z < 2\pi$. Si calcoli l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1 - i\epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$ e, più in generale, della circonferenza $|z| = \text{cost}$ e del piano tagliato $0 < \arg z < 2\pi$. Si verifichi che la discontinuità della funzione attraverso il semi-asse reale positivo è: $\Delta(z^{\frac{1}{n}}) = r^{\frac{1}{n}}(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1)$. Si mostri che tutte le n determinazioni della funzione sono ottenibili ruotando n volte intorno a $z = 0$. Si mostri che non si verificano altre discontinuità ruotando intorno ad ogni punto $z \neq 0$ e che perciò $z = 0$ è l'unico punto di diramazione (di ordine $n - 1$ della funzione). Quante volte è necessario ruotare intorno a $z = 0$ affinché w riprenda il valore iniziale? Si concluda che la funzione $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathcal{N}$, $0 < \arg z < 2\pi$ è analitica in ogni dominio $\mathcal{D} \subset \{0 < \arg z < 2\pi\}$ e la sua derivata è $(z^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$.

9) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathcal{N}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann.

10) *Studio della funzione* $\text{Log } z$. Si ripetano le considerazioni svolte nel precedente esercizio, mostrando che tale funzione ha il solo punto di diramazione $z = 0$; che $\Delta(\text{Log } z) = 2\pi i$, $(\text{Log } z)' = 1/z$; che, ruotando nello stesso verso intorno a $z = 0$, $\text{Im } w$ continuerà a crescere e la funzione w non riprenderà più il valore iniziale (punto di diramazione di ordine infinito). Si mostri che sono necessari gli infiniti piani tagliati $2k\pi < \arg z < 2(k+1)\pi$ per ricoprire il piano complesso w (la superficie di Riemann di $\text{Log } z$ è quindi a infiniti fogli). Si disegni infine, nel piano z , il reticolo curvilineo ortogonale $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$.

11) Si mostri che la funzione $w = \text{Log } z$ trasforma il settore $0 < \alpha_1 < \arg z < \alpha_2 < 2\pi$ nella striscia $0 < \alpha_1 < v < \alpha_2 < 2\pi$ del piano $w = u + iv$.

12) *Studio della funzione* $\text{Log}(z-z_2) - \text{Log}(z-z_1) = \text{Log} \frac{z-z_2}{z-z_1}$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2 . Per fare ciò, si riscriva

la funzione nella forma bipolare:

$$\log \frac{r_2}{r_1} + i(\theta_2 - \theta_1)$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \leq \theta_{1,2} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso il segmento (z_1, z_2) , con discontinuità $\Delta = -2\pi i$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tale segmento si rende la funzione, con le restrizioni $0 < \arg(z - z_{1,2}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore. Se ne calcoli infine la derivata.

13) Mostrare che:

$$\begin{aligned} w = \sin^{-1} z &= -i \operatorname{Log} \left[iz + (1 - z^2)^{1/2} \right], \\ w = \cos^{-1} z &= -i \operatorname{Log} \left[z + (z^2 - 1)^{1/2} \right], \\ w = \tan^{-1} z &= \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{i-z}{i+z}. \end{aligned} \quad (14)$$

14) Trovare tutti i valori di: i) $\sin^{-1}(1/2)$, ii) $\sin^{-1}(2)$, iii) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$, iv) $\tan^{-1} 1$.

Risp. i) $\pi/6 + 2k\pi$ e $5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ii) $\pi/2 + 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$, iii) $\pi/6 + 2k\pi$ e $-\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, iv) $\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

15) Verificare che:

$$\begin{aligned} i) P \int_0^\infty \frac{dx}{x^p(1-x)} &= -\pi \cot p\pi, 0 < p < 1; \quad ii) \int_0^\infty \frac{1}{x^p(x+a)} = \frac{1}{a^{1/p} \sin(\pi p)}, a > 0, 0 < \\ p < 1; \quad iii) \int_0^\infty \frac{x^p}{x^2+a^2} dx &= \frac{\pi}{2a^{1-p} \cos(\pi p/2)}, a > 0, |p| < 1 \end{aligned}$$

16) Verificare che:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x+a)}^3} = \frac{3\pi}{8a^{5/2}}, \quad a > 0$$

17) Partendo da opportuni integrali del tipo $\int_0^\infty dx (\ln x)^n R(x)$, si mostri che:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{\pi}{2a}; \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}, \quad a > 0 \\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2} &= \ln 2; \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+3x+2} dx = \frac{(\ln 2)^2}{2} \\ \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+a^3} &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^2}; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{a}; \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2} dx = \frac{\ln a}{a}$$

**1.1.7 Analiticità di rappresentazioni integrali.
Prolungamento analitico di rappresentazioni integrali e di serie**

1) Sia $F(z)$ una funzione complessa di variabile complessa definita dall'integrale:

$$F(z) = \int_{\gamma} dt f(z, t),$$

con: i) f definita in $\mathcal{D} \times \gamma$, ii) f continua nella variabile z per $z \in \mathcal{D}$, $\forall t \in \gamma$,
iii) continua in $t \in \gamma$, $\forall z \in \mathcal{D}$.

Spesso γ è un contorno illimitato; siano allora $\{\gamma_n\}$ $\{L_n\}$ due successioni di intervalli di lunghezza finita tali che

$$\begin{aligned} \gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \dots \subset \gamma_n \subset \gamma_{n+1} \subset \dots, \quad \gamma_n \rightarrow \gamma, \quad n \rightarrow \infty, \\ \gamma_n = \cup_1^n L_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Mostrare allora che

$$\begin{aligned} F_n(z) &\equiv \int_{\gamma_n} dt f(z, t) = \sum_{k=1}^n f_k(z), \\ f_k(z) &\equiv \int_{L_k} dt f(z, t), \end{aligned} \quad (16)$$

e che

$$F_n(z) \rightarrow F(z) = \int_{\gamma} dt f(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Quindi la rappresentazione integrale è riconducibile alla rappresentazione in serie.

2) Definizione di uniforme convergenza dell'integrale e M -test di Weierstass.
Def. La rappresentazione integrale è uniformemente convergente $\forall z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ se la serie $\sum_n f_n(z)$ è uniformemente convergente in \mathcal{D} ; cioè se la successione di funzioni $F_n(z)$ converge uniformemente a $F(z)$ in \mathcal{D} . Si dimostri il seguente criterio di uniforme convergenza.

Se esiste $g(t) > 0$, $t \in \gamma$ tale che

$$\begin{aligned} |f(z, t)| &< g(t), \\ \int_{\gamma} g(t) |dt| &< \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

allora $F(z)$ converge uniformemente in \mathcal{D} .

3) Dimostrare il seguente teorema.

Sia $F(z) = \int_{\gamma} dt f(z, t)$ un integrale uniformemente convergente per $z \in \mathcal{D}$; allora:

a) se $f(z, t)$ è continua nella variabile z per $z \in \mathcal{D}$, $\forall t \in \gamma$, ed è continua in $t \in \gamma$, $\forall z \in \mathcal{D}$, ne segue che

a1) $F(z)$ è continua in \mathcal{D} .

a2) $\int_{\Gamma} F(z) dz = \int_{\gamma} dt \int_{\Gamma} dz f(z, t)$, con $\Gamma \subset \mathcal{D}$ contorno finito (scambio di integrali).

b) Se $f(z, t)$ è analitica in z , per $z \in \mathcal{D}$, $\forall t \in \gamma$ e continua in $t \in \gamma$, $\forall z \in \mathcal{D}$, allora $F(z)$ è analitica in \mathcal{D} .

4) Mostrare che l'integrale

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{t(z-1)} dt$$

converge assolutamente per $Re z < 1$ e uniformemente per $Re z \leq \rho < 1$, e che quindi la funzione $F(z)$ è analitica per $Re z < 1$.

5) Mostrare che la rappresentazione integrale di Laplace

$$L(z) := \int_0^{\infty} dt e^{-zt} f(t), \quad |f(t)| \leq M e^{\delta t}, \quad M > 0, \delta \in \mathcal{R}, \quad t > 0$$

è analitica per $Re z > \delta$. In particolare, se la funzione $f(t)$ è razionale, allora $L(z)$ è analitica per $Re z > 0$.

6) Data la funzione $\Gamma(z)$ di Euler, definita dalla rappresentazione integrale:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} dt$$

si mostri che:

i) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (si integri per parti n volte).

ii) $\Gamma(z)$ è analitica per $Re z > 0$. La rappresentazione integrale della γ fornisce quindi "il prolungamento" del fattoriale nel semi-piano $Re z > 0$.

7) Mostrare che l'integrale Gaussiano

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-zt^2}$$

è analitico per $Re z > 0$.

Prolungamento analitico

8) Data la serie geometrica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

- i) Si mostri che definisce una funzione analitica per $|z| < 1$.
 ii) Si calcoli la sua somma e si mostri che tale somma costituisce il prolungamento analitico di $f(z)$ per $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

9) Dato l'integrale $F(z) = \int_0^{\infty} e^{t(z-1)} dt$, che definisce una funzione analitica per $Re\ z < 1$, si calcoli esplicitamente l'integrale, ottenendone il prolungamento analitico per $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

10) La funzione $f(z)$ è analitica in \mathbb{C} , ad eccezione delle singolarità isolate $z_{\pm} = \pm\sqrt{2}i$, e ammette lo sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < \sqrt{2}. \quad (19)$$

Trovare un prolungamento analitico per cerchi (alla Weierstrass) che permette di calcolare $f(2.5)$.

11) *Prolungamento analitico dell'integrale di Laplace.* Dall'esercizio 5) sappiamo che l'integrale di Laplace

$$L(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-zt} R(t),$$

con $R(t)$ razionale, è analitico in $\mathcal{D} = \{-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$.

i) Sfruttare l'analiticità dell'integrando per introdurre l'integrale

$$L_{\varphi}(z) := \int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-xt} R(t) dt$$

mostrando che esso è analitico nel dominio $\mathcal{D}_{\varphi} = \{-\frac{\pi}{2} - \varphi < \arg z < \frac{\pi}{2} - \varphi\}$.

ii) Mostrare, usando il teorema dei residui, che

$$L(z) = L_{\varphi}(z) + 2\pi i \sum_j \text{Res}(e^{-zt} R(t), t_j), \quad z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\varphi}$$

dove $\{t_j\}$ sono i poli di $R(t)$ nel dominio $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_{\varphi}$.

Dedurre quindi che

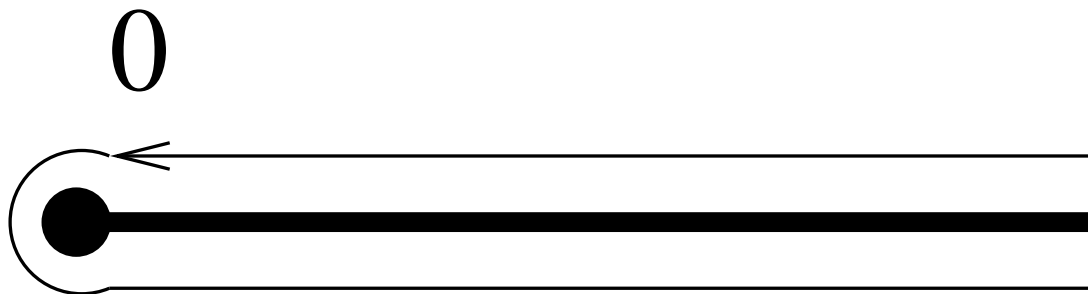
$$L_{\varphi}(z)$$

costituisce il prolungamento analitico dell'integrale di Laplace al di fuori del semipiano $Re\ z > 0$.

12) *Prolungamento analitico della Γ di Euler.* Data la rappresentazione integrale della $\Gamma(z)$, analitica per $Re\ z > 0$,

i) verificare la seguente identità

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)} \equiv G(z), \quad Re\ z > 0, \quad n \in \mathbb{N}_+, \quad (20)$$



ii) Mostrare che $G(z)$ è meromorfa con poli semplici in $0, -1, -2, \dots$. Mostrare inoltre che

$$\text{Res}(G(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

iii) dedurre che $G(z)$ costituisce il prolungamento analitico della $\Gamma(z)$.

Il prolungamento analitico della Γ può essere ottenuto nel seguente modo alternativo (più complicato).

Poichè che la limitazione $\text{Re } z > 0$ al dominio di analiticità della $\Gamma(z)$, trovata nell'esercizio 6) è dovuta essenzialmente alla singolarità dell'integrando in $t = 0$, siamo motivati ad introdurre l'integrale

$$H(z) = \int_{H_+} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

dove H_+ è il contorno in figura.

i) Mostrare che questo integrale converge uniformemente $\forall z$ appartenente a un qualunque compatto di \mathbb{C} , e che quindi $H(z)$ è una funzione intera (analitica per $z \in \mathbb{C}$).

ii) Usare il teorema dei residui per mostrare che

$$H(m) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad G(m) = 2\pi i \frac{(-1)^m}{(-m)!}, \quad m = 0, -1, -2, \dots$$

iii) Mostrare che:

$$H(z) = (e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z), \quad \text{Re } z > 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \frac{G(z)}{e^{2\pi iz} - 1}, \quad \text{Re } z > 0.$$

iii) Osservare che quest'ultima formula, che descrive il prolungamento analitico di $\Gamma(z)$ a tutto il piano complesso, ci dice che Γ è meromorfa, con poli semplici in $z = 0, -1, -2, \dots$, con residui

$$\text{Res}(\Gamma(z), m) = \frac{(-1)^m}{(-m)!}, \quad m = 0, -1, -2, \dots$$

13) *Il prolungamento analitico dell'integrale gaussiano* Dato l'integrale Gaussiano:

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\nu x^2},$$

analitico per $\text{Re } \nu > 0$ (si veda l'esercizio 7),

i) Calcolare esplicitamente tale integrale (assumendo $\nu > 0$ e usando il cambiamento di variabili $y = \sqrt{\nu}x$), verificando che:

$$I(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}, \quad \nu > 0$$

ii) Dedurre quindi che il prolungamento analitico dell'integrale gaussiano è dato dalla funzione analitica

$$I(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu^{1/2}}, \quad -\pi < \arg \nu < \pi.$$

iii) Mostrare che la discontinuità di tale funzione sull'asse reale negativo è:

$$\Delta I(\nu) := I(|\nu|e^{i\pi}) - I(|\nu|e^{-i\pi}) = -2i\sqrt{\frac{\pi}{|\nu|}}, \quad \nu < 0$$

iv) Calcolare $I(\nu)$ per $\nu = \mp ip$, $p > 0$, ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm ipx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \quad p > 0$$

e calcolare quindi gli integrali di Fresnel, rilevanti nella teoria della diffrazione, ottenendo:

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x dx = \int_0^{\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

14) Data la funzione $I(\nu, \mu)$, definita dall'integrale gaussiano generalizzato:

$$I(\nu, \mu) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu x^2 + \mu x}$$

i) mostrare che tale funzione è analitica nella variabile complessa ν nel semipiano $\text{Re } \nu > 0$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, ed intera in μ $\forall \nu$ nel semipiano $\text{Re } \nu > 0$.

ii) Mostrare che, per $\nu > 0$ e $\mu \in \mathcal{R}$, tale integrale vale:

$$I(\nu, \mu) = e^{\frac{\mu^2}{4\nu}} \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu(x-\frac{\mu}{2\nu})^2} = e^{\frac{\mu^2}{4\nu}} \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}}, \quad \nu > 0, \quad \mu \in \mathcal{R}$$

iii) Dedurre che la funzione complessa delle due variabili complesse μ e ν :

$$I(\nu, \mu) = \sqrt{\pi} \nu^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}}, \quad -\pi < \arg \nu < \pi, \quad \mu \in \mathcal{C}$$

costituisce il prolungamento analitico, in entrambe le variabili, dell'integrale gaussiano generalizzato.

iv) Verificare che la sua discontinuità sul semi-asse reale negativo è $\Delta = -2i\sqrt{\pi/|\nu|}e^{\frac{\mu^2}{4\nu}}$.

v) Calcolare $I(\nu, \mu)$ per $\nu = \gamma t$, $t > 0$, $\gamma > 0$ e $\mu = -ix$, $x \in \mathbb{R}$, ottenendo:

$$T(x, t) = \int_{\mathbb{R}} d\xi e^{-\gamma t \xi^2 - ix\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma t}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$T(x, t)$, soluzione dell'equazione del calore, descrive, ad esempio, l'evoluzione, nel tempo $t \geq 0$, della temperatura in una sbarra metallica infinitamente estesa (da $x = -\infty$ a $x = +\infty$), se la temperatura iniziale è infinitamente concentrata in $x = 0$.

vi) Calcolare $I(\nu, \mu)$ per $\nu = \mp it$, $t > 0$ e $\mu = -ix$, $x \in \mathcal{R}$, ottenendo:

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} d\xi e^{\pm it \xi^2 - ix\xi} = \pi e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\mp i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

$\psi(x, t)$, soluzione dell'equazione di Schrödinger non stazionaria per la particella libera, descrive l'evoluzione, nel tempo $t \geq 0$, di un pacchetto d'onde infinitamente localizzato, al tempo $t = 0$, in $x = 0$.

1.1.8 Funzioni armoniche in Fisica

1) Mostrare che, se $\phi(x, y)$ è armonica in un dominio \mathcal{D} , allora si hanno le seguenti implicazioni.

i) $\phi(x, y)$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica

$$\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Introdotta il campo vettoriale

$$\mathbf{v} = \nabla\phi(x, y),$$

si mostri che:

ii)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\left(\frac{d\Phi(z)}{dz}\right) \\ \operatorname{Im}\left(\frac{d\Phi(z)}{dz}\right) \end{pmatrix},$$

iii) \mathbf{v} è un campo a divergenza nulla in \mathcal{D} (assenza di sorgenti in \mathcal{D}) ed è inoltre conservativo in \mathcal{D} (se \mathcal{D} è semplicemente connesso).

iv) Dopo aver verificato che anche il viceversa è vero (se \mathbf{v} è un campo conservativo e a divergenza nulla in \mathcal{D} , allora il potenziale di \mathbf{v} esiste ed è armonico in \mathcal{D}), si deduca che i campi gravitazionale, elettrico, magnetico, e il campo di velocità di un fluido ideale, in condizioni di simmetria piana (indipendenza dalla variabile z), in assenza di sorgenti in \mathcal{D} e in condizioni stazionarie, sono descritti da un potenziale $\phi(x, y)$ armonico in \mathcal{D} .

vi) Si osservi infine che le curve $\phi(x, y) = cost$ sono le curve equipotenziali, mentre le curve $\psi(x, y) = cost$ sono le linee di flusso del campo.

2) Mostrare che la funzione $\Phi(z) = v_0 e^{-i\alpha z}$, $v_0 > 0$, analitica in \mathcal{C} , descrive un campo uniforme $\mathbf{v} = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$.

3) Usando il risultato dell'esercizio 16 e la trasformazione tra settori, si determini i) la funzione analitica che descrive il campo elettrico generato da due conduttori piani allo stesso potenziale che delimitano il settore di angolo $\pi/2$. Si calcolino poi le curve equipotenziali, le linee di flusso e si disegni tali linee. Si calcoli infine il campo elettrico.

Risp. i) $-iE_0 z^2$; ii) $\phi = 2E_0 xy = cost$, $\psi = E_0(y^2 - x^2) = cost$; iii) $\mathbf{E} = (2E_0 y, 2E_0 x)$

4) Si generalizzi l'esercizio precedente al caso del settore di angolo $\frac{\pi}{\nu}$.

5) Usando il risultato dell'esercizio 16 e la trasformazione tra settori, si determini la funzione analitica che descrive il moto di un fluido ideale all'interno del quadrante. Si ottenga quindi l'equazione delle linee di flusso, si disegni tali linee e si verifichi che i bordi del settore sono due linee di flusso degeneri. Si calcoli infine il campo di velocità del fluido.

Risp. $\Phi(z) = v_0 z^2$; $\phi = v_0(x^2 - y^2)$, $\psi = 2v_0 xy$; $\mathbf{v} = (2v_0 x, -2v_0 y)$

6) Si generalizzi l'esercizio precedente al caso del settore di angolo $\frac{\pi}{\nu}$.

7) Si mostri che la funzione $\Phi(z) = v_\infty(z + \frac{a^2}{z})$, $a > 0$, è analitica per $z \neq 0$. Si esprimano $\phi = Re \Phi$ e $\psi = Im \Phi$ in coordinate polari e si mostri che l'asse reale e la circonferenza $|z| = a$ sono le linee di flusso $\psi = 0$. Si deduca quindi che la funzione $\Phi(z)$ descrive il moto di un fluido ideale che, all' ∞ , si muove di moto uniforme con velocità $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0)$ e, al finito, aggira l'ostacolo cilindrico $|z| \leq a$. Si calcoli il campo di velocità (in coordinate polari). Si verifichi infine che i punti di ristagno del fluido sono $r = a$, $\theta = 0, \pi$.

Risp. $\mathbf{v} = (v_\infty(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta), -v_\infty \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta)$

8) Si costruisca la funzione analitica che descrive il moto di un fluido ideale con le seguenti proprietà: è uniforme all' ∞ con velocità $\mathbf{v}_\infty = (0, v_\infty)$ e al finito gira intorno ad un ostacolo circolare di raggio $r_0 = 2$ centrato nel punto $(1, 0)$. Si determini il campo di velocità.

Risp. i) $\Phi(z) = -iv_\infty(z - 1 + \frac{4}{z-1})$; ii)

9) Si mostri che, se $f(z)$ è una funzione analitica in $\mathcal{D} \supset \{|z| \leq a\}$, allora la funzione $\overline{f(a^2/\bar{z})}$ è analitica in $|z| > a$. Si verifichi inoltre che la funzione

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f(a^2/\bar{z})}$$

i) è analitica in $\mathcal{D} - \{|z| \leq a\}$.

ii) per $|z| = a$, $\Phi(z) = f(z) + \overline{f(z)} \in \mathcal{R}$, e quindi $\psi = 0$. Si deduca quindi che la funzione $\Phi(z)$ descrive il moto di un fluido ideale in $\mathcal{D} - \{|z| \leq a\}$ che aggira l'ostacolo rappresentato dal cilindrico $|z| \leq a$ (teorema di Milne-Thomson).

10) Come applicazione del teorema di Milne-Thomson del precedente esercizio, si mostri che la funzione

$$\Phi(z) = v_\infty [z^2 + (\frac{a^2}{z - z_0} + \bar{z}_0)^2]$$

descrive il moto di un fluido perfetto all'interno del primo quadrante, in presenza di ostacolo cilindrico di raggio a e centro in z_0 contenuto nel quadrante.

11) Data la funzione $\Phi(z) = k \text{Log } z = \phi + i\psi$, $k \in \mathcal{R}$; si mostri che $\mathbf{v} = \nabla\phi$ descrive un campo vettoriale radiale che può essere interpretato

i) come il campo elettrico generato da un filo rettilineo uniformemente carico;

ii) come il campo di velocità di un fluido ideale generato da una sorgente.

Il campo è uscente se $k > 0$ (carica positiva o rubinetto); è entrante se $k < 0$ (carica negativa o pozzo).

12) Data la funzione $\Phi(z) = -ik \text{Log } z = \phi + i\psi$, $k \in \mathcal{R}$; si mostri che $\mathbf{v} = \nabla\phi$ descrive ora un campo vettoriale circolare che può essere interpretato

i) o come il campo elettrico generato da due lastre di materiale conduttore a potenziali diversi, che intersecano il piano (x,y) perpendicolarmente, lungo due raggi qualsiasi;

ii) o come il campo magnetico generato da un filo di conduttore percorso da corrente elettrica;

iii) o come il vortice di un fluido ideale. Il verso è antiorario se $k > 0$, (corrente uscente dal foglio) e orario per $k < 0$ (corrente entrante).

13) Si mostri che la funzione $\Phi(z) = q(\text{Log}(z - z_0) - \text{Log } z)$, $q \in \mathcal{R}^+$ descrive

i) il campo elettrico generato da due fili uniformemente carichi di carica opposta, passanti per 0 e z_0 ;

ii) un fluido ideale in presenza di una sorgente in z_0 e di un pozzo in 0 .

Si disegnano le linee di flusso di tale campo e si determini il campo vettoriale in tutti i punti del piano diversi da 0 e z_0 .

14) Si mostri che, per $z_0 \rightarrow 0$ e $|z_0|q \rightarrow k$, la funzione Φ dell'esercizio precedente ha il seguente limite:

$$\Phi(z) \rightarrow -\frac{ke^{i\arg z_0}}{z}$$

Si deduca che la funzione monodroma $\frac{ke^{i\arg z_0}}{z}$ rappresenta un dipolo piano centrato in $z = 0$ e il cui asse forma con l'asse reale l'angolo $\arg z_0$. Si scriva

l'equazione delle linee di flusso del dipolo (in coordinate polari) e si disegni tali linee.

15) Si determini i) la funzione analitica che descrive il campo elettrico generato da due fili rettilinei indefiniti uniformemente carichi, perpendicolari al piano (x, y) , e passanti uno per l'origine e l'altro per il punto $(0, 1)$. ii) Si calcoli il campo elettrico \mathbf{E} in ogni punto del piano (x, y) .

Risp. i) $\Phi(z) = \lambda_1 \text{Log}(z - i) + \lambda_2 \text{Log} z$, ii) $\mathbf{E} = \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \cos \gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \gamma_2, \frac{\lambda_1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \sin \gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \gamma_2 \right)$, $\gamma_1 = \tan^{-1} \frac{y-1}{x}$, $\gamma_2 = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

16) Si faccia uso della funzione logaritmo complessa per determinare la funzione $\phi(x, y)$, armonica nel settore di angolo α , che descrive il potenziale elettrostatico generato da due conduttori piani a potenziali diversi V_1 e V_2 che delimitano il settore. Si calcolino infine le curve equipotenziali, le linee di flusso del campo elettrico, il campo elettrico e la distribuzione di carica sui conduttori.

Risp. i) $\Phi = -i \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \text{Log} z + V_1$, ii) $\mathbf{E} = \left(-\frac{V_2 - V_1}{\alpha} \frac{\sin \theta}{r}, \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \frac{\cos \theta}{r} \right)$

2 ESEMPI DI COMPITI D'ESONERO E SCRITTI PROPOSTI

2.1 1^o Compito d'Esonero del 28/01/03; AA 2002/03

- 1) [4/30] Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana
i) $(2 - i\sqrt{3})^2$; ii) $3e^{\frac{3}{2}\pi i}$; iii) $2e^{\frac{2}{3}\pi i}$; iv) $\sqrt{3}e^{\frac{5}{6}\pi i}$
- 2) [4/30] Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare
i) $2 + 2i$; ii) $1 + i\sqrt{3}$; iii) $3 - i\sqrt{3}$
- 3) [3/30] Dimostrare che $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2|$, $\forall z_{1,2} \in \mathbb{C}$
- 4) [5/30] Determinare tutti i valori di:
i) $\text{Log}(-3)$; ii) $(-3)^{\frac{1}{3}}$; iii) $(-2i)^{\frac{1}{2}}$
- 5) [5/30] Data la funzione complessa: $f = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - \alpha xy^2)$, determinare le regioni del piano complesso in cui è continua, derivabile e analitica al variare del parametro reale α . Nel dominio di analiticità, si scriva f come funzione della sola z e si calcoli $f'(z)$.
- 6) [5/30] Dire se le seguenti funzioni reali sono la parte reale (o immaginaria) di funzioni analitiche. Nel caso affermativo, assumendo che siano la parte reale $u(x, y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .
i) $-4xy$; ii) $\sin(x^2 - y^2) \sinh(2xy)$; iii) $\tan^{-1}\left(\frac{y+2}{x-1}\right)$
- 7) [6/30] Si studi la funzione $f = (z - z_0)^{\frac{1}{3}}$. In particolare: i) Si mostri che è ploidroma in z_0 . ii) Si calcoli la sua discontinuità attraverso la retta $\text{Im } z = \text{Im } z_0$, scegliendo il ramo $0 \leq \arg(z - z_0) < 2\pi$. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 la funzione riprende il suo valore di partenza? iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto. (Suggerimento: si usi, per i punti i)-iv), la rappresentazione polare: $z - z_0 = re^{i\theta}$)
- 8) [7/30] Data la funzione $w = z^4$, si stabilisca in quali regioni del piano complesso è continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. In quale dominio realizza una trasformazione conforme? Qual'è l'immagine del primo quadrante $0 < \arg z < \pi/2$? Si scriva le equazioni $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ in coordinate polari e si disegni le corrispondenti linee di livello nel settore $0 < \arg z < \pi/4$.
- 9) [6/30] Si determini la funzione analitica $\Phi(z) = \phi + i\psi$ che descrive il moto di un fluido ideale in un settore di angolo $\pi/3$. Si ottengano le equazioni delle linee equipotenziali $\phi = \text{cost}$ e delle linee di flusso $\psi = \text{cost}$ e si disegni tali linee. Si determini infine il campo di velocità. In quali parti del settore il campo di velocità trovato risulta più lontano dalla realtà (in presenza, cioè, di attrito)?

2.2 2⁰ Compito d'Esonero del 25/02/03; AA 2002/03

1) [6/30] Si calcolino i seguenti integrali del tipo $I = \int_{\gamma} f(z) dz$:

i) $f_1(z) = |z|$, $\gamma =$ arco di cfr da $2i$ a -2 ; ii) $f_2(z) = \bar{z}$, $\gamma =$ spezzata $0-1-(1+i)$.

2) [6/30] Come applicazione del teorema di Cauchy, si calcoli il seguente integrale

$$\int_{\gamma} dz \frac{1-2z^2}{z},$$

dove γ è un contorno qualsiasi che congiunge gli estremi indicati, senza passare per l'origine e senza girare intorno ad essa. Per il calcolo dell'integrale si usi sia il teorema della primitiva, sia un contorno conveniente.

3) [4/30] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = 1/(z-2)$ e la si sviluppi in serie di potenze con centro $z_0 = 1$ in tutto il piano complesso, indicando i raggi di convergenza di tali sviluppi.

4) [6/30] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = e^{2z}/z^2$ in \mathcal{C} e all' ∞ . La si sviluppi in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e si calcoli il corrispondente residuo.

5) [6/30] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = 1/\cos z$ in \mathcal{C} e all' ∞ e, se isolate, si calcolino i corrispondenti residui.

6) [5/30] Sia γ_R un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R . Si mostri che, per la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+1}$, vale la proprietà:
 $zf(z) \rightarrow 0$, $|z| \rightarrow \infty$, $|z| \rightarrow 0$ uniformemente su γ_R ; e che quindi

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow 0$$

7) [14/30] Si usi il teorema dei residui per valutare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-4ix}}{x^2 + 1}; \quad I_3 = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - 1}, \quad k \in \mathcal{R}.$$

2.3 3^o Compito d'Esonero del 21/03/03; AA 2002/03

1) [5/30] Si mostri che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx} [\theta(x)f(x)] = f(\infty)$$

2) [5/30] Dato l'integrale: $2\pi \int_0^{\infty} dx \delta(x^2 - \pi^2) \cos x$, a quale dei seguenti valori è uguale? La risposta va motivata.

i) -1; ii) 0; iii) 2

3) [9/30] Si mostri che:

$$\int_0^{\infty} \delta(\cos x) e^{-x} dx = \frac{1}{2 \sinh(\pi/2)}, \quad \int_0^4 \frac{d}{dx} [\delta(x^2 - 1)] \varphi(x) dx = -\varphi'(1)/2$$

4) [6/30] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y)I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(ik+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$ e si verifichi che $R(x) = \theta(x-1)e^{-(x-1)}$.

5) [5/30] Dato l'operatore $L = d/dt + 2$ e la distribuzione $g(t) = \theta(t)e^{-\gamma t}$, si calcoli $Lg(t)$ e si determini il valore di γ per il quale $g(t-t')$ è una funzione di Green dell'operatore L .

6) [18/30] Si consideri la seguente funzione $g(x)$:

$$g(x) = \int_{\gamma} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{4-k^2}, \quad x \in \mathcal{R}$$

dove γ è un contorno da $-\infty$ a ∞ da specificare ulteriormente per evitare le singolarità dell'integrando.

i) Si determini l'operatore differenziale di cui $g(x-x')$ è la funzione di Green fondamentale.

ii) Si calcoli $g(x)$ nei seguenti tre casi.

a) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita le singolarità sull'asse reale da sotto.

b) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita le singolarità sull'asse reale da sopra.

c) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ inteso nel senso del valor principale.

2.4 Scritto del 27/03/03; AA 2002-03

1) [5/30] Determinare tutti i valori di:

i) $\text{Log}(i)$; ii) $(-1)^{\frac{1}{3}}$

2) [5/30] Dire se la funzione $e^{3x} \sin 3y$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica. Nel caso affermativo, assumendo che sia la parte reale $u(x, y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

3) [6/30] Si determini la funzione analitica $\Phi(z) = \phi + i\psi$ che descrive il moto di un fluido ideale in un settore di angolo $\pi/4$. Si ottengano le equazioni delle linee equipotenziali $\phi = \text{cost}$ e delle linee di flusso $\psi = \text{cost}$ e si disegnino tali linee. Si determini infine il campo di velocità. In quali parti del settore il campo di velocità trovato risulta più lontano dalla realtà (in presenza, cioè, di attrito)?

4) [6/30] Studiare le singolarità della funzione $f(z) = e^{-z}/z^4$ in \mathcal{C} e all' ∞ . Svilupparla in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e calcolare il corrispondente residuo.

5) [14/30] Si usi il teorema dei residui per valutare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + 2}; \quad I_3 = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - 3}, \quad k \in \mathcal{R}.$$

6) [5/30] Dato l'integrale $\int_0^{\pi/2} dx \delta(x^2 - \pi^2/16) \tan x$, a quale dei seguenti numeri è uguale? i) $2/\pi$; ii) $\pi/2$; iii) 0; iv) 1. (La risposta va motivata)

7) [6/30] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y)I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(k^2+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$, e si verifichi che $R(x) = e^{-|x-1|}/2$.

8) [18/30] Si consideri la seguente funzione $g(x)$:

$$g(x) = \int_{\gamma} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{ik(2+ik)}, \quad x \in \mathcal{R}$$

dove γ è un contorno da $-\infty$ a ∞ da specificare ulteriormente per evitare la singolarità dell'integrando sull'asse reale.

i) Si determini l'operatore differenziale del quale $g(x-x')$ è la funzione di Green fondamentale.

ii) Si calcoli $g(x)$ nei seguenti casi.

a) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita la singolarità sull'asse reale da sotto.

b) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita la singolarità sull'asse reale da sopra.

c) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ inteso nel senso del valor principale.

2.5 1^o Compito d'Esonero del 29/01/04; AA 2003/04

1) ([3/30] per uno dei due; [5/30] per entrambi) Passare dalla forma cartesiana a quella polare, o viceversa.

i) $3e^{i\pi/4}$; ii) $2 - i2\sqrt{3}$

2) ([3/30] per uno dei due; [5/30] per entrambi) Determinare, in forma cartesiana, tutti i valori di:

i) $\text{Log}(-2i)$; ii) $(3i)^{1/3}$

3) ([5/30]) i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = y^3 - \alpha x^2 y$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Quindi si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

4) ([6/30] per uno dei due; [9/30] per entrambi) *Studio delle funzioni*: $f_1 = z^{1/5}$; $f_2 = \text{Log}(z - i)$. i) Si mostri che sono polidrome e si individui i rispettivi punti di diramazione z_0 . ii) Si calcoli la loro discontinuità attraverso la retta $\arg(z - z_0) = 0$, scegliendo il ramo $0 \leq \arg(z - z_0) < 2\pi$. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 le funzioni riprendono il loro valore di partenza? iv) Come tagliare il piano complesso per renderle analitiche? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto. (Suggerimento: si usi, per i punti i)-iv), la rappresentazione polare: $z - z_0 = re^{i\theta}$).

5) ([7/30]) Data la funzione $w = z^3$, i) si stabilisca in quali regioni del piano complesso è monodroma, continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. ii) Si costruisca l'immagine del dominio $\mathcal{D} = \{0 < \arg z < \pi/2, 1 < |z| < 2\}$ iii) Si scrivano le equazioni $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ in coordinate polari e si disegnino le corrispondenti curve di livello nel settore $0 < \arg z < \pi/3$.

6) ([4/30] per uno dei due; [6/30] per entrambi) Data la funzione $f(z) = |z|^2$, si calcoli $\int_{\gamma} dz f(z)$ lungo i seguenti contorni. a) γ_1 è l'arco di circonferenza di raggio 1 da $z_0 = 1$ a $z_1 = i$. b) γ_2 è la spezzata determinata dai punti: $1, 0, i$.

7) ([6/30]) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.

i) Dare la definizione di funzione derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{C}$ e quella di funzione analitica in un dominio \mathcal{D} .

ii) Mostrare che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in \mathcal{D} , allora le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y esistono in \mathcal{D} e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann.

2.6 2⁰ Compito d'Esonero del 26/02/03; AA 2003/04

1) ([5/30]) Si calcoli il seguente integrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-1}$, dove γ è un qualunque contorno da 2 a $1+i$ che gira intorno a 1 n volte in senso antiorario.

2) ([5/30]) Si sviluppi la funzione $1/(z-3)$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 0$, in tutto il piano complesso. Specificare se gli sviluppi sono di Taylor o di Laurent e determinare i loro raggi di convergenza..

3) ([6/30]) Si sviluppi la funzione $z^{-3}e^{-z}$ nelle serie di potenze centrate in 0 e ∞ ; si discuta inoltre il carattere delle singolarità in 0 e ∞ e si calcolino i corrispondenti residui.

4) ([4/30] per i); [5/30] per ii) Individuare le singolarità delle seguenti funzioni nel piano complesso esteso e calcolare i residui corrispondenti alla sola singolarità z_0 indicata.

i) $\frac{\sin z}{z-\pi/2}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$; ii) $\frac{z}{\cos z}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$

5) ([6/30]) Si dimostri il seguente risultato. Se una funzione è analitica nel disco $\mathcal{D} = \{|z - z_0| < R\}$, essa è sviluppabile in serie di Taylor centrata in z_0 e di raggio di convergenza R .

6) ([5/30] per i); [6/30] per ii). Si usi il teorema dei residui per calcolare i seguenti integrali.

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+2} dx$, $k \in \mathcal{R}$; ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-2i)}$

2.7 3^o Compito d'Esonero del 18/03/04; AA 2003/04

1) ([6/30]) Calcolare il prodotto di convoluzione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x')H(x')dx'$$

sapendo che le trasformate di Fourier di $G(x)$ e $H(x)$ sono rispettivamente $\hat{G}(k) = 1/(k-i)$ e $\hat{H}(k) = ie^{2ik}$.

2) ([5/30]) Data la successione di funzioni $bne^{-2n|x|}$, si determini per quale valore di b essa è una buona rappresentazione della $\delta(x)$ nel limite $n \rightarrow \infty$, e perchè?

3) ([4/30] per i), [2/30] per ii), [3/30] per iii))

i) Si verifichi che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x > 0, \\ -3, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (22)$$

ammette il seguente sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

ii) Disegnare (e confrontare) i grafici di $g(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale.

iii) Utilizzare la formula di Parseval ed il risultato i) per ottenere la somma di un'opportuna serie numerica.

4) ([5/30]) Si calcoli l'integrale:

$$\int_0^{\pi} \delta(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) \sin x dx$$

5) ([3/30] per i); [4/30] per ii)) i) Si costruisca la funzione di Green $G(t)$ fondamentale dell'operatore $\frac{d^2}{dt^2} + 4$ nella rappresentazione integrale di Fourier.

ii) Si usi il teorema dei residui per calcolare $G(t)$, usando il contorno da $-\infty$ a ∞ che passa sopra alle eventuali singolarità dell'integrando sull'asse reale.

6) ([5/30]) Si mostri che $(x^2\theta(-x))' = 2x\theta(-x)$ nel senso delle distribuzioni (cioè sotto integrale e usando una funzione di prova).

2.8 Scritto del 20/03/04; AA 2003/04

1) [4/30] Determinare tutti i valori di:

i) $\text{Log}(-2)$; ii) $i^{\frac{1}{3}}$

2) [5/30] Determinare il parametro γ tale che la funzione $u(x, y) = x^4 + y^4 - \gamma x^2 y^2$ possa essere interpretata come la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. Costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f(z) = u + iv$ come funzione della sola z .

3) [5/30] Individuare le singolarità della funzione $f(z) = e^{z^2}/z^3$ in \mathcal{C} e all' ∞ . Sviluppare la funzione in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e calcolare i corrispondenti residui.

4) [8/30] Calcolare i seguenti integrali usando il teorema dei residui:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ipx}}{x^2 + 4}, \quad p \in \mathcal{R}.$$

5) [4/30] Si calcoli l'integrale $\int_0^{2\pi} dx \delta(x^2 - \pi^2) \cos x$.

6) [5/30] Si determini la funzione di Green fondamentale $G(t-t')$ dell'operatore $L = d/dt + 2$ e la si calcoli usando il teorema dei residui.

7) [5/30] Sviluppare la funzione $|x|$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; confrontare i grafici di $|x|$ e della somma della serie su tutto l'asse reale.

2.9 Scritto del 15/09/04; AA 2003/04

1) [4/30] Determinare tutti i valori di:

i) $\text{Log}(-2)$; ii) $(-3)^{\frac{1}{3}}$

2) [4/30] Dire se la funzione $e^{-y} \cos x$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica. Nel caso affermativo, assumendo che sia la parte reale $u(x, y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

3) [5/30] Si studi le singolarità della funzione $f(z) = e^{z^2}/z$ in \mathcal{C} e all' ∞ . La si sviluppi in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e si calcoli i corrispondenti residui.

4) [10/30] Calcolare gli integrali:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}; \quad I_2(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ipx}}{x^2 + 9}, \quad p \in \mathcal{R}$$

usando il teorema dei residui.

5) [4/30] Si calcoli l'integrale $\int_0^{\pi/2} dx \delta(x^2 - \pi^2/9) \cos x$.

6) [5/30] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y)I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(ik+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$, e si verifichi che $R(x) = \theta(x-1)e^{-(x-1)}$.

7) [6/30] Sviluppare la funzione $-2\theta(-x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; confrontare il grafico di questa funzione con quello della somma della serie su tutto l'asse reale.

2.10 Test del 28/01/05; AA 2004/05

1) ([3/30] per uno dei due; [5/30] per entrambi) Passare dalla forma cartesiana a quella polare, o viceversa.

i) $5e^{-i\pi/4}$; ii) $3 - i\sqrt{3}$

2) ([3/30] + [3/30]) Determinare tutti i valori di:

i) $\text{Log}(1 + i)$; ii) $(-2i)^{1/3}$

3) ([4/30]) Individuare in quali regioni del piano complesso \mathbb{C} la funzione $f = 3x^2y + ixy^2$ è continua, derivabile e analitica.

4) ([5/30]) i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = x(x+2) - \alpha y^2$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

5) ([6/30]) Data la funzione $w = z^3$, i) si stabilisca in quali regioni del piano complesso è monodroma, continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. ii) Si costruisca l'immagine del dominio $\mathcal{D} = \{0 < \arg z < \pi/2, 1 < |z| < 2\}$ iii) Si scrivano le equazioni $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ in coordinate polari e si disegnino le corrispondenti curve di livello nel settore $0 < \arg z < \pi/3$.

2.11 Esonero del 10/02/05; AA 2004/05

1) ([12/30])

Utilizzando il teorema della primitiva, calcolare l'integrale

$$\int_2^0 \frac{z^2 - 3}{z - 1} dz$$

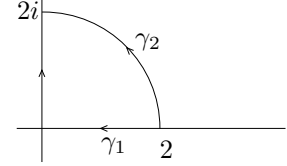
lungo un qualunque percorso γ_1 che non giri intorno al punto $z = 1$ e lungo un

2) ([7/30]) percorso γ_2 che giri intorno a $z = 1$ una volta in senso antiorario.

Calcolare l'integrale lungo γ_1 usando un contorno parametrizzabile in maniera conveniente. Si suggerisce di riscrivere $z^2 - 3$ nella forma $(z - 1)^2 + \alpha(z - 1) + \beta$ per opportuni α e β . $\int_2^{2i} \frac{dz}{|z|}$

sia lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2, 0) \cup (0, 2i)$),

sia lungo l'arco γ_2 di raggio 2, nonché lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$.



3) ([5/30])

Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z) = f(z)$.

4) ([3/30] per uno dei due, [5/30] per entrambi)

Passare dalla forma polare a quella cartesiana e viceversa

$$3e^{-i\pi/6}; \quad 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$$

5) ([3/30]+[3/30])

Determinare tutti i valori di

$$\text{Log}(4 - 4i); \quad (-1 - i)^{1/3}$$

6) ([5/30])

i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = 3x^2y + \alpha y^3$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

2.12 Test dell' 01/03/05; AA 2004/05

1) ([4]) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+4)!}{(2n+1)^n} (z-2)^n.$$

2) ([5]) Sviluppare la funzione

$$\frac{1}{3z-i}$$

in serie di potenze centrate in $z_0 = 1$ in tutto il piano complesso e calcolarne i raggi di convergenza.

3) ([6]) Trovare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{z^2 - \pi^2}{\sin z}$$

e discuterne la natura. Calcolare infine i residui relativi alle singolarità isolate.

4) ([5]) Trovare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{e^{-2z}}{z^3};$$

costruire lo sviluppo di Laurent intorno ad esse e calcolare i residui relativi alle singolarità al finito.

2.13 Esonero del 15/03/05; AA 2004/05

1) ([4]) Si sviluppi la funzione $\frac{1}{z^2+4}$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 2i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza.

2) ([4]) Si usi il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\oint_{\gamma} z^2 e^{3/z} dz,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso, al finito, che gira intorno all'origine una volta, in senso antiorario.

3) ([6]) Si dimostri il seguente teorema (di Laurent):

Una funzione analitica in una corona circolare D di centro z_0 e raggi r ed R è sviluppabile in serie di potenze positive e negative, secondo la formula

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ove γ è un'arbitraria curva chiusa interna alla corona, e lo sviluppo è uniforme convergente in ogni corona chiusa contenuta in D .

4) [5] *Studio della funzione: $f(z) = z^{\frac{1}{5}}$.* i) Si mostri che è ploidroma e si individuino i suoi punti di diramazione z_0 in \mathbb{C} . ii) Si calcoli la sua discontinuità, girando una volta intorno a z_0 . iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 la funzione riprende il suo valore di partenza? E perchè? iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto in tale piano tagliato. vi) La superficie di Riemann associata a $z^{\frac{1}{5}}$ è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann o al toro?

5) ([5]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6x^2}{(x^2 + 4)^2(x - i)} dx.$$

6) ([5]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{x - 2i} dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

7) ([5]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} dx.$$

2.14 Scritto del 30/03/05; AA 2004/05

1) ([5/30]) Determinare per quali valori del parametro a la funzione $u(x, y) = x^2 + ay^2 + 2y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in \mathbb{C} . Per quei valori di a costruire la parte immaginaria e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

2) ([6/30], esercizio obbligatorio) Si introduca la nozione di residuo di una funzione in un punto e si dimostri il seguente teorema (dei residui):

Se $f(z)$ è una funzione analitica nel dominio \mathcal{D} e continua su $\partial\mathcal{D}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{D}$, allora

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k),$$

dove l'integrale è percorso in senso antiorario.

3) ([5/30]) Studiare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{z^2 - \pi^2/4}{\cos z}$$

e, se isolate, calcolarne i corrispondenti residui.

4) ([5/30]) Sviluppare la funzione $1/(z^2 + a^2)$, $a > 0$, in serie di potenze centrate in $z_0 = ia$ in tutto il piano complesso, individuando i rispettivi raggi di convergenza.

5) ([5/30]) Studio della funzione $\ln(z - 1)$.

i) Si mostri che è polidroma e si individuino i suoi punti di diramazione z_0 in \mathbb{C} . ii) Si calcoli la sua discontinuità, girando una volta intorno a z_0 . iii) La funzione riprende il suo valore di partenza dopo un certo numero di giri nello stesso verso, intorno a z_0 ? Giustificare la risposta. iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto in tale piano tagliato.

6) ([5/30] per un integrale, [9/30] per due, [13/30] per tre).

Usando il teorema dei residui, calcolare gli integrali:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx\sqrt{x}}{x^2 + 4}, \quad I_2 = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-2)(x^2+9)}, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{ix}}{(x^2+4)^2}$$

2.15 Scritto del 14/09/05; AA 2004/05

1) ([5/30]) Determinare per quali valori dei parametri a e n la funzione $u(x, y) = y^3 + ax^n y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in \mathbb{C} . Per quei valori di a e n costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

2) ([6/30]; **esercizio obbligatorio**, [-3/30] se non svolto) Si enunci e si dimostri il teorema di Laurent.

3) ([6/30] ([2/30]+[2/30]+[2/30])) i) Studiare le singolarità della funzione $(z(z-1))^{1/2}$ nel piano complesso esteso $\bar{\mathbb{C}}$. ii) Dopo aver individuato i punti di diramazione, tagliare il piano complesso per renderla monodroma. iii) Studiare la superficie di Riemann associata a tale funzione e stabilire se tale superficie è topologicamente equivalente ad una sfera o ad un toro.

4) ([5/30]+[5/30]) Calcolare i seguenti integrali usando il teorema dei residui.

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{(x^2+9)^2}, \quad k \in \mathbb{R}; \quad ii) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+5)}$$

5) ([6/30]) Sviluppare la funzione $\frac{1}{z^2+2}$ in serie di Laurent centrate in $z_0 = i\sqrt{2}$, in tutto il piano complesso, determinandone anche i raggi di convergenza.

6) ([6/30] ([2/30]+[2/30]+[2/30])) i) Studiare le singolarità della funzione $f(z) = e^{-z^2} z^{-3}$ nel piano complesso esteso $\bar{\mathbb{C}}$. ii) Svilupparla in serie di Laurent centrate in $z_0 = 0$ e $z_0 = \infty$. iii) Calcolare i residui della funzione nei punti singolari.

2.16 1° esonero del 07/02/06; AA 2005/06

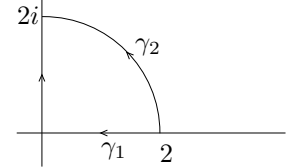
1) ([3]+[3])

Utilizzando il teorema della primitiva, i) calcolare l'integrale

$$\int_0^{2i} \frac{z^2 - 3iz - 4}{z - i} dz$$

2) ([3]+[2]+[1]) Calcolare l'integrale lungo qualunque percorso γ_1 (disegnarlo!) che non giri intorno al punto $z = i$ e qualunque percorso γ_2 (disegnarlo!) che giri intorno a $z = i$ una volta in senso antiorario. Si suggerisce di riscrivere $z^2 - 3iz - 4$ nella forma $(z - i)^2 + \alpha(z - i) + \beta$ per opportuni α e β .

- i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2, 0) \cup (0, 2i)$),
- ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 2, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$.



3) [5], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)

Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z) = f(z)$.

4) ([1]+[2]+[3])

Data la funzione $w = z^3$, i) dire dove è analitica e calcolarne la derivata; ii) in quale insieme trasforma il dominio $\mathcal{D} = \{1 < |z| < 3, 0 < \arg z < \pi/4\}$? iii) Disegnare le curve di livello $u = \cos t$, $v = \cos t$ nel settore $0 < \arg z < \pi/3$.

5) ([2]+[2])

Determinare tutti i valori di

$$\text{Log}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}(-1 + i)\right); \quad \left(2(1 - i\sqrt{3})\right)^{\frac{1}{3}}$$

6) ([4])

i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = \alpha x^3 - 6xy^2$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

7) ([2]+[2])

Data la serie di funzioni $\sum_n c_n(z-1)^n$, che ha raggio di convergenza R , individuare le regioni di \mathbb{C} nelle quali la serie di funzioni $\sum_n n^2 c_n(z-1)^n$ i) converge assolutamente e ii) converge uniformemente.

2.17 2° esonero del 02/03/06; AA 2005/06

1) ([2]+[3]) Data la funzione $\frac{1}{z^2+9}$, i) individuare le sue singolarità e la loro natura; ii) svilupparla in serie di potenze centrate in $z_0 = 3i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza e disegnando le corrispondenti corone circolari.

2) ([3]+[2]) Data la funzione $f(z) = z^2 e^{3/z}$, i) discutere la natura delle sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui; ii) usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$I_R = \oint_{\gamma_R} f(z) dz,$$

dove γ_R è la circonferenza $|z - 1| = R$, percorsa in senso antiorario, sia per $R < 1$ che per $R > 1$.

3) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)

Si dimostri il seguente teorema. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in \mathcal{D} , continua in $\bar{\mathcal{D}}$ e tale che $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.

4) [3]+[3] Data la funzione $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui e verificare che la loro somma è nulla.

5) ([5]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+5)(x-i)} dx.$$

6) ([5]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{\sin\theta}{2}} d\theta.$$

7) ([5]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+9)} dx.$$

2.18 Esonero di CMMF del 20/03/06; AA 2005/06

1) ([6]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(x+3)} dx$$

2) ([6]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+9} dx$$

3) ([6]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4} dx$$

4) ([6])

Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x-i} dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

5) ([1]+[1]+[2]+[2])

i) Individuare le singularità della funzione $f(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e stabilirne la natura. ii) In caso di punti di diramazione, tagliare in modo opportuno il piano complesso per rendere f analitica (disegno!), e ivi calcolare $f'(z)$. iii) Calcolare la variazione Δf attraverso il taglio scelto. iv) Costruire la superficie di Riemann di $f(z)$ e chiarire se sia topologicamente equivalente alla sfera di Riemann o al toro.

6) ([3]+[3])

Date le funzioni $f(z)$ e $g(z)$ definite dalle seguenti rappresentazioni integrali:

$$i) f(z) \equiv \int_0^{\infty} \frac{e^{izx}}{x^2+1} dx; \quad ii) g(z) \equiv \int_0^{\infty} \frac{e^{-zx}}{x^2+1} dx$$

Determinare le regioni del piano complesso nelle quali esse sono analitiche (e dimostrarlo).

7) ([3]+[2]+[2])

Data la funzione complessa $\Phi(z) = 2i \ln(z-1) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, i) disegnare le linee $\phi(x, y) = \text{cost}$ e $\psi(x, y) = \text{cost}$, e indicare quali di esse coincidono con le linee di flusso del campo vettoriale $\vec{V} = \nabla\phi$. ii) Mostrare che $\nabla \cdot \vec{V} = 0$. iii) Dare qualche interpretazione fisica al campo vettoriale \vec{V} . Suggerimento: usare le coordinate polari $z = 1 + re^{i\theta}$.

2.19 1^o Esonero del 04/04/08

1) ([2]+[3]) Utilizzando il teorema della primitiva, i) calcolare l'integrale

$$\int_0^{2i} \frac{z^2 - 2iz - 3}{z - i} dz$$

2) ([2]+[2]+[1]) Calcolare l'integrale
lungo un percorso a scelta γ_1 (disegnarlo!) che non faccia giri completi intorno al punto $z = i$ e ii) lungo un percorso a scelta γ_2 (disegnarlo!) che giri intorno a $z = i$ una volta. Si suggerisce di riscrivere $\frac{z^2 - 2iz - 3}{z - i}$ nella forma $\frac{(z-i)^2 + \alpha(z-i) + \beta}{z-i}$ per opportuni α e β . (R. $\gamma_1 : -2\pi i$; $\gamma_2 : -6\pi i$)

i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(1, 0) \cup (0, i)$),

ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 1, iii) lungo il con-

torno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$. (R. $\gamma_2 : i - 1$, $\gamma_1 : (i - 1)/3$, $\gamma_2 - \gamma_1 = 2(i - 1)/3$)

3) [5], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato) Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z) = f(z)$.

4) ([1]+[1]+[3]) Data la funzione $w = z^5$, i) dire dove è analitica e calcolarne la derivata; ii) in quale insieme trasforma il dominio $\mathcal{D} = \{1/2 < |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/2\}$? iii) Disegnare le curve di livello $u = \cos t$, $v = \cos t$ nel settore $0 < \arg z < \pi/5$ e dare un'interpretazione fisica al campo vettoriale $\vec{V} = \nabla u$.

5) ([2]+[2]) Determinare tutti i valori di

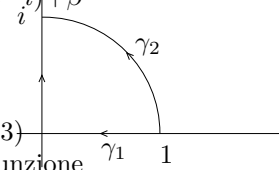
$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^{\sqrt{3}}; \quad \left(2(\sqrt{3}-i)\right)^{\frac{1}{3}}$$

(R. $3\sqrt{3}e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi i + 2\sqrt{3}\pi i k}$, $k \in \mathbb{Z}$; $\sqrt[3]{4}e^{-\frac{\pi}{18}i + \frac{2}{3}k\pi i}$, $k = 0, 1, 2$)

6) ([4]) i) Dire per quali valori dei parametri α e β la funzione $u = \alpha x^2 y - y^3 + \beta xy$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α, β si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z . (R. $\alpha = 3, \forall \beta$; $v = 3xy^2 - x^3 + (\beta/2)(y^2 - x^2)$; $f(z) = -iz^3 - i\beta z^2/2$)

7) ([2]+[2]) Data la serie di funzioni $\sum_n c_n (z-2)^n$, che ha raggio di convergenza R , individuare i raggi di convergenza delle due serie di funzioni $\sum_n \frac{n!}{n^n} c_n (z-2)^n$ e $\sum_n n^3 c_n^3 (z-2)^n$. (R. $R' = eR$; $R' = R^3$)

8) ([2]+[3]) Data la serie di funzioni $\sum_n c_n (z - z_0)^n$, $c_n = \frac{(3n+2)^n}{(n+1)!}$, i) determinarne il raggio di convergenza R ; ii) individuare le regioni di \mathbb{C} nelle quali converge assolutamente, uniformemente o diverge, studiando anche la circonferenza $|z - z_0| = R$ (per quest'ultimo punto, usare la formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$). ($R = (3e)^{-1}$)



2.20 2^o Esonero del 30/04/08

- 1) ([3]+[3]) Data la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz}$, i) individuare le sue singolarità e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) svilupparla in serie di potenze centrate in $z_0 = i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza e disegnando le corrispondenti corone circolari.
- 2) [2]+[2] Data la seguente rappresentazione integrale:

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{zt} t^z dt, \quad (23)$$

determinare i) dove l'integrale converge assolutamente ed uniformemente; ii) il dominio di analiticità di $F(z)$. (i) conv. ass. $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, unif. $-1 < \rho_0 \leq \operatorname{Re} z \leq \rho_1 < 0$).

- 3) ([3]+[2]) Data la funzione $f(z) = z^{-4} e^{3z^3}$, i) individuare le sue singolarità in \mathbb{C} e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$I_R = \oint_{\gamma_R} f(z) dz,$$

dove γ_R è la circonferenza $|z + 1| = R$, percorsa in senso antiorario, sia per $R < 1$ che per $R > 1$. (0 polo ord. 4, $\operatorname{Res}(0)=3$; ∞ sing. ess. $\operatorname{Res}(\infty)=-3$; $I_R = 6\pi i$, $R > 1$, $I_R = 0$, $R < 1$)

- 4) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Si dimostri il seguente teorema. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in \mathcal{D} , continua in $\bar{\mathcal{D}}$ e tale che $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.

- 5) [2]+[2] Data la funzione $f(z) = \frac{z}{1 - \cos z}$, i) individuare le sue singolarità in \mathbb{C} e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui. (0 polo sempl. $\operatorname{Res}(0)=2$; $2\pi n$, $n \neq 0$ poli doppi, $\operatorname{Res}(2\pi n)=2$; ∞ punt. d'acc. poli doppi).

- 6) ([3]+[3]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2i}$$

($I_1 = 2\pi/\sqrt{3}$ $I_2 = (\pi/\sqrt{2}) \exp(i\pi/4)$).

- 7) ([4]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)^2}$$

$(2\pi/(3\sqrt{3}))$.

8) ([4]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2 - ix + 2)} dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$((2\pi/3)\exp(-2k), k > 0; (2\pi/3)\exp(k), k < 0)$.

9) ([4]) Mostrare che, se la funzione $f(z)$ è analitica in \mathbb{C} , ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_j, j = 1, \dots, N$, e se ammette inoltre lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(z - z_0)^n, \quad R < |z - z_0| < \infty$$

per un qualche R finito, allora $\sum_{j=1}^N \text{Res}(f, z_j) = d_{-1}$. (Sugg.: si usi la nozione di residuo all'infinito).

1) ([4]) Calcolare l'integrale

2.21 Scritto (prima parte) del 30/06/08; AA 07-08

i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(1, 0) \cup (0, i)$),

ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 1, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$.

R. $\gamma_1 : I_1 = -(1+i)/3, \quad \gamma_2 : I_2 = -(1+i)/3; \quad \gamma_1 - \gamma_2 : I_3 = 0$

2) ([2]+[2]) Determinare tutti i valori di

$$(1+i)^{\sqrt{2}}; \quad (\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{4}}$$

R. $(1+i)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{2}(\pi/4+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}; \quad (\sqrt{3}+i)^{1/4} = \sqrt[4]{2} e^{i(\pi/24+k\pi/2)}, k = 0, 1, 2, 3$

3) ([4]) i) Dire per quali valori dei parametri α e β la funzione $u = x^2y - \alpha y^3 + \beta x$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α, β , costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

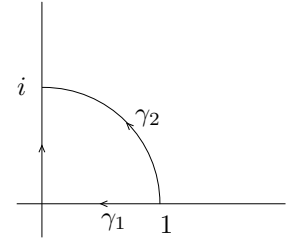
R. $\alpha = -1/3, \forall \beta; v = -x^3/3 + xy^2 + \beta y; f(z) = -iz^3/3 + \beta z + c$

4) ([3]+[2]) Data la funzione $f(z) = z^{-3}e^{z^2}$, i) individuare le sue singolarità in \mathbb{C} e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$I_R = \oint_{\gamma_R} f(z) dz,$$

dove γ_R è la circonferenza $|z+1| = R$, percorsa in senso antiorario, sia per $R < 1$ che per $R > 1$.

R. $z = 0$ polo triplo, $z = \infty$ sing. ess.; $\text{Res}(0) = 1, \text{Res}(\infty) = -1$.



5) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Si dimostri il seguente teorema. Se $f(z)$ è una funzione continua in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso e se $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$ lungo qualunque curva chiusa γ contenuta in \mathcal{D} , allora $f(z)$ è analitica in \mathcal{D} .

6) [4] Data la funzione $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui.

R. 0 sing. eliminabile; $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ poli semplici; ∞ punt. d'acc. poli sempl.; $\text{Res}(z_n) = (-)^n n\pi$, $n \neq 0$.

7) ([3]+[3]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare gli integrali

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2 + ix + 2)} dx, \quad k \in \mathbb{R}; \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+2)^2}$$

1) ([3]) Calcolare l'integrale $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$; $k > 0$: $I_1 = 2\pi e^{2k/3}$; $k < 0$: $I_1 = 2\pi e^{2k/3}$; $I_2 = \pi/(4(2)^{3/4})$

2.22 Scritto (prima parte) del 15/09/08; AA 07-08

i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2, 0) \cup (0, 2i)$),

ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 2, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$. (R. $I_1 = -(4/3)(5 + 2i)$,

$I_2 = 4 + 8i$, $I_3 = (4/3)(11 - i)$)

2) ([2]) Determinare tutti i valori di

$$(1 + i\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$$

(R. $2\sqrt{3} e^{i\pi(\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k\sqrt{3})}$, $k \in \mathbb{Z}$)

3) ([4]) i) Dire per quali valori dei parametri α e β la funzione $u = \alpha xy^2 - x^3 + \beta\sqrt{x^2 + y^2}$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α, β , costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z .

(R. i) $\alpha = 3, \beta = 0$; ii) $v = y^3 - 3x^2y$; iii) $f = -z^3$)

4) ([2]+[2]) Data la funzione $f(z) = z^{-5}e^{z^2}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e all'infinito e la loro natura; ii) calcolarne i corrispondenti residui.

(R. i) 0 polo doppio, ∞ sing. ess.; ii) $\text{Res}(0)=1/2$; $\text{Res}(\infty)=-1/2$)

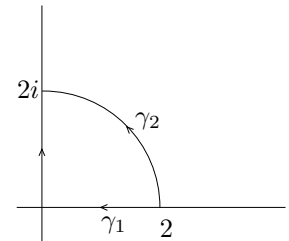
5) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Si dimostri il seguente teorema di Cauchy per un contorno triangolare. Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio \mathcal{D} semplicemente connesso, allora $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$ lungo un qualunque triangolo γ contenuto in \mathcal{D} .

6) [3]+[2] Data la funzione $f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e all'infinito e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui.

(R. i) 0 sing. eliminabile, $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ poli doppi; ∞ punto d'accum. di poli doppi; ii) $\text{Res}(2n\pi)=8n\pi$)

7) ([3]+[3]+[3]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare gli integrali

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x+i)^2} dx, \quad k \in \mathbb{R}; \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}; \quad I_3 = P \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$$



(R. $I_1 = 2\pi\theta(-k)ke^k$; $I_2 = 1/8$; $I_3 = -\pi/2$)

8) ([3]) Sviluppare la funzione $f(z) = (z^2 + 4)^{-1}$ in serie di potenze, centrate in $z_0 = 2i$, in tutto il piano complesso.

2.23 Scritto di Analisi Complessa del 15/07/09; AA 08-09 - U. Aglietti

Risolvere i seguenti problemi (il punteggio relativo e' indicato entro parentesi quadre):

- [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema dei residui.

Soluzione: consultare qualunque manuale di analisi complessa;

- [8] determinare quanti giri (completi) occorre fare attorno all' ∞ perche' la funzione

$$f(z) = (z - a)^{1/3}(z - b)^{-1/5} \quad (24)$$

riassuma lo stesso valore, dove a e b sono due numeri complessi dati. Dire per quali valori di a e b l'origine e' un punto di diramazione della f .

Soluzione: $n \text{ mcm}(3, 5) = n \cdot 15$ giri, dove n e' un intero ed mcm e' il minimo comune multiplo; $a = 0$ e/o $b = 0$;

- [8] determinare l'espansione di Laurent centrata nell'origine ($z = 0$) della funzione

$$f(z) = 1/z^3 \exp(z) \quad (25)$$

e calcolarne il raggio di convergenza. Dire quale singolarita' possiede la f nell'origine e calcolarne il residuo.

Soluzione:

$$f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{z^n}{(n+3)!} \quad \text{per } 0 < |z| < \infty; \quad (26)$$

In $z = 0$ la f ha un polo triplo con residuo $R = 1/2$, come si vede direttamente calcolando esplicitamente i primi 3 termini dall'espansione sopra;

- [8] calcolare con il teorema dei residui l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}. \quad (27)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left\{ \lim_{z \rightarrow \exp(i\pi/4)} \frac{z - \exp(i\pi/4)}{z^4 + 1} + \lim_{z \rightarrow \exp(i3/4\pi)} \frac{z - \exp(i3/4\pi)}{z^4 + 1} \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=\exp(i\pi/4)} + \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=\exp(i3/4\pi)} \right\} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

2.24 Scritto del 21/09/2009, AA 08-09 — U. Aglietti

Risolvere i seguenti problemi (il punteggio relativo e' indicato entro parentesi quadre):

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il (primo) teorema di Liouville.

Soluzione: consultare qualunque manuale di analisi complessa;

2. [8] determinare quanti giri (completi) occorre fare attorno all' ∞ perche' la funzione

$$f(z) = (z - a)^{1/2}(z - b)^{1/3}(z - c)^{-1/5} \quad (29)$$

riassuma lo stesso valore, dove a , b e c sono tre numeri complessi dati. Dire per quali valori di a , b e c l'origine e' un punto di diramazione della f .

Soluzione: $n \operatorname{mcm}(2, 3, 5) = n 30$ giri, dove n e' un intero ed mcm e' il minimo comune multiplo; $a = 0$ e/o $b = 0$ e/o $c = 0$;

3. [8] calcolare l'espansione di Laurent centrata nell'origine ($z_0 = 0$) della funzione

$$f(z) = 1/z^4 \sin(z) \quad (30)$$

e determinarne il dominio di convergenza. Dire quale singolarita' possiede la f nell'origine e calcolarne il residuo.

Soluzione:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n+1)!} \quad \text{per } 0 < |z| < \infty; \quad (31)$$

In $z = 0$ la f ha un polo triplo con residuo $R = -1/6$, come si vede direttamente calcolando esplicitamente i primi 2 termini dall'espansione sopra;

4. [8] calcolare con il teorema dei residui l'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sin(x) + 2}. \quad (32)$$

Soluzione:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad (33)$$

Si fa il cambio di variabile standard $z = e^{ix}$ che chiude il segmento $[-\pi, \pi]$ nel cerchio unitario con centro l'origine del piano z . Si impiega quindi il teorema dei residui, l'unico residuo essendo dato dalla radice $z_+ = i(-2 + \sqrt{3})$ dell'equazione di secondo grado $z^2 + 4iz - 1 = 0$.

2.25 Scritto del 20/09/2010, AA 09-10 — U. Aglietti

- [9] enunciare e dimostrare, in forma succinta, il teorema integrale di Cauchy (detto anche rappresentazione integrale di Cauchy);
- [6] determinare i punti di diramazione con il rispettivo ordine della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^{1/3}} + \frac{1}{(z-1)^{1/2}}, \quad z \neq 0, 1. \quad (34)$$

Dire inoltre se l'infinito e' un punto di diramazione e, in caso affermativo, qual'e' il suo ordine;

R: $z = 0$ e' un punto di diramazione di ordine 2 (3 giri), $z = 1$ e' un punto di diramazione di ordine 1, $z = \infty$ e' un punto di diramazione di ordine 5.

- [6] determinare l'espansione di Laurent centrata nel punto $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad z \neq 0, 1, \quad (35)$$

il dominio di convergenza, il tipo di singolarita' ed il residuo nel suddetto punto;

R: $\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, $0 < |z-1| < 1$, $z = 1$ e' un polo semplice con residuo -1 .

- [6] determinare il raggio di convergenza R della serie seguente usando il criterio di D'Alambert o di Cauchy-Hadamard:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2} z^n; \quad (36)$$

R: $R = 1/e^2$.

- [6] calcolare con il teorema dei residui il seguente integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+i}{x^3-i} dx. \quad (37)$$

R: $I = 0$, come si vede chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore, nel quale c'e' solamente una singolarita' eliminabile.