MATERIALE DEL CORSO DI

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA (Analisi Complessa)

a cura di Paolo Maria Santini

http://www.roma1.infn.it/people/santini/

March 12, 2021

1. PROGRAMMA PROVVISORIO DEL CORSO DI ANALISI COMPLESSA AA 2019-20

2. TESTI CONSIGLIATI

3. RACCOLTA DI ESERCIZI PROPOSTI

4. ESEMPI DI ESONERI E SCRITTI DEL PASSATO

1 AA 2019-20; MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA (Corso di Laurea in Fisica)

1.1 PROGRAMMA PROVVISORIO DELLA PRIMA PARTE DEL CORSO (Analisi Complessa)

1.1.1 Il piano complesso

Numeri complessi. Rappresentazione cartesiana, polare e piano di Argand. Interpretazione geometrica delle operazioni elementari sui numeri complessi. Disuguaglianze triangolari: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Radice ennesima e suo significato geometrico. Il piano complesso come spazio normato e metrico. Intorno, domini semplicemente e multiplamente connessi, frontiera, chiusura di un dominio. Proiezione stereografica, sfera di Riemann e punto all'infinito.

1.1.2 Funzioni analitiche

Funzioni complesse di variabile complessa. Funzioni monodrome e polidrome. Funzione composta. Funzione inversa. Corrispondenza biunivoca. Parte reale u ed immaginaria v di una funzione complessa: $f = u(x, y) + iv(x, y)$. Funzione continua. Funzione derivabile e condizioni di Cauchy-Riemann. Funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$, e la condizione $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ in $\mathcal{D}$. Parti reale ed immaginaria di una funzione analitica come funzioni armoniche. Ortogonalità delle curve di livello $u = cost$ e $v = cost$. Trasformazione conforme. La funzione lineare, l'inversione e la trasformazione di Moebius trasformano cerchi in cerchi. Funzioni monodrome elementari: z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ e studio di tali funzioni.

1.1.3 Funzioni polidrome

Funzioni polidrome elementari come inverse di funzioni elementari; esempi: $(z - z_0)^{\frac{1}{n}}$, $Log\ (z - z_0)$ e punti di diramazione. Analiticità nel piano complesso tagliato e discontinuità attraverso il taglio. La superficie di Riemann a due fogli per la funzione $z^{1/2}$ è topologicamente equivalente alla sfera. Cenni ad esempi in cui la superficie di Riemann della funzione polidroma è topologicamente equivalente al toro. Studio delle funzioni z^ν, $\nu \in \mathbb{R}$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\arctan z$.

1.1.4 Integrazione di funzioni complesse

Definizione di integrale $\int_\gamma f(z)dz$ di una funzione complessa lungo una curva regolare γ del piano complesso. Disuguaglianza di Darboux. Esempi elementari in cui $f(z) = |z|,\ |z|^2,\ z^p,\ p \in \mathbb{Z}$ e γ è un arco di circonferenza o una spezzata. Teorema di Cauchy nella versione di Goursat ed esistenza della primitiva di una funzione analitica. Il teorema di Cauchy per domini multiplamente connessi.

La funzione polidroma $Log\ z$ come primitiva di $1/z$; numero di avvolgimenti. La rappresentazione integrale di Cauchy. Il teorema della media ed il teorema del massimo e minimo modulo per funzioni analitiche ed armoniche nel piano. Derivata n-esima di una funzione analitica e sua rappresentazione integrale. I due teoremi di Liouville. Teorema di Morera e definizione alternativa di analiticità. Integrali su archi infiniti e infinitesimi. Lemma di Jordan.

1.1.5 Serie di Taylor e di Laurent; singolarità di funzioni analitiche

Riepilogo delle seguenti nozioni relative alle serie di funzioni: {convergenza; convergenza assoluta e uniforme; M-test di Weierstrass. L'esempio significativo della serie geometrica. Continuità e analiticità della somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue e analitiche; scambio di integrale e somma per serie uniformemente convergenti. Serie di potenze e convergenza per cerchi; formule di Cauchy - Hadamard e d'Alambert per il raggio di convergenza}. Serie di Taylor e di Laurent. Singolarità isolate polari ed essenziali. Serie di Taylor e di Laurent di funzioni elementari. Esempi di singolarità non isolate: punti di accumulazione e barriera essenziale.

1.1.6 Teorema dei residui e calcolo di integrali

Definizione di residuo di singolarità isolata e teorema dei residui. Residuo all'infinito e teorema sulla somma dei residui in $\bar{\mathbb{C}}$. Teorema dell'indice, principio dell'argomento, numero di avvolgimenti. Teorema di Rouché e applicazione al teorema fondamentale dell'algebra. Uso del teorema dei residui per il calcolo dei seguenti integrali: 1) integrale di una funzione circolare sull'intervallo $(0, 2\pi)$. 2) Integrale di una funzione analitica nel semipiano superiore (o inferiore) su tutta la retta. 3) Trasformata di Fourier. 4) Integrale al valor principale. 5) Integrali di funzioni polidrome del tipo $x^p R(x)$, con p reale e $R(x)$ razionale, e del tipo $(log(x))^k R(x),\ k = 0, 1, 2, \dots$ sul semi-asse reale positivo.

1.1.7 Funzioni armoniche in Fisica

Funzioni armoniche e campi vettoriali piani irrotazionali e a divergenza nulla. Il potenziale complesso cz e il campo uniforme. Il potenziale $cLog\ (z - z_0)$ e i campi radiali e circolari. Il potenziale c/z ed il campo di un dipolo. Il potenziale $cz^\nu,\ \nu \in \mathbb{R}$ ed il moto di un fluido ideale nel settore $0 < \theta < \pi/\nu$ (o il campo elettrico tra piastre piane che formano l'angolo ν). Il potenziale $v_0(z + a^2/z)$ ed il moto di un fluido ideale intorno ad un ostacolo cilindrico.

1.1.8 Il prolungamento analitico

Il prolungamento analitico (PA) attraverso una frontiera (alla Riemann). Il PA attraverso domini. Punti regolari e singolari della frontiera. Esempio: la serie geometrica. PA per cerchi (alla Weierstrass). Teorema di Pringsheim (senza dim.); esempi: 1 è singolare per la serie geometrica e -1 è singolare per la serie logaritmica. Esempio di barriera naturale di singolarità per la funzione $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^{2^n}$.

1.1.9 Rappresentazioni integrali e loro prolungamento analitico

Rappresentazioni integrali $F(z)$ attraverso integrali impropri. Successioni di integrali finiti $F_n(z)$ convergenti uniformemente a $F(z)$. Analiticità dell'integrando di $F_n(z)$ e analiticità di $F(z)$. Esempi: l'integrale di Laplace e la rappresentazione integrale della Γ di Euler (generalizzazione al continuo del fattoriale). Loro dominio di analiticità. Prolungamento analitico della $\Gamma(z)$ a tutto $\mathbb{C}$ a funzione meromorfa con poli semplici in $0, -1, -2, \dots$. Calcolo dei corrispondenti residui.

2 TESTI CONSIGLIATI

Gli argomenti svolti in questo corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica sono un sottoinsieme di quelli contenuti nel libro (attenzione agli errori di stampa!):

· C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, "Metodi Matematici della Fisica", Carocci Editore, Roma, 2013.

Si consiglia anche:

· F. Calogero, "Metodi Matematici della Fisica", Dispense Istituto di Fisica, Università di Roma, 1975. Materiale reperibile su rete all'indirizzo:
http://www.phys.uniroma1.it/web_disp/d1/index.html

· C. Presilla, "Elementi di Analisi Complessa", Springer, 2014.

Approfondimenti.

Per ulteriori approfondimenti relativi alla prima parte del corso (analisi complessa):

· A. I. Markusevich, "Elementi di Teoria delle Funzioni Analitiche", Editori Riuniti, 1988

· L. V. Alhfors, "Complex Analysis", McGraw-Hill, 1966

· M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, "Complex Variables", Cambridge University Press, 1997.

· J. B. Conway, "Functions of One Complex Variable", Springer-Verlag, 1978.

· A. Kyrala, "Applied Functions of a Complex Variable", Wiley - Interscience, 1972

· V. Smirnov, "Corso di Matematica Superiore", Volume III, Editori Riuniti, 1977

Per ulteriori approfondimenti relativi alla seconda parte (analisi funzionale, distribuzioni, trasformata e serie di Fourier, ...):

· B. Friedman, "Principles and techniques of applied mathematics", Dover Publications, New York 1990.

· S. Fomin, A. Kolmogorov, "Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale", MIR 1980.

· I. M. Gel'fand, "Lectures on Linear Algebra", Dover Publications, NY, 1989.

· I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, "Generalized functions", Vol.1, Academic Press, 1964.

· M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics. II: Fourier analysis, self-adjointness. New York, London, Academic Press, 1975.

· M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics. I: Functional analysis (New York, London, Academic Press 1980).

· F. Cesi: "Rudimenti di analisi infinito dimensionale" (dispense del suo corso di Analisi Funzionale).

· V. Smirnov, "Corso di Matematica Superiore", Volume II, Editori Riuniti, 1977.

· G. Fano, "Metodi matematici della Meccanica Quantistica", Zanichelli, Bologna, 1967.

3 RACCOLTA DI ESERCIZI PROPOSTI (prima parte)

3.1 Analisi Complessa

3.1.1 Il piano complesso

1) Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana.

$i)\ (2+i3)^3,\quad ii)\ 2e^{i\pi/3},\quad iii)\ \frac{a+ib}{c+id},\quad iv)\ 3e^{i\frac{\pi}{4}},\quad v)\ 2e^{i\frac{\pi}{2}},\quad vi)\ \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}},\quad vii)\ 2e^{i\frac{4\pi}{3}},$
$viii)\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}},\quad ix)\ i^n,\quad x)\ 2e^{-i\frac{\pi}{3}},\quad xi)\ 3e^{\frac{2}{3}\pi i}$

Risp. $i)\ -46+9i,\quad ii)\ 1+i\sqrt{3},\quad iii)\ \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2},\quad iv)\ \frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{3}{\sqrt{2}},\quad v)\ 2i,$
$vi)\ -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad vii)\ -1-i\sqrt{3},\quad viii)\ \sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}},\quad ix)\ (-1)^p,\ n=2p;\ i(-1)^p,\ n=2p+1,\ p\in\mathbb{N},\quad x)\ 1-i\sqrt{3},\quad xi)\ \frac{3}{2}(-1+\sqrt{3})$

2) Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare (con $0 \le arg\ z < 2\pi$):

$i)\ \sqrt{3}+i,\quad ii)\ 2-i2\sqrt{3},\quad iii)\ 4-4i,\quad iv)\ -2+2i,\quad v)\ -2\sqrt{3}+2i$

Risp. $i)\ 2e^{i\frac{\pi}{6}},\quad ii)\ 4e^{i\frac{5\pi}{3}},\quad iii)\ 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}},\quad iv)\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad v)\ 4e^{\frac{5}{6}\pi i}$

3) Mostrare che, se $z = re^{i\theta} = x+iy$,

$\bar{z} = re^{-i\theta},\quad |z|^2 = z\bar{z} = r^2,\quad Re\ z = \frac{z+\bar{z}}{2},\quad Im\ z = \frac{z-\bar{z}}{2i},\quad |z_1z_2| = |z_1||z_2|,$
$arg\ (z_1z_2) = arg\ (z_1) + arg\ (z_2),\quad arg\ (z^n) = n\ arg\ (z),\quad arg\ (z^{\frac{1}{n}}) = \frac{arg\ (z)}{n}$

4) Usando la formula di Euler - De Moivre, esprimere $\sin(10\theta)$ e $\cos(4\theta)$ in funzione di $\sin\theta$ e $\cos\theta$ e mostrare che $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$.

Risp.

$$\begin{aligned} &\sin(10\theta) = \sum_{k=0}^{4}\begin{pmatrix} 10 \\ 2k+1 \end{pmatrix}(-)^k(\sin\theta)^{2k+1}(\cos\theta)^{9-2k}, \\ &\cos(4\theta) = (\sin\theta)^4 - 6(\sin\theta\cos\theta)^2 + (\cos\theta)^4. \end{aligned} \tag{1}$$

5) *Somma.* Mostrare che la somma di due numeri complessi $z_S = z_1 + z_2$, $z_j = x_j + iy_j,\ j = 1,2$ corrisponde alla somma $\vec{z}_S$ dei vettori $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$, con $\vec{z}_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, ed è quindi costruita attraverso lo regola del parallelogramma.

6) Dimostrare le seguenti disuguaglianze (sia in modo geometrico che algebrico):

$$\begin{aligned} &Re\ z \le |z|,\quad Im\ z \le |z|,\quad |z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2| \le 2|z_1z_2|, \\ &|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2| \quad \text{(disuguaglianza triangolare)}, \\ &||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2|, \\ &|\textstyle\sum_{k=1}^n z_k| \le \sum_{k=1}^n |z_k|, \\ &|z| \le |Re\ z| + |Imz| \end{aligned} \tag{2}$$

e usare la disuguaglianza triangolare e la sua conseguenza per mostrare che:

$$\left|\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right| \le \frac{|\alpha||z|+|\beta|}{||\gamma||z|-|\delta||} \tag{3}$$

7) $\mathbb{C}$ *come spazio vettoriale normato* Mostrare che l'insieme dei numeri complessi è un "campo". Mostrare che l'insieme dei numeri complessi è uno "spazio vettoriale normato", con norma $||z|| = |z|$, e che tale norma induce la metrica $d(z_1, z_2) = ||z_1 - z_2|| = |z_1 - z_2|$.

8) *Moltiplicazione.* Mostrare che i) la moltiplicazione di $z \in \mathbb{C}$ per un numero complesso di modulo 1: $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $z \to e^{i\alpha} z$ corrisponde alla rotazione del vettore $\vec{z}$ dell'angolo α; ii) la moltiplicazione per $a = |a|e^{iarg\ a}$: $z \to az$ corrisponde alla combinazione della rotazione di $\vec{z}$ dell'angolo arg a con la dilatazione (se $|a| > 1$) o contrazione (se $|a| < 1$) della sua lunghezza del fattore $|a|$; iii) la divisione per a: $z \to z/a$ alla rotazione di $\vec{z}$ dell'angolo -arg a, combinata con la dilatazione (se $|a| < 1$) o contrazione (se $|a| > 1$) della sua lunghezza del fattore $1/|a|$.

9) Mostrare che $Re(\bar{z}_1 z_2) = \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$, $\;Im(\bar{z}_1 z_2) = |\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2|$, dove $\vec{z}_j$, $j = 1, 2$ sono i vettori di componenti (x_j, y_j), e quindi che le equazioni $Re(\bar{z}_1 z_2) = 0$, $\;Im(\bar{z}_1 z_2) = 0$, $z_1, z_2 \neq 0$ eprimono rispettivamente l'ortogonalità e il parallelismo dei vettori $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$. Mostrare infine che arg$(\bar{z}_1 z_2)$ è l'angolo tra $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$.

10) Si verifichi che:
i) $z(t) = tz_2 + (1-t)z_1$, $t \in \mathbb{R}$, $(t \in \mathbb{R})$ è l'equazione parametrica della retta passante per z_1 e z_2 (se $t \in [0, 1]$ è l'equazione parametrica del segmento che congiunge z_1 e z_2).
ii) $\bar{c}z + c\bar{z} = 1$ è l'equazione della retta che incontra l'asse reale nel punto $z = 1/(2\ Re(c))$, formando con esso l'angolo $arg\ (ic)$. Dedurre cha tale retta è parallela all'asse immaginario se $c \in \mathbb{R}$, mentre è parallela all'asse reale se $c \in i\mathbb{R}$. Mostrare inoltre che tale retta è perpendicolare al vettore $\vec{c} = (Re\ c, Im\ c)$. Mostrare infine che la retta $\bar{c}z + c\bar{z} = 0$ è parallela alla precedente, e passa per l'origine e per ic.
iii) $arg\ z = \varphi$ è l'equazione della semiretta che parte dall'origine e forma con l'asse reale l'angolo φ.
iv) $z(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, è l'equazione parametrica della circonferenza di raggio R e centro z_0, percorsa in senso antiorario.
v) $|z - z_0| = R$ e/o $|z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} = R^2 - |z_0|^2$ sono equazioni (equivalenti) della circonferenza di raggio R centrata in z_0.

11) Scrivere l'equazione di una circonferenza passante per l'origine.

12) Si disegni la circonferenza $|z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ e si determinino le sue intersezioni con gli assi reale ed immaginario e con la bisettrice del primo quadrante.

Risp. 1, $\;i$, $\;(\sqrt{2} \pm 1)e^{i\frac{\pi}{4}}$

13) Determinare le regioni del piano complesso che soddisfano alle seguenti condizioni. i) $a \leq |z-c| < b,\ c \in \mathbb{C},\ 0 < a < b$; ii) $|z-a| \leq |z-b|,\ a, b \in \mathbb{C}$, iii) $|z-a| \leq 2|z-b|,\ a, b \in \mathbb{C}$, iv) $0 \leq \arg\,(z-z_0)^4 \leq \frac{\pi}{3},\ z_0 \in \mathbb{C}$; v) Re $z \leq$ Im z.

Risp: i) la corona circolare centrata in c di raggi a e b, chiusa sul bordo interno. ii) l'unione del semipiano che contiene a, generato dalla retta passante per il punto $(a+b)/2$ e perpendicolare al vettore $b-a$, con la retta stessa; iii) l'unione dell'esterno della circonferenza centrata in $(4b-a)/3$ di raggio $2|a-b|/3$ con la circonferenza stessa; iv) il settore circolare centrato in z_0 di angolo $\pi/12$, il cui primo semi-asse è parallelo al semi-asse reale positivo; v) l'unione della bisettrice del primo e terzo quadrante con il semipiano a sinistra di tale bisettrice.

14) Determinare tutti i valori di:

i) $i^{\frac{1}{3}}$, *ii)* $(2i)^{\frac{1}{2}}$, *iii)* $(-1)^{\frac{1}{3}}$, *iv)* $1^{\frac{2}{3}}$, *v)* $(-2)^{\frac{1}{4}}$, *vi)* $(\sqrt{3}-i)^{\frac{1}{5}}$, *vii)* $(2+i2\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$, *viii)* $1^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$

Risp. *i)* $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $-i$; *ii)* $\pm(1+i)$; *iii)* $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, -1; *iv)* 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; *v)* $\frac{\pm 1+i}{2^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{\pm 1-i}{2^{\frac{1}{4}}}$; *vi)* $2^{\frac{1}{5}} e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{5})}, k = 0, 1, 2, 3, 4$, *vii)* $4^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$, *viii)* $e^{\frac{2k\pi}{n} i}, k = 1, .., n-1$

15) Determinare tutti i valori di:

i) $2Log\ (1+i)$, *ii)* $Log\ (-1)$, *iii)* $Log\ 3$, *iv)* $Log(\sqrt{3}+i)$, *v)* $Log(\sqrt{3}-3i)$, *vi)* $Log(2i)$, *vii)* $Log(4-4i)$, *viii)* $\sin^{-1}(1/2)$, *ix)* $\cos^{-1}(1/2)$, *x)* $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$, *xi)* $\tan^{-1}\sqrt{3}$, *xii)* $\tan^{-1}(2i)$

Risp. *i)* $\log 2 + i(\frac{\pi}{2}+4k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$; *ii)* $i(\pi+2k\pi)$; *iii)* $\log 3 + i2k\pi$; *iv)* $log 2 + i(\frac{\pi}{6}+2k\pi)$, *v)* $log(2\sqrt{3}) + i(-\frac{\pi}{3}+2k\pi)$, *vi)* $log 2 + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, *vii)* $log(4\sqrt{2}) + i(\frac{7\pi}{4}+2k\pi)$, *viii)* $\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; *ix)* $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; *x)* $\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; *xi)* $\frac{\pi}{3}+k\pi$; *xii)* $\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{i}{2}\log 3$

16) Determinare tutti i valori di:

i) $(1+i\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$, *ii)* 1^i, *iii)* i^i, *iv)* $(1-i)^{\sqrt{3}}$, *v)* $(1+i)^\pi$

Risp. *i)* $2^{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{2}\pi(\frac{1}{3}+2k)}$, $k \in \mathbb{Z}$, *ii)* $e^{-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$, *iii)* $e^{-\pi(1/2+2k)}$, *iv)* $2^{\sqrt{3}/2} e^{i\sqrt{3}\pi(-1/4+2k)}$, *v)* $2^{\pi/2} e^{i\pi^2(1/4+2k)}$, $k \in \mathbb{Z}$

17) Se $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ sono le n radici dell'equazione $z^n = 1$ (le radici n-esime dell'unità),
i) si dimostri (sia in modo algebrico che geometrico) che:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 0, \quad \prod_{k=1}^{n} \omega_k = (-)^{n+1}. \tag{4}$$

ii) si mostri che, se ζ è una radice n-esima di $z \in \mathbb{C}$ ($\zeta^n = z$), allora tutte le radici n-esime di z sono $\{\omega_k \zeta\}_{k=1}^{n}$.

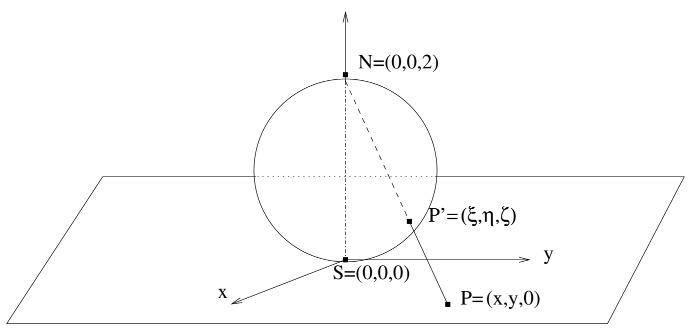
18) Dimostrare la seguente identità

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \tag{5}$$

che diventa, per $z = e^{i\theta}$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}. \tag{6}$$

19) *Proiezione stereografica.* La sfera di raggio 1 è adagiata sul piano xy, in modo che il suo polo Sud coincida con l'origine: $S = (0,0,0)$ ed il polo Nord con il punto $N = (0,0,2)$ (vedi figura). Sia $P = (x,y,0)$ un punto del piano xy e $P' = (\xi,\eta,\zeta)$ l'intersezione della retta passante per P e N con la superficie sferica.



i) Mostrare geometricamente che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti P del piano xy ed i punti P' della superficie sferica privata del polo Nord, e che il punto ∞ del piano xy è in corrispondenza biunivoca con il polo Nord:

$$P \leftrightarrow P', \qquad\qquad \infty \leftrightarrow N.$$

ii) Mostrare che la trasformazione $P \to P'$ è descritta dalle equazioni

$$\xi = \frac{4x}{4 + x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{4y}{4 + x^2 + y^2}, \quad \zeta = \frac{2(x^2 + y^2)}{4 + x^2 + y^2},$$

mentre la trasformazione inversa $P' \to P$ è descritta dalle equazioni

$$x = \frac{2\xi}{2 - \zeta}, \quad y = \frac{2\eta}{2 - \zeta},$$

dove ξ, η, ζ soddisfano all'equazione: $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1$.
iii) Si osservi infine che, identificando il piano xy con il piano complesso z ($z = x + iy$), le trasformazioni $P \to P'$ e $P' \to P$ diventano rispettivamente:

$$\xi + i\eta = \frac{4z}{4 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{2|z|^2}{4 + |z|^2},$$

$$z = \frac{2(\xi + i\eta)}{2 - \zeta}, \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1.$$

Sugg. Poiché P' è l'intersezione della retta passante per P e N con la superficie sferica, le sue coordinate ξ, η, ζ sono la soluzione del sistema algebrico

$$\xi = -\frac{x}{2}(\zeta - 2), \quad \eta = -\frac{y}{2}(\zeta - 2), \quad \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2 = 1.$$

3.1.2 Funzioni analitiche

1) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.
i) Si dia la definizione di funzione continua in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.
ii) Si dimostri che CNES affinché $f(z)$ sia continua in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ è che le funzioni $u(x, y), \ v(x, y)$ siano continue in (x_0, y_0).

2) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.
i) Si dia la definizione di funzione derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ e quella di funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$.
ii) Mostrare che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y esistono in $\mathcal{D}$, le funzioni u e v sono differenziabili in $\mathcal{D}$, e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann $u_x = v_y, \ u_y = -v_x$.
iii) Mostrare che, se le funzioni reali di due variabili reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono differenziabili in un aperto connesso (dominio) di $\mathbb{R}^2$ e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann, allora la funzione complessa di variabile complessa $f = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica nel corrispondente dominio di $\mathbb{C}$.
iv) Mostrare che le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari diventano: $u_r = v_\theta/r, \ u_\theta = -rv_r$.

3) i) Si verifichi che $\partial/\partial z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ e $\partial/\partial \bar{z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$.
ii) Si deduca che le condizioni di Cauchy - Riemann in un dominio $\mathcal{D}$ sono equivalenti alla condizione $\partial f/\partial \bar{z} = 0$, cioè alla proprietà che f depende solo dalla variabile z in $\mathcal{D}$.

4) Esprimere le seguenti funzioni complesse di variabile complessa $f = u(x, y) + iv(x, y)$ come funzioni di z e $\bar{z}$ e dedurre quali di esse sono analitiche in $\mathbb{C}$.

i) $f = x - iy$; *ii)* $f = x^2 + y^2$; *iii)* $f = -y + ix$; *iv)* $f = x^2 + y^2 + i2xy$; *v)* $f = x^2 - y^2 + i2xy$; *vi)* $\sin(x^2 + y^2)$

Risp. *i)* $f = \bar{z}$; *ii)* $f = z\bar{z}$; *iii)* $f = iz$; *iv)* $f = z\bar{z} + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2}$; *v)* $f = z^2$; *vi)* $\sin(z\bar{z})$. Solo la terza e la quinta.

5) Determinare le regioni di $\mathbb{C}$ nelle quali le funzioni $f(z, \bar{z})$ dell'esercizio precedente sono continue, derivabili e analitiche.

Risp. tutte continue in $\mathbb{C}$; i) non è derivabile e analitica da nessuna parte; ii) derivabile in $z = 0$ e analitica da nessuna parte; iii) e v) derivabili e analitiche in $\mathbb{C}$; iv) derivabile sull'asse reale e analitica da nessuna parte; vi) derivabile in

$z = 0$ e sulle circonferenze $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$; analitica da nessuna parte

6) Dire, senza fare conti, se le seguenti funzioni complesse di variabile complessa sono continue e analitiche in $\mathbb{C}$ e, se analitiche, calcolarne le derivate.

i) $\sin|z|$, *ii)* e^{z^2}, *iii)* $arg\ z^2$, *iv)* $\bar{z}^2 z$, *v)* $\cos z^3$

Risp. tutte continue in $\mathbb{C}$; sono analitiche in $\mathbb{C}$: *ii)* e *v)* con $(e^{z^2})' = 2ze^{z^2}$; $(\cos z^3)' = -3z^2 \sin z^3$

7) Date le funzioni dell'esercizio precedente, stabilirne derivabilità ed analiticità in $\mathbb{C}$ usando le condizioni di Cauchy-Riemann.

8) Sia $f(z)$ una funzione analitica nel dominio $\mathcal{D}$; dire se le seguenti funzioni composte sono analitiche, stabilirne il dominio di analiticità e calcolarne la derivata.

i) $\sin(f(z))$, *ii)* $|f(z)|$, *iii)* $f(f(z))$, *iv)* $\tan(f^2(z))$, *v)* $1/f(z)$, *vi)* $arg\ f(z)$, *vii)* $\overline{f(\bar{z})}$

Risp. *i)* sì, in $\mathcal{D}$, $(\sin(f(z)))' = \cos(f(z))f'(z)$; *ii)* no; *iii)* sì, in $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}' = \{f(z),\ z \in \mathcal{D}\}$, $(f(f(z)))' = f'(f(z))f'(z)$; *iv)* sì, in $\mathcal{D} - \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{z :\ f^2(z) = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathcal{Z}\}$, $(\tan(f^2(z)))' = \frac{2f(z)f'(z)}{\cos(f^2(z))}$; *v)* sì, in $\mathcal{D} - \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{z :\ f(z) = 0\}$, $(1/f(z))' = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$; *vi)* no; *vii)* sì, in $\tilde{\mathcal{D}} = \{z :\ \bar{z} \in \mathcal{D}\}$, $(\overline{f(\bar{z})})' = \overline{f'(\bar{z})}$

9) Si mostri che, se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora:
i) $u,\ v$ sono funzioni armoniche in $\mathcal{D}$: $\Delta u = \Delta v = 0$;
ii) le curve di livello $u = cost,\ v = cost$ formano un reticolo ortogonale.
iii) Se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$ e $f'(z_0) \neq 0,\ z_0 \in \mathcal{D}$, allora la trasformazione $w = f(z)$ dal piano complesso z a quello w gode delle seguenti proprietà.
a) Due curve passanti per z_0 vengono ruotate dello stesso angolo $arg(f'(z_0))$; quindi l'angolo tra di esse resta invariato (una trasformazione di questo tipo è detta *conforme*).
b) L'ingrandimento lineare in z_0 è dato da $|f'(z_0)|$.

10) Sia $u(x,y)$ una funzione armonica nel dominio $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^2$.
i) Si mostri che la funzione

$$v(x,y) := cost + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (-u_y dx + u_x dy),$$

dove γ è un contorno arbitrario da (x_0, y_0) a (x,y) contenuto in $\mathcal{D}$, è armonica in $\mathcal{D}$.
ii) Si mostri che la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

11) Sia $v(x,y)$ una funzione armonica nel dominio $\mathcal{D}$ del piano.

i) Si mostri che la funzione

$$u(x,y) := cost + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (v_y dx - v_x dy),$$

dove γ è un contorno arbitrario da (x_0, y_0) a (x, y) contenuto in $\mathcal{D}$, è armonica in $\mathcal{D}$.
ii) Si mostri che la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

12) Dire se le seguenti funzioni reali sono la parte reale (o immaginaria) di funzioni analitiche. Nel caso affermativo, assumendo che siano la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, costruire la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

i) x^2+y^2, *ii)* x^2-y^2, *iii)* xy, *iv)* $e^x \sin y$, *v)* $e^y \cos x$, *vi)* $\sin x \cos y$, *vii)* $\sin(x^2-y^2)\cosh(2xy)$, *viii)* $e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$, *ix)* x^3-3xy^2, *x)* $e^{-y}\sin x$, *xi)* $\log\sqrt{x^2+y^2}$, *xii)* $\tan^{-1}(y/x)$

Risp. *i) no*; *ii)* $v = 2xy + c$, $f = z^2 + k$; *iii)* $v = \frac{y^2-x^2}{2} + c$, $f = -i\frac{z^2}{2} + k$; *iv)* $v = -e^x \cos y + c$, $f = -ie^z + k$; *v)* $v = -e^y \sin x + c$, $f = e^{-iz} + k$; *vi) no*; *vii)* $v = \cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) + c$, $f = \sin z^2 + k$; *viii)* $v = -e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + c$, $f = -ie^{z^2} + k$; *ix)* $v = 3x^2y - y^3 + c$, $f = z^3 + k$; *x)* $v = -e^{-y}\cos x + c$, $f = -ie^{iz} + k$; *xi)* $v = \tan^{-1}\frac{y}{x} + c$, $f = Log\ z + k$; *xii)* $v = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$, $f = -iLogz + k$

13) Dire per quali valori dei parametri reali α, β la funzione $u(x,y) = x^2 + \alpha y^2 + \beta y$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. Per quei valori, costruire tale f come funzione della sola z.

Risp. $\alpha = -1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$. $f = z^2 - i\beta z + cost$.

14) Date le funzioni analitiche: z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, determinare le corrispondenti funzioni inverse con il loro dominio di analiticità e calcolarne le derivate.

15) *La trasformazione lineare* $w = \alpha z + \beta$. Mostrare che tale trasformazione trasla l'origine del piano z nel punto β, cambia il modulo degli spostamenti dz per il fattore di scala $|\alpha|$ e li ruota dell'angolo arg α. Mostrare infine che trasforma rette in rette e cerchi in cerchi.

16) Studiare la trasformazione $w = z^2 = u+iv$. Per quali valori di z è conforme? Disegnare nel piano z il reticolo ortogonale curvilineo $u = cost$, $v = cost$. Costruire le immagini dei punti $z = 1,\ 0,\ i,\ -1$ e del settore $0 < \theta < \alpha$ nel piano w.

17) Determinare le immagini dei punti $A = 1$, $B = (\sqrt{2}+1)e^{i\frac{\pi}{4}}$, $D = i$, $E = (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{\pi}{4}}$, $C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ secondo la trasformazione $w = z^2$ e si disegni l'immagine del cerchio unitario centrato in C.

18) *Studio della funzione* z^n, $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che tale funzione è monodroma, continua e analitica in $\mathbb{C}$ e calcolare la sua derivata. Calcolare l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1-i$ e, più in generale, del dominio $\mathcal{D} = \{0 < arg\ z < \alpha,\ 1 < |z| < 2\}$. Scrivere le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e disegnare le corrispondenti curve di livello del settore $0 < arg\ z < \pi/n$.

19) *Studio dell'inversione* $w = 1/z$. Si mostri che la trasformazione $z \to w = 1/z$ è una trasformazione invertibile (l'inversa è se stessa) e realizza una corrispondenza biunivoca tra $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, essendo $w = \infty$ l'immagine di $z = 0$ e viceversa; che è inoltre analitica per $z \neq 0$ e $(1/z)' = -z^{-2}$. Si determini il significato geometrico della trasformazione $z \to 1/z$ come combinazione di due simmetrie: la riflessione rispetto al cerchio unitario e la riflessione rispetto all'asse reale, e si costruisca l'immagine del punto z nei tre casi $|z| < 1,\ |z| = 1,\ |z| > 1$. Si mostri che tale trasformazione mappa la regione $|z - z_0| \leq R$ nella regione $|w - w_0| \geq \tilde{R}$ (per $R > |z_0|$) o nella regione $|w - w_0| \leq \tilde{R}$ (per $R < |z_0|$) del piano w, con

$$w_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}, \quad \tilde{R} = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$$

Si mostri che tale cerchio si riduce alla retta

$$\bar{z}_0 \bar{w} + z_0 w = 1$$

quando $|z_0| = R$; quando cioè la circonferenza $|z - z_0| = R$ passa per $z = 0$. Disegnare le linee di livello $u = cost$ e $v = cost$ di tale funzione usando coordinate polari.

20) In che cosa sono trasformate i) la retta $2iz - 2i\bar{z} = 1$ e ii) la circonferenza $|z - i| = 2$ dalla trasformazione conforme $z \ \to \ 1/z$?

Risp. *i)* $|w - 2i| = 2$; *ii)* $|w - \frac{i}{3}| = \frac{2}{3}$

21) *Studio della trasformazione bilineare di Moebius*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

a) Mostrare che, per scelte opportune dei parametri, la trasformazione di Moebius si riduce all'identità, alla trasformazione lineare e alla trasformazione reciproca.
b) Mostrare che tale trasformazione è invertibile, con inversa: $z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$
c) Mostrare che le trasformazioni di Moebius formano un gruppo non commutativo (e unimodulare, se $\Delta = 1$).
d) Mostrare che la trasformazione di Moebius $z \to \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ è ottenibile come combinazione della traslazione $z \to \gamma z + \delta$, dell'inversione $z \to 1/z$ e della traslazione $z \to (\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma})z + \frac{\alpha}{\gamma}$, e dedurre che essa trasforma cerchi in cerchi (eventualmente cerchi in rette e rette in cerchi, intendendo la retta come cerchio di raggio infinito).

22) i) Mostrare che la trasformazione di Moebius $w = i(R-z)(R+z)^{-1}$ mappa l'interno del cerchio $|z| \leq R$ del piano complesso z nel semipiano superiore Im $w \geq 0$ del piano complesso w. In particolare, trovare le immagini dei punti:

$-R - i\epsilon,\ -iR,\ R,\ iR,\ -R + i\epsilon,\ 0$, per $\epsilon \to 0,\ \epsilon > 0$. ii) Costruire la trasformazione inversa e mostrare che essa mappa il semipiano superiore nell'interno del cerchio centrato nell'origine e di raggio R.

23) *Studio delle funzioni* e^z *e* e^{iz}. i) Scrivere parte reale ed immaginaria della funzione $e^z = e^{x+iy}$, mostrare che è analitica in $\mathbb{C}$, con $(e^z)' = e^z$, e verificare che periodica di periodo $2\pi i$. Dedurre quindi che la sua inversa è polidroma a infiniti valori. ii) Mostrare che l'equazione $e^z = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{C}$ (ovvero e^z non ha zeri in $\mathbb{C}$), mentre l'equazione $e^z = c \neq 0$ ammette infinite soluzioni. iii) Mostrare che il reticolo cartesiano è trasformato nel reticolo polare di cerchi concentrici e raggi che emanano dall'origine. iv) Mostrare che l'immagine dela retta $y = ax + b$, di equazione parametrica $z(t) = (1 + ia)t + ib$, è la spirale logaritmica $r = e^{\frac{\theta-b}{a}}$, che forma con i raggi l'angolo costante $\tan^{-1} a$. v) Mostrare che le proprietà di e^{iz} si ottengono da uqelle di e^z attraverso una semplice rotazione del piano complesso z.

24) *Studio delle funzioni* $\sin z$*,* $\cos z$*,* $\sinh z$ *e* $\cosh z$. i) Scrivere parte reale ed immaginaria della funzione $\sin z = \sin(x+iy)$, mostrare che è analitica in $\mathbb{C}$, con $(\sin z)' = \cos z$, e verificare che periodica di periodo $2\pi i$. Dedurre quindi che la sua inversa è polidroma a infiniti valori. ii) Trovarne gli zeri. iii) Mostrare che trasforma le rette verticali $x = c$ con $-\pi/2 < c < \pi/2$ nelle iperboli di semi-assi $|\sin c|$ e $|\cos c|$ e fuochi ± 1, e trasforma le rette orizzontali $y = c'$ nelle ellissi di semi-assi $|\sinh c'|$ e $|\cosh c'|$ e fuochi ± 1; trasforma quindi il fascio ortogonale cartesiano del piano z nel fascio ortogonale di ellissi e iperboli con fuochi in ± 1. iv) Mostrare che l'applicazione è conforme, ad eccezione del punti $(2k + 1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$, che corrispondono ai due fuochi. v) Studiare, come sopra, le funzioni $\cos z$, $\sinh z$ e $\cosh z$, osservando che $\cos z = \sin(z + \pi/2)$, $\sinh z = -i \sin(iz)$ e $\cosh z = \cos(iz)$.

3.1.3 Polidromia

1) *Studio della funzione* $w = z^{\frac{1}{2}}$. Si mostri che tale funzione è monodroma e analitica nel settore $0 < arg\ z < 2\pi$. Si calcoli l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1 - i\epsilon,\ 0 < \epsilon << 1$ e, più in generale, della circonferenza $|z| = cost$ e del piano tagliato $0 < arg\ z < 2\pi$. Si verifichi che la discontinuità della funzione attraverso il semi-asse reale positivo è: $\Delta(z^{\frac{1}{2}}) = -2\sqrt{r}$. Si mostri che i due rami della funzione sono ottenibili ruotando 2 volte intorno a $z = 0$. Si mostri che non si verificano altre discontinuità ruotando intorno ad ogni punto $z \neq 0$ e che perciò $z = 0$ è l'unico punto di diramazione (di ordine 1 della funzione). Si concluda che la funzione $w = z^{\frac{1}{2}},\ 0 <\ arg\ z < 2\pi$ è analitica in ogni dominio $\mathcal{D} \subset \{0 <\ arg\ z < 2\pi\}$ e la sua derivata è $(z^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$.

2) Mostrare che è necessario ruotare due volte intorno a $z = 0$ affinchè $w = z^{1/2}$ riprenda il valore iniziale. Introdurre quindi due copie (due fogli) del piano complesso z tagliato da 0 a $+\infty$ e mostrare che le immagini dei due fogli secondo $w = z^{1/2}$ ricoprono tutto il piano complesso w. Unire i due fogli in modo da rispettare le proprietà di continuità di $w = z^{1/2}$, costruendo così la superficie di

Riemann della funzione polidroma $w = z^{1/2}$ e mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann (i cui due emisferi passanti per i poli coincidono con i due fogli).

3) Si studi la funzione $w = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}$ utilizzando la rappresentazione polare $z = z_0 + re^{i\theta}$. Si mostri, in particolare, come vengono generalizzati i risultati dei due esercizi precedenti.

4) *Studio della funzione* $w = ((z - z_1)(z - z_2))^{\frac{1}{2}}$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2. Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma bipolare:

$$\sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \leq \theta_{1,2} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso il segmento (z_1, z_2), con discontinuità $|\Delta((z - z_1)(z - z_2))^{\frac{1}{2}}| = 2\sqrt{r_1 r_2}$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tale segmento si rende la funzione, con le restrizioni $0 < arg\ (z - z_{1,2}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore. Si mostri infine che la sua derivata in tale piano tagliato è: $(z - \frac{z_1+z_2}{2})((z - z_1)(z - z_2))^{-\frac{1}{2}},\ 0 < arg\ (z - z_{1,2}) < 2\pi$.

5) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = ((z-z_1)(z-z_2))^{\frac{1}{2}}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann.

6) *Studio della funzione* $w = ((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{\frac{1}{2}},\ z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2, z_3, z_4. Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma quadripolare:

$$\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}},$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2} = z_3 + r_3 e^{i\theta_3} = z_4 + r_4 e^{i\theta_4}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \leq \theta_{1,2,3,4} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso i segmenti (z_1, z_2) e (z_3, z_4), con discontinuità $|\Delta| = 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tali segmenti si rende la funzione, con le restrizioni $0 \leq arg\ (z - z_{1,2,3,4}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore.

7) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = ((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{\frac{1}{2}}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann con una maniglia (o al toro).

8) *Studio della funzione* $w = z^{\frac{1}{n}},\ n \in \mathcal{N}$. Si mostri che tale funzione è monodroma e analitica in $0 < arg\ z < 2\pi$. Si calcoli l'immagine dei punti $z = 1, i, -1, -i, 1 - i\epsilon,\ 0 < \epsilon << 1$ e, più in generale, della circonferenza $|z| = cost$ e del piano tagliato $0 < arg\ z < 2\pi$. Si verifichi che la discontinuità della funzione attraverso il semi-asse reale positivo è: $\Delta(z^{\frac{1}{n}}) = r^{\frac{1}{n}}(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1)$.

Si mostri che tutte le n determinazioni della funzione sono ottenibili ruotando n volte intorno a $z = 0$. Si mostri che non si verificano altre discontinuità ruotando intorno ad ogni punto $z \neq 0$ e che perciò $z = 0$ è l'unico punto di diramazione (di ordine $n - 1$ della funzione). Quante volte è necessario ruotare intorno a $z = 0$ affinchè w riprenda il valore iniziale? Si concluda che la funzione $w = z^{\frac{1}{n}},\ n \in \mathcal{N},\ 0 < \ arg\ z < 2\pi$ è analitica in ogni dominio $\mathcal{D} \subset \{0 < \ arg\ z < 2\pi\}$ e la sua derivata è $(z^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} z^{(\frac{1}{n}-1)}$.

9) Costruire la superficie di Riemann della funzione polidroma $w = z^{\frac{1}{n}},\ n \in \mathcal{N}$, mostrando che è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann.

10) *Studio della funzione Log z.* Si ripetano le considerazioni svolte nel precedente esercizio, mostrando che tale funzione ha solo i punti di diramazione $z = 0,\ \infty$; che $\Delta(Log\ z) = 2\pi i$, $(Log\ z)' = 1/z$; che, ruotando nello stesso verso intorno a $z = 0$, $Im\ w$ continuerà a crescere e la funzione w non riprenderà più il valore iniziale (punto di diramazione di ordine infinito). Si mostri che sono necessari gli infiniti piani tagliati $2k\pi < arg\ z < 2(k+1)\pi$ per ricoprire il piano complesso w (la superficie di Riemann di $Log\ z$ è quindi a infiniti fogli). Si disegni infine, nel piano z, il reticolo curvilineo ortogonale $u = cost$ e $v = cost$.

11) Si mostri che la funzione $w = Log\ z$ trasforma il settore $0 < \alpha_1 < arg\ z < \alpha_2 < 2\pi$ nella striscia $0 < \alpha_1 < v < \alpha_2 < 2\pi$ del piano $w = u + iv$.

12) *Studio della funzione* $Log\ (z - z_2) - Log\ (z - z_1) = Log\ \frac{z-z_2}{z-z_1}$. Si mostri che la funzione è polidroma con punti di diramazione z_1, z_2. Per fare ciò, si riscriva la funzione nella forma bipolare:

$$\log \frac{r_2}{r_1} + i(\theta_2 - \theta_1)$$

dove:

$$z = z_1 + r_1 e^{i\theta_1} = z_2 + r_2 e^{i\theta_2}.$$

Si mostri che, scegliendo le determinazioni $0 \leq \theta_{1,2} < 2\pi$, la funzione è discontinua solo attraverso il segmento (z_1, z_2), con discontinuità $\Delta = -2\pi i$, e che tagliando quindi il piano complesso z lungo tale segmento si rende la funzione, con le restrizioni $0 < arg\ (z - z_{1,2}) < 2\pi$, analitica e a un sol valore. Se ne calcoli infine la derivata.

13) *Studio della funzione* $w = \sin^{-1} z$. i) Mostrare che

$$w = \sin^{-1} z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + (1 - z^2)^{1/2}\right)$$

e che quindi la funzione polidroma ha i punti di diramazione ± 1 di tipo radice quadrata, e il punto di diramazione $z = \infty$ di tipo logaritmico; ii) che per ogni z diverso da tali punti di diramazione, la funzione assume una doppia infinità di possibili valori. Che la funzione è resa monodroma tagliando il piano complesso z con due tagli, da 1 a ∞, e da -1 a $-\infty$, e che mappa tale piano tagliato nella striscia verticale $-\pi/2 < \mathrm{Im} w < \pi/2$.

14) *Studio della funzione* $w = \cos^{-1} z$. Studiare la funzione polidroma $w = \cos^{-1} z$ usando in modo opportuno i risultati dell'esercizio precedente.

15) Mostrare che:

$$\begin{aligned} w &= \cos^{-1} z = -i\mathrm{Log}\left[z + \left(z^2 - 1\right)^{1/2}\right], \\ w &= \tan^{-1} z = \tfrac{1}{2i}\mathrm{Log}\tfrac{i-z}{i+z}. \end{aligned} \tag{7}$$

16) Trovare tutti i valori di: i) $\sin^{-1}(1/2)$, ii)$\sin^{-1}(2)$, iii) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$, iv) $\tan^{-1} 1$.

Risp. i) $\pi/6 + 2k\pi$ e $5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, ii) $\pi/2 + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3}),\ k \in \mathbb{Z}$, iii) $\pi/6 + 2k\pi$ e $-\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, iv) $\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

17) Mostrare che:

$$\begin{aligned} w &= \sinh^{-1} z = \mathrm{Log}\left[z + \left(z^2 + 1\right)^{1/2}\right], \\ w &= \cosh^{-1} z = \mathrm{Log}\left[z + \left(z^2 - 1\right)^{1/2}\right], \\ w &= \tanh^{-1} z = \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\tfrac{1+z}{1-z}. \end{aligned} \tag{8}$$

3.1.4 Funzioni armoniche in Fisica

1) Mostrare che, se $\phi(x, y)$ è armonica in un dominio $\mathcal{D}$, allora si hanno le seguenti implicazioni.
i) $\phi(x, y)$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica

$$\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Introdotto il campo vettoriale

$$\mathbf{v} = \triangledown\phi(x, y),$$

si mostri che:
ii)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\overline{\frac{d\Phi(z)}{dz}}) \\ Im(\overline{\frac{d\Phi(z)}{dz}}) \end{pmatrix},$$

iii) $\mathbf{v}$ è un campo a divergenza nulla in $\mathcal{D}$ (assenza di sorgenti in $\mathcal{D}$) ed è inoltre conservativo in $\mathcal{D}$ (se $\mathcal{D}$ è semplicemente connesso).
iv) Dopo aver verificato che anche il viceversa è vero (se $\mathbf{v}$ è un campo conservativo e a divergenza nulla in $\mathcal{D}$, allora il potenziale di $\mathbf{v}$ esiste ed è armonico in $\mathcal{D}$), si deduca che i campi gravitazionale, elettrico, magnetico, e il campo di velocità di un fluido ideale, in condizioni di simmetria piana (indipendenza dalla variabile z), in assenza di sorgenti in $\mathcal{D}$ e in condizioni stazionarie, sono descritti da un potenziale $\phi(x, y)$ armonico in $\mathcal{D}$.

vi) Si osservi infine che le curve $\phi(x, y) = cost$ sono le curve equipotenziali, mentre le curve $\psi(x, y) = cost$ sono le linee di flusso del campo.

2) Mostrare che la funzione $\Phi(z) = v_0 e^{-i\alpha} z,\ v_0 > 0$, analitica in $\mathcal{C}$, descrive un campo uniforme $\mathbf{v} = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$.

3) Usando il risultato dell'esercizio 16 e la trasformazione tra settori, si determini i) la funzione analitica che descrive il campo elettrico generato da due conduttori piani allo stesso potenziale che delimitano il settore di angolo $\pi/2$. Si calcolino poi le curve equipotenziali, le linee di flusso e si disegni tali linee. Si calcoli infine il campo elettrico.

Risp. $i)\ -iE_0 z^2;\ \ ii)\ \phi = 2E_0 xy = cost,\ \psi = E_0(y^2 - x^2) = cost;\ \ iii)\ \mathbf{E} = (2E_0 y, 2E_0 x)$

4) Si generalizzi l'esercizio precedente al caso del settore di angolo $\frac{\pi}{\nu}$.

5) Usando il risultato dell'esercizio 16 e la trasformazione tra settori, si determini la funzione analitica che descrive il moto di un fluido ideale all'interno del quadrante. Si ottenga quindi l'equazione delle linee di flusso, si disegni tali linee e si verifichi che i bordi del settore sono due linee di flusso degeneri. Si calcoli infine il campo di velocità del fluido.

Risp. $\Phi(z) = v_0 z^2;\ \ \phi = v_0(x^2 - y^2),\ \psi = 2v_0 xy;\ \ \mathbf{v} = (2v_0 x, -2v_0 y)$

6) Si generalizzi l'esercizio precedente al caso del settore di angolo $\frac{\pi}{\nu}$.

7) Si mostri che la funzione $\Phi(z) = v_\infty(z + \frac{a^2}{z}),\ a > 0$, è analitica per $z \neq 0$. Si esprimano $\phi = Re\ \Phi$ e $\psi = Im\ \Phi$ in coordinate polari e si mostri che l'asse reale e la circonferenza $|z| = a$ sono le linee di flusso $\psi = 0$. Si deduca quindi che la funzione $\Phi(z)$ descrive il moto di un fluido ideale che, all'∞, si muove di moto uniforme con velocità $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0)$ e, al finito, aggira l'ostacolo cilindrico $|z| \leq a$. Si calcoli il campo di velocità (in coordinate polari). Si verifichi infine che i punti di ristagno del fluido sono $r = a,\ \theta = 0, \pi$.

Risp. $\mathbf{v} = (v_\infty(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta), -v_\infty \frac{a^2}{r^2}\sin 2\theta)$

8) Si costruisca la funzione analitica che descrive il moto di un fluido ideale con le seguenti proprietà: è uniforme all'∞ con velocità $\mathbf{v}_\infty = (0, v_\infty)$ e al finito gira intorno ad un ostacolo circolare di raggio $r_0 = 2$ centrato nel punto $(1, 0)$. Si determini il campo di velocità.

Risp. $i)\ \Phi(z) = -iv_\infty(z - 1 + \frac{4}{z-1});\ \ ii)$

9) Si mostri che, se $f(z)$ è una funzione analitica in $\mathcal{D} \supset \{|z| \leq a\}$, allora la funzione $\overline{f(a^2/\bar{z})}$ è analitica in $|z| > a$. Si verifichi inoltre che la funzione

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f(a^2/\bar{z})}$$

i) è analitica in $\mathcal{D} - \{|z| \leq a\}$.
ii) per $|z| = a$, $\Phi(z) = f(z) + \overline{f(z)} \in \mathcal{R}$, e quindi $\psi = 0$. Si deduca quindi che la funzione $\Phi(z)$ descrive il moto di un fluido ideale in $\mathcal{D} - \{|z| \leq a\}$ che aggira l'ostacolo rappresentato dal cilindrico $|z| \leq a$ (teorema di Milne-Thomson).

10) Come applicazione del teorema di Milne-Thomson del precedente esercizio, si mostri che la funzione

$$\Phi(z) = v_\infty [z^2 + (\frac{a^2}{z - z_0} + \bar{z}_0)^2]$$

descrive il moto di un fluido perfetto all'interno del primo quadrante, in presenza di ostacolo cilindrico di raggio a e centro in z_0 contenuto nel quadrante.

11) Data la funzione $\Phi(z) = kLog\ z = \phi + i\psi,\ k \in \mathcal{R}$; si mostri che $\mathbf{v} = \bigtriangledown\phi$ descrive un campo vettoriale radiale che può essere interpretato
i) come il campo elettrico generato da un filo rettilineo uniformemente carico;
ii) come il campo di velocità di un fluido ideale generato da una sorgente.
Il campo è uscente se $k > 0$ (carica positiva o rubinetto); è entrante se $k < 0$ (carica negativa o pozzo).

12) Data la funzione $\Phi(z) = -ikLog\ z = \phi + i\psi,\ k \in \mathcal{R}$; si mostri che $\mathbf{v} = \bigtriangledown\phi$ descrive ora un campo vettoriale circolare che può essere interpretato
i) o come il campo elettrico generato da due lastre di materiale conduttore a potenziali diversi, che intersecano il piano (x,y) perpendicolarmente, lungo due raggi qualsiasi;
ii) o come il campo magnetico generato da un filo di conduttore percorso da corrente elettrica;
iii) o come il vortice di un fluido ideale. Il verso è antiorario se $k > 0$, (corrente uscente dal foglio) e orario per $k < 0$ (corrente entrante).

13) Si mostri che la funzione $\Phi(z) = q(Log\ (z - z_0) - Log\ z),\ q \in \mathcal{R}^+$ descrive
i) il campo elettrico generato da due fili uniformemente carichi di carica opposta, passanti per 0 e z_0;
ii) un fluido ideale in presenza di una sorgente in z_0 e di un pozzo in 0.
Si disegnino le linee di flusso di tale campo e si determini il campo vettoriale in tutti i punti del piano diversi da 0 e z_0.

14) Si mostri che, per $z_0 \to 0$ e $|z_0|q \to k$, la funzione Φ dell'esercizio precedente ha il seguente limite:

$$\Phi(z) \to -\frac{ke^{iargz_0}}{z}$$

Si deduca che la funzione monodroma $\frac{ke^{iargz_0}}{z}$ rappresenta un dipolo piano centrato in $z = 0$ e il cui asse forma con l'asse reale l'angolo $argz_0$. Si scriva l'equazione delle linee di flusso del dipolo (in coordinate polari) e si disegni tali linee.

15) Si determini i) la funzione analitica che descrive il campo elettrico generato da due fili rettilinei indefiniti uniformemente carichi, perpendicolari al piano (x, y), e passanti uno per l'origine e l'altro per il punto $(0, 1)$. ii) Si calcoli il campo elettrico $\mathbf{E}$ in ogni punto del piano (x, y).

Risp. *i)* $\Phi(z) = \lambda_1 Log\ (z - i) + \lambda_2 Log\ z$, *ii)* $\mathbf{E} = (\frac{\lambda_1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \cos\gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\gamma_2, \frac{\lambda_1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \sin\gamma_1 + \frac{\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\gamma_2),\ \gamma_1 = \tan^{-1}\frac{y-1}{x},\ \gamma_2 = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

16) Si faccia uso della funzione logaritmo complessa per determinare la funzione $\phi(x,y)$, armonica nel settore di angolo α, che descrive il potenziale elettrostatico generato da due conduttori piani a potenziali diversi V_1 e V_2 che delimitano il settore. Si calcolino infine le curve equipotenziali, le linee di flusso del campo elettrico, il campo elettrico e la distribuzione di carica sui conduttori.

Risp. $i)$ $\Phi = -i\frac{V_2-V_1}{\alpha} Log\ z + V_1$, $ii)$ $\mathbf{E} = (-\frac{V_2-V_1}{\alpha}\frac{\sin\theta}{r}, \frac{V_2-V_1}{\alpha}\frac{\cos\theta}{r})$

3.1.5 Integrazione di funzioni complesse nel piano complesso

1) *Curve nel piano complesso.* Dalle definizioni di curva (un'applicazione $z: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a,b],\ x,y \in C[a,b],\ a < b$), curva iniettiva (se $z(t_1) \neq z(t_2)$, quando $t_1 \neq t_2$), curva chiusa (se è continua, iniettiva e tale $z(t_a) = z(t_b)$), regolare (se $x(t), y(t) \in C^1[a,b]$ e se la curva è iniettiva), regolare a tratti (se la curva è regolare ad eccezione di un numero finito di punti), indicare a quali classi appartengono le seguenti curve e disegnarle.

$$
\begin{array}{l}
i)\ z(t) = Re^{it},\ t \in [0,\pi],\quad ii)\ z(t) = Re^{it},\ t \in [0,2\pi], \\
iii)\ z(t) = Re^{it},\ t \in [0,\frac{5}{2}\pi], \\
z(t) = z_2 t + (1-z_1)t,\ t \in [0,1],\quad iv)\ z(t) = t + it^2,\quad t \in [0,1], \\
z(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{i\pi t}, & t \in [0,1], \\ 2t-3, & t \in [1,2]. \end{array} \right.
\end{array}
\tag{9}
$$

Mostrare infine che una curva regolare (o regolare a tratti) γ è rettificabile, cioè ha una lunghezza l finita, data da

$$
l = \int_\gamma |dz| = \int_\gamma \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \tag{10}
$$

dove s è l'ascissa curvilinea della curva.

2) *La curva di Koch*, esempio di curva non rettificabile, è ottenuta attraverso il seguente procedimento. Dato il segmento di lunghezza l_0, lo si divide in tre parti uguali e si sostituisce il terzo centrale (di lunghezza $l_0/3$) con due segmenti di lunghezza $l_0/3$ come in figura. Per ogni segmento di lunghezza $l_0/3$ ottenuto si ripete il procedimento, dividendolo in tre parti uguali e sostituendo la parte centrale, di lunghezza $l_0/9$ con due segmenti di lunghezza $l_0/9$. E così via. La curva ottenuta dopo n iterazioni del procedimento è un curva regolare a tratti; nel limite $n \to \infty$ essa diventa la curva di Koch, che possiede le seguenti proprietà: i) è continua e iniettiva (è quindi una curva di Jordan), ii) ha una lunghezza infinita (mostrare che, dopo n iterazioni, la lunghezza della curva è $l_n = (4/3)^n l_0 \Rightarrow l_n \to \infty$ per $n \to \infty$), e quindi non è rettificabile, iii) non è derivabile da nessuna parte (basta osservare che una curva derivabile, a piccole distanze, somiglia a una retta, mentre la curva di Koch è invece sempre uguale a se stessa, a qualunque scala). La curva di Koch è un esempio molto semplice di frattale e viene usata anche come esempio semplificato di costa.

3) *Definizione di integrale $\int_\gamma f(z)dz$ di una funzione complessa di variabile complessa.*

Sia γ una curva continua e rettificabile di $\mathbb{C}$, parametrizzata dalla funzione $z(t):\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, con $z(t) = x(t) + iy(t),\ x(t), y(t) \in\ C[a,b]$. Sia inoltre $f(z)$ una funzione continua su γ. La partizione $t_0 = a, t_1, .., t_{n-1}, t_n = b$ del segmento $[a,b]$ induce una partizione $z_0, z_1, .., z_{n-1}, z_n$ del contorno γ, con $z_0 = z(a), z_n = z(b)$ e $z_k = z(t_k),\ k = 1, .., n$. Inoltre sia $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ un punto qualsiasi dell'arco $(z_{k-1}, z_k),\ k = 1, .., n$ e si consideri la somma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \Big(u(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) \Big) +$$

$$i \sum_{k=1}^{n} \Big(u(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) + v(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) \Big)$$

Introdotto $\mu = max_k |t_k - t_{k-1}|$, nel limite $\mu \to 0$ (con μn finito), la somma S_n tende ad un limite preciso, indicato con

$$\int_\gamma f(z)dz := \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Se, inoltre, $z(t)$ è differenziabile a tratti ($x(t), y(t) \in C^1[a,b]$ a tratti), allora $dz = z'(t)dt$ a tratti, ed il calcolo dell'integrale si riduce a quello del seguente integrale di una funzione complessa di variabile reale t:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

4) Si mostri che:

$$I_n := \int_{z_0}^{z} \zeta^n d\zeta = \frac{z^{n+1} - z_0^{n+1}}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

dove γ è un contorno qualsiasi che congiunge z_0 e z, costruendo un'opportuna somma che converga all'integrale da calcolare. Ad esempio, per $n = 0$:

$$I_0 \leftarrow S = \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1}) = (z_1 - z_0) - (z_2 - z_1) - .. = z - z_0.$$

Per $n = 1$, dato che entrambe le somme:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}), \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{N} z_k(z_k - z_{k-1})$$

convergono all'integrale: $S_1, S_2 \to I_1$, anche la loro media aritmetica convergerà ad esso: $S := (S_1 + S_2)/2 \to I_1$. D'altra parte:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} = \frac{z^2 - z_0^2}{2}.$$

Analogamente, per $n = 2$, entrambe le somme:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{N} z_{k-1}^2 (z_k - z_{k-1}), \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{N} z_k^2 (z_k - z_{k-1})$$

convergono all'integrale: $S_1, S_2 \to I_2$, e quindi $(S_1 + S_2)/2 \to I_2$. D'altra parte:

$$\frac{S_1 + S_2}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^2 + z_{k-1}^2}{2} (z_k - z_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^2 + z_k z_{k-1} + z_{k-1}^2}{3} (z_k - z_{k-1}) + \sum_{k=1}^{N} \frac{(z_k - z_{k-1})^3}{6}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(z_k - z_{k-1})^3}{6} \to \frac{z^3 - z_0^3}{3},$$

poichè, nel limite, l'ultima somma converge a 0. La generalizzazione ad un n generico è lasciata come esercizio.

5) Se γ è un contorno regolare a tratti di lunghezza finita L e $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni continue lungo γ, dimostrare le seguenti proprietà:

i) $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz$;

ii) $\int_\gamma [\alpha f(z)dz + \beta g(z)]dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta \int_\gamma g(z)dz$.

iii) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

iv) la disuguaglianza di Darboux:

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq ML,$$

dove M è il massimo di $|f(z)|$ su γ.

6) Si trovi una parametrizzazione dei seguenti contorni:
γ_1: arco di circonferenza da 2 a $2i$; γ_2: il segmento da 1 a $1 + i$
e la si usi per calcolare gli integrali, lungo γ_1 e γ_2, delle seguenti funzioni: z^2, $\bar{z}^3$, $|z|^2$.

Risp. $z^2: \ -\frac{8}{3}(1 + i), \ -1 + 2i/3; \ \ \bar{z}^3: \ 16, \ 5/4; \ \ |z|^2: \ -8(1 - i), \ 4i/3$

7) Si calcoli l'integrale della funzione $|z|^2$ lungo la spezzata γ_1 che congiunge i punti 0, 1 e $1 + i$ e lungo la spezzata γ_2 che congiunge i punti 0, i e $1 + i$. Si deduca che il valore dell'integrale della funzione $|z|^2$ lungo il contorno chiuso $\gamma_1 - \gamma_2$,dato dalla spezzata che congiunge i punti 0, 1, $1 + i$, i, 0, è diverso da zero e vale: $-1 + i$.

8) Si calcoli l'integrale della funzione $|z|^p$, $p = 1, 2, 3$ lungo l'arco di cfr. γ_3 da 1 a i e lungo la spezzata γ_4 che congiunge i punti 1, 0 e i. Si deduca che il valore dell'integrale della funzione $|z|^p$ lungo il contorno chiuso $\gamma_3 - \gamma_4$ è diverso da zero e vale, per $p = 1$: $(-1+i)/2$, per $p = 2$.....

Risp. $p = 1:\ \int_{\gamma_3} dz|z| = i - 1;\quad \int_{\gamma_4} dz|z| = (i-1)/2.\ \ p = 2:$ ....

) Si calcoli l'integrale delle funzioni i) $|z|$ e ii) $|z|^{-1}$ lungo il segmento da 1 a $1 + i$.
R. i) $\frac{i}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$; ii) $i \ln(1+\sqrt{2})$

9) i) Si mostri che, per $p \in \mathbb{Z}$,

$$\int_\gamma (z - z_0)^p dz = \begin{cases} R^{p+1} \frac{e^{i\alpha(p+1)} - 1}{p+1}, & p \neq -1; \\ i\alpha, & p = -1 \end{cases} \tag{11}$$

lungo un qualunque arco γ della circonferenza centrata in z_0 e di raggio R, che sottende l'angolo α, percorso in senso antiorario.

ii) Si deduca che

$$\oint_\gamma (z - z_0)^p dz = 2\pi i \delta_{p,-1},\ \ p \in \mathcal{Z}$$

lungo la circonferenza γ centrata in z_0 e di raggio R, percorsa in senso antiorario.

10) *Teorema di Cauchy* . Dimostrare il seguente teorema di Cauchy:
Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$, allora

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

lungo una qualunque curva chiusa γ regolare contenuta in $\mathcal{D}$.
usando la dimostrazione di Goursat, oppure il Lemma di Green più il fatto che, se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora $f'(z)$ è una funzione continua in $\mathcal{D}$

11) Si dimostri il seguente risultato.

Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso e z_0, z sono due punti di $\mathcal{D}$, allora l'integrale di $f(z)$ lungo una curva γ, interamente contenuta in $\mathcal{D}$, che congiunge i punti z_0 e z, non dipende dalla curva γ, ma solo dagli estremi di integrazione.

Si osservi che questo risultato implica *l'esistenza* di una funzione monodroma $F(z)$ in $\mathcal{D}$, definita da:

$$F(z) := F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(z')dz'.$$

12) *Teorema della primitiva* Si dimostri il seguente risultato.
Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso e sia $F(z)$ la funzione definita nell'esercizio precedente. Allora $F(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$ e ivi $F'(z) = f(z)$ (è, cioè, la primitiva di $f(z)$).

Si osservi che due primitive della stessa funzione analitica $f(z)$ differiscono per una costante:

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z} f(z')dz'.$$

13) Come applicazione del teorema di Cauchy e della primitiva, si calcolino i seguenti integrali del tipo $\int_\gamma f(z)dz$, dove:
i) $f(z) = z^n,\ n \in \mathcal{N}$; estremi d'integrazione: $1,\ i$
ii) $f(z) = 1/z$; estremi d'integrazione: $1,\ i$
iii) $f(z) = z^2 + z$; estremi d'integrazione: $1,\ 2i$
iv) $f(z) = \frac{z^2+1}{z}$; estremi d'integrazione: $2,\ 2i$
v) $f(z) = z^{1/2}$; estremi d'integrazione: $1,\ i$ ramo tale che: $1^{\frac{1}{2}} = 1$
vi) $f(z) = z^{\frac{1}{n}},\ n \in \mathcal{N}$; estremi d'integrazione: $1,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; ramo tale che: $1^{\frac{1}{n}} = 1$
(γ è un contorno qualsiasi che congiunge gli estremi indicati, che non passa per l'origine e che non gira intorno all'origine) nei seguenti due modi diversi:
a) usando il teorema della primitiva (il metodo più conveniente, se la primitiva è nota);
b) sciegliendo un contorno conveniente per fare calcoli.

Risp. *i)* $\frac{i^{n+1}-1}{n+1}$; *ii)* $i\frac{\pi}{2}$; *iii)* $-\frac{17}{6} - \frac{8i}{3}$; *iv)* $-4 + i\frac{\pi}{2}$; *v)* $\frac{2}{3}(e^{\frac{3}{4}\pi i} - 1)$; *vi)* $\frac{n}{n+1}[e^{i\frac{\pi}{4}\frac{n+1}{n}} - 1]$

14) *Teorema di Cauchy per domini multiplamente connessi.* Si dimostri il seguente risultato.
Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ multiplamente connesso (caratterizzato da un insieme finito di n "buchi") e sia γ una curva chiusa percorsa in senso antiorario, contenuta in $\mathcal{D}$ e contenente gli n buchi. Allora:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz,$$

dove γ_k è la curva chiusa che delimita il k-esimo buco, percorsa in senso antiorario.

15) Mostrare che:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso regolare che gira una volta intorno a z_0 in senso antiorario.

16) Come applicazione del teorema di Cauchy su domini multiplamente connessi, si calcolino i seguenti integrali del tipo $\int_\gamma f(z)dz$, dove:
i) $f(z) = 1/z$; estremi d'integrazione: $1,\ i$
ii) $f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$; estremi d'integrazione: $1,\ 1+i$
lungo un contorno γ qualsiasi che congiunge gli estremi indicati girando, rispettivamente:

i) m volte in senso antiorario e n volte in senso orario intorno a 0;
ii) m volte in senso antiorario intorno a i e n volte in senso orario intorno a 0;
(Suggerimento: si decomponga le funzioni razionali in fratti semplici).

Risp. *i)* $i\pi[\frac{1}{2} + 2(m-n)]$; *ii)* $2\pi(m+n) + i\log 2$

17) *Formula integrale di Cauchy.* Si dimostri che,
se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$, la curva γ ed il suo interno G sono contenuti in $\mathcal{D}$ e $z \in G$, allora:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}.$$

18) *Teorema della media.* Si dimostri la seguente proposizione.
i) *Se $f(z)$ è analitica all'interno del cerchio di raggio R di centro z_0 ed è continua sulla sua circonferenza, allora il valore al centro $f(z_0)$ è pari alla media aritmetica dei valori assunti sulla circonferenza*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

ii) *Se $u(x,y)$ è una funzione armonica all'interno della circonferenza di raggio R e centro (x_0, y_0), allora il valore al centro $u(x_0, y_0)$ è pari alla media aritmetica dei valori assunti sulla circonferenza*:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta) d\theta.$$

19) *Teorema del massimo e minimo modulo.* Si dimostri il seguente risultato.
i) *Se $f(z)$ è analitica nel dominio $\mathcal{D}$ ed è continua in $\partial\mathcal{D}$, allora $|f(z)|$ non può raggiungere il suo massimo (ed il suo minimo) in un punto interno.* (Per dimostrare il teorema del minimo modulo, basta ripetere le considerazioni svolte nel teorema del massimo per la funzione $1/f(z)$, supponendo che non abbia zeri in $\mathcal{D}$).
ii) *Se la funzione $u(x,y)$ è armonica in un dominio di $\mathbb{R}^2$, allora $u(x,y)$ non può raggiungere il suo massimo ed il suo minimo in un punto interno.*

20) *Formula integrale di Cauchy per la derivata n-esima.* Si dimostri la seguente proposizione.
Se $f(z)$ è analitica nel dominio $\mathcal{D}$, essa ammette derivate $f^{(n)}(z)$ di ogni ordine in $\mathcal{D}$ (quindi analitiche in $\mathcal{D}$), che hanno la seguente rappresentazione integrale:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}.$$

21) Si dimostrino i seguenti teoremi di Liouville.
i) 1^0 *teorema di Liouville.* Una funzione analitica e limitata in $\mathbb{C}$ è costante.

i) 2^0 *teorema di Liouville.* Se $f(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$ e

$$|f(z)| < M|z|^m, \quad |z| \to \infty, \quad M > 0,\ m \in \mathcal{N},$$

allora $f(z)$ è un polinomio di grado $\leq m$.

22) *Teorema di Morera.* Si dimostri il seguente risultato.
Se $f(z)$ è continua nel dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso, e se $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ lungo qualunque curva chiusa γ contenuta in $\mathcal{D}$, allora $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

23) *Integrale al valor principale.*
a) *Definizione.* Si consideri un contorno γ di estremi z_a e z_b in $\mathcal{C}$ ed una funzione $g(z)$ che ha una singolarità non sommabile in un punto $z_0 \in \gamma$ (ad es.: $g(z) \sim (z - z_0)^{-p},\ p \geq 1,\ z \sim z_0$). Si consideri una circonferenza centrata in z_0 di raggio ϵ e siano z_1, z_2 i punti di intersezione di tale circonferenza con la curva γ, sia inoltre γ_1 il sottoinsieme di γ che ha per estremi z_a, z_1 e γ_2 il sottoinsieme di γ che ha per estremi z_2, z_b. Se il limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz)$$

esiste (attraverso un meccanismo di cancellazione delle singolarità dei due integrali), esso viene definito *integrale nel senso del valor principale di $g(z)$ lungo γ* e indicato nel seguente modo:

$$P \int_\gamma g(z)dz := \lim_{\epsilon \to 0} (\int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz).$$

b) Solitamente $g(z) = f(z)/(z - \zeta),\ \zeta \in \gamma$ e l'integrale al valor principale diventa:

$$P \int_\gamma \frac{f(z)}{z - \zeta} dz, \quad \zeta \in \gamma.$$

Si dimostri che tale integrale esiste se e solo se $f(z)$ è una funzione di Lipshitz (Holder) su γ; cioè se:
esistono due costanti positive κ, μ tali che

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \kappa |z_1 - z_2|^\mu, \quad z_1, z_2 \in \gamma$$

24) Si consideri l'integrale

$$I := \int_a^b \frac{dt}{(t - x)^n}, \quad x \in [a, b].$$

i) È definito come integrale improprio? Se sì, quanto vale?
ii) È definito come integrale nel senso del valor principale? Se sì, quanto vale?

Risp. i) L'integrale improprio non è definito perchè, per $\epsilon \to 0^+$, entrambi gli integrali:

$$\int_a^{x-\epsilon} \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{(-)^n}{1-n}\left[\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{\epsilon^{n-1}}\right], & n \neq 1, \\ \ln\epsilon - \ln(x-a), & n = 1, \end{cases} \tag{12}$$

$$\int_{x+\epsilon}^{b} \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{\epsilon^{n-1}}\right], & n \neq 1, \\ \ln(b-x) - \ln\epsilon, & n = 1 \end{cases} \tag{13}$$

divergono. Il valor principale dell'integrale è invece ben definito se e solo se n è dispari. In questo caso:

$$I = P\int_a^{b} \frac{dt}{(t-x)^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{(a-x)^{n-1}}\right], & n \neq 1, \\ \ln(b-x) - \ln(x-a), & n = 1. \end{cases} \tag{14}$$

25) *Rappresentazione integrale di Cauchy di una funzione analitica.* Si consideri la funzione $\Phi(z)$ definita da:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-z}, \quad z \notin \gamma,$$

con $f(z)$ funzione di Lipshitz sul contorno chiuso γ, percorso in senso antiorario. Si dimostri i seguenti risultati.
a) $\Phi(z)$ è analitica $\forall\ z \notin \gamma$ e

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i z}\oint_\gamma \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}, \quad z \notin \gamma.$$

(La dimostrazione è molto simile a quella relativa alla formula integrale di Cauchy).
b) $\Phi(z) = (1/2\pi i z)\oint_\gamma f(z)dz + o(1/|z|), \quad |z| >> 1.$
c) *Formule di Plemelj - Sokhotski* Il limite in cui z tende ad un punto del contorno è descritto dalle seguenti formule:

$$\lim_{z\to\zeta\in\gamma}\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}P\oint_\gamma \frac{f(z')}{z'-\zeta} \pm \frac{1}{2}f(\zeta), \quad \zeta \in \gamma,$$

dove i segni + e - stanno a indicare i limiti per z che tende al punto ζ del contorno γ rispettivamente da sinistra e da destra, rispetto al verso positivo di percorrenza del contorno (la dimostrazione è assai semplice se si assume che $f(z)$ sia analitica in una striscia, piccola a piacere, intorno alla curva γ; farlo in questo modo).

26) *Integrali su archi infiniti ed infinitesimi.* Sia γ_R è un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R. Dimostrare i seguenti risultati.

a) Se $zf(z) \to 0$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z| = R \to \infty$ (cioè se $|zf(z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to \infty$), allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

b) Se $zf(z) \to A$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z| = R \to \infty$ (cioè se $|z(f(z) - A/z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to \infty$), allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = i\alpha A,$$

dove α è l'angolo sotteso da γ_R.
c) Se $(z - z_0)f(z) \to 0$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z - z_0| = R \to 0$ (cioè se $|(z - z_0)f(z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to 0$), allora

$$\lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

d) Se $(z - z_0)f(z) \to A$ uniformemente sull'arco γ_R, per $|z| = R \to 0$ (cioè se $|(z - z_0)(f(z) - A/(z - z_0))| < \phi(R) \to 0$, per $R \to 0$), allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = i\alpha A,$$

dove α è l'angolo sotteso da γ_R.

27) Si mostri che, per le seguenti funzioni $f(z)$:
i) $f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}$; *ii)* $f_2(z) = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}(z+1)}$, *iii)* $f_3(z) = \frac{1}{(z+i)\log z}$
vale la proprietà che $zf(z) \to 0$ uniformemente su γ_R, per $|z| = R \to \infty$ e per $|z| \to 0$, dove γ_R è un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R, e che quindi:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Risp. Usando la disuguaglianza triangolare: i) $|zf_1(z)| \le \frac{R}{|R^2-1|} \to 0$ sia per $R \to 0$ che per $R \to \infty$; ii) $|zf_2(z)| \le \frac{\sqrt{R}}{|R-1|} \to 0$ sia per $R \to 0$ che per $R \to \infty$; iii) se $0 \le \theta < 2\pi$, allora $|zf_3(z)| \le \frac{R}{|R-1||\,|\log R|-2\pi|} \to 0$ sia per $R \to 0$ che per $R \to \infty$.

28) Si mostri che, se $f(z) = 2(z + i)^{-1}$, allora

$$i)\ \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\alpha, \quad ii)\ \lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0, \tag{15}$$

dove γ_R è un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R, e α è l'angolo sotteso da γ_R.
R. $|zf(z)| \le \frac{2R}{|R-1|} \to 0$ per $R \to 0$ (e quindi vale il punto ii)), mentre tende a

2 per $z \to \infty$. Inoltre $f(z) = 2/z + \tilde{f}(z)$, dove $\tilde{f}(z) = -2i(z(z+i))^{-1}$. Poiché $|z\tilde{f}(z)| \le \frac{2}{|R-1|} \to 0$ per $R \to \infty$, allora vale i) (si veda il punto b) dell'esercizio 26).

29) Dimostrare il *Lemma di Jordan*: Sia γ_R la semi-circonferenza di centro 0 e raggio R del semipiano superiore; se $f(z) \to 0$ uniformemente su γ_R (cioè se $|f(z)| < \phi(R) \to 0$, per $R \to \infty$), allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{ikz} f(z) dz = 0, \quad k > 0.$$

30) Sia $\tilde{\gamma}_R$ l'arco di circonferenza di centro 0, raggio R del primo quadrante. Dimostrare che, se $f(z)$ è uniformemente limitata su $\tilde{\gamma}_R$ (cioè se $|f(z)| < M$ su $\tilde{\gamma}_R$, per $R > R_0$), allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} e^{iz^2} f(z) dz = 0.$$

31) *Integrali di Fresnell.* Usando la formula $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ ed il risultato dell'esercizio precedente, mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2)dx = \int_{\mathbb{R}} \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \tag{16}$$

3.1.6 Serie di funzioni; serie di Taylor, di Laurent, singolarità isolate e teorema dei residui

In molte applicazioni, le funzioni $f(z)$ sono definite da serie o integrali:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_n c_n (z-z_0)^n, && \text{rappresentazione in serie di potenze} \\ f(z) &= \sum_n f_n(z), && \text{rappresentazione più generale in serie di funzioni} \\ f(z) &= \int_\gamma \varphi(z,\zeta)d\zeta, && \text{rappresentazione integrale,} \end{aligned} \tag{17}$$

dove γ è un contorno opportuno del piano complesso, e $f_n(z)$ e $\varphi(z,\zeta)$ sono funzioni elementari aventi proprietà note. Per le rappresentazioni in serie di funzioni abbiamo le seguenti domande. Data la somma parziale

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z), \tag{18}$$

- Per quali valori di z il limite $f(z)$ di $S_n(z)$ esiste per $n \to \infty$? Cioè dove è convergente la serie e a che cosa?
- Di che tipo di convergenza si tratta?
- Se la successione delle somme parziali $\{S_n(z)\}$ è continua ed analitica, quando possiamo estendere al limite $f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$ tali proprietà?

Analoghe domande per la rappresentazione integrale.

3.1.7 Riepilogo di nozioni note sulle serie di funzioni

1) Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, ricordare le seguenti definizioni relative alle sue proprietà di convergenza.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ di funzioni, definite in $A \subset \mathbb{C}$, converge a $f(z)$ in $z \in A$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(z)\}$ converge a $f(z)$ in A; cioè se, $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $N(\varepsilon, z) > 0$ tale che, se $n > N(\varepsilon, z)$, allora

$$|S_n(z) - f(z)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in A \subset \mathbb{C}. \tag{19}$$

b) La convergenza è assoluta se $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge. Come è noto, la convergenza assoluta implica la convergenza (mostrarlo!), ma non il viceversa (es.: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ converge, ma non assolutamente).

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ di funzioni, definite in $A \subset \mathbb{C}$, converge uniformemente a $f(z)$ in A se, $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $N(\varepsilon, A) > 0$ tale che, se $n > N(\varepsilon, A)$, allora

$$|S_n(z) - f(z)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in A \subset \mathbb{C}. \tag{20}$$

d) La convergenza è totale se è assoluta e uniforme.

2) *M-test di Weierstrass.* Il criterio principe di convergenza totale è il cosidetto M-test di Weierstrass. Mostrare che, se i termini della serie sono maggiorati in $A \subset \mathbb{C}$, in valore assoluto, da un certo n in poi, dai termini di una serie numerica convergente, allora la serie converge totalmente in A.
Risposta:

$$|f(z) - S_n(z)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \tag{21}$$

per $n > N_\varepsilon$.

3) *La serie geometrica.* Mostrare che, per la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, si ha convergenza assoluta a $(1-z)^{-1}$ per $|z| < 1$, e uniforme per $|z| \leq \rho < 1$.
R.

$$\begin{aligned} &S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} z^k = \tfrac{1-z^{n+1}}{1-z}, \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \tfrac{1}{1-z}, \text{ se } |z| < 1 \quad \text{convergenza.} \\ &\sum_{k=1}^{n} |z|^k = \tfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} \to \tfrac{1}{1-|z|}, \text{per } n \to \infty, \text{ se } |z| < 1 \quad \text{convergenza assoluta.} \end{aligned} \tag{22}$$

ma non uniforme, poichè $\sup\limits_{|z|<1} |S_n(z) - f(z)| = \sup\limits_{|z|<1} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = \infty \ \forall n$. La convergenza diventa uniforme se si impedisce a z di "avvicinarsi troppo" a 1:

$$|\sum_{n=1}^{\infty} z^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n < \infty, \quad \text{se } |z| \leq \rho < 1. \tag{23}$$

3) Si mostri che la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) = -\frac{1}{1+nz} + \frac{1}{1+(n-1)z}$$

è convergente in un intorno $\mathcal{U}$ di $z = 0$ contenente $z = 0$, ma è uniformemente convergente solo escludendo $z = 0$; cioè in $\mathcal{U} - \{|z| < \epsilon\}$.

4) L'uniforme convergenza è la proprietà cruciale che permette di trasferire alla somma della serie le proprietà della somma parziale. Dimostrare il seguente teorema.
Sia $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n(z)$ la serie di funzioni $f_n(z)$ uniformemente convergente in $A \subset \mathbb{C}$, e sia $f(z)$ la somma di tale serie. Allora:
i) se le funzioni $f_n(z)$ sono continue, allora la somma è continua.
ii) se le funzioni $f_n(z)$ sono continue sulla curva γ, allora è possibile scambiare la somma infinita con l'integrale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz = \int_{\gamma} (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z))dz = \int_{\gamma} f(z)dz \tag{24}$$

iii) se le funzioni $f_n(z)$ sono analitiche nel dominio A, allora la somma è analitica in A.
Dimostrazione. La dimostrazione dei punti i) e ii) è come quella del caso reale, già trattato in altri corsi. Per il punto iii), consideriamo un contorno chiuso $\gamma \subset A$. Allora:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\gamma} f_n(z)dz = 0, \tag{25}$$

dove si è usato prima lo scambio di integrale e somma, e poi l'analiticità di $f_n(z)$ ed il teorema di Morera.

5) Determinare il raggio di convergenza R di una serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ in modo "qualitativo".
R. Dalla

$$|c_n(z-z_0)^n| = (\sqrt[n]{|c_n|}|z-z_0|)^n \tag{26}$$

segue la convergenza assoluta se, per n sufficientemente grande:

$$\sqrt[n]{|c_n|}|z-z_0| < 1 \;\Rightarrow\; |z-z_0| < R \sim \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \;\Rightarrow\; |c_n| \sim R^{-n} \;\Rightarrow\; |\frac{c_{n+1}}{c_n}| \sim R^{-1} \tag{27}$$

Più rigorosamente, si ha che (teorema di Cauchy-Hadamard dell'esercizio seguente):

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup |\frac{c_{n+1}}{c_n}| \tag{28}$$

(si ricorda che
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n \equiv \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{k\geq n} a_k)$,
ii) se $a = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$, allora $\forall\varepsilon > 0$, esiste un $N_\varepsilon > 0$ tale che $a_n > a - \varepsilon$ per $n > N_\varepsilon$).

6) *Teorema di Cauchy-Hadamard (Abel).* Si dimostri il seguente teorema.
Data la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, *sia* R *il numero positivo definito da*

$$\lim_{n\to\infty} sup(|c_n|^{1/n}) = \frac{1}{R};$$

allora la serie converge assolutamente per $|z-z_0| < R$, *uniformemente per* $|z-z_0| \leq \rho < R$, *e diverge per* $|z-z_0| > R$. R è detto *raggio di convergenza della serie.*
Dim. La dimostrazione non differisce da quella nota nel caso reale.

7) Conseguenza immediata di questo teorema è il primo teorema di Abel:
Se la serie di potenze converge in $z_1 \neq z_0$, essa converge assolutamente nel cerchio $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.
Dim. z_1 non può essere esterno al cerchio di convergenza, perchè la serie divergerebbe; quindi z_1 è interno o sul bordo. In entrambi i casi, $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.

8) Mostrare che, se la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ è assolutamente convergente per $|z-z_0| < R$ alla funzione somma $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

allora:
i) la serie è uniformemente convergente in ogni cerchio $|z-z_0| \leq \rho < R$;
ii) la somma $f(z)$ è analitica in $\{z: \;|z-z_0| < R\}$, la derivata $n-esima$ di $f(z)$ è anch'essa analitica in $\{z: \;|z-z_0| < R\}$ e ammette lo sviluppo

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdot\cdot(k-n+1)c_k(z-z_0)^{k-n},$$

il cui raggio di convergenza è ancora R.

iii) Il coefficiente c_n può essere riscritto nella forma $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, e quindi:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Quest'ultimo sviluppo è la ben nota *serie di Taylor della somma $f(z)$, di centro z_0 e raggio R.* Quindi:
Ogni serie di potenze positive con raggio di convergenza $R > 0$ è la serie di Taylor della sua somma $f(z)$, che è analitica per $|z - z_0| < R$

9) *Unicità dello sviluppo di Taylor.* Usare il risultato del precedente esercizio per mostrare che, se le serie di potenze $\sum_n a_n(z-z_0)^n$, $\sum_n b_n(z-z_0)^n$ hanno la stessa somma e lo stesso raggio di convergenza, allora $a_n = b_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

10) i) Mostrare che: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}+O(n^{-3}))$, $n >> 1$; ii) dedurre la formula di Bernoulli: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ per $n \to \infty$, e iii) la sua conseguenza: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$ per $n \to \infty$.

11) Dimostrare che, se la serie numerica $\sum_n c_n$ è assolutamente convergente, allora la serie di funzioni $\sum_n c_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente e uniformemente (totalmente) per $|z - z_0| \le 1$.

12) Date le seguenti serie di Taylor:
i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$; *ii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$; *iii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nz)^n$; *iv)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$, *v)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}(z-z_0)^n$, $a \in \mathbb{R}$; *vi)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n^2+1}$; *vii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\log n)^n}$; *viii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(z-z_0)^n$; *ix)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^a}$, $a > 0$; *x)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$; *xi)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$ *xii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^n}{(n+1)!} z^n$; *xiii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{bn}}{(n!)^a}(z-z_0)^n$, $a, b > 0$; *xiv)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}(z-z_0)^n$; *xv)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^p 3^n n!}{n^n}(z-z_0)^n$, $p \in \mathbb{Z}$;
a) usare la formula di Cauchy-Hadamard e/o quella di D'Alambert:

$$\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} sup \ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

per determinarne il raggio di convergenza R e trovare le regioni di $\mathbb{C}$ nelle quali converge (ass. e/o unif.) o diverge. Usare, se necessario, la formula di Stirling: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+O(1/n))$, $n \gg 1$.
b) Studiare il comportamento delle serie sulla circonferenza $|z-z_0| = R$ (potrebbe essere utile la formula di Stirling).

Risp. *a)* : *i)* $R = \infty$; *ii)* $R = 1$; *iii)* $R = 0$; *iv)* $R = 1$; *v)* $R = e/|a|$; *vi)* $R = 1$; *vii)* $R = \infty$; *viii)* $R = 1$; *ix)* $R = \infty$; *x)* $R = 1/4$; *xi)* $R = 1$; *xii)* $R = 1/(2e)$; *xiii)* $R = e^{-a}$ $(b = a)$, $R = 0$ $(b > a)$, $R = \infty$ $(b < a)$; *xiv)* $R = \frac{e}{3}$; *xv)* $R = \frac{e}{3}$.
b) : *ii) diverge per* $|z| = 1$; *iv)* $a > 1$: *converge ass. e unif.*; $0 < a \le 1$: *diverge in* $z = 1$, *converge per* $|z| = 1$, $z \ne 1$; $a \le 0$: *diverge*; *xiii)* $b =$

a, $0 < a \leq 2$, *conv. non ass. se* $z - z_0 \neq 1$, *div. per* $z - z_0 = 1$; $a > 2$: *con. ass. unif.*; *xiv) div.*; *xv)* $p \geq -\frac{1}{2}$: *div.*, $-\frac{3}{2} < p < -\frac{1}{2}$: *con. non ass. se* $z - z_0 \neq \frac{e}{3}$, *div. per* $z - z_0 = \frac{e}{3}$; $p < -\frac{3}{2}$: *conv. ass. unif.*

13) Mostrare che il prodotto di due serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergenti nello stesso disco è dato dalla serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k,$$

essa stessa convergente nello stesso disco. Calcolare esplicitamente i primi 4 coefficienti c_n, $n = 0, 1, 2, 3$ in funzione di a_n e b_n.

14) Scrivere il rapporto tra due serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) / \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right), \quad a_0 \neq 0$$

convergenti nello stesso disco, come serie di potenze, esprimendo i primi 3 coefficienti b_0, b_1, b_2 in funzione dei coefficienti c_n e a_n. Suggerimento: utilizzare i risultati dell'esercizio precedente.

Risp. $b_0 = \frac{c_0}{a_0}$, $b_1 = \frac{c_1 a_0 - c_0 a_1}{a_0^2}$, $b_2 = \frac{a_1^2 c_0 - a_0 a_2 c_0 - a_0 a_1 c_1 + a_0^2 c_2}{a_0^3}$

15) Se R è il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, mostrare che il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^m z^n$ è R^m.

16) *Teorema sullo sviluppo di Taylor.* Si mostri che ogni funzione analitica in $\mathcal{D}$ semplicemente connesso è sviluppabile in serie di Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

in ogni disco $\{|z - z_0| < R\} \subset \mathcal{D}$, dove γ è un qualunque contorno chiuso contenuto nel disco, che gira intorno a z_0 una volta in senso antiorario. Questo risultato, ottenibile partendo dalla formula integrale di Cauchy, è la controparte del risultato contenuto nell'esercizio teorico **8)** ii).

17) Trovare le rappresentazioni in serie di potenze di Mc Laurin (serie di Taylor di centro $z_0 = 0$) delle seguenti funzioni elementari
i) e^{cz}; *ii)* e^{cz^2}; *iii)* $\sin z$; *iv)* $\cos z$; *v)* $\sinh z$; *vi)* $\cosh z$; *vii)* $\cosh z^{\frac{1}{2}}$
e determinare i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. *i)* $e^{cz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} z^n$, $R = \infty$; *ii)* $e^{cz^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n z^{2n}}{n!}$, $R = \infty$; *iii)* $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $R = \infty$; *iv)* $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $R = \infty$; *v)* $\sinh z =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$; *vi*) $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$; *vii*) $\cosh z^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}$, $R = \infty$.

18) Costruire le serie di Taylor di centro $z_0 = 0$ delle seguenti funzioni:
i) $\frac{\sin z}{z}$; *ii*) $\frac{\cosh z - 1}{z^2}$; *iii*) $\frac{e^z}{1-z}$ e determinare i raggi di convergenza di tali serie.

Risp. *i*) $\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$, $R = \infty$; *ii*) $\frac{\cosh z - 1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+2)!}$, $R = \infty$; *iii*) $\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} (k!)^{-1}$, $R = 1$.

19) Costruire le serie di Taylor centrate in z_0 dei seguenti rami di funzioni polidrome:
i) $\log z$, $z_0 = 1$ ($\log 1 = 0$); ii) $\log(1-z)$, $z_0 = 0$ ($\log 1 = 0$); iii) $(z+1)^{\frac{1}{n}}$, $z_0 = 0$ ($1^{\frac{1}{n}} = 1$), e determinare i raggi di convergenza di tali serie.

Risp. *i*) $\log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$, $R = 1$; *ii*) $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} (-z)^n$, $R = 1$; *iii*) $(z+1)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/n}{k} z^k$, $R = 1$.

20) *Regola di De L'Hopital.* Se $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni analitiche nell'intorno di z_0 e se

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) = 0, \quad k = 0, 1, .., n, \qquad g^{(n+1)}(z_0) \neq 0,$$

si mostri che

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{g^{(n+1)}(z_0)}$$

21) Sia $\mathcal{D}$ un dominio. Si mostri che le seguenti tre affermazioni:
i) $f(z)$ è derivabile in $\mathcal{D}$ (Riemann);
ii) $f(z)$ è continua in $\mathcal{D}$ e il suo integrale lungo un contorno chiuso qualsiasi contenuto in $\mathcal{D}$ è nullo (Cauchy-Morera);
iii) $f(z)$ è sviluppabile in serie di potenze positive, convergente in ogni disco contenuto in $\mathcal{D}$ (Weierstrass);
sono tre modi equivalenti di caratterizzare una funzione analitica in $\mathcal{D}$ (noi abbiamo scelto il primo, all'inizio del corso).

22) *Serie di potenze bilatera.* Si consideri la serie di potenze positive e negative (bilatera)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \qquad (29)$$

i) Mostrare che la sua convergenza equivale alla contemporanea convergenza della serie di potenze positive e negative.

Sia ρ_1 il raggio di convergenza della serie di potenze negative:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}(z-z_0)^{-m}, \quad |z-z_0|^{-1} < \rho_1 \tag{30}$$

e ρ_2 il raggio di convergenza della serie di potenze positive. ii) Mostrare che, se $1/\rho_1 < \rho_2$, allora la serie bilatera converge uniformemente per $1/\rho_1 \leq a < |z-z_0| \leq b < \rho_2$ e assolutamente per $1/\rho_1 < |z-z_0| < \rho_2$, e ivi definisce una funzione analitica. Viceversa, vale il seguente teorema di Laurent.

23) *Teorema sullo sviluppo di Laurent.* Si mostri che ogni funzione $f(z)$ analitica in una corona circolare di centro z_0 e raggi $R_1 < R_2$ può essere sviluppata nella serie di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso, percorso in senso antiorario, contenuto all'interno della corona circolare, che gira una volta intorno al buco della stessa.

24) *Singolarità isolate.* Dare la definizione di punto regolare, singolarità isolata, polo di ordine N e singolarità essenziale.
R. Se la funzione $f(z)$ è analitica in una corona circolare di raggio interno $R_1 = 0$: $0 < |z-z_0| < R_2$, allora z_0 è una singolarità isolata per $f(z)$ (esiste un intorno di z_0 che contiene SOLO questa singolarità). $f(z)$ è quindi sviluppabile in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R_2, \tag{31}$$

e si possono presentare tre casi.
1) $f(z)$ è in realtà **regolare** in z_0, se il suo sviluppo di Laurent centrato in z_0 contiene solo potenze non negative di $z-z_0$ ($c_n = 0$ per $n < 0$):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R_2. \tag{32}$$

2) $f(z)$ ha un **polo di ordine** $N \in \mathbb{N}^+$ in z_0, se $c_{-N} \neq 0$ e $c_n = 0$ per $n < -N$. In altre parole, esiste un numero finito di potenze negative nello sviluppo, e la potenza "più negativa" è $-N$:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R_2. \tag{33}$$

La somma $\sum\limits_{n=-N}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ è la *parte singolare* dello sviluppo; la somma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ è la *parte regolare*.

3) $f(z)$ ha una **singolarità essenziale** in z_0 se il suo sviluppo di Laurent contiene infinite potenze negative.
Esempio: $e^{1/z}$ ha una singolarità essenziale in $z = 0$, poiche'

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{z^m}{|m|!}, \quad |z| > 0 \quad (R_1 = 0, R_2 = \infty). \tag{34}$$

25) *Il residuo di una funzione.* Sia $f(z)$ una funzione che ha una singolarità isolata (polare od essenziale) in $z_0 \in \mathbb{C}$ ed è analitica in un suo intorno. Si definisce residuo di $f(z)$ in z_0 il seguente integrale:

$$Res\,(f(z), z_0) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz, \tag{35}$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso , percorso in senso antiorario, che gira intorno a z_0 una volta, senza includere altre eventuali singolarità (per il teorema di Cauchy, l'integrale non dipende dai dettagli del contorno e quindi il residuo è definito senza ambiguità).
i) Si usi la teoria delle serie di Laurent per mostrare che:

$$Res\,(f(z), z_0) = c_{-1},$$

dove c_{-1} è il coefficiente della potenza -1 dello sviluppo di Laurent di f nell'intorno di z_0.

26) *Teorema dei residui.* Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate. Allora

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\,(f(z), z_j)\,,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso percorso in senso antiorario e contenuto in $\mathcal{D}$, e z_j, $j = 1, .., n$ sono le singolarità isolate **contenute** all'interno di γ.

27) *Residuo all'∞ e teorema sulla somma dei residui in $\bar{\mathbb{C}}$.*
i) Si consideri una funzione $f(z)$ che all'∞ possiede al più una singolarità isolata, polare o essenziale, e si osservi che la definizione di residuo, precedentemente data si generalizza al caso in cui $z_0 = \infty$ così:

$$Res\,(f(z), \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z)dz,$$

dove C_R è una circonferenza centrata in 0 e di raggio R sufficientemente grande da non contenere singolarità di f al finito, e *percorsa in senso orario.*
ii) Si mostri che, attraverso il cambiamento di variabili $t = 1/z$, un'eventuale singolarità in $z = \infty$ della funzione $f(z)$ diventa una singolarità in $t = 0$ della funzione $f(1/t)$, e che:

$$Res\,(f(z), \infty) = -Res\left(\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right), 0\right).$$

Si osservi quindi che la funzione $f(z)$ può avere un residuo non nullo all'∞ pur essendo analitica all'∞; ad esempio:

$$Res\left(\frac{z+1}{z},\infty\right)=-1.$$

iii) *Teorema sulla somma dei residui.* Si dimostri che, se la funzione $f(z)$ è analitica in $\bar{\mathbb{C}}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_j,\ j=1,..,n$ e della singolarità isolata all'∞, allora la somma dei residui in tutte queste singolarità è 0:

$$\sum_{j=1}^{n} Res\,(f(z),z_j)+Res\,(f(z),\infty)=0.$$

28) Determinare gli sviluppi della funzione $1/(1-z)$ in serie di potenze con centro $z_0=0$ e $z_0=1$ convergenti in tutto il piano complesso.

Risp. $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n,\ \ |z|<1,\ \ Taylor;\quad \frac{1}{1-z}=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} z^n,\ \ |z|>1,\ \ Laurent.$

29) Sviluppare la funzione $f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}$ in serie di potenze centrate in $z=0$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-2^{-(n+1)})z^n,\ \ |z|<1;\quad -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} z^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ 1<|z|<2;\quad \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2^{n+1}}-1)z^n,\ |z|>2.$

30) Sviluppare la funzione $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$ in serie di potenze centrate in $z=1$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza.

Risp. $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n},\ |z-1|<1;\quad \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^{2n},\ |z-1|>1.$

31) Sviluppare la funzione

$$f(z)=\frac{3}{z(z-1)(z-2)}$$

in serie di potenze con centro $z_0=0,1,2$ in tutto il piano complesso.

32) Date le funzioni $f_1(z)=e^{az}/z^2,\ f_2(z)=e^{\frac{1}{z}},\ f_3(z)=\sin(1/z),\ f_4(z)=e^{4z^2}/z^2,\ f_5(z)=e^{4z^3}/z^4$

i) ottenere i loro sviluppi in serie di potenze in tutto il piano complesso, centrati in $z_0=0$ e in $z_0=\infty$.

ii) Studiare le loro singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui al finito e all'∞, verificando il teorema sulla somma dei residui.

Risp. *i)* $e^{az}/z^2=\sum\limits_{n=-2}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{(n+2)!}z^n,\ |z|>0,$ *polo doppio in* $0,\ Res(f_1,0)=a,$

$\zeta = 1/z$: $\zeta^2 e^{a/\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{2} \frac{a^{2-n}}{(2-n)!}\zeta^n$, *sing. ess. in* $z=\infty$, $Res(f_1,\infty) = -Res(e^{a/\zeta},0) = -a$.

ii) $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{z^m}{(-m)!}$, $|z|>0$, *sing. ess. in* 0, $Res(f_2,0)=1$,

$\zeta = 1/z$: $e^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}$, *anal. in* $z=\infty$, $Res(f_2,\infty) = -Res(\zeta^{-2}e^\zeta,0) = -1$.

iii) $\sin(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$, *sing. ess. in* 0, $Res(f_3,0)=1$,

$\zeta = 1/z$: $\sin\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!}\zeta^{2n+1}$, *anal. in* $z=\infty$, $Res(f_3,\infty) = -Res(\zeta^{-2}\sin\zeta,0) = -1$.

iv) $e^{4z^2}/z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} z^{2(n-1)}$, $0<|z|<\infty$, *polo doppio in* 0, $Res(f_4,0)=0$,

$\zeta = 1/z$: $\zeta^2 e^{4\zeta^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}\zeta^{2(1-n)}$, *sing. ess. in* $z=\infty$, $Res(f_4,\infty) = -Res(e^{4\zeta^{-2}},0) = 0$.

v) $e^{4z^3}/z^4 = \sum_{0}^{\infty} \frac{4^n z^{3n-4}}{n!}$, $0<|z|$, *polo di ordine* 4, $Res(f_5,0)=4$,

$\zeta = 1/z$: $f_5(1/\zeta) = \sum_{0}^{\infty} \frac{4^n\zeta^{-3n+4}}{n!}$, *sing. ess. in* $z=\infty$, $Res(f_4,\infty) = -4$

33) Date le funzioni $f_k(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z^k}$, $k=1,2$, studiare le loro singolarità in $\bar{\mathcal{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $f_1(z)$: $z=0$ sing. essenziale, $\text{Res}(f_1(z),0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e-1$; $z=1$ polo semplice, $\text{Res}(f_1(z),1) = -e$; quindi $\text{Res}(f_1(z),\infty) = 1$.

$f_2(z)$: $z=0$ sing. essenziale, $\text{Res}(f_2(z),0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \sinh(1)$; $z=1$ polo semplice, $\text{Res}(f_2(z),1) = -e/2$; $z=-1$ polo semplice, $\text{Res}(f_2(z),-1) = e^{-1}/2$; quindi $\text{Res}(f_2(z),\infty) = 0$.

34) Sviluppare la funzione $f(z) = (z^2+1)^{-1}$ in serie di potenze, centrate in $z_0 = i$, in tutto il piano complesso, calcolandone i corrispondenti raggi di convergenza. Calcolare inoltre i residui nei punti singolari.

Risp. $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i(z-i)} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{i}{2})^n (z-i)^n$, $0<|z-i|<2 \Rightarrow Res(i) = \frac{1}{2i}$;

$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i(z-i)} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-2i)^{-n-2}(z-i)^n$, $2<|z-i|$.

35) Studiare le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{4z+1}{z^5+2z^3+z} = \frac{4z+1}{z(z+i)^2(z-i)^2}$$

in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui, verificando il teorema sulla somma dei residui.

Risp. 0 *polo sempl.* $Res(0) = 1$; $\pm i$ *poli doppi* $Res(\pm i) = -\frac{1\pm 2i}{2}$

36) Studiare le singolarità delle funzioni $f_1(z) = \frac{1}{\sin z}$, $f_2(z) = \frac{1}{\cos z}$, $f_3(z) = \tan z$, $f_4(z) = \frac{1}{\cos z}$, $f_5(z) = \frac{z}{\cosh z - 1}$, $f_6(z) = \frac{z+1}{1-\cos z}$ in $\overline{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui. Mostrare, in particolare, che il punto $z = \infty$ è un punto di accumulazione di singolarità polari e che quindi non ammette sviluppo di Laurent e non esiste il suo residuo.

Risp. $\frac{1}{\sin z}$: $z_n = \pi n$, *poli sempl.*, $c_{-1} = (-)^n$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
$\frac{1}{\cos z}$: $z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, *poli sempl.*, $c_{-1} = (-)^{n+1}$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
$\tan z$: $z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, *poli sempl.*, $c_{-1} = -1$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
lungo asse reale, per $z \to 0$: $\tan z \to i$, *da sopra*, $\tan z \to -i$, *da sotto*
$\frac{z}{\cos z}$: $z_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, *poli sempl.*, $c_{-1} = (-)^{n+1}\frac{\pi}{2}(2n+1)$; ∞ *punto d'accum. dei poli sempl.*
$\frac{z}{\cosh z-1}$: $z = 0$ polo semplice, Res(0) = 2. $z_n = 2n\pi i$, $n = \pm 1, \pm 2, ..$ poli doppi, $\text{Res}(z_n) = 2$. $z = \infty$ punto d'accumulazione di poli doppi.
$\frac{z+1}{1-\cos z}$: $z_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$ poli doppi, $\text{Res}(z_n)$= 2; ∞ punto d'acc. di poli doppi.

37) Studiare le singolarità delle funzioni $1/\sin(1/z)$, $1/\cos(1/z)$, $\tan(1/z)$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $1/\sin(1/z)$: $1/\pi n$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, poli semplici, $\text{Res}(1/\pi n) = (-)^{n+1}\pi^2 n^2$; $z = \infty$ polo, $\text{Res}(\infty) = 1/3!$; $z = 0$ punto di acc. di poli sempl.
$1/\cos(1/z)$: $z_n = (\pi(n + 1/2))^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, poli semplici, $\text{Res}(z_n) = (-)^n\pi^2(n + 1/2)^2$; $z = \infty$ regolare, $\text{Res}(\infty) = 0$. 0 punto di accumulazione di poli semplici.

38) Studiare le singolarità delle seguenti funzioni in $\bar{\mathbb{C}}$
i) $\frac{1}{z^2+1}$; *ii)* $\frac{1}{z^3-z^2}$; *iii)* $\frac{\sin z - z}{z^k}$, $k = 1, 2, 3, 4$
e calcolare i corrispondenti residui. Nel calcolo del residuo all'∞, usare sia la definizione di residuo, sia il teorema sulla somma dei residui in $\bar{\mathbb{C}}$.

Risp. $\frac{1}{z^2+1}$: $z = \pm i$ *poli sempl.*, $Res(\pm i) = \pm\frac{1}{2i}$;
$\frac{1}{z^3-z^2}$: 0 *polo doppio* $Res(0) = -1$, 1 *polo sempl.* $Res(1) = 1$.
$\frac{\sin z - z}{z^k}$: $k = 1$: *anal. in* $\mathbb{C}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 0$;
$k = 2$: *anal. in* $\mathbb{C}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 0$
$k = 3$: *anal. in* $\mathbb{C}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 0$
$k = 4$: 0 *polo sempl.* $Res(0) = -1/3!$, *anal. in* $\mathbb{C} - \{0\}$, ∞ *sing. ess.* $Res(\infty) = 1/3!$

39) Mostrare che, se la funzione $f(z)$ possiede un numero finito di singolarità isolate z_j, $j = 1, .., N$ in $\mathbb{C}$ al finito, e se ammette inoltre lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad R < |z - z_0| < \infty$$

per un qualche R finito, allora $\sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j) = c_{-1}$. (Sugg.: si usi la nozione di residuo all'∞).

40) Studiare le singolarità della funzione $f(z) = \frac{z+1}{1-\cos z}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $2n\pi,\ n \in \mathcal{Z}$ *poli doppi* $Res(2n\pi) = 2,\ \infty$ *punto d'acc. poli doppi*

41) Studiare le singolarità di ogni ramo delle funzioni
i) $\frac{Log\ z}{z-z_0},\ z_0 \neq 0;$ *ii)* $\frac{(z-1)^{\frac{1}{3}}}{z+i}$
in $\bar{\mathcal{C}}$ e calcolare i corrispondenti residui.

Risp. $\frac{Log\ z}{z-z_0}$: *polidroma, inf. determinazioni,* 0 *e* ∞ *punti diram.*;
z_0 *polo sempl. di ogni ramo,* $Res_k(z_0) = \ln|z_0| + i[arg(z_0) + 2k\pi],\ k \in \mathcal{Z}$.
$\frac{(z-1)^{\frac{1}{3}}}{z+i}$: *polidroma,* 3 *determinazioni,* $1, \infty$ *punti diram.*;
$-i$ *polo sempl. di ogni ramo,* $Res_k(-i) = \sqrt[6]{2}e^{\frac{5}{12}\pi i + \frac{2k\pi i}{3}},\ k = 0, 1, 2$

42) Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Mostrare che:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma Arg\ f(z),$$

dove $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma Arg\ f(z)$, la variazione dell'argomento di $f(z)$ lungo il contorno chiuso γ (rapportata a 2π) percorso in senso antiorario, è anche detto "indicatore logaritmico (o indice) di $f(z)$ lungo γ".

43) Mostrare che l'indicatore logaritmico della funzione $f = z$ lungo un qualunque contorno chiuso che gira n volte, in senso antiorario e m volte in senso orario intorno all'origine è $n - m$. Esso è nullo, invece, se il contorno non contiene l'origine.

44) Mostrare che l'indicatore logaritmico della funzione $f = 1 + \phi(z)$ lungo un qualunque contorno chiuso γ tale che $|\phi(z)| < 1,\ z \in \gamma$ è nullo.

45) *Teorema dell'indice.* Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ e tale che $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.

46) *Principio dell'argomento.* Si osservi che, dai risultati dei due esercizi precedenti segue che:
la differenza tra il numero M degli zeri e N dei poli (contati con la loro molteplicità) di una funzione $f(z)$ in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$ in cui essa è meromorfa è pari alla variazione dell'argomento di $f(z)$ lungo $\partial\mathcal{D}$:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial\mathcal{D}} Arg\ f(z) = M - N.$$

47) *Teorema di Rouché.* Se $f(z)$ e $g(z)$ sono due funzioni analitiche in $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ e $|f(z)| > |g(z)|\ \forall z \in \partial\mathcal{D}$, mostrare che le funzioni $f(z) + g(z)$ e $f(z)$ hanno lo stesso numero di zeri in $\mathcal{D}$.

48) *Teorema fondamentale dell'algebra.* Il polinomio di grado n

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j, \quad \alpha_n \neq 0$$

possiede n radici. Dimostrare il teorema come conseguenza del teorema di Rouché applicato alle funzioni $f(z) = \alpha_n z^n$ e $g(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j z^j$.

49) Usare il teorema di Rouché per mostrare che i) il polinomio $z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ possiede 5 radici per $|z| \leq 1$; ii) il polinomio $z^3 - 3z^2 + z - 1$ non ha zeri per $|z| \leq 1/3$, e ha due zeri per $1/3 < |z| < 2$.
Sugg. i) usare $f(z) = -5z^5 + 1$, $g(z) = z^8 - 2z$. ii) per $|z| \leq 1/3$ usare $f(z) = z - 1$ e $g(z) = z^3 - 3z^2$; per $|z| < 2$ usare $f(z) = -3z^2 - 1$ e $g(z) = z^3 + z$.

3.1.8 Calcolo di integrali col teorema dei residui

1) Usando il teorema dei residui o la nozione di residuo all'∞, mostrare che

$$\oint_\gamma \frac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2} \frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

dove γ è un qualunque percorso chiuso, percorso in senso antiorario una volta, che racchiude tutte le singolarità dell'integrando.

2) Usando il teorema dei residui, mostrare che

$$\oint_{C_R} \sin^2\left(\frac{3}{z}\right)(1 + 2z)^3 dz = -324\pi i, \quad \oint_{C_R} \frac{(z+2)^3 \sin^2 z}{z^5} dz = \frac{20}{3}\pi i,$$

dove C_R è la circonferenza di raggio $R > 0$, centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario.

3) Calcolare i seguenti integrali del tipo $I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$:

i) $R = \frac{1}{a + b\cos\theta}$, $0 < b < a$; *ii)* $R = \frac{1}{a + b\sin\theta}$, $0 < b < a$; *iii)* $R = \frac{1}{a^2 + \sin^2\theta}$, $a > 0$; *iv)* $R = \sin^2\theta$; *v)* $R = \cos^2\theta$; *vi)* $R = \sin^4\theta$; *vii)* $R = \cos^4\theta$; viii) $R = \frac{\sin\theta}{2 + \sin\theta}$

Risp. *i)* $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; *ii)* $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$; *iii)* $\frac{2\pi}{a\sqrt{1 + a^2}}$; *iv)* π; *v)* π; *vi)* $\frac{3\pi}{4}$; *vii)* $\frac{3\pi}{4}$; viii) $2\pi(1 - 2/\sqrt{3})$

4) Calcolare i seguenti integrali del tipo $I = \int_{\mathbb{R}} R(x) dx$:

i) $R = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $a > 0$; *ii)* $R = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, $a \neq b$, $a, b > 0$; *iii)* $R = \frac{1}{x^4 + 4a^4}$, $a > 0$; *iv)* $R = \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}$, $a > 0$; *v)* $R = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$; *vi)* $R = \frac{x}{(x^2 + a^2)(x - ib)}$, $a, b > 0$; *vii)* $R = \frac{1}{(x^2 + 1)(x - 2i)}$; *viii)* $R = \frac{1}{(x - i)(x - 2i)}$

Risp. i) Chiudo, ad esempio, nel semi-piano superiore; poichè $|z(z^2+a^2)^{-1}| \leq R|R^2-a^2|^{-1} \to 0$ per $R \to \infty$, il contributo dell'integrale sulla semi-cfr superiore di raggio R va a 0 per $R \to \infty$. Quindi: $I = \frac{\pi}{a}$. Analogamente: *ii)* $\frac{\pi}{ab(a+b)}$; *iii)* $\frac{\pi}{4a^3}$; *iv)* $\frac{\pi}{2a^3}$; *v)* π; *vi)* $\frac{\pi}{a+b}$; *vii)* $\frac{\pi i}{3}$; *vii)* 0

5) Calcolare i seguenti integrali di Fourier $I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}R(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$, dove le funzioni $R(x)$ sono definite nell'esercizio precedente. Calcolare, di conseguenza, gli integrali $C(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos kxR(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$, $S(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin kxR(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$.

Risp. i) Per $k > 0$ devo chiudere sopra; poichè $|z^2+a^2|^{-1} \leq |R^2-a^2|^{-1} \to 0$ per $R \to \infty$, il contributo dell'integrale sulla semi-cfr superiore di raggio R va a 0 per $R \to \infty$. Quindi $I(k) = \frac{\pi e^{-ak}}{a}$; per $k < 0$ si deve chiudere sotto; procedendo come sopra, si ottiene: $I(k) = \frac{\pi e^{-|k|a}}{a},\ k \in \mathbb{R}$; ii) $I(k) = \frac{\pi}{b^2-a^2}(\frac{e^{-a|k|}}{a} - \frac{e^{-b|k|}}{b})$; *iii)* $I(k) = \frac{\pi}{4a^3}e^{-|k|a}[\cos(a|k|) + \sin(a|k|)]$; *iv)* $\frac{\pi}{2a^3}(1+a|k|)e^{-|k|a}$; *v)* $\pi e^{ik-|k|}$

6) Calcolare le seguenti anti-trasformate di Laplace: $I(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{B}} dze^{zt}R(z),\ t > 0$, dove le funzioni $R(z)$ sono definite nell'esercizio precedente e $\mathcal{B}$ è il contorno $Re\ z =$ cost che ha tutte le singolarità di $R(z)$ a sinistra.

Risp. *i)* $\frac{\sin(at)}{a}$; *ii)* $\frac{1}{b^2-a^2}(\frac{\sin(at)}{a} - \frac{\sin(bt)}{b})$; *iii)* $\frac{1}{4a^3}[\cosh(at)\sin(at) - \sinh(at)\cos(at)]$; *iv)* $\frac{1}{2a^3}[\sin(at) - at\cos(at)]$; *v)* $\frac{e^t}{2}(\sin t - t\cos t)$

7) Mostrare che, se $0 < p < 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{px}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad P\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{px}}{1-e^x}dx = \pi\cot p\pi.$$

Sugg. Si usi, come contorno chiuso di base, il rettangolo $[-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i]$.

8) Verificare che

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+c}^{+i\infty+c} \frac{dz}{z^2-1}, \quad c \in \mathbb{R}$$

vale: $I = -(1/2)$, per $|c| < 1$ e $I = 0$ per $|c| > 1$. (Il cammino d'integrazione è parallelo all'asse immaginario ed interseca l'asse reale nel punto $z = c$)

9) Verificare che

$$I(k,c) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{e^{-ikx}}{x-c} = \theta(k)e^{-ick},$$

dove k è un numero reale non nullo, $Im\ c < 0$, $\theta(k) = 0$ per $k < 0$ e $\theta(k) = 1$ per $k > 0$.

10) Verificare che

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a},\ a > 0.$$

11) Usare il teorema dei residui per calcolare i seguenti integrali al valor principale:
$i)\ P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x-1)} = 0;\quad ii)\ P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)} = -\frac{\pi}{2};\quad iii)\ P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)(x-i)} = \frac{\pi i}{i-1};\quad iv)\ P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x}dx = \pi i\ \mathrm{sgn}\ k,\ k\in\mathbb{R};\quad v)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kx}{x}dx = \pi\ \mathrm{sgn}\ k,\ k\in\mathbb{R};$
$vi)\ P\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^p(1-x)} = -p\frac{\cos\pi p}{\sin\pi p},\ 0<p<1$

12) Verificare che

$$P\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos bx}{x^2-a^2} = -\frac{\pi}{a}\sin(ab),\ b>0$$

13) Verificare che:
$i)\ \int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^p(x+a)} = \frac{\pi}{a^{1/p}\sin(\pi p)}, a>0, 0<p<1;\ ii)\ \int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^p}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a^{1-p}\cos(\pi p/2)},\ a>0, |p|<1;\ iii)\ P\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^p(1-x)} = -\pi\cot p\pi, 0<p<1.$
R. i) Poichè $|z|^{1-p}/|z+a|\le R^{1-p}/|R-a|\to 0$, sia per $R\to\infty$ che per $R\to 0$, l'integrale sul solito contorno pac-man si riduce all'equazione

$$(1-e^{-2\pi pi})\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^p(x+a)} = 2\pi i Res\left(\frac{1}{z^p(z+a)}, ae^{\pi i}\right) = \frac{2\pi i}{a^p e^{ip\pi}},$$

che implica il risultato. Il procedimento è analogo per gli altri integrali.

14) Verificare che:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)^3} = \frac{3\pi}{8a^{5/2}},\quad a>0,\qquad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+3x^2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}.$$

15) Partendo da opportuni integrali del tipo $\int\limits_{0}^{\infty}(\ln x)^n R(x)dx$, si mostri che:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a};\qquad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi\ln a}{2a},\ a>0$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+3x+2} = \ln 2;\quad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+2}dx = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a^2};$$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{a};\qquad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^2}dx = \frac{\ln a}{a}$$

3.1.9 Analiticità di rappresentazioni integrali. Prolungamento analitico di rappresentazioni integrali e di serie

1) Sia $F(z)$ una funzione complessa di variabile complessa definita dall'integrale:

$$F(z) = \int_\gamma f(z,t)dt,$$

con: i) f definita in $\mathcal{D} \times \gamma$, ii) f continua nella variabile z per $z \in \mathcal{D}$, $\forall\ t \in \gamma$, iii) continua in $t \in \gamma$, $\forall\ z \in \mathcal{D}$.

Spesso γ è un contorno illimitato; siano allora $\{\gamma_n\}$ $\{L_n\}$ due successioni di intervalli di lunghezza finita tali che

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \cdots \subset \gamma_n \subset \gamma_{n+1} \subset \ldots, \qquad \gamma_n \to \gamma, \quad n \to \infty, \\ &\gamma_n = \cup_1^n L_k. \end{aligned} \tag{36}$$

Mostrare allora che

$$\begin{aligned} &F_n(z) \equiv \int_{\gamma_n} dt f(z,t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z), \\ &f_k(z) \equiv \int_{L_k} dt f(z,t), \end{aligned} \tag{37}$$

e che

$$F_n(z) \to F(z) = \int_\gamma dt f(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \quad n \to \infty. \tag{38}$$

Quindi la rappresentazione integrale è riconducibile alla rappresentazione in serie.

2) *Definizione di uniforme convergenza dell'integrale e M - test di Weierstass.*
Def. La rappresentazione integrale è uniformemente convergente $\forall z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ se la serie $\sum_n f_n(z)$ è uniformemente convergente in $\mathcal{D}$; cioè se la successione di funzioni $F_n(z)$ converge uniformemente a $F(z)$ in $\mathcal{D}$. Si dimostri il seguente criterio di uniforme convergenza.

Se esiste $g(t) > 0$, $t \in \gamma$ tale che

$$\begin{aligned} &|f(z,t)| < g(t), \\ &\int_\gamma g(t)|dt| < \infty, \end{aligned} \tag{39}$$

allora $F(z)$ converge uniformemente in $\mathcal{D}$.

3) Dimostrare il seguente teorema.
Sia $F(z) = \int_\gamma dt f(z,t)$ un integrale uniformemente convergente per $z \in \mathcal{D}$; allora:

a) se $f(z,t)$ è continua nella variabile z per $z \in \mathcal{D}$, $\forall\ t \in \gamma$, ed è continua in $t \in \gamma$, $\forall\ z \in \mathcal{D}$, ne segue che
a1) $F(z)$ è continua in $\mathcal{D}$.

a2) $\int_\Gamma F(z)dz = \int_\gamma dt \int_\Gamma dz f(z,t)$, con $\Gamma \subset \mathcal{D}$ contorno finito (scambio di integrali).

b) Se $f(z,t)$ è analitica in z, per $z \in \mathcal{D}$, $\forall t \in \gamma$ e continua in $t \in \gamma$, $\forall\ z \in \mathcal{D}$, allora $F(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

4) Mostrare che l'integrale

$$F(z) = \int_0^\infty e^{t(z-1)}dt$$

converge assolutamente per $Re\ z < 1$ e uniformemente per $Re\ z \leq \rho < 1$, e che quindi la funzione $F(z)$ è analitica per $Re\ z < 1$.

) Dimostrare il seguente teorema. Dato l'integrale

$$F(z) = \int_\gamma f(z,t)dt,$$

con: i) $f(z,t)$ definita in $\mathcal{D} \times \gamma$, ii) f analitica nella variabile z per $z \in \mathcal{D}$, $\forall\ t \in \gamma$, iii) continua in $t \in \gamma$, $\forall\ z \in \mathcal{D}$, iv) tale che la derivata di f rispetto a z esiste ed è continua in $\mathcal{D} \times \gamma$.
Se γ è un contorno illimitato, sia allora $\{\gamma_n\}$ la successione di intervalli di lunghezza finita tali che

$$\gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \cdots \subset \gamma_n \subset \gamma_{n+1} \subset \ldots, \qquad \gamma_n \to \gamma, \quad n \to \infty. \tag{40}$$

Allora a) $F_n(z) = \int_{\gamma_n} f(z,t)dt$ è analitica in ogni compatto $\mathcal{D}_n$ contenuto in $\mathcal{D}$; b) se, inoltre, $F_n(z) \to F(z)$ uniformemente in $\mathcal{D}_n$, per $n \to \infty$, allora $F(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$.

5) Mostrare che la rappresentazione integrale di Laplace

$$L(z) := \int_0^\infty dt e^{-zt} f(t), \quad |f(t)| \leq Me^{\delta t}, \quad M > 0,\ \delta \in \mathcal{R}, \quad t > 0$$

i) converge assolutamente per Re $z > \delta$, e uniformemente per Re $z \geq \rho > \delta$; ii) è analitica per Re $z > \delta$. In particolare, se la funzione $f(t)$ è razionale, allora $\delta = 0$ e $L(z)$ è analitica per Re $z > 0$.

6) Data la funzione $\Gamma(z)$ di Euler, definita dalla rappresentazione integrale:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} dt$$

si mostri che:
i) $\Gamma(n) = (n+1)!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ (si integri per parti n volte).

i) L'integrale che definisce $\Gamma(z)$ converge assolutamente per Re $z > 0$, e uniformemente per Re $z \geq \rho > 0$.
ii) $\Gamma(z)$ è analitica per *Re* $z > 0$. La rappresentazione integrale della Γ fornisce quindi "il prolungamento" del fattoriale nel semi-piano Re $z > 0$.

7) Mostrare che l'integrale Gaussiano

$$I(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt e^{-zt^2}$$

è analitico per *Re* $z > 0$.

Prolungamento analitico

8) Data la serie geometrica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

i) Si mostri che definisce una funzione analitica per $|z| < 1$.
ii) Si calcoli la sua somma e si mostri che tale somma costituisce il prolungamento analitico di $f(z)$ per $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

9) Dato l'integrale $F(z) = \int\limits_0^\infty e^{t(z-1)} dt$, che definisce una funzione analitica per *Re* $z < 1$, si calcoli esplicitamente l'integale, ottenendone il prolungamento analiticoper $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

10) La funzione $f(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$, ad eccezione delle singolarità isolate $z_\pm = \pm\sqrt{2}i$, e ammette lo sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < \sqrt{2}. \tag{41}$$

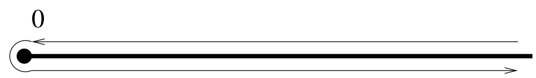
Trovare un prolungamento analitico per cerchi (alla Weierstrass) che permette di calcolare $f(2.5)$.

11) *Prolungamento analitico dell'integrale di Laplace.* Dall'esercizio 5) sappiamo che l'integrale di Laplace

$$L(z) = \int\limits_0^\infty dt e^{-zt} R(t),$$

con $R(t)$ razionale, è analitico in $\mathcal{D} = \{-\frac{\pi}{2} < arg\ z < \frac{\pi}{2}\}$.
i) Sfruttare l'analiticità dell'integrando per introdurre l'integrale

$$L_\varphi(z) := \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{-xt} R(t) dt$$



mostrando che esso è analitico nel dominio $\mathcal{D}_\varphi = \{-\frac{\pi}{2} - \varphi < arg\ z < \frac{\pi}{2} - \varphi\}$.
ii) Mostrare, usando il teorema dei residui, che

$$L(z) = L_\varphi(z) + 2\pi i \sum_j Res(e^{-zt}R(t), t_j), \quad z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\varphi$$

dove $\{t_j\}$ sono i poli di $R(t)$ nel dominio $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_\varphi$.

Dedurre quindi che

$$L_\varphi(z)$$

costituisce il prolungamento analitico dell'integrale di Laplace al di fuori del semipiano $Re\ z > 0$.

12) *Prolungamento analitico della* Γ *di Euler.* Data la rappresentazione integrale della $\Gamma(z)$, analitica per $Re\ z > 0$,
i) verificare la seguente identità

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)} \equiv G(z), \quad Re\ z > 0, \quad n \in \mathbb{N}_+, \tag{42}$$

ii) Mostrare che $G(z)$ è meromorfa con poli semplici in $0, -1, -2, \dots, -n+1$. Mostrare inoltre che

$$Res\,(G(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

iii) Essendo n arbitrario, dedurre che $G(z)$ costituisce il prolungamento analitico della $\Gamma(z)$ a tutto $\mathbb{C}$.

Il prolungamento analitico della Γ può essere ottenuto nel seguente modo alternativo (più complicato).

Poichè che la limitazione $Re\ z > 0$ al dominio di analiticità della $\Gamma(z)$, trovata nell'esercizio 6) è dovuta essenzialmente alla singolarità dell'integrando in $t = 0$, siamo motivati ad introdurre l'integrale

$$H(z) = \int_{H_+} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

dove H_+ è il contorno in figura.
i) Mostrare che questo integrale converge uniformemente $\forall z$ appartenente a un qualunque compatto di $\mathbb{C}$, e che quindi $H(z)$ è una funzione intera (analitica per $z \in \mathbb{C}$).
ii) Usare il teorema dei residui per mostrare che

$$H(m) = 0,\ m = 1, 2, 3, \dots, \quad G(m) = 2\pi i \frac{(-)^m}{(-m)!},\ m = 0, -1, -2, \dots.$$

iii) Mostrare che:

$$H(z) = (e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z), \quad Re\ z > 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \frac{G(z)}{e^{2\pi iz} - 1}, \quad Re\ z > 0.$$

iii) Osservare che quest'ultima formula, che descrive il prolungamento analitico di $\Gamma(z)$ a tutto il piano complesso, ci dice che Γ è meromorfa, con poli semplici in $z = 0, -1, -2, \ldots$, con residui

$$Res\,(\Gamma(z), m) = \frac{(-)^m}{(-m)!}, \ m = 0, -1, -2, \ldots.$$

13) *Il prolungamento analitico dell'integrale gaussiano* Dato l'integrale Gaussiano:

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\nu x^2},$$

analitico per $Re\ \nu > 0$ (si veda l'esercizio 7)),
i) Calcolare esplicitamente tale integrale (assumendo $\nu > 0$ e usando il cambiamento di variabili $y = \sqrt{\nu}x$), verificando che:

$$I(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}}, \quad \nu > 0$$

ii) Dedurre quindi che il prolungamento analitico dell'integrale gaussiano è dato dalla funzione analitica

$$I(\nu) = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu^{1/2}}, \quad -\pi < arg\ \nu < \pi.$$

iii) Mostrare che la discontinuità di tale funzione sull'asse reale negativo è:

$$\Delta I(\nu) := I(|\nu|e^{i\pi}) - I(|\nu|e^{-i\pi}) = -2i\sqrt{\frac{\pi}{|\nu|}}, \quad \nu < 0$$

iv) Calcolare $I(\nu)$ per $\nu = \mp ip, \ p > 0$, ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm ipx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \quad p > 0$$

e calcolare quindi gli integrali di Fresnel, rilevanti nella teoria della diffrazione, ottenendo:

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x dx = \int_0^{\infty} \cos^2 x dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

14) Data la funzione $I(\nu, \mu)$, definita dall'integrale gaussiano generalizzato:

$$I(\nu, \mu) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu x^2 + \mu x}$$

i) mostrare che tale funzione è analitica nella variabile complessa ν nel semipiano $Re\ \nu > 0$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, ed intera in μ $\forall \nu$ nel semipiano $Re\ \nu > 0$.
ii) Mostrare che, per $\nu > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, tale integrale vale:

$$I(\nu,\mu) = e^{\frac{\mu^2}{4\nu}} \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu(x-\frac{\mu}{2\nu})^2} = e^{\frac{\mu^2}{4\nu}} \int_{\mathcal{R}} dx e^{-\nu x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}},\ \nu > 0,\ \mu \in \mathcal{R}$$

iii) Dedurre che la funzione complessa delle due variabili complesse μ e ν:

$$I(\nu,\mu) = \sqrt{\pi}\nu^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}}, \quad -\pi < arg\ \nu < \pi, \quad \mu \in \mathcal{C}$$

costituisce il prolungamento analitico, in entrambe le variabili, dell'integrale gaussiano generalizzato.
iv) Verificare che la sua discontinuità sul semi-asse reale negativo è $\Delta = -2i\sqrt{\pi/|\nu|} e^{\frac{\mu^2}{4\nu}}$.
v) Calcolare $I(\nu,\mu)$ per $\nu = \gamma t,\ t > 0,\ \gamma > 0$ e $\mu = -ix,\ x \in \mathbb{R}$, ottenendo:

$$T(x,t) = \int_{\mathbb{R}} d\xi e^{-\gamma t \xi^2 t - ix\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}} e^{-\frac{x^2}{4\gamma t}}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

$T(x,t)$, soluzione dell'equazione del calore, descrive, ad esempio, l'evoluzione, nel tempo $t \geq 0$, della temperatura in una sbarra metallica infinitamente estesa (da $x = -\infty$ a $x = +\infty$), se la temperatura iniziale è infinitamente concentrata in $x = 0$.
vi) Calcolare $I(\nu,\mu)$ per $\nu = \mp it,\ t > 0$ e $\mu = -ix,\ x \in \mathcal{R}$, ottenendo:

$$\psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} d\xi e^{\pm it\xi^2 - ix\xi} = \pi e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\mp i\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

$\psi(x,t)$, soluzione dell'equazione di Schrödinger non stazionaria per la particella libera, descrive l'evoluzione, nel tempo $t \geq 0$, di un pacchetto d'onde infinitamente localizzato, al tempo $t = 0$, in $x = 0$.

3.1.10 Sviluppi asintotici

1) Costruire gli sviluppi asintotici, per $x >> 1$, dei seguenti integrali di Laplace:

$$L_j(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f_j(t) dt$$

con $f_1(t) = \sin t,\ f_2(t) = (1+t)^{-1}$, studiarne la convergenza e stimare il resto.
R.

$$L_1(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^{2k+2}}, \quad L_2(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

Il primo converge a $(x^2+1)^{-1}$, il secondo diverge $\forall x$. Per il resto del secondo sviluppo

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \frac{t^{n+1}}{1+t} e^{-xt} dt$$

si ha che $|R_n(x)| \leq \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$; è quindi tanto più piccolo quanto più n è piccolo rispetto a x.
2) Mostrare che (lemma di Watson), se la funzione $g(t)$.................

4 ESEMPI DI COMPITI D'ESONERO E SCRITTI PROPOSTI

4.1 1^0 Compito d'Esonero del 28/01/03; AA 2002/03

1) [4/30] Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana
$i)\ (2-i\sqrt{3})^2;\quad ii)\ 3e^{\frac{3}{2}\pi i};\quad iii) 2e^{\frac{2}{3}\pi i};\quad iv)\ \sqrt{3}e^{\frac{5}{6}\pi i}$

2) [4/30] Scrivere i seguenti numeri complessi in forma polare
$i)\ 2+2i;\quad ii)\ 1+i\sqrt{3};\quad iii)\ 3-i\sqrt{3}$

3) [3/30] Dimostrare che $|z_1|-|z_2| \leq |z_1 \pm z_2|,\ \forall z_{1,2} \in \mathcal{C}$

4) [5/30] Determinare tutti i valori di:
$i)\ Log\ (-3);\quad ii)\ (-3)^{\frac{1}{3}};\quad iii)\ (-2i)^{\frac{1}{2}}$

5) [5/30] Data la funzione complessa: $f = y^3-3x^2y+i(x^3-\alpha xy^2)$, determinare le regioni del piano complesso in cui è continua, derivabile e analitica al variare del parametro reale α. Nel dominio di analiticità, si scriva f come funzione della sola z e si calcoli $f'(z)$.

6) [5/30] Dire se le seguenti funzioni reali sono la parte reale (o immaginaria) di funzioni analitiche. Nel caso affermativo, assumendo che siano la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f = u+iv$ come funzione della sola z.
$i)\ -4xy;\quad ii)\ \sin(x^2-y^2)\sinh(2xy);\quad iii)\ \tan^{-1}(\frac{y+2}{x-1})$

7) [6/30] Si studi la funzione $f = (z-z_0)^{\frac{1}{3}}$. In particolare: i) Si mostri che è polidroma in z_0. ii) Si calcoli la sua discontinuità attraverso la retta $Im\ z = Im\ z_0$, scegliendo il ramo $0 \leq arg\ (z-z_0) < 2\pi$. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 la funzione riprende il suo valore di partenza? iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto. (Suggerimento: si usi, per i punti i)-iv), la rappresentazione polare: $z-z_0 = re^{i\theta}$)

8) [7/30] Data la funzione $w = z^4$, si stabilisca in quali regioni del piano complesso è continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. In quale dominio realizza una trasformazione conforme? Qual'è l'immagine del primo quadrante $0 < arg\ z < \pi/2$? Si scriva le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e si disegni le corrispondenti linee di livello nel settore $0 < arg\ z < \pi/4$.

9) [6/30] Si determini la funzione analitica $\Phi(z) = \phi + i\psi$ che descrive il moto di un fluido ideale in un settore di angolo $\pi/3$. Si ottengano le equazioni delle linee equipotenziali $\phi = cost$ e delle linee di flusso $\psi = cost$ e si disegni tali linee. Si determini infine il campo di velocità. In quali parti del settore il campo di velocità trovato risulta più lontano dalla realtà (in presenza, cioè, di attrito)?

4.2 2^0 Compito d'Esonero del 25/02/03; AA 2002/03

1) [6/30] Si calcolino i seguenti integrali del tipo $I = \int_\gamma f(z)dz$:
i) $f_1(z) = |z|$, $\gamma =$ arco di cfr da $2i$ a -2; *ii)* $f_2(z) = \bar{z}$, $\gamma =$ spezzata 0-1-(1+i).
2) [6/30] Come applicazione del teorema di Cauchy, si calcoli il seguente integrale

$$\int_2^{2i} dz \frac{1-2z^2}{z},$$

dove γ è un contorno qualsiasi che congiunge gli estremi indicati, senza passare per l'origine e senza girare intorno ad essa. Per il calcolo dell'integrale si usi sia il teorema della primitiva, sia un contorno conveniente.
3) [4/30] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = 1/(z-2)$ e la si sviluppi in serie di potenze con centro $z_0 = 1$ in tutto il piano complesso, indicando i raggi di convergenza di tali sviluppi.
4) [6/30] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = e^{2z}/z^2$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. La si sviluppi in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e si calcoli il corrispondente residuo.
5) [6/30] Si studino le singolarità della funzione $f(z) = 1/\cos z$ in $\mathcal{C}$ e all'∞ e, se isolate, si calcolino i corrispondenti residui.
6) [5/30] Sia γ_R un arco di circonferenza di centro 0 e raggio R. Si mostri che, per la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+1}$, vale la proprietà:
$zf(z) \to 0,\ |z| \to \infty,\ |z| \to 0$ uniformemente su γ_R; e che quindi

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad R \to \infty, \quad R \to 0$$

7) [14/30] Si usi il teorema dei residui per valutare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}; \quad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-4ix}}{x^2+1}; \quad I_3 = P\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x-1}, \quad k \in \mathcal{R}.$$

4.3 3^0 Compito d'Esonero del 21/03/03; AA 2002/03

1) [5/30] Si mostri che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d}{dx}[\theta(x)f(x)] = f(\infty)$$

2) [5/30] Dato l'integrale: $2\pi \int_0^\infty dx \delta(x^2 - \pi^2)\cos x$, a quale dei seguenti valori è uguale? La risposta va motivata.
$i) \; -1$; $\;ii)\; 0$; $\;iii)\; 2$

3) [9/30] Si mostri che:

$$\int_0^\infty \delta(\cos x)e^{-x}dx = \frac{1}{2\sinh(\pi/2)}, \qquad \int_0^4 \frac{d}{dx}[\delta(x^2-1)]\varphi(x)dx = -\varphi'(1)/2$$

4) [6/30] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y)I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(ik+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$ e si verifichi che $R(x) = \theta(x-1)e^{-(x-1)}$.

5) [5/30] Dato l'operatore $L = d/dt + 2$ e la distribuzione $g(t) = \theta(t)e^{-\gamma t}$, si calcoli $Lg(t)$ e si determini il valore di γ per il quale $g(t-t')$ è una funzione di Green dell'operatore L.

6) [18/30] Si consideri la seguente funzione $g(x)$:

$$g(x) = \int_\gamma \frac{dk}{2\pi}\frac{e^{ikx}}{4-k^2}, \quad x \in \mathcal{R}$$

dove γ è un contorno da $-\infty$ a ∞ da specificare ulteriormente per evitare le singolarità dell'integrando.
i) Si determini l'operatore differenziale di cui $g(x-x')$ è la funzione di Green fondamentale.
ii) Si calcoli $g(x)$ nei seguenti tre casi.
a) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita le singolarità sull'asse reale da sotto.
b) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita le singolarità sull'asse reale da sopra.
c) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ inteso nel senso del valor principale.

4.4 Scritto del 27/03/03; AA 2002-03

1) [5/30] Determinare tutti i valori di:

i) $Log\ (i)$; *ii)* $(-1)^{\frac{1}{3}}$

2) [5/30] Dire se la funzione $e^{3x}\sin 3y$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica. Nel caso affermativo, assumendo che sia la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

3) [6/30] Si determini la funzione analitica $\Phi(z) = \phi + i\psi$ che descrive il moto di un fluido ideale in un settore di angolo $\pi/4$. Si ottengano le equazioni delle linee equipotenziali $\phi = cost$ e delle linee di flusso $\psi = cost$ e si disegnino tali linee. Si determini infine il campo di velocità. In quali parti del settore il campo di velocità trovato risulta più lontano dalla realtà (in presenza, cioè, di attrito)?

4) [6/30] Studiare le singolarità della funzione $f(z) = e^{-z}/z^4$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. Svilupparla in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e calcolare il corrispondente residuo.

5) [14/30] Si usi il teorema dei residui per valutare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + 2}; \quad I_3 = P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - 3}, \quad k \in \mathcal{R}.$$

6) [5/30] Dato l'integrale $\int_0^{\pi/2} dx\delta(x^2 - \pi^2/16)\tan x$, a quale dei seguenti numeri è uguale? *i)* $2/\pi$; *ii)* $\pi/2$; *iii)* 0; *iv)* 1. (La risposta va motivata)

7) [6/30] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y)I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(k^2+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$, e si verifichi che $R(x) = e^{-|x-1|}/2$.

8) [18/30] Si consideri la seguente funzione $g(x)$:

$$g(x) = \int_{\gamma} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{ik(2+ik)}, \quad x \in \mathcal{R}$$

dove γ è un contorno da $-\infty$ a ∞ da specificare ulteriormente per evitare la singolarità dell'integrando sull'asse reale.

i) Si determini l'operatore differenziale del quale $g(x-x')$ è la funzione di Green fondamentale.

ii) Si calcoli $g(x)$ nei seguenti casi.

a) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita la singolarità sull'asse reale da sotto.

b) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ che evita la singolarità sull'asse reale da sopra.

c) γ è il contorno da $-\infty$ a ∞ inteso nel senso del valor principale.

4.5 1^0 Compito d'Esonero del 29/01/04; AA 2003/04

1) ([**3/30**] per uno dei due; [**5/30**] per entrambi) Passare dalla forma cartesiana a quella polare, o viceversa.
$i)$ $3e^{i\pi/4}$; $ii)$ $2 - i2\sqrt{3}$

2) ([**3/30**] per uno dei due; [**5/30**] per entrambi) Determinare, in forma cartesiana, tutti i valori di:
$i)$ $Log\ (-2i)$; $ii)$ $(3i)^{1/3}$

3) ([**5/30**]) i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = y^3 - \alpha x^2 y$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Quindi si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

4) ([**6/30**] per uno dei due; [**9/30**] per entrambi) *Studio delle funzioni:* $f_1 = z^{\frac{1}{5}}$; $f_2 = Log(z - i)$. i) Si mostri che sono polidrome e si individui i rispettivi punti di diramazione z_0. ii) Si calcoli la loro discontinuità attraverso la retta $arg\ (z - z_0) = 0$, scegliendo il ramo $0 \leq arg\ (z - z_0) < 2\pi$. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 le funzioni riprendono il loro valore di partenza? iv) Come tagliare il piano complesso per renderle analitiche? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto. (Suggerimento: si usi, per i punti i)-iv), la rappresentazione polare: $z - z_0 = re^{i\theta}$).

5) ([**7/30**]) Data la funzione $w = z^3$, i) si stabilisca in quali regioni del piano complesso è monodroma, continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. ii) Si costruisca l'immagine del dominio $\mathcal{D} = \{0 < arg\ z < \pi/2,\ 1 < |z| < 2\}$ iii) Si scrivano le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e si disegnino le corrispondenti curve di livello nel settore $0 < arg\ z < \pi/3$.

6)([**4/30**] per uno dei due; [**6/30**] per entrambi) Data la funzione $f(z) = |z|^2$, si calcoli $\int_\gamma dz f(z)$ lungo i seguenti contorni. a) γ_1 è l'arco di circonferenza di raggio 1 da $z_0 = 1$ a $z_1 = i$. b) γ_2 è la spezzata determinata dai punti: $1, 0, i$.

7) ([**6/30**]) Si consideri una funzione complessa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di variabile complessa.
i) Dare la definizione di funzione derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{C}$ e quella di funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$.
ii) Mostrare che, se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in $\mathcal{D}$, allora le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y esistono in $\mathcal{D}$ e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann.

4.6 2^0 Compito d'Esonero del 26/02/03; AA 2003/04

1) ([**5/30**]) Si calcoli il seguente integrale $\int_\gamma \frac{dz}{z-1}$, dove γ è un qualunque contorno da 2 a $1+i$ che gira intorno a 1 n volte in senso antiorario.

2) ([**5/30**]) Si sviluppi la funzione $1/(z-3)$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 0$, in tutto il piano complesso. Specificare se gli sviluppi sono di Taylor o di Laurent e determinare i loro raggi di convergenza..

3) ([**6/30**]) Si sviluppi la funzione $z^{-3}e^{-z}$ nelle serie di potenze centrate in 0 e ∞; si discuta inoltre il carattere delle singolarità in 0 e ∞ e si calcolino i corrispondenti residui.

4) ([**4/30**] per i); [**5/30**] per ii)) Individuare le singolarità delle seguenti funzioni nel piano complesso esteso e calcolare i residui corrispondenti alla sola singolarità z_0 indicata.

$i)$ $\frac{\sin z}{z-\pi/2}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$; $ii)$ $\frac{z}{\cos z}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$

5) ([**6/30**]) Si dimostri il seguente risultato. Se una funzione è analitica nel disco $\mathcal{D} = \{|z-z_0| < R\}$, essa è sviluppabile in serie di Taylor centrata in z_0 e di raggio di convergenza R.

6) ([**5/30**] per i); [**6/30**] per ii)). Si usi il teorema dei residui per calcolare i seguenti integrali.

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2+2} dx, \quad k \in \mathcal{R}; \qquad ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-2i)}$$

4.7 3^0 Compito d'Esonero del 18/03/04; AA 2003/04

1) ([**6/30**]) Calcolare il prodotto di convoluzione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x')H(x')dx'$$

sapendo che le trasformate di Fourier di $G(x)$ e $H(x)$ sono rispettivamente $\hat{G}(k) = 1/(k - i)$ e $\hat{H}(k) = ie^{2ik}$.

2) ([**5/30**]) Data la successione di funzioni $bne^{-2n|x|}$, si determini per quale valore di b essa è una buona rappresentazione della $\delta(x)$ nel limite $n \to \infty$, e perchè?

3) ([**4/30**] per i), [**2/30**] per ii), [**3/30**] per iii))
i) Si verifichi che la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 3, & se \;\; x > 0, \\ -3, & se \;\; x < 0 \end{cases} \tag{44}$$

ammette il seguente sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

ii) Disegnare (e confrontare) i grafici di $g(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale.
iii) Utilizzare la formula di Parseval ed il risultato i) per ottenere la somma di un'opportuna serie numerica.

4) ([**5/30**]) Si calcoli l'integrale:

$$\int_0^{\pi} \delta(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) \sin x dx$$

5) ([**3/30**] per i); [**4/30**] per ii)) i) Si costruisca la funzione di Green $G(t)$ fondamentale dell'operatore $\frac{d^2}{dt^2} + 4$ nella rappresentazione integrale di Fourier.
ii) Si usi il teorema dei residui per calcolare $G(t)$, usando il contorno da $-\infty$ a ∞ che passa sopra alle eventuali singolarità dell'integrando sull'asse reale.

6) ([**5/30**]) Si mostri che $(x^2\theta(-x))' = 2x\theta(-x)$ nel senso delle distribuzioni (cioè sotto integrale e usando una funzione di prova).

4.8 Scritto del 20/03/04; AA 2003/04

1) [4/30] Determinare tutti i valori di:
i) $Log\ (-2)$; *ii)* $i^{\frac{1}{3}}$

2) **[5/30]** Determinare il parametro γ tale che la funzione $u(x, y) = x^4 + y^4 - \gamma x^2 y^2$ possa essere interpretata come la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. Costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f(z) = u + iv$ come funzione della sola z.

3) **[5/30]** Individuare le singolarità della funzione $f(z) = e^{z^2}/z^3$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. Sviluppare la funzione in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e calcolare i corrispondenti residui.

4) **[8/30]** Calcolare i seguenti integrali usando il teorema dei residui:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ipx}}{x^2+4}, \quad p \in \mathcal{R}.$$

5) **[4/30]** Si calcoli l'integrale $\int_0^{2\pi} dx \delta(x^2 - \pi^2) \cos x$.

6) **[5/30]** Si determini la funzione di Green fondamentale $G(t-t')$ dell'operatore $L = d/dt + 2$ e la si calcoli usando il teorema dei residui.

7) **[5/30]** Sviluppare la funzione $|x|$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; confrontare i grafici di $|x|$ e della somma della serie su tutto l'asse reale.

4.9 Scritto del 15/09/04; AA 2003/04

1) [4/30] Determinare tutti i valori di:
i) $Log\,(-2)$; *ii)* $(-3)^{\frac{1}{3}}$

2) [4/30] Dire se la funzione $e^{-y}\cos x$ è la parte reale (o immaginaria) di una funzione analitica. Nel caso affermativo, assumendo che sia la parte reale $u(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e la funzione $f=u+iv$ come funzione della sola z.

3) [5/30] Si studi le singolarità della funzione $f(z) = e^{z^2}/z$ in $\mathcal{C}$ e all'∞. La si sviluppi in serie di Laurent nell'intorno di tali singolarità e si calcoli i corrispondenti residui.

4) [10/30] Calcolare gli integrali:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}; \quad I_2(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ipx}}{x^2+9},\ p \in \mathcal{R}$$

usando il teorema dei residui.

5) [4/30] Si calcoli l'integrale $\int\limits_0^{\pi/2} dx\delta(x^2-\pi^2/9)\cos x$.

6) [5/30] Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x) = \int_{\mathcal{R}} dy S(x-y)I(y)$, sapendo che $\hat{S}(k) = 1/(ik+1)$ e $\hat{I}(k) = e^{-ik}$, e si verifichi che $R(x) = \theta(x-1)e^{-(x-1)}$.

7) [6/30] Sviluppare la funzione $-2\theta(-x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$; confrontare il grafico di questa funzione con quello della somma della serie su tutto l'asse reale.

4.10 Test del 28/01/05; AA 2004/05

1) ([**3/30**] per uno dei due; [**5/30**] per entrambi) Passare dalla forma cartesiana a quella polare, o viceversa.
$i)$ $5e^{-i\pi/4}$; $ii)$ $3 - i\sqrt{3}$

2) ([**3/30**] + [**3/30**]) Determinare tutti i valori di:
$i)$ $Log(1+i)$; $ii)$ $(-2i)^{1/3}$

3) ([**4/30**]) Individuare in quali regioni del piano complesso $\mathbb{C}$ la funzione $f = 3x^2y + ixy^2$ è continua, derivabile e analitica.

4) ([**5/30**]) i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = x(x+2) - \alpha y^2$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

5) ([**6/30**]) Data la funzione $w = z^3$, i) si stabilisca in quali regioni del piano complesso è monodroma, continua, derivabile e analitica e se ne calcoli la derivata. ii) Si costruisca l'immagine del dominio $\mathcal{D} = \{0 < arg\ z < \pi/2,\ 1 < |z| < 2\}$ iii) Si scrivano le equazioni $u = cost$ e $v = cost$ in coordinate polari e si disegnino le corrispondenti curve di livello nel settore $0 < arg\ z < \pi/3$.

4.11 Esonero del 10/02/05; AA 2004/05

1) ([**12/30**])
Utilizzando il teorema della primitiva, calcolare l'integrale

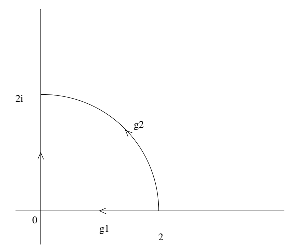
$$\int_2^0 \frac{z^2-3}{z-1}\,dz$$

lungo un qualunque percorso γ_1 che non giri intorno al punto $z=1$ e lungo un qualunque percorso γ_2 che giri intorno a $z=1$ una volta in senso antiorario. Infine si calcoli l'integrale lungo γ_1 usando un contorno parametrizzabile in maniera conveniente. Si suggerisce di riscrivere z^2-3 nella forma $(z-1)^2+\alpha(z-1)+\beta$ per opportuni α e β.

2) ([**7/30**])
Calcolare l'integrale

$$\int_2^{2i} |z|^3\,dz$$

sia lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2,0)\cup(0,2i)$), sia lungo l'arco γ_2 di raggio 2, nonché lungo il contorno chiuso $\gamma_2-\gamma_1$.



3) ([**5/30**])
Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z)=f(z)$.

4) ([**3/30**] per uno dei due, [**5/30**] per entrambi)
Passare dalla forma polare a quella cartesiana e viceversa

$$3e^{-i\pi/6}; \qquad 1-\frac{i}{\sqrt{3}}$$

5) ([**3/30**]+[**3/30**])
Determinare tutti i valori di

$$Log(4-4i); \qquad (-1-i)^{1/3}$$

6) ([**5/30**])
i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u=3x^2y+\alpha y^3$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e iii) la funzione $f=u+iv$ come funzione della sola z.

4.12 Test dell' 01/03/05; AA 2004/05

1) ([**4**]) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+4)!}{(2n+1)^n} (z-2)^n.$$

2) ([**5**]) Sviluppare la funzione

$$\frac{1}{3z-i}$$

in serie di potenze centrate in $z_0 = 1$ in tutto il piano complesso e calcolarne i raggi di convergenza.

3) ([**6**]) Trovare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$$

e discuterne la natura. Calcolare infine i residui relativi alle singolarità isolate.

4) ([**5**]) Trovare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{e^{-2z}}{z^3};$$

costruire lo sviluppo di Laurent intorno ad esse e calcolare i residui relativi alle singolarità al finito.

4.13 Esonero del 15/03/05; AA 2004/05

1) ([**4**]) Si sviluppi la funzione $\frac{1}{z^2+4}$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 2i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza.

2) ([**4**]) Si usi il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\oint_\gamma z^2 e^{3/z} dz,$$

dove γ è un qualunque contorno chiuso, al finito, che gira intorno all'origine una volta, in senso antiorario.

3) ([**6**]) Si dimostri il seguente teorema (di Laurent):
Una funzione analitica in una corona circolare D di centro z_0 e raggi r ed R è sviluppabile in serie di potenze positive e negative, secondo la formula

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ove γ è un'arbitraria curva chiusa interna alla corona, e lo sviluppo è uniformemente convergente in ogni corona chiusa contenuta in D.

4) [**5**] *Studio della funzione*: $f(z) = z^{\frac{1}{5}}$. i) Si mostri che è polidroma e si individuino i suoi punti di diramazione z_0 in $\mathbb{C}$. ii) Si calcoli la sua discontinuità, girando una volta intorno a z_0. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 la funzione riprende il suo valore di partenza? E perchè? iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto in tale piano tagliato. vi) La superficie di Riemann associata a $z^{\frac{1}{5}}$ è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann o al toro?

5) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6x^2}{(x^2+4)^2(x-i)} dx.$$

6) ([**5**]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ikx}}{x - 2i}\, dx, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

7) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)} dx.$$

4.14 Scritto del 30/03/05; AA 2004/05

1) ([**5/30**]) Determinare per quali valori del parametro a la funzione $u(x, y) = x^2 + ay^2 + 2y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$. Per quei valori di a costruire la parte immaginaria e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

2) ([**6/30**]**, esercizio obbligatorio**) Si introduca la nozione di residuo di una funzione in un punto e si dimostri il seguente teorema (dei residui):
Se $f(z)$ è una funzione analitica nel dominio $\mathcal{D}$ e continua su $\partial\mathcal{D}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_1, .., z_n \in \mathcal{D}$, allora

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(z), z_k),$$

dove l'integrale è percorso in senso antiorario.

3) ([**5/30**]) Studiare le singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ della funzione

$$\frac{z^2 - \pi^2/4}{\cos z}$$

e, se isolate, calcolarne i corrispondenti residui.

4) ([**5/30**]) Sviluppare la funzione $1/(z^2 + a^2)$, $a > 0$, in serie di potenze centrate in $z_0 = ia$ in tutto il piano complesso, individuando i rispettivi raggi di convergenza.

5) ([**5/30**]) *Studio della funzione* $\ln(z - 1)$.
i) Si mostri che è polidroma e si individuino i suoi punti di diramazione z_0 in $\mathbb{C}$. ii) Si calcoli la sua discontinuità, girando una volta intorno a z_0. iii) La funzione riprende il suo valore di partenza dopo un certo numero di giri nello stesso verso, intorno a z_0? Giustificare la risposta. iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto in tale piano tagliato.

6) ([**5/30**] per un integrale, [**9/30**] per due, [**13/30**] per tre).
Usando il teorema dei residui, calcolare gli integrali:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx\sqrt{x}}{x^2 + 4}, \quad I_2 = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-2)(x^2+9)}, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx e^{ix}}{(x^2+4)^2}$$

4.15 Scritto del 14/09/05; AA 2004/05

1) ([**5/30**]) Determinare per quali valori dei parametri a e n la funzione $u(x, y) = y^3 + ax^n y$ è la parte reale di una funzione $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$. Per quei valori di a e n costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

2) ([**6/30**]**; esercizio obbligatorio,** [**-3/30**] **se non svolto**) Si enunci e si dimostri il teorema di Laurent.

3) ([**6/30**] ([**2/30**]+[**2/30**]+[**2/30**])) i) Studiare le singolarità della funzione $(z(z-1))^{1/2}$ nel piano complesso esteso $\bar{\mathbb{C}}$. ii) Dopo aver individuato i punti di diramazione, tagliare il piano complesso per renderla monodroma. iii) Studiare la superficie di Riemann associata a tale funzione e stabilire se tale superficie è topologicamente equivalente ad una sfera o ad un toro.

4) ([**5/30**]+[**5/30**]) Calcolare i seguenti integrali usando il teorema dei residui.

$$i) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{(x^2+9)^2}, \; k \in \mathbb{R}; \qquad ii) \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+5)}$$

5) ([**6/30**]) Sviluppare la funzione $\frac{1}{z^2+2}$ in serie di Laurent centrate in $z_0 = i\sqrt{2}$, in tutto il piano complesso, determinandone anche i raggi di convergenza.

6) ([**6/30**] ([**2/30**]+[**2/30**]+[**2/30**])) i) Studiare le singolarità della funzione $f(z) = e^{-z^2} z^{-3}$ nel piano complesso esteso $\bar{\mathbb{C}}$. ii) Svilupparla in serie di Laurent centrate in $z_0 = 0$ e $z_0 = \infty$. iii) Calcolare i residui della funzione nei punti singolari.

4.16 1^o esonero del 07/02/06; AA 2005/06

1) ([**3**]+[**3**])
Utilizzando il teorema della primitiva, i) calcolare l'integrale

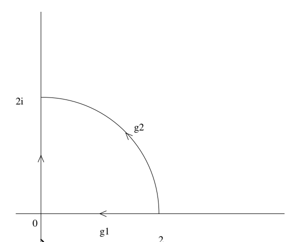
$$\int_0^{2i} \frac{z^2 - 3iz - 4}{z - i}\, dz$$

lungo un qualunque percorso γ_1 (disegnarlo!) che non giri intorno al punto $z = i$ e ii) lungo un qualunque percorso γ_2 (disegnarlo!) che giri intorno a $z = i$ una volta in senso antiorario. Si suggerisce di riscrivere $z^2 - 3iz - 4$ nella forma $(z - i)^2 + \alpha(z - i) + \beta$ per opportuni α e β.

2) ([**3**]+[**2**]+[**1**])
Calcolare l'integrale

$$\int_2^{2i} |z|\, dz$$

i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2, 0) \cup (0, 2i)$), ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 2, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$.



3) [5], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)
Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z) = f(z)$.

4) ([**1**]+[**2**]+[**3**])
Data la funzione $w = z^3$, i) dire dove è analitica e calcolarne la derivata; ii) in quale insieme trasforma il dominio $\mathcal{D} = \{1 < |z| < 3,\ 0 < arg z < \pi/4\}$? iii) Disegnare le curve di livello $u = cost,\ v = cost$ nel settore $0 < arg z < \pi/3$.

5) ([**2**]+[**2**])
Determinare tutti i valori di

$$Log(\frac{3}{\sqrt{2}}(-1 + i)); \qquad \left(2(1 - i\sqrt{3})\right)^{\frac{1}{3}}$$

6) ([**4**])
i) Dire per quali valori del parametro α la funzione $u = \alpha x^3 - 6xy^2$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α si costruisca la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

7) ([**2**]+[**2**])
Data la serie di funzioni $\sum_n c_n(z-1)^n$, che ha raggio di convergenza R, individuare le regioni di $\mathbb{C}$ nelle quali la serie di funzioni $\sum_n n^2 c_n(z - 1)^n$ i) converge assolutamente e ii) converge uniformemente.

4.17 2^o esonero del 02/03/06; AA 2005/06

1) ([**2**]+[**3**]) Data la funzione $\frac{1}{z^2+9}$, i) individuare le sue singolarità e la loro natura; ii) svilupparla in serie di potenze centrate in $z_0 = 3i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza e disegnando le corrispondenti corone circolari.

2) ([**3**]+[**2**]) Data la funzione $f(z) = z^2 e^{3/z}$, i) discutere la natura delle sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e calcolare i correspondenti residui; ii) usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$I_R = \oint_{\gamma_R} f(z) dz,$$

dove γ_R è la circonferenza $|z-1| = R$, percorsa in senso antiorario, sia per $R < 1$ che per $R > 1$.

3) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)
Si dimostri il seguente teorema. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D}$, continua in $\bar{\mathcal{D}}$ e tale che $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.

4) [3]+[3] Data la funzione $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui e verificare che la loro somma è nulla.

5) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+5)(x-i)} dx.$$

6) ([**5**]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \frac{\sin\theta}{2}} \, d\theta \; .$$

7) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\mathrm{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x^2+9)} dx.$$

4.18 Esonero di CMMF del 20/03/06; AA 2005/06

1) ([**6**]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(x+3)}dx$$

2) ([**6**]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+9}dx$$

3) ([**6**]) Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{x^2+4}dx$$

4) ([**6**])
Usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{x-i}dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

5) ([**1**]+[**1**]+[**2**]+[**2**])
i) Individuare le singolarità della funzione $f(z) = (z-1)^{\frac{1}{2}}$ in $\bar{\mathbb{C}}$ e stabilirne la natura. ii) In caso di punti di diramazione, tagliare in modo opportuno il piano complesso per rendere f analitica (disegno!), e ivi calcolare $f'(z)$. iii) Calcolare la variazione Δf attraverso il taglio scelto. iv) Costruire la superficie di Riemann di $f(z)$ e chiarire se sia topologicamente equivalente alla sfera di Riemann o al toro.

6) ([**3**]+[**3**])
Date le funzioni $f(z)$ e $g(z)$ definite dalle seguenti rappresentazioni integrali:

$$i) \quad f(z) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{izx}}{x^2+1}dx; \qquad ii) \quad g(z) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-zx}}{x^2+1}dx$$

Determinare le regioni del piano complesso nelle quali esse sono analitiche (e dimostrarlo).

7) ([**3**]+[**2**]+[**2**])
Data la funzione complessa $\Phi(z) = 2i\ln(z-1) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$, i) disegnare le linee $\phi(x,y) = cost$ e $\psi(x,y) = cost.$ e indicare quali di esse coincidono con le linee di flusso del campo vettoriale $\vec{V} = \bigtriangledown\phi$. ii) Mostrare che $\bigtriangledown \cdot \vec{V} = 0$. iii) Dare qualche interpretazione fisica al campo vettoriale $\vec{V}$. Suggerimento: usare le coordinate polari $z = 1 + re^{i\theta}$.

4.19 1^0 Esonero del 04/04/08

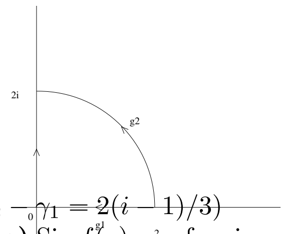
1) ([**2**]+[**3**]) Utilizzando il teorema della primitiva, i) calcolare l'integrale

$$\int_0^{2i} \frac{z^2 - 2iz - 3}{z - i}\, dz$$

lungo un percorso a scelta γ_1 (disegnarlo!) che non faccia giri completi intorno al punto $z = i$ e ii) lungo un percorso a scelta γ_2 (disegnarlo!) che giri intorno a $z = i$ una volta. Si suggerisce di riscrivere $z^2 - 2iz - 3$ nella forma $(z-i)^2 + \alpha(z-i) + \beta$ per opportuni α e β. (R. $\gamma_1 : \ -2\pi i$; $\gamma_2 : \ -6\pi i$)

2) ([**2**]+[**2**]+[**1**]) Calcolare l'integrale

$$\int_1^{i} |z|^2\, dz$$



i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(1,0) \cup (0,i)$),
ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 1, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$. (R. $\gamma_2 : \ i - 1$, $\gamma_1 : \ (i-1)/3$, $\gamma_2 - \gamma_1 = 2(i-1)/3$)

3) [5], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato) Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso. Si dimostri che in tale dominio esiste la primitiva $F(z)$, e che tale primitiva è analitica, con $F'(z) = f(z)$.

4) ([**1**]+[**1**]+[**3**]) Data la funzione $w = z^5$, i) dire dove è analitica e calcolarne la derivata; ii) in quale insieme trasforma il dominio $\mathcal{D} = \{1/2 < |z| < 2,\ 0 < arg z < \pi/2\}$? iii) Disegnare le curve di livello $u = cost$, $v = cost$ nel settore $0 < arg z < \pi/5$ e dare un'interpretazione fisica al campo vettoriale $\vec{V} = \nabla u$.

5) ([**2**]+[**2**]) Determinare tutti i valori di

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^{\sqrt{3}}; \qquad \left(2(\sqrt{3} - i)\right)^{\frac{1}{3}}$$

(R. $3^{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi i + 2\sqrt{3}\pi i k}, k \in \mathbb{Z}$; $\sqrt[3]{4} e^{-\frac{\pi}{18} i + \frac{2}{3} k\pi i}, k = 0, 1, 2$)

6) ([**4**]) i) Dire per quali valori dei parametri α e β la funzione $u = \alpha x^2 y - y^3 + \beta xy$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α, β si costruisca la parte immaginaria $v(x,y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z. (R. $\alpha = 3, \forall\beta$; $v = 3xy^2 - x^3 + (\beta/2)(y^2 - x^2)$; $f(z) = -iz^3 - i\beta z^2/2$)

7) ([**2**]+[**2**]) Data la serie di funzioni $\sum_n c_n (z-2)^n$, che ha raggio di convergenza R, individuare i raggi di convergenza delle due serie di funzioni $\sum_n \frac{n!}{n^n} c_n (z-2)^n$ e $\sum_n n^3 c_n^3 (z-2)^n$. (R. $R' = eR$; $R' = R^3$)

8) ([**2**]+[**3**]) Data la serie di funzioni $\sum_n c_n (z - z_0)^n$, $c_n = \frac{(3n+2)^n}{(n+1)!}$, i) determinarne il raggio di convergenza R; ii) individuare le regioni di $\mathbb{C}$ nelle quali converge assolutamente, uniformemente o diverge, studiando anche la circonferenza $|z - z_0| = R$ (per quest'ultimo punto, usare la formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$). ($R = (3e)^{-1}$)

4.20 2^0 Esonero del 30/04/08

1) ([**3**]+[**3**]) Data la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2-2iz}$, i) individuare le sue singolarità e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) svilupparla in serie di potenze centrate in $z_0 = i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza e disegnando le corrispondenti corone circolari.
2) [**2**]+[**2**] Data la seguente rappresentazione integrale:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{zt} t^z dt, \tag{45}$$

determinare i) dove l'integrale converge assolutamente ed uniformemente; ii) il dominio di analiticità di $F(z)$. (i) conv. ass. $-1 < Rez < 0$, unif. $-1 < \rho_0 \leq Rez \leq \rho_1 < 0$).
3) ([**3**]+[**2**]) Data la funzione $f(z) = z^{-4}e^{3z^3}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura natura, calcolando inoltre i correspondenti residui; ii) usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$I_R = \oint_{\gamma_R} f(z)dz,$$

dove γ_R è la circonferenza $|z+1| = R$, percorsa in senso antiorario, sia per $R < 1$ che per $R > 1$. (0 polo ord. 4, Res(0)=3; ∞ sing. ess. Res(∞)=-3; $I_R = 6\pi i,\ R > 1,\ I_R = 0,\ R < 1$)
4) [**5**] **(esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)** Si dimostri il seguente teorema. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in $\mathcal{D}$, continua in $\bar{\mathcal{D}}$ e tale che $f(z) \neq 0$, $f(z) \neq \infty$ per $z \in \partial\mathcal{D}$. Mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = M - N,$$

dove M è il numero di zeri di $f(z)$ contati con la loro molteplicità, e N è il numero di poli di $f(z)$, contati con la loro molteplicità.
5) [**2**]+[**2**] Data la funzione $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui. (0 polo sempl. Res(0)=2; $2\pi n,\ n \neq 0$ poli doppi, Res(2π n)=2; ∞ punt. d'acc. poli doppi).
6) ([**3**]+[**3**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}; \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2i}$$

($I_1 = 2\pi/\sqrt{3}$ $I_2 = (\pi/\sqrt{2})exp(i\pi/4)$).
7) ([**4**]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+1)^2}$$

$(2\pi/(3\sqrt{3}))$.

8) ([**4**]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2 - ix + 2)} dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$((2\pi/3)exp(-2k),\ k > 0;\ (2\pi/3)exp(k),\ k < 0)$.

9) ([**4**]) Mostrare che, se la funzione $f(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$, ad eccezione di un numero finito di singolarità isolate $z_j,\ j = 1, .., N$, e se ammette inoltre lo sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n, \quad R < |z - z_0| < \infty$$

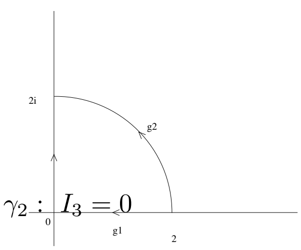
per un qualche R finito, allora $\sum\limits_{j=1}^{N} Res(f, z_j) = d_{-1}$. (Sugg.: si usi la nozione di residuo all'∞).

4.21 Scritto (prima parte) del 30/06/08; AA 07-08

1) ([**4**]) Calcolare l'integrale

$$\int_1^i z^2\, dz$$

i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(1, 0) \cup (0, i)$), ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 1, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$.



R. $\gamma_1 :\ I_1 = -(1 + i)/3, \quad \gamma_2 :\ I_2 = -(1 + i)/3;\ \gamma_1 - \gamma_2 :\ I_3 = 0$

2) ([**2**]+[**2**]) Determinare tutti i valori di

$$(1 + i)^{\sqrt{2}}; \qquad \left(\sqrt{3} + i\right)^{\frac{1}{4}}$$

R. $(1 + i)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{2}(\pi/4 + 2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z};\ \ (\sqrt{3} + i)^{1/4} = \sqrt[4]{2} e^{i(\pi/24 + k\pi/2)},\ k = 0.1, 2, 3$

3) ([**4**]) i) Dire per quali valori dei parametri α e β la funzione $u = x^2 y - \alpha y^3 + \beta x$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α, β, costruire la parte immaginaria $v(x, y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.

R. $\alpha = -1/3,\ \forall\beta;\ v = -x^3/3 + xy^2 + \beta y;\ f(z) = -iz^3/3 + \beta z + c$

4) ([**3**]+[**2**]) Data la funzione $f(z) = z^{-3} e^{z^2}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i correspondenti residui; ii) usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale

$$I_R = \oint_{\gamma_R} f(z) dz,$$

dove γ_R è la circonferenza $|z+1| = R$, percorsa in senso antiorario, sia per $R < 1$ che per $R > 1$.
R. $z = 0$ polo triplo, $z = \infty$ sing. ess.; Res(0) = 1, Res(∞) = -1.
5) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Si dimostri il seguente teorema. Se $f(z)$ è una funzione continua in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso e se $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ lungo qualunque curva chiusa γ contenuta in $\mathcal{D}$, allora $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$.
6) [**4**] Data la funzione $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui.
R. 0 sing. eliminabile; $z_n = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ poli semplici; ∞ punt. d'acc. poli sempl.; $\text{Res}(z_n) = (-)^n n\pi,\ n \neq 0$.
7) ([**3**]+[**3**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare gli integrali

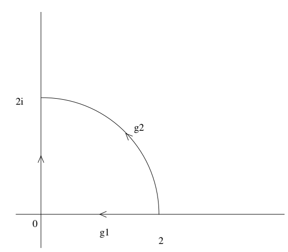
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x^2+ix+2)}dx, \quad k \in \mathbb{R}; \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+2)^2}$$

R. $k > 0 : I_1 = 2\pi e^{-k}/3,\ k < 0 :\ I_1 = 2\pi e^{2k}/3$; $I_2 = \pi/(4(2)^{3/4})$

4.22 Scritto (prima parte) del 15/09/08; AA 07-08

1) ([**3**]) Calcolare l'integrale

$$\int_2^{2i} \left(\bar{z}^2 + z\right)\, dz$$



i) lungo il contorno γ_1 (la spezzata: $(2,0) \cup (0,2i)$), ii) lungo l'arco γ_2 di raggio 2, iii) lungo il contorno chiuso $\gamma_2 - \gamma_1$. (R. $I_1 = -(4/3)(5+2i)$, $I_2 = 4 + 8i,\ I_3 = (4/3)(11-i)$)
2) ([**2**]) Determinare tutti i valori di

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}$$

(R. $2^{\sqrt{3}} e^{i\pi(\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\sqrt{3})},\ k \in \mathbb{Z}$)
3) ([**4**]) i) Dire per quali valori dei parametri α e β la funzione $u = \alpha xy^2 - x^3 + \beta\sqrt{x^2+y^2}$ è la parte reale di una funzione analitica $f(z)$. ii) Per quei valori di α, β, costruire la parte immaginaria $v(x,y)$ e iii) la funzione $f = u + iv$ come funzione della sola z.
(R. i) $\alpha = 3, \beta = 0$; ii) $v = y^3 - 3x^2y$; iii) $f = -z^3$)
4) ([**2**]+[**2**]) Data la funzione $f(z) = z^{-5}e^{z^2}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e all'infinito e la loro natura; ii) calcolarne i correspondenti residui.
(R. i) 0 polo doppio, ∞ sing. ess.; ii) Res(0)=1/2; Res(∞)=-1/2)
5) [5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Si dimostri il seguente teorema di Cauchy per un contorno triangolare. Se $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso, allora $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ lungo un qualunque triangolo γ contenuto in $\mathcal{D}$.

6) **[3]**+**[2]** Data la funzione $f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e all'infinito e la loro natura; ii) calcolare i corrispondenti residui.
(R. i) 0 sing. eliminabile, $2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ poli doppi; ∞ punto d'accum. di poli doppi; ii) Res($2n\pi$)=$8n\pi$)
7) ([**3**]+[**3**]+[**3**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare gli integrali

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x+i)^2} dx, \quad k \in \mathbb{R}; \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}; \quad I_3 = P\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

(R. $I_1 = 2\pi\theta(-k)ke^k$; $I_2 = 1/8$; $I_3 = -\pi/2$)
8) ([**3**]) Sviluppare la funzione $f(z) = (z^2+4)^{-1}$ in serie di potenze, centrate in $z_0 = 2i$, in tutto il piano complesso.

4.23 Scritto di Analisi Complessa del 15/07/09; AA 08-09 - U. Aglietti

Risolvere i seguenti problemi (il punteggio relativo e' indicato entro parentesi quadre):

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema dei residui.

   Soluzione: consultare qualunque manuale di analisi complessa;

2. [8] determinare quanti giri (completi) occorre fare attorno all'∞ perche' la funzione

   $$f(z) \;=\; (z-a)^{1/3}(z-b)^{-1/5} \tag{46}$$

   riassuma lo stesso valore, dove a e b sono due numeri complessi dati. Dire per quali valori di a e b l'origine e' un punto di diramazione della f.

   Soluzione: $n\,\mathrm{mcm}(3,5) = n\,15$ giri, dove n e' un intero ed mcm e' il minimo comune multiplo; $a = 0$ e/o $b = 0$;

3. [8] determinare l'espansione di Laurent centrata nell'origine ($z = 0$) della funzione

   $$f(z) \;=\; 1/z^3 \,\exp(z) \tag{47}$$

   e calcolarne il raggio di convergenza. Dire quale singolarita' possiede la f nell'origine e calcolarne il residuo.

   Soluzione:

   $$f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{z^n}{(n+3)!} \quad \text{per} \quad 0 < |z| < \infty; \tag{48}$$

   In $z = 0$ la f ha un polo triplo con residuo $R = 1/2$, come si vede direttamente calcolando esplicitamente i primi 3 termini dall'espansione sopra;

4. [8] calcolare con il teorema dei residui l'integrale

   $$I \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}\,. \tag{49}$$

   Soluzione:

   $$\begin{aligned} I &= 2\pi i \left\{ \lim_{z\to\exp(i\pi/4)} \frac{z-\exp(i\pi/4)}{z^4+1} + \lim_{z\to\exp(i3/4\pi)} \frac{z-\exp(i3/4\pi)}{z^4+1} \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=\exp(i\pi/4)} + \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=\exp(i3/4\pi)} \right\} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{50}$$

4.24 Scritto del 21/09/2009, AA 08-09 — U. Aglietti

Risolvere i seguenti problemi (il punteggio relativo e' indicato entro parentesi quadre):

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il (primo) teorema di Liouville.

   Soluzione: consultare qualunque manuale di analisi complessa;

2. [8] determinare quanti giri (completi) occorre fare attorno all'∞ perche' la funzione
$$f(z) \,=\, (z-a)^{1/2}(z-b)^{1/3}(z-c)^{-1/5} \tag{51}$$
   riassuma lo stesso valore, dove a, b e c sono tre numeri complessi dati. Dire per quali valori di a, b e c l'origine e' un punto di diramazione della f.

   Soluzione: $n\,\mathrm{mcm}(2,3,5) \,=\, n\,30$ giri, dove n e' un intero ed mcm e' il minimo comune multiplo; $a = 0$ e/o $b = 0$ e/o $c = 0$;

3. [8] calcolare l'espansione di Laurent centrata nell'origine ($z_0 \,=\, 0$) della funzione
$$f(z) \,=\, 1/z^4 \,\sin(z) \tag{52}$$
   e determinarne il dominio di convergenza. Dire quale singolarita' possiede la f nell'origine e calcolarne il residuo.

   Soluzione:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n+1)!} \quad \text{per} \quad 0 < |z| < \infty; \tag{53}$$
   In $z \,=\, 0$ la f ha un polo triplo con residuo $R \,=\, -1/6$, come si vede direttamente calcolando esplicitamente i primi 2 termini dall'espansione sopra;

4. [8] calcolare con il teorema dei residui l'integrale
$$I \,=\, \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sin(x)+2}\,. \tag{54}$$

   Soluzione:
$$I \,=\, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,. \tag{55}$$
   Si fa il cambio di variabile standard $z = e^{ix}$ che chiude il segmento $[-\pi, \pi]$ nel cerchio unitario con centro l'origine del piano z. Si impiega quindi il teorema dei residui, l'unico residuo essendo dato dalla radice $z_+ = i(-2 + \sqrt{3})$ dell'equazione di secondo grado $z^2 + 4iz - 1 = 0$.

4.25 Scritto del 20/09/2010, AA 09-10 — U. Aglietti

1. [9] enunciare e dimostrare, in forma succinta, il teorema integrale di Cauchy (detto anche rappresentazione integrale di Cauchy);

2. [6] determinare i punti di diramazione con il rispettivo ordine della funzione
$$f(z) \;=\; \frac{1}{z^{1/3}} + \frac{1}{(z-1)^{1/2}}\,, \qquad z \neq 0\,,1\,. \tag{56}$$
Dire inoltre se l'infinito e' un punto di diramazione e, in caso affermativo, qual'e' il suo ordine;

   R: $z = 0$ e' un punto di diramazione di ordine 2 (3 giri), $z = 1$ e' un punto di diramazione di ordine 1, $z = \infty$ e' un punto di diramazione di ordine 5.

3. [6] determinare l'espansione di Laurent centrata nel punto $z = 1$ della funzione
$$f(z) \;=\; \frac{1}{z(1-z)}\,, \qquad z \neq 0\,,1\,, \tag{57}$$
il dominio di convergenza, il tipo di singolarita' ed il residuo nel suddetto punto;

   R: $\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $0 < |z-1| < 1$, $z = 1$ e' un polo semplice con residuo -1.

4. [6] determinare il raggio di convergenza R della serie seguente usando il criterio di D'Alambert o di Cauchy-Hadamard:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2} z^n\,; \tag{58}$$

   R: $R = 1/e^2$.

5. [6] calcolare con il teorema dei residui il seguente integrale:
$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+i}{x^3-i} dx\,. \tag{59}$$

   R: $I = 0$, come si vede chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore, nel quale c'e' solamente una singolarita' eliminabile.

4.26 1^o esonero del 04/04/2011, AA 2010-11 - P.M.Santini

1) ([**3**]) Determinare tutti i valori di i) $(2-i2\sqrt{3})^{1/4}$, ii) Ln $(3-i\sqrt{3})$.
2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Sia $f(z)$ analitica nel dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso. Usando il fatto che $\oint f(z)dz = 0$ lungo una qualunque poligonale chiusa contenuta in $\mathcal{D}$, dimostrare che $\oint f(z)dz = 0$ lungo una qualunque curva chiusa regolare contenuta in $\mathcal{D}$.
3) ([**2.5**]+[**2.5**]) Calcolare $\int_\gamma \bar{z}^3 dz$ sui due contorni: i) da 2 a $2i$, lungo l'arco di circonferenza centrato in 0; ii) lungo il segmento da i a $1+i$.
R. i) 16; ii) $-5/4$.
4) ([**5**]) Calcolare l'integrale $\int_\gamma (z(z-i))^{-1}dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da 1, arriva a $1+i$ girando una volta in senso antiorario intorno all'origine senza includere il punto i.
R. $-2\pi + i\ln 2$.
5) ([**5**]) Data la funzione $u(x,y) = x^3 + axy^2$, i) determinare i valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tali che u sia interpretabile come la parte reale di una funzione analitica $f(z)$; ii) per tali valori, calcolare la corrispondente parte immaginaria $v(x,y)$; iii) scrivere infine $f(z)$ come funzione di z.
R. $f(z) = z^3+$ cost.
6) ([**3**]+[**2**]) Data la funzione $f(z) = (z-1)^{2/3}$, i) mostrare che è polidroma (calcolandone tutte le determinazioni), individuare i suoi punti di diramazione (dopo aver dato la definizione di punto di diramazione) e specificare dopo quanti giri intorno ad essi la funzione riprende il valore iniziale. ii) Individuare un taglio conveniente che la rende monodroma e calcolare la sua discontinuità attraverso il taglio.
R. punti di diram. $1, \infty$. Discont. attr. il taglio $(1,\infty)$: $-\sqrt[3]{r^2}(3+\sqrt{3})/2$
7) ([**4**]+[**2**]) i) Scrivere le parti reale ϕ ed immaginaria ψ della funzione $\Phi(z) = -ikz^{3/2} + \phi_0,\ k, \phi_0 > 0$, utilizzando coordinate polari; disegnare le corrispondenti linee di flusso e le curve equipotenziali nel settore $0 \leq arg z \leq 2\pi/3$ (motivando il disegno con qualche considerazione matematica), mostrando, in particolare, che le semirette $arg z = 0, 2\pi/3$ sono allo stesso potenziale. ii) Determinare il corrispondente campo vettoriale, mostrare che è conservativo e a divergenza nulla nel settore ed individuarne una possibile applicazione fisica.

4.27 2^o esonero del 28/04/2011, AA 2010-11 - P.M.Santini

1) ([**2**]+[**3**]) Data la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2-2z}$, i) individuare le sue singolarità e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) svilupparla in serie di potenze centrate in $z_0 = 1$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza e disegnando le corrispondenti corone circolari.
R. i) $0, 2$ poli semplici, residui: $-1/2, 1/2$;
ii) $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^{2n},\ |z-1| < 1,\ \ f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(z-1)^{2n},\ |z-1| > 1$

2) [**2**]+[**2**] Data la seguente rappresentazione integrale $F(z) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{zt}}{t^2+1}dt$, determinare i) dove l'integrale converge assolutamente ed uniformemente; ii) il dominio di analiticità di $F(z)$.
R. i) Re $z \le 0$; ii) Re $z < 0$

3) ([**3**]+[**3**]) i) Sia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie di Taylor avente raggio di convergenza R. Determinare una condizione sufficiente affinchè tale serie converga in ogni punto della circonferenza $|z-z_0| = R$. ii) Se R è il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, determinare il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n c_n}{n!}(z-z_0)^n$.
R. i) ad es. $|c_n| = R^{-n}n^{-p},\ p > 1$; ii) R/e

4) [**6**] **(esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)** i) Dare la definizione di residuo di una funzione $f(z)$ in una sua singolarità isolata $z_0 \in \mathbb{C}$; ii) mostrare che tale residuo coincide col coefficiente c_{-1} dello sviluppo di Laurent di f nell'intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$; iii) enunciare e dimostrare il teorema dei residui.

5) [**3**]+[**1**] Data la funzione $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) calcolare l'integrale $I_R = \oint_{\gamma_R} f(z)dz$, dove γ_R è la circonferenza centrata nell'origine di raggio R, percorsa in senso antiorario, nei due casi $R = \pi/2$ e $R = 3\pi/2$.
R. i) $n\pi,\ n \neq 0$ poli semplici, $\mathrm{Res}(f, n\pi) = (-1)^n n\pi$; ∞ punto d'acc. di poli semplici. ii) $I_{1/2} = 0$ (assenza di singolarità), $I_{3/2} = 2\pi i(Res(-\pi) + Res(\pi)) = 0$)

6) ([**3**]+[**4**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare gli integrali

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{(x^4+1)}dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

R. $I_1 = \pi$, $I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-\frac{|k|}{\sqrt{2}}}(\cos\frac{|k|}{\sqrt{2}} + \sin\frac{|k|}{\sqrt{2}})$

7) ([**4**]) Facendo uso del teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x^2+1)}dx$$

R. $I = \pi/\sqrt{3}$

4.28 scritto del 19/07/2011, AA 2010-11 - P.M.Santini

1) ([**4**]) Determinare tutti i valori di:
i) $(1-i)^{1/5}$, ii) Ln $(\sqrt{3}-i3)$.
R. i) $\sqrt[10]{2}e^{-i\pi/20+2k\pi/5},\ k=0,1,2,3,4$ ii) $\ln 2\sqrt{3}+i(-\pi/3+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$
2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Sia $f(z)$ analitica nel dominio $\mathcal{D}$ semplicemente connesso. Mostrare che $\oint f(z)dz=0$ lungo la frontiera di un qualunque triangolo contenuto in $\mathcal{D}$.
3) ([**2**]+[**2**]) i) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}(z-z_0)^n$. ii) Sia R il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n z^n$; calcolare il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n)^m z^n,\ m\in\mathbb{N}_+$.
R. i) $R=e/3$; ii) $R'=R^m$
4) ([**4**]) Calcolare l'integrale $\int_\gamma (z(z-1))^{-1}dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da i, arriva a $1+i$ girando una volta in senso orario intorno a 1 senza includere l'origine.
R. $-2\pi i-\ln 2$
5) ([**5**]) Data la funzione $u(x,y)=y^3+ayx^2$, i) determinare i valori del parametro reale $a\in\mathbb{R}$ tali che u sia interpretabile come la parte reale di una funzione analitica $f(z)$; ii) per tali valori, calcolare la corrispondente parte immaginaria $v(x,y)$; iii) scrivere infine $f(z)$ come funzione di z.
R. $a=-3,\ v=x^3-3xy^2,\ f(z)=iz^3+c$
6) [**4.5**]+[**1.5**] Data la funzione $f(z)=\frac{z-\pi/2}{\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) calcolare l'integrale $I_R=\oint_{\gamma_R}f(z)dz$, dove γ_R è la circonferenza centrata in $\pi/2$ di raggio R, percorsa in senso antiorario, nei due casi $R=\pi/2$ e $R=3\pi/2$.
R. i) $z_n=(n+1/2)\pi,\ n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ poli semplici; $z_0=\pi/2$ sing. eliminaile; ∞ punto d'accum. di poli semplici. $\text{Res}(f(z),z_n)=(-1)^{n+1}n\pi$. $I_{\pi/2}=I_{3\pi/2}=0$
7) ([**4**]+[**3**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare gli integrali

$$I_1=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx;\qquad I_2=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ikx}}{(x-i)^2}dx,\quad k\in\mathbb{R}.$$

R. $I_1=\pi/\sqrt{3},\ I_2=-2\pi ke^{-k}H(k)$

4.29 scritto del 09/09/2011, AA 2010-11 - P.M.Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di i) $(-1+i)^{\pi}$, ii) Ln $(3+i\sqrt{3})$, iii) $(\sqrt{3}-3i)^{1/4}$
R. i) $2^{\pi/2}e^{i\pi^2(3/4+2k)}, k \in \mathbb{Z}$; ii) $\ln 2\sqrt{3}+i(\pi/6+2k\pi), k \in \mathbb{Z}$; iii) $\sqrt[8]{12}e^{i\pi(5/12+k/2)}$; $k = 0, 1, 2, 3$
2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Enunciare e dimostrare il teorema (sulla serie) di Laurent.
3) ([**3**]+[**3**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5z)^n}{n^3}$ e stabilire se tale serie converge anche sul bordo $|z| = R$ e come. ii) Dimostrare che, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ è uniformemente convergente nel dominio $\mathcal{D}$ di analiticità delle $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, allora la sua somma $f(z)$ è anch'essa analitica in $\mathcal{D}$.
R. i) $R = 1/5$; conv. ass. e unif. al bordo
4) ([**4**]) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma}(z^2-1)^{-1}dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da i, arriva a $-i$ girando una volta in senso orario intorno a -1, senza includere 1.
R. $3\pi i/2$
5) [**4.5**]+[**1.5**] Data la funzione $f(z) = \frac{z+\pi/2}{\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) calcolare l'integrale $I = \oint_{\gamma} f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in 0, di raggio π e percorsa in senso antiorario.
R. i) $z_n = \pi/2+n\pi, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ poli semplici con $\text{Res}(z_n) = (-1)^{n+1}(n+1)\pi$; $-\pi/2$ sing. eliminabile; ∞ punto d'acc. poli semplici. ii) $I = -2\pi^2 i$
6) ([**4**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x^2+4)^2}dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

R. $I_1 = (1+2|k|)e^{-2|k|}/16$
7) ([**4**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I_2 = P\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x(x-i)}$$

R $I_2 = \pi$

4.30 primo esonero (Analisi Complessa) del 23/04/2012, AA 2011-12 - U.G.Aglietti

1. Enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema della media. **R:** consultare un manuale di analisi complessa;
2. determinare il raggio di convergenza R della serie seguente in funzione del parametro reale α:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{\alpha}[\exp(-n)]}{n^{3/2}} z^n. \tag{60}$$

Discutere anche la convergenza sulla frontiera $|z| = R$. **R:** si ha $R = \exp(\alpha)$ poiche'

$$\sin^{\alpha}[\exp(-n)] = \exp(-\alpha n)\left[1 + \mathcal{O}(\exp(-2n))\right]. \tag{61}$$

Sulla circonferenza $|z| = R$ vi e' convergenza assoluta in quanto

$$\frac{\sin^{\alpha}[\exp(-n)]\exp(\alpha n)}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}\left[1 + \mathcal{O}(\exp(-2n))\right]; \tag{62}$$

3. determinare la parte principale dell'espansione di Laurent in zero della funzione

$$f(z) \;=\; \frac{\exp(z)}{z^2(1-z)} \qquad (z \neq 0, 1), \tag{63}$$

il dominio di convergenza, il tipo di singolarita' ed il residuo nell'origine. **R:** espandendo i fattori analitici della f in $z = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots\right)\left(1 + z + z^2 + \cdots\right) \\ &=\; \frac{1}{z^2}\left[1 + z + \mathcal{O}\left(z^2\right)\right]^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{64}$$

nella corona $0 < |z| < 1$ in quanto vi sono poli in $z = 0$ e $z = 1$. L'origine e' quindi un polo doppio con residuo eguale a 2;
4. calcolare con il teorema dei residui il seguente integrale:

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ikx)}{(x - a + ib)(x + a - ib)}, \tag{65}$$

con a, b e k reali, $b > 0$. **R:** chiudendo il cammino di integrazione sopra per $k > 0$ e sotto per $k < 0$, si ottiene:

$$I = \frac{\pi}{b + ia} \exp[-|k|(b + ia)], \tag{66}$$

dove θ e' la funzione a gradino di Heaviside. Notare la continuita' in $k = 0$;
5. usando le coordinate bipolari, determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine della funzione polidroma

$$f(z) = (z - a)^{1/3}(z - b)^{-1/3} \qquad (z \neq b), \tag{67}$$

dove $a \neq b$ sono due numeri complessi. Determinare inoltre se l'infinito e' o non e' un punto di diramazione. **R:** ponendo $z-a = \rho_1 \exp(i\theta_1)$, $z-b = \rho_2 \exp(i\theta_2)$ si ottiene

$$f(z) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/3} \exp\left(i\frac{\theta_1 - \theta_2}{3}\right), \tag{68}$$

dove si considera solamente la radice cubica *reale* del quoziente dei moduli. Girando attorno ad a ($\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$, $\theta_2 \to \theta_2$) ed a b ($\theta_1 \to \theta_1$, $\theta_2 \to \theta_2 + 2\pi$), si ottiene che a e b sono punti di diramazione di ordine 2. Girando attorno all'infinito ($\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$, $\theta_2 \to \theta_2 + 2\pi$) si ottiene invece che l'infinito non e' un punto di diramazione della funzione.

4.31 Scritto di Analisi Complessa del 10/07/2012, AA 2011-12 - U.G.Aglietti

Risolvere i seguenti problemi:[1]

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema di Rouche'.

   Sol: consultare un manuale di analisi complessa;

2. [6] determinare il raggio di convergenza R della serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{69}$$

   dove i coefficienti c_n hanno la seguente definzione ricorsiva:

$$c_1 \equiv 1, \qquad c_{n+1} \equiv \sin(c_n) \qquad (n > 0.) \tag{70}$$

   Discutere inoltre la convergenza sul punto della frontiera $z = -R$.

   Sol: poiche' il seno e' una funzione continua, passando al limite per $n \to \infty$ ad entrambi i membri dell'equazione ricorsiva sopra, si ottiene

$$c_\infty = \sin(c_\infty) \qquad \Rightarrow \qquad c_\infty = 0, \tag{71}$$

   poiche' 0 e' l'unico punto fisso del seno e dove si e' indicato con c_∞ il limite. Usando il criterio del rapporto, si ottiene quindi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(c_n)}{c_n} = 1. \tag{72}$$

   Poiche i coefficienti della serie sono infinitesimi, essa converge in $z = -1$ per il criterio di Leibniz.

3. [6] determinare la serie di Taylor centrata in zero della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} + \frac{z}{(1-z)^2} \qquad (z \neq 1) \tag{73}$$

   ed il raggio di convergenza R;

   Sol: si divide per z la serie di Taylor centrata in 0 del seno per ottenere la serie di Taylor di $\sin(z)/z$; si deriva quindi la serie di Taylor di $1/(1-z)$ rispetto a z e si moltiplica per z per ottenere la serie di Taylor di $z/(1-z)^2$; si sommano infine i risultati, ad ottenere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + b_n)\, z^n \quad |z| < R, \tag{74}$$

   dove $b_{2n} \equiv (-1)^n/(2n+1)!$ mentre svanisce per indice dispari.

   $R = 1$ per il teorema di Abel in quanto la singolarita' della f piu' vicina all'origine (l'unica in $\mathcal{C}$) e' in $z = 1$.

[1] Il punteggio relativo e' indicato entro parentesi quadre.

4. [6] calcolare con il teorema dei residui l'integrale:

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(x)}{1 - a\sin(x)} dx \tag{75}$$

con $0 < a < 1$.

Sol: con il solito cambio di variabile $z = \exp(ix)$, si trasforma I in un integrale sulla circonferenza unitaria centrata nell'origine. Si applica quindi il teorema dei residui: entro la circonferenza c'e' un polo semplice in $z = 0$ ed un altro polo semplice in $z_- = i(1 - \sqrt{1 - a^2})/a$. La somma dei residui si annulla, di modo che

$$I = 0. \tag{76}$$

5. [6] determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine della funzione polidroma

$$f(z) = \cos\left[(z - a)^{1/2}\right] \sin\left[(z - b)^{1/2}\right], \tag{77}$$

dove a e $b \neq a$ sono due numeri complessi. Determinare inoltre se l'infinito e' o non e' un punto di diramazione.

Sol: usando l'espansione di Taylor centrata in zero del coseno con il cambio di variabile (composizione di funzioni) $\zeta = (z - a)^{1/2}$, si ottiene

$$\cos\left[(z - a)^{1/2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - a)^n}{(2n)!}, \quad |z| < \infty. \tag{78}$$

Poiche' compaiono solamente potenze intere di $z - a$, si conclude che la funzione sopra e' monodroma (ed intera). Procendo in maniera analoga, si ottiene per il secondo fattore di f

$$\sin\left[(z - b)^{1/2}\right] = (z - b)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - b)^n}{(2n + 1)!}, \quad |z| < \infty. \tag{79}$$

Poiche' compare una radice quadrata a fattore di un'altra funzione monodroma (intera), la funzione sopra, e quindi anche la f, ha punti di diramazione di ordine 1 in $z = b$ ed all'infinito.

4.32 Scritto di Analisi Complessa del 19/09/2012, AA 2011-12 - U.G.Aglietti

Risolvere i seguenti problemi:[2]

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema del massimo modulo;

   R: consultare un manuale di analisi complessa;

2. [8] Se la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{80}$$

   ha raggio di convergenza $R > 0$, come determinato dal criterio di D'Alambert o di Cauchy-Hadamard, qual'e' il raggio di convergenza R' della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n)^{\alpha} \, (z-b)^n, \tag{81}$$

   dove α e' un numero reale fissato?

   R: usando ad esempio il criterio del rapporto, si ha:

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right)^{\alpha} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right)^{\alpha} = \frac{1}{R^{\alpha}}, \tag{82}$$

   poiche' la funzione potenza $f(x) = x^{\alpha}$ e' continua per ogni α per $x \neq 0$. Si ottiene quindi il risultato

$$R' = R^{\alpha}. \tag{83}$$

   Analogamente con il criterio della radice;

3. [8] determinare le singolarita' nel piano complesso ordinario della funzione

$$f(z) \;=\; \frac{1}{\exp(z)-1} - \frac{1}{z-2\pi i} - \frac{1}{z+2\pi i}. \tag{84}$$

   Discutere inoltre il punto all'infinito.

   R: scrivendo $z = 2\pi i n + \delta z_n$, dove n e' un intero, ed espandendo per $|\delta z_n| \ll 1$, si ottiene:

$$f(2\pi i n + \delta z_n) = \frac{1}{\delta z_n} + \mathcal{O}(1) - \frac{1}{2\pi i(n-1)+\delta z_n} - \frac{1}{2\pi i(n+1)+\delta z_n}, \tag{85}$$

   dove si e' usata la periodicita' dell'esponenziale complesso. Si ricava quindi che la f ha poli semplici con residuo unitario in $z_n = 2\pi i n$, dove n e' un intero $\neq \pm 1$; per $n = \pm 1$ si hanno invece delle singolarita' eliminabili. Il punto all'infinito e' una singolarita' non isolata;

[2] Il punteggio relativo e' indicato entro parentesi quadre.

4. [8] determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine della funzione polidroma

$$f(z) \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^{n/k}}{(n!)^2}, \tag{86}$$

dove a e' un numero complesso e k e' un intero non nullo. Discutere anche il punto all'infinito.

R: si puo' scrivere la f come la seguente composizione di funzioni

$$f = g \circ h, \tag{87}$$

(la composizione di funzioni e' definita come $(g \circ h)(z) \equiv g(h(z))$) dove:

$$g(\zeta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{(n!)^2} \tag{88}$$

e' una funzione intera (monodroma) del suo argomento, indicato con ζ, non invariante per alcuna rotazione della forma $\zeta \to \zeta \exp(2\pi i/l)$, dove l e' un intero $\neq \pm 1$ (tutti i coefficienti della serie di Taylor di g sono non nulli);

$$h(z) \equiv (z-a)^{1/k} \tag{89}$$

e' la radice k-esima, polidroma per $k \neq \pm 1$, con punti di diramazione di ordine $|k| - 1$ in $z = a$ ed in $z = \infty$. Poiche' la f ha la stessa polidromia della h, anch'essa ha punti di diramazione di ordine $|k| - 1$ in $z = a, \infty$.

Un procedimento alternativo consiste nel sostituire la rappresentazione polare $z = a + \rho \exp(i\varphi)$ nella serie di potenze che definisce la f, dopo aver osservato che tale serie e' assolutamente convergente in tutto il piano complesso ordinario.

4.33 Scritto di Analisi Complessa del 26/10/2012, AA 2011-12 - U.G.Aglietti

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema di Rouche'.

   R: consultare un manuale di analisi complessa (vedi ad esempio il libro del Prof. Santini ed al.).

2. [8] Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(n^{\alpha}\right) z^{n}, \tag{90}$$

   in funzione del parametro reale α.

   R: utilizzando ad esempio il criterio della radice, si ricava che

   $$R_{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-n^{\alpha-1}\right), \tag{91}$$

   di modo che $R_{\alpha<1} = 1$, $R_{\alpha=1} = 1/e$, $R_{\alpha>1} = 0$.

3. [8] Calcolare con il teorema dei residui l'integrale

   $$I \;=\; \int_{0}^{2\pi} \frac{\sin t}{1 - a\sin t}\, dt, \tag{92}$$

   dove $-1 < a < 1$.

   R: si tratta dell'integrale di una funzione razionale trigonometrica su di un periodo, che si calcola tramite il cambio di variabile standard $z = \exp(it)$; si ottiene quindi un integrale sulla circonferenza unitaria percorsa in senso positivo (antiorario). Nel cerchio unitario, l'integrando ha due poli semplici in $z = 0$ ed in $z = i\left(1 - \sqrt{1-a^2}\right)/a$. Applicando il teorema dei residui si ricava che

   $$I = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - 1\right). \tag{93}$$

   Da notare che l'integrale si annulla per $a = 0$.

4. [8] determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine della funzione polidroma

   $$f(z) \;=\; \mathrm{L}n\left[\frac{z^2 - 3z + 2}{(z-1)^2}\right]. \tag{94}$$

   Discutere anche il punto all'infinito.

   R: la $f(z)$ e' definita per $z \neq 1, 2$. Dopo avere cancellato il fattore $z - 1$ comune a numeratore e denominatore nell'argomento del logaritmo, si introducono le coordinate bipolari

   $$z = 2 + \rho e^{i\varphi}, \qquad z = 1 + re^{i\theta}, \tag{95}$$

nelle quali la f si scrive

$$f = \log \frac{\rho}{r} + i\,(\varphi - \theta)\,, \tag{96}$$

dove per log si intende il logaritmo dell'analisi reale. Facendo 1 giro completo solamente attorno a $z = 2$, si ha che $\varphi \to \varphi + 2\pi$, $\theta \to \theta$, di modo che $z = 2$ e' un punto di diramazione di ordine infinito; analogamente per $z = 1$, anch'esso punto di diramazione di ordine infinito. Girando attorno all'infinito, $\varphi \to \varphi + 2\pi$, $\theta \to \theta + 2\pi$, si ricava invece che la funzione riassume lo stesso valore, di modo che l'infinito non e' un punto di diramazione.

4.34 Esonero di Analisi Complessa del 29/04/2013, AA 2012-13 - U.G.Aglietti

Risolvere i seguenti problemi (il punteggio relativo e' tra []; non si possono consultare ne' formulari ne' appunti):

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema dell'indice.

   R: consultare un manuale di analisi complessa;

2. [8] determinare il raggio di convergenza R e discutere la convergenza sul bordo di
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, z^n, \tag{97}$$
   con $c_n \equiv n^{n-1}\sin(1/n!)$.

   R: usando l'espansione di Taylor nell'origine del seno $\sin(x) = x + \mathcal{O}\left(x^3\right)$ e l'espansione di Stirling per il fattoriale, $n! = (n/e)^n\sqrt{2\pi n}[1+\mathcal{O}(1/n)]$, si ottiene
$$c_n = \frac{e^n}{(2\pi)^{1/2} n^{3/2}}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{98}$$
   da cui segue $R = 1/e$ e la convergenza sulla frontiera, in quanto vi e' convergenza assoluta;

3. [8] determinare l'espansione di Laurent centrata in zero, il tipo di singolarita' ed il residuo nello stesso punto della funzione
$$f(z) \,=\, z^2 \sin\left(1/z\right). \tag{99}$$
   Discutere anche il punto all'infinito.

   R: usando la ben nota espansione di Taylor centrata in zero di $\sin\zeta$ e ponendo $z = 1/\zeta$, si ottiene
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{1-2n}}{(2n+1)!} = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120 z^3} + \cdots \qquad \text{per } 0 < z < \infty. \tag{100}$$
   Si ricava quindi che l'origine e' una singolarita' essenziale con residuo eguale a $-1/6$. Dalla stessa espansione segue anche che l'infinito e' un polo semplice con residuo eguale ad $1/6$ (quest'ultima conclusione segue anche dal fatto che la f ha singolarita' solamente nell'origine ed all'infinito);

4. [8] determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine della funzione polidroma
$$f(z) = \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right). \tag{101}$$
   Studiare anche il punto all'infinito.

R: usando le coordinate bipolari

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2}, \tag{102}$$

si ricava che

$$f = \log \frac{\rho_1}{\rho_2} + i\,(\theta_1 - \theta_2)\,. \tag{103}$$

Il punto $z = 1$ e' quindi un punto di diramazione di ordine infinito per f (1 giro in senso antiorario: $\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$, $\theta_2 \to \theta_2$), cosi' come $z = -1$. L'infinito non e' invece un punto di diramazione (1 giro in senso antiorario attorno all'infinito: $\theta_1 \to \theta_1 - 2\pi$, $\theta_2 \to \theta_2 - 2\pi$).

4.35 Appello Straordinario “fuori corso + 155 crediti” del 15/05/13, AA 12-13, U. G. Aglietti

1. [9] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema di Rouche';

   R: consultare un manuale di analisi complessa, ad esempio il libro di P.M. Santini et al.;

2. [8] determinare il raggio di convergenza R della serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z-a)^{2^n}$, dove $c_n = 2^{-n^2+2^n}$ ed a e' un numero complesso fissato;

   R: usando il criterio di convergenza della radice (di Cauchy-Hadamard) nella sua forma piu' generale,

   $$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sup\{0, |c_n|^{2^{-n}}, |c_{n+1}|^{2^{-(n+1)}}, \cdots\} = \lim_{n\to+\infty} \sup\{0, 2^{1-n^2 2^{-n}}, 2^{1-(n+1)^2 2^{-n-1}}, \cdots\} = 2, \tag{104}$$

   di modo che $R = 1/2$;

3. [8] determinare la parte principale dell'espansione di Laurent centrata in $z = 1$, il tipo di singolarita' ed il residuo nello stesso punto della funzione $f(z) = \exp(z)/(z(1-z)^2)$. Studiare anche le rimanenti singolarita' nel piano complesso compattificato;

   R: espandendo i fattori analitici in $z = 1$,

   $$f(1+t) = \frac{e}{t^2}\frac{e^t}{1+t} = \frac{e}{t^2}\left[1+t+\mathcal{O}\left(t^2\right)\right]\left[1-t+\mathcal{O}\left(t^2\right)\right] = \frac{e}{(z-1)^2}+\mathcal{O}(1), \tag{105}$$

   per $0 < |z-1| < 1$, avendo posto $t \equiv z-1$. Dall'espansione sopra si ricava che $z = 1$ e' un polo doppio e che il residuo di f nello stesso punto e' zero. Si ha poi un polo singolo in $z = 0$ con residuo eguale ad uno ed una singolarita' essenziale all'infinito con residuo eguale a -1;

4. [8] calcolare con il teorema dei residui l'integrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx/(x^2 - x + 1)$, dove k e' un parametro reale.

   R: in base al lemma di Jordan, occorre chiudere il cammino di integrazione nel semipiano superiore della variabile di integrazione complessificata ($x \to z$) per $k \geq 0$, ed in quello inferiore per $k \leq 0$. In questi semipiani ci sono rispettivamente i poli semplici della f

   $$z_{\pm} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \tag{106}$$

   Usando il teorema dei residui, il risultato finale puo' essere scritto come

   $$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{i}{2}k - \frac{\sqrt{3}}{2}|k|\right). \tag{107}$$

   Commenti: il risultato e' continuo e reale per $k = 0$, come deve essere, e decade esponenzialmente per $k \to \pm\infty$.

4.36 Appello del 18/09/13, AA 12-13, U. G. Aglietti

1. [8] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema fondamentale dell'algebra;

   R: per una dimostrazione diretta si puo' applicare il teorema di Rouche' mentre per una dimostrazione per assurdo il teorema di Liouville (consultare un manuale di analisi complessa);

2. [8] determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine della funzione polidroma f definita dalla serie di potenze: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z-1)^{n/2}/n^n$;

   R: la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n / n^n \tag{108}$$

   ha raggio di convergenza infinito, di modo che la sua somma, detta $g(\zeta)$, e' una funzione intera, senza parita' definita. Poiche'

$$f(z) = g\left((z-1)^{1/2}\right), \tag{109}$$

   la f ha punti di diramazione di ordine uno (due giri) in $z = 1$ ed all'infinito;

3. [8] determinare l'espansione di Laurent centrata in $z = \infty$, il tipo di singolarita' ed il residuo nello stesso punto della funzione $f(z) = 1/z^5 \sin\left(z^2\right)$;

   R: usando l'espansione di Taylor in zero del seno, si ottiene immediatamente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n-3}/(2n+1)! = 1/z^3 - z/6 + \cdots, \quad 0 < |z| < \infty. \tag{110}$$

   Il punto all'infinito e' quindi una singolarita' essenziale con residuo nullo;

4. [9] calcolare con il teorema dei residui per $k < 0$ l'integrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} x^2 dx/(x^3 - i)$.

   R: chiudendo il cammino di integrazione con un semicerchio all'infinito nel semipiano inferiore (lemma di Jordan) e tenendo conto del polo semplice in $z = -i$, otteniamo

$$I = -2\pi i/3 \exp(k). \tag{111}$$

4.37 Scritto straordinario del 07/11/13, AA 12-13, U. G. Aglietti

1. [8] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema di infinita derivabilita' delle funzioni olomorfe;

   R: consultare un qualunque manuale di analisi complessa.

2. [8] determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine, nel piano complesso ordinario, della funzione $f(z) = \tan(z^{1/2})$ (ove definita). Discutere anche il punto all'infinito;

   R: la funzione f e' la composizione $g \cdot h$, dove $h(z) = z^{1/2}$ e' la ben nota funzione polidroma in $\mathbb{C}$ con punti di diramazione di ordine uno in $z = 0$ e $z = \infty$ e $g(z) = \tan(z)$ e' una funzione dispari meromorfa, con poli semplici in $z = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. La g e' quindi analitica in un intorno dell'origine. Di conseguenza, la funzione f ha un punto di diramazione di ordine uno in $z = 0$ ed una singolarita' non isolata all'infinito. Quest'ultimo e' infatti punto di accumulazione di poli semplici in $z = (\pi/2 + k\pi)^2$ con $k \in \mathbb{N}_0$.

3. [8] calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(3^{n^2} n!) z^{n(n-1)/2}$;

   R: usando l'approssimazione di Stirling per il fattoriale ed il criterio della radice, si ricava

   $$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^{n^2} n!} \right)^{2/(n(n-1))} = \frac{1}{9}, \tag{112}$$

   di modo che $R = 9$. L'argomento si puo' formalizzare maggiormente calcolando il massimo limite, in modo da tenere conto automaticamente delle infinite potenze di z con coefficiente nullo.

4. [9] calcolare con il teorema dei residui l'integrale $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - i}$ usando la funzione $g(z) \equiv \log(z)/(z^2 - i)$.

   R: I e' un integrale della forma

   $$\int_0^\infty \log^k(x) R(x) dx, \tag{113}$$

   dove $k \in \mathbb{N}_0$ (e' zero nel nostro caso) ed $R(x)$ e' una funzione razionale. Da una parte,

   $$\int_C g(z) dz = -2\pi i I, \tag{114}$$

   dove C e' il contorno chiuso standard che passa sopra e sotto il semiasse reale positivo, dove e' situato il taglio del logaritmo complesso. Dall'altra parte,

   $$\int_C g(z) dz = 2\pi i \left\{ Res[g(z), \exp(i\pi/4)] + Res[g(z), \exp(i5\pi/4)] \right\}. \tag{115}$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$I = \frac{(1+i)\sqrt{2}\pi}{4}. \tag{116}$$

4.38 Appello del 30/01/14, AA 12-13, U. G. Aglietti

1. [8] enunciare e dimostrare (in forma succinta) il teorema di Cauchy per domini semplicemente connessi.

   R: consultare un manuale qualsiasi di analisi complessa (alcuni studenti sono andati fuori tema confondendo questo teorema con il teorema (o rappresentazione) integrale di Cauchy);

2. [8] determinare i punti di diramazione assieme al loro ordine di $f(z) = \sin\left(z^{1/3}\right) + z^{1/2}\cos\left(z^{1/2}\right)$.

   R: la funzione $\sin\left(z^{1/3}\right)$ ha punti di diramazione di ordine due (tre giri) nell'origine ed all'infinito. La funzione $\cos\left(z^{1/2}\right)$ e' invece una funzione intera, essendo il coseno una funzione pari, di modo che $z^{1/2}\cos\left(z^{1/2}\right)$ ha punti di diramazione di ordine uno (due giri) nell'origine ed all'infinito. Si ricava quindi che $f(z)$ ha punti di diramazione di ordine cinque (sei giri) nell'origine ed all'infinito;

3. [8] determinare l'espansione di Laurent ed il residuo in $z = \infty$ della funzione $f(z) = z/(z-1) + z/(z-2)$.

   R: Usando l'espressione standard della serie geometrica,

   $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(1 + 2^{-n}\right) z^n, \quad |z| > 2. \tag{117}$$

   Guardando al termine con $n = -1$, si ricava immediatamente che

   $$\mathrm{Res}\left[f(z), \infty\right] = -3. \tag{118}$$

   Diversi studenti hanno espanso attorno all'origine anziche' attorno all'infinito o non hanno indicato il dominio di convergenza;

4. [9] calcolare con il teorema dei residui l'integrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} x/(x^2 + i) dx$ per k reale e diverso da zero.

   R: l'integrando ha due poli semplici in $z = \pm(1-i)/\sqrt{2}$. Chiudendo il cammino di integrazione sotto per $k > 0$ e sopra per $k < 0$, si ottiene:

   $$I = -i\pi\, \mathrm{sgn}(k)\, e^{-|k|}, \tag{119}$$

   dove $\mathrm{sgn}(k)$ ritorna il segno di k. Svariati studenti hanno scritto i poli in termini di $\sqrt{i}$, quantita' ambigua (non si sa neanche se e' sopra o sotto l'asse reale del piano complesso k).

4.39 Esonero del 15/04/14, AA 13-14, P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di:
i) i^π, ii) Ln $(-1+i)$, iii) $(\sqrt{3}-i)^{1/3}$
R. $i^\pi = e^{i\pi^2(1/2+2k)},\ k \in \mathbb{Z}$; Ln $(-1+i) = 1/2 \ln 2 + 3/4\ \pi i + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$; $(\sqrt{3}-i)^{1/3} = \sqrt[3]{2} e^{-i\pi/18+2/3\ k\pi i},\ k = 0,1,2$
2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Enunciare e dimostrare il teorema (sulla serie) di Laurent.
3) ([**2.5**]+[**2.5**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{an}}{(n!)^a}(z-z_0)^n,\ a > 0$, e stabilire se tale serie converge anche sul bordo $|z-z_0| = R$ e come, al variare di $a > 0$.
R. i) $R = e^{-a}$; ii) $0 < a \leq 2$: convergenza per $z \neq e^{-a}$; $a > 2$: convergenza assoluta e uniforme.
4) ([**4**]) Calcolare l'integrale $\int_\gamma (z^2+1)^{-1} dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da -1, arriva a 1 girando una volta in senso orario intorno a $-i$, senza includere i.
R. $3/2\ \pi$
5) [**4.5**]+[**1.5**] Data la funzione $f(z) = \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui, quando è possibile; ii) calcolare l'integrale $\oint_\gamma f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in π, di raggio $3\pi/2$ e percorsa in senso antiorario.
R. poli semplici in $z_n = n\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq \pm 1$ ($\pm\pi$ singolarità apparenti); ∞ punto d'acc. di poli semplici; Res $(f(z), z_n) = (-1)^n \pi^2 (n^2-1),\ n \in \mathbb{Z}$. ii) $\oint_\gamma f(z)dz = 4\pi^3 i$
6) ([**4**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{(x+4i)^2} dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

R. $I(k) = H(-k) 2\pi k e^{4k}$
7) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I(p) = \int\limits_0^\infty \frac{x^p}{x^2+1} dx, \quad -1 < p < 1$$

R. $I(p) = \pi \frac{\sin \pi p/2}{\sin \pi p} = \frac{\pi}{2\cos \pi p/2}$

4.40 Scritto dell'08/07/14; P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di: i) $i^{\sqrt{2}}$, ii) Ln $(\sqrt{3}-i)$, iii) $(-1+i)^{1/3}$.
R $i^{\sqrt{2}} = e^{i(\pi/\sqrt{2}+2\sqrt{2}\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}$; Ln $(\sqrt{3}-i) = \ln 2 + i(-\pi/6 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, $(-1+i)^{1/3} = \sqrt[6]{2}e^{i(\pi/4+2k\pi/3)},\ k = 0, 1, 2$

2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Dimostrare il seguente teorema. Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$, e sia Δ un qualunque triangolo contenuto in $\mathcal{D}$. Allora $\oint_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

3) ([**3**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}(z-z_0)^n$, e stabilirne le proprietà di convergenza nel piano complesso z (per $|z-z_0| \leq R$ e per $|z-z_0| > R$).
R $R = 1$; conv. assoluta e uniforme per $|z-z_0| \leq 1$ e divergenza per $|z-z_0| > 1$

4) ([**4**]) Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma (z^2-1)^{-1}dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da $-i$, arriva a i girando una volta in senso orario intorno a 1, senza includere -1.
R. $I = -3\pi i/2$

5) [**4.5**]+[**1.5**] Data la funzione $f(z) = \frac{z^2-\pi^2/4}{\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui, quando è possibile; ii) calcolare l'integrale $I = \oint_\gamma f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in $\pi/2$, di raggio $3\pi/2$ e percorsa in senso antiorario.
R. Poli semplici in $z_n = \pi/2 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}$; $\pm\pi/2$ sing. eliminabili; ∞ punto d'acc. di poli sempici. $Res(f(z), z_n) = (-1)^{n+1}\pi^2 n(n+1)$; $I = 4\pi^3 i$

6) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta,$$

R. $I = 2\pi/\sqrt{3}$

7) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale al valor principale

$$I = P\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x(x^2-2x+2)} dx$$

R. $I = \pi/2$

4.41 Scritto del 17/09/14; P. M. Santini

1) ([**4**]) Determinare tutti i valori di: i) $(2i)^\pi$, ii) Ln $(1-i\sqrt{3})$, iii) $(1-i)^{1/4}$
R. $(2i)^\pi = 2^\pi e^{i\pi^2(1/2+2k)},\ k \in \mathbb{Z}$, Ln $(1-i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\pi(-1/3+2k),\ k \in \mathbb{Z}$, $(1-i)^{1/4} = \sqrt[8]{2}e^{i\pi(-1/16+k/2)},\ k = 0,1,2,3$

2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). i) Dare le definizioni di derivabilità e di analiticità di una funzione complessa di variabile complessa. ii) Dimostrare che, se le funzioni reali $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono differenziabili nel dominio $\mathcal{D}$ e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann, allora la funzione $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x+iy$, è analitica in $\mathcal{D}$.

3) ([**5**]) Data la funzione $f(z) = z^{-5}e^{-z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui.
R. $z = 0$ polo di ordine 5; ∞ sing. ess. $\mathrm{Res}(f,0) = 1/24 = -\mathrm{Res}(f,\infty)$.

4) ([**4**]) Data la funzione $f(z) = (z-1)^{\frac{1}{5}}$, i) Si mostri che è polidroma e si individui i punti di diramazione z_0. ii) Si calcoli la sua discontinuità attraverso la retta $arg\ (z-z_0) = 0$, scegliendo il ramo $0 \le arg\ (z-z_0) < 2\pi$. iii) Dopo quanti giri intorno a z_0 la funzione riprende il valore di partenza? iv) Come tagliare il piano complesso per renderla analitica? v) Si calcoli la derivata del ramo prescelto.
R. discontinuità: $\sqrt[5]{|z-1|}(e^{2i\pi/5}-1)$; 5 giri; $f'(z) = \frac{(z-1)^{-4/5}}{5}$

5) ([**5**]) Data la funzione $f(z) = \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui, quando è possibile; ii) calcolare l'integrale $\oint_\gamma f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in $\pi/2$, di raggio 2π e percorsa in senso antiorario.
R. i) $z_n = \pm n\pi,\ n \neq \pm 1$ poli sempl.; $z = \pm\pi$ sing. elimin.; ∞ punto d'acc. di poli sempl. $\mathrm{Res}(f,z_n) = (-1)^n(n^2-1)\pi^2$. ii) $4\pi^3 i$

6) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier $I(k) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{x^2-2x+2}dx,\quad k \in \mathbb{R}$.
R. $I(k) = \pi e^{ik-|k|}$

7) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+2}dx$.
R. $I = 2^{-3/4}\pi$

4.42 Scritto del 28/01/15; P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di:
i) 2^π, ii) Ln $(\sqrt{3}-i)$, iii) $(1-i)^{1/4}$
R. *i)* $2^\pi e^{2\pi^2 ki},\ k\in\mathbb{Z};$ *ii)* $\ln 2+i(11\pi/6+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z};$ *iii)* $\sqrt[8]{2}e^{(\frac{7}{16}+\frac{k}{2})\pi i},\ k=0,1,2,3$
2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). i) Dare la definizione di residuo di una singolarità isolata. ii) Enunciare e dimostrare il teorema dei residui.
3) ([**3**]) Sviluppare in serie di potenze centrate in $z_0=i$ in tutto il piano complesso la funzione $f(z)=(z^2+1)^{-1}$.
R. $f(z)=\sum\limits_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2i)^{k+1}}(z-i)^{k-1},\ |z-i|<2.$ $f(z)=\sum\limits_0^\infty \frac{(-2i)^k}{(z-i)^{k+2}},\ |z-i|>2$
4) ([**4**]) Calcolare l'integrale $\int_\gamma (z^2-4)^{-1}dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da $-2i$, arriva a $2i$ girando una volta in senso orario intorno a 2, senza includere -2.
R. $-\frac{3}{4}\pi i$
5) [**4.5**]+[**1.5**] Data la funzione $f(z)=\frac{z(z+\pi)}{\sin z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui, quando è possibile; ii) calcolare l'integrale $\oint_\gamma f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in 0, di raggio $3\pi/2$ e percorsa in senso antiorario.
R. i) $z_n=n\pi,\ n\neq 0,-1$ poli semplici, 0 e $-\pi$ sing. eliminabili. $z=\infty$ punto d'acc. di poli semplici. $\mathrm{Res}(f(z),z_n)=(-1)^n n(n+1)\pi^2$. ii) $-4i\pi^3$
6) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$I(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{x^2-4x+5}dx,\quad k\in\mathbb{R}$$

R. $I(k)=\pi e^{2ik-|k|}$
7) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx$
R. $\pi/\sqrt{3}$

4.43 Esonero del 20/04/15; P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di: i) Ln $(1-i)$, ii) $(1-i\sqrt{3})^{1/5}$, iii) $\sin^{-1} i$
R. *i)* $\ln\sqrt{2}+i(-\pi/4+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z};$ *ii)* $\sqrt[5]{2}e^{i(-\pi/15+2k\pi/5)},\ k=0,1,2,3,4;$
iii) $2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1),\ k\in\mathbb{Z}$ e $(2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1),\ k\in\mathbb{Z}$
2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Dimostrare che: i) se $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ è derivabile in $z_0=x_0+iy_0$, allora u,v soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann in (x_0,y_0); ii) se u,v sono differenziabili in (x_0,y_0) e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann, allora $f(z)$ è derivabile in z_0.
3) ([**4**]) Sviluppare in serie di potenze centrate in $z_0=1$ la funzione $f(z)=(z^2+1)^{-1}$ in tutto il piano complesso; valutare anche i rispettivi raggi di convergenza.
R. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-\frac{n+1}{2}}\sin(\frac{\pi}{4}(n+1))(z-1)^n,\ |z-1|<\sqrt{2},$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4})(z-1)^{-(n+1)},\ |z-1|>\sqrt{2}.$
4) ([**4**]) Si faccia uso del teorema della primitiva per calcolare l'integrale $I=\int_\gamma (z(z-2))^{-1}dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da 1, arriva a i girando una volta in senso antiorario intorno a 0, senza includere 2.
R. $I=\frac{\ln 5}{4}+i\frac{\tan^{-1}(-1/2)}{2}-\frac{7}{4}\pi i,\ \frac{\pi}{2}<\tan^{-1}(-1/2)<\pi.$
5) [**5**] Data la funzione $f(z)=\frac{z}{1-\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui, quando è possibile.
R. $z=0$ polo semplice; $z_n=2\pi n,\ n\neq 0, n\in\mathbb{Z}$ poli doppi, ∞ punto d'acc. di poli doppi; $\mathrm{Res}(f,z_n)=2,\ n\in\mathbb{Z}.$
6) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$I(k)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ikx}}{x^2-2x+5}dx,\quad k\in\mathbb{R}$$

R. $I(k)=\frac{\pi}{2}e^{ik-2|k|}$
7) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I=\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}dx,$$

R. $I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

4.44 Scritto del 15/07/15; P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di: i) i^π, ii) Ln $(-1+i)$, iii) $(\sqrt{3}-i)^{1/3}$
R. *i)* $i^\pi = e^{i\pi(\pi/2+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$; *ii)* $\mathrm{Ln}(-1+i) = \log\sqrt{2} + i(3\pi/4 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; *iii)* $(\sqrt{3}-i)^{1/3} = \sqrt[3]{2}e^{i(-\pi/18+2/3k\pi)}$, $k = 0,1,2$
2) ([**5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Dimostrare che il modulo di una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso non può assumere il suo massimo in un punto interno a tale dominio.
3) ([**5**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+2}}(z-z_0)^n$, e stabilirne le proprietà di convergenza nel piano complesso z (per $|z-z_0| \le R$ e per $|z-z_0| > R$).
R. $R = e$; conv. ass. e unif. per $|z-z_0| \le e$, div. per $|z-z_0| > e$
4) ([**5**]) i) Dare la definizione di punto di diramazione e, sulla base di questa, ii) determinare i punti di diramazione della funzione $f(z) = (z-1)^{3/2}$ in $\bar{\mathbb{C}}$; iii) tagliare il piano complesso per renderla monodroma e iv) calcolare la discontinuità attraverso il taglio.
5) [**5**] Data la funzione $f(z) = z^3 e^{-2/z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui.
R. $z = 0$ sing. essenziale; $z = \infty$ polo; $Res(f(z),0) = 2/3 = -Res(f(z),\infty)$
6) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta,$$

R. $I = 2\pi/\sqrt{3}$
7) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale al valor principale

$$P\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx$$

R. $I = -\pi/2$

4.45 Scritto del 16/09/15; P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di:
i) $\arcsin i$, ii) Ln $(1 - i\sqrt{3})$, iii) $(2-2i)^{1/4}$
R. i) $2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$ e $(2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1),\ k \in \mathbb{Z}$. ii) $\ln 2 + i(-\pi/3 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, iii) $\sqrt[8]{8}e^{i(-\pi/16+k\pi/2)},\ k = 0,1,2,3$
2) ([**1.5**]+[**4.5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). i) Dare le definizioni di singolarità isolata e di residuo. ii) Dimostrare il teorema dei residui.
3) ([**5**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{n+3}}{(n+1)!}(z-z_0)^n$, e stabilirne le proprietà di convergenza nel piano complesso z (per $|z-z_0| \le R$ e per $|z-z_0| > R$).
R. $R = (2e)^{-1}$; conv. unif. per $|z-z_0| \le \rho < R$, ass. per $|z-z_0| < R$; div. per $|z-z_0| \ge R$
4) ([**4**]) Si faccia uso del teorema della primitiva per calcolare l'integrale $\int_\gamma ((z-1)(z-3))^{-1} dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da $2-i$, arriva a $2+i$ girando una volta in senso orario intorno a 3, senza includere 1.
R. $-3\pi i/2$
5) [**5**] Data la funzione $f(z) = z^{-2}e^{3z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui.
R. 0 polo doppio Res(0) = 3; ∞ sing. essenz. Res(∞) = -3
6) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{x^2-4x+5}dx, \quad k \in \mathbb{R}.$$

R. $I = \pi e^{2ik-|k|}$
7) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x}(x+2)}dx$$

R. $\sqrt[4]{2}\pi$

4.46 Esonero del 21/04/16; S.Petrarca e P. M. Santini

1) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Dimostrare che, se $f(z)$ è analitica nel dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso e γ è la frontiera di un triangolo contenuto in $\mathcal{D}$, allora l'integrale $\oint_\gamma f(z)dz = 0$.

2) ([**3**]+[**3**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-z_0)^n$, e ii) stabilire le proprietà di convergenza anche sul bordo $|z-z_0| = R$.
R. $R = 1/4$; convergenza sul bordo per $z - z_0 = Re^{i\theta}, \ 0 < \theta < 2\pi$, divergenza per $z - z_0 = 1/4$.
3) ([**6**]) Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma (z^2 - iz)^{-1} dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da 1, arriva a $1 + i$ girando una volta in senso antiorario intorno a 0 e una volta in senso antiorario intorno a i.
R. $I = i \ln 2$
4) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \oint_{C_2} e^{-5/z^2}(z-3)^2 dz,$$

dove C_2 è la circonferenza centrata in 0 di raggio 2 e percorsa in senso antiorario.
R. $I = 60\pi i$
5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin \pi x}{x^2 - 1} dx,$$

R. $I = -\pi$
6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} (\sin\theta)^2 dx.$$

R. $I = \pi$

4.47 Scritto del 14/07/16; S.Petrarca e P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di: i) $i^{\sqrt{2}}$, ii) Ln $(1-i\sqrt{3})$, iii) $(1-i)^{1/3}$
R i) $i^{\sqrt{2}} = e^{i(\pi/\sqrt{2}+2\sqrt{2}k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}$; ii) Ln $(1-i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(-\pi/3+2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$; iii) $(1-i)^{1/3} = \sqrt[6]{2}e^{i(-\pi/12+2k\pi/3)},\ k = 0,1,2$

2) ([**1.5**]+[**4.5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). i) Dare la definizione di derivabilità in $z_0 \in \mathbb{C}$ e di analiticità in un dominio di una funzione complessa $f(z)$ di variabile complessa; ii) mostrare che, se le funzioni reali di due variabili reali $u(x,y), v(x,y)$ sono differenziabili in $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ e ivi soddisfano alle condizioni di Cauchy - Riemann, allora la funzione complessa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.

3) ([**2.5**]+[**2.5**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\sqrt{n}}(z-z_0)^n$, e ii) stabilirne le proprietà di convergenza nel piano complesso z (per $|z-z_0| \leq R$ e per $|z-z_0| > R$).
R. i) $R = 1/e$; ii) sul bordo: $z - z_0 = e^{-1+i\theta},\ 0 \leq \theta < 2\pi$ converge (non assolutamente) per $z - z_0 \neq 1/e$ ($\theta \neq 0$), dove diverge. Il resto è standard

4) [**5**]+[**3**] Data la funzione $f(z) = \frac{z^2-\pi^2/4}{\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui quando è possibile; ii) calcolare l'integrale $I = \oint_\gamma f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in $\pi/2$, di raggio $3\pi/2$ e percorsa in senso antiorario.
R. i) $\pm\pi/2$ sing apparenti. Poli semplici in $z_n = n\pi + \pi/2$ ($n \neq 0,-1$) con residuo $(-1)^{n+1}\pi^2 n(n+1)$; ∞ punto d'acc. di poli semplici; ii) $I = 2\pi i Res(f(z), 3\pi/2) = 4\pi^3 i$

5) ([**5**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{4+\sin^2\theta}$$

R. $I = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$

6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+3x^2)}$$

R. $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}$

4.48 Scritto del 13/09/16; S.Petrarca e P. M. Santini

1) ([**5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Enunciare e dimostrare il teorema di Cauchy per domini multiplamente connessi.

2) ([**6**]) Calcolare l'integrale $\int_\gamma (z(z-1))^{-1}dz$, dove γ è un qualunque contorno che, partendo da $-i$, arriva a $1-i$ girando una volta in senso antiorario intorno a 1 senza includere l'origine.

R. $2\pi i - \log 2$

3) ([**6**]) Data la funzione $u(x,y) = x^3 + axy^2$, i) determinare i valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ tali che u sia interpretabile come la parte reale di una funzione analitica $f(z)$; ii) per tali valori, calcolare la corrispondente parte immaginaria $v(x,y)$; iii) scrivere infine $f(z)$ come funzione di z.

R. $a = -3$, $v = 3x^2y - y^3 + c$, $f(z) = u + iv = z^3 + c$

4) [**4.5**]+[**1.5**] Data la funzione $f(z) = \frac{z-\pi}{(\sin z)^2}$, i) individuare le sue singolarità in $\bar{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) calcolare l'integrale $I_R = \oint_\gamma f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in 0 di raggio $3\pi/2$, percorsa in senso antiorario.

R. $z = \pi$ polo semplice; $z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 1$ poli doppi; $z = \infty$ punto d'acc. di poli doppi; $Res(f, n\pi) = 1,\ n \in \mathbb{Z}$; $I_R = 6\pi i$

5) ([**6**]) Si calcoli il seguente integrale lungo una circonferenza di raggio $R = 1$, centrata nell'origine del piano complesso e percorsa in senso antiorario:

$$I = \oint dz \sin^2(3/z)(1+2z)^3 \,.$$

R. $I = -162$

6) ([**6**]) Si calcoli usando la tecnica dei residui il seguente integrale:

$$I = \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x}(4x^2+1)(x+1)} \,.$$

R. $I = 2\pi/5$

4.49 Scritto del 26/09/16; S.Petrarca e P. M. Santini

1) ([**5**]) Determinare tutti i valori di: i) $(-1+i)^{\pi}$, ii) Ln $(3+i\sqrt{3})$, iii) $(\sqrt{3}-3i)^{1/4}$
R. i) $2^{\pi/2}e^{i(3\pi/4+2k\pi)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, ii) $\ln 2\sqrt{3}+i(\pi/6+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, iii) $\sqrt[8]{12}e^{i(5\pi/12+k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$
2) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Enunciare e dimostrare il teorema (sulla serie) di Laurent.
3) ([**3**]+[**3**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5z)^n}{n^3}$ e stabilire se tale serie converge anche sul bordo $|z| = R$ e come. ii) Dimostrare che, se la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ è uniformemente convergente nel dominio $\mathcal{D}$ di analiticità delle $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, allora la sua somma $f(z)$ è anch'essa analitica in $\mathcal{D}$.
R. i) $R = 1/5$; serie è tot. convergente per $|z| \leq R$
4) **[4.5]+[1.5]** Data la funzione $f(z) = \frac{z+\pi/2}{\cos z}$, i) individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui; ii) calcolare l'integrale $I = \oint_{\gamma} f(z)dz$, dove γ è la circonferenza centrata in 0, di raggio π e percorsa in senso antiorario.
R. i) $z_n = \pi(n+1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ poli semplici; $z_{-1} = -\pi/2$ sing. apparente; ∞ punto d'accumulazione di poli sempl.; $\mathrm{Res}(f, z_n) = (-1)^{n+1}\pi(n+1)$, $n \neq -1$.
ii) $I = -2\pi^2 i$
5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin\theta}{2+\sin\theta} \, .$$

R. $I = 2\pi - 4\pi/\sqrt{3}$
6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \oint dz \frac{(\sin z)^2(z+2)^3}{z^5} \, .$$

lungo la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in senso antiorario.
R. $I = 20\pi i/3$

4.50 Esonero del 20/04/17; P. M. Santini

1) ([**4.5**]+[**1.5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). i) Enunciare e dimostrare il teorema dell'indice, e ii) applicarlo per calcolare l'integrale

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{z^2-2z}{z^3-3z^2}dz, \tag{120}$$

dove C_1 è la circonferenza unitaria centrata in 0 e percorsa in senso antiorario.
R. $I = 2/3$.
2) ([**3**]) Determinare tutti i possibili valori di $\arcsin(2i)$.
R. $\arcsin(2i) = -i\log(\sqrt{5}-2) + 2k\pi$, e $-i\log(\sqrt{5}+2) + (2k+1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
3) ([**2.5**]+[**3.5**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(z-z_0)^n$ e ii) stabilirne le proprietà di convergenza (puntuale, assoluta e uniforme) in $\mathbb{C}$. (Potrebbe essere utile usare la formula di Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}(1+O(1/n))$, per $n \gg 1$).
R. i) $R = e$. ii) Conv. ass. per $|z-z_0| < e$; conv. unif. in ogni compatto $\subset \overline{B(z_0,e)} - \{z_0+e\}$; div. in z_0+e e per $|z-z_0| > e$.
4) ([**7**]) Calcolare l'integrale

$$I = \int_{C_{1/2}} \frac{\cos(1/z)}{z-1}dz, \tag{121}$$

dove $C_{1/2}$ è la circonferenza centrata in 0 e di raggio 1/2, percorsa in senso antiorario.
R. $I = 2\pi i(1-\cos(1))$
5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = P\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x(x-1)}dx,$$

R. $I = \pi(\cos(1)-1)$
6) ([**7**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-2x+2}dx,$$

R. $I = \pi\sqrt[3]{4}/\sqrt{3}$

4.51 Scritto del 13/09/17; P. M. Santini

1) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**)). Enunciare e dimostrare il teorema sullo sviluppo in serie di Laurent.

2) [**6**] i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}(z-z_0)^n$, e ii) stabilirne le proprietà di convergenza nel piano complesso z (per $|z-z_0| \leq R$ e per $|z-z_0| > R$).

R. i) $R = 4e^{-2}$. ii) $\frac{n^{2n}}{(2n)!} \sim e^{in\theta}(4\pi n)^{-1/2},\ n \gg 1,\ z - z_0 = Re^{i\theta}$; quindi conv ass per $|z-z_0| < R$; conv unif in ogni compatto di $\{|z-z_0| \leq R, z \neq R\}$; conv non ass per $\{|z-z_0| \leq R, z \neq R\}$; div per $|z-z_0| > R$

3) ([**5**]) Calcolare l'integrale $I = \int_\gamma \frac{dz}{z}$, dove γ è una qualunque curva regolare con estremi $a = 2e^{-i\pi/8}$ e $b = e^{i\pi/4}$, che gira una volta, in senso antiorario, intorno all'origine.

R. $I = -\log 2 + i\pi 3/8 + 2\pi i$

4) [**6**] Data la funzione $f(z) = \frac{z+1}{1+\cos(\pi z)}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre i corrispondenti residui, quando è possibile.

R. Sing. $z_k = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$; poli doppi per $k \neq -1$; $z = -1$ polo semplice. $Res(f(z), z_k) = 2/\pi^2$. ∞ punto d'acc. di poli doppi.

5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+3)}, \quad 0 < p < 1.$$

R. $I(p) = \pi(3^p \sin(\pi p))^{-1}$

6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare

$$I = P\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x(x^2-2x+2)}dx$$

R. $I = \frac{\pi}{2e}(\cos 1 + \sin 1)$

4.52 Scritto del 26/06/18; P. M. Santini

1) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**)). Dimostrare che il modulo di una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso non può assumere il suo massimo in un punto interno a tale dominio.

2) ([**3**]+[**3**]) i) Calcolare il raggio di convergenza R delle serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(z-z_0)^n$, e ii) stabilirne le proprietà di convergenza nel piano complesso z (per $|z-z_0| \leq R$ e per $|z-z_0| > R$).

R. i) $R = e$. ii) sul bordo: $z - z_0 = e^{i\theta+1},\ \theta \in [0, 2\pi),\ \frac{n!}{n^{n+1}}(z-z_0)^n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}e^{in\theta},\ n \gg 1 \Rightarrow$ la somma converge, ma non assolutamente, grazie all'oscillazione, se $\theta \neq 0$. Quindi conv. assoluta per $|z-z_0|<e$, unif. in ogni compatto contenuto in $B=\{|z-z_0|\leq e, z-z_0\neq e\}$; divergenza altrimenti.

3) ([**6**]) Calcolare $I=\int_\gamma (z^2-1)^{-1}dz$ lungo un qualunque contorno γ che va da 0 a i girando una volta intorno a -1 in senso anti-orario.
R. $I=-\frac{5}{4}\pi i$ (l'integrale si spezza nella somma dell'integrale intorno a -1, pari a $-\pi i$, e l'integrale da 0 a i senza girare intorno a singolarità, pari a $-i\pi/4$)

4) [**6**] Data la funzione $f(z)=\frac{z-\pi/2}{\cos^2 z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui.
R. Singolarità $z_n=\pi(n+1/2),\ n\in\mathbb{Z}$; $n=0$ polo semplice, $\neq 0$ poli doppi. ∞ punto d'acc. di poli doppi. $f(z)=\pi n\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-1}+O(1),\ \varepsilon=z-z_n,\ |\varepsilon|\ll 1$, quindi $\mathrm{Res}(f(z),z_n)=1$

5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}d\theta,$$

R. $I=2\pi\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$I(k)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ikx}}{(x^2+1)^2}dx,\quad k\in\mathbb{R}$$

R. $I(k)=\pi(|k|+1)\exp(-|k|)/2$

4.53 Scritto dell'11/07/18; P. M. Santini

1) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). Enunciare e dimostrare il teorema della serie di Laurent.
2) ([**2**]+[**4**]) Calcolare tutti i valori di i) $(\sqrt{3}-i)^{1/4}$, ii) $\arccos(2i)$.
R. $w=\arccos(z)=-i\log(z\pm(z^2-1))\Rightarrow w_k^+=-iLog((2+\sqrt{5})i)=\pi/2+2k\pi-i\log(\sqrt{5}+2)$, $w_k^-=-iLog((2-\sqrt{5})i)=-\pi/2+2k\pi-i\log(\sqrt{5}-2)$, $k\in\mathbb{Z}$.
3) ([**6**]) Calcolare $I=\int_\gamma (z^2+1)^{-1}dz$ lungo un qualunque contorno γ che va da -1 a 1 girando una volta intorno a i in senso anti-orario.
R. $I=3\pi/2$
4) [**6**] Data la funzione $f(z)=\frac{z^2-\pi^2}{\sin^2 z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui.
R. $z_n=n\pi,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq\pm 1$ poli doppi; $n=\pm 1$ poli semplici. $\mathrm{Res}(f(z),z_n)=2n\pi$. ∞ punto d'acc. di poli doppi.
5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$I(k)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ikx}}{x^2-2x+5}dx,\quad k\in\mathbb{R}$$

R. $I(k) = \pi e^{ik-2|k|}/2$
6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} dx,$$

$I = \pi/\sqrt{3}$

4.54 Scritto del 13/09/18; P. M. Santini

1) ([**1**]+[**5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**). i) Dare la definizione di funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ del piano complesso $\mathbb{C}$, e ii) dimostrare che, se $f(z)$ è analitica in $\mathcal{D}$, ivi sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann.
2) ([**2**]+[**4**]) Calcolare tutti i valori di i) $(-\sqrt{3}+i)^{1/3}$, ii) $\arcsin(i)$.
R. i) $\sqrt[3]{2} \exp(i(5\pi/18 + 2k\pi/3))$, $k = 0, 1, 2$. ii) $2k\pi - i\log(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi - i\log(\sqrt{2}+1)$, $k \in \mathbb{Z}$
3) ([**6**]) Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\sum_1^\infty \frac{n^{n-1}}{n!}(z-z_0)^n$. ii) Stabilirne le proprietà di convergenza (assoluta, puntuale e uniforme) in $\mathbb{C}$, compresa la circonferenza $|z-z_0| = R$. (Potrebbe essere utile usare la formula di Stirling: $n! = \sqrt{2\pi n}\ n^n \exp(-n)(1 + O(1/n))$, $n \gg 1$).
$R = 1/e$, conv. assoluta e uniforme per $|z-z_0| \le R$; divergenza per $|z-z_0| > R$
4) [**6**] Data la funzione $f(z) = \frac{z^2-\pi^2/4}{\cos^2 z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui.
R. $z_n = n\pi + \pi/2$ poli semplici per $n = 0, 1$, poli doppi altrimenti. ∞ punto d'acc. di poli doppi. $\text{Res}(f, z_n) = 2z_n$
5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{x^2-2x+2} dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

R. $I(k) = \pi \exp(ik - |k|)$
6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+2)},$$

R. $I = \sqrt[4]{2}\ \pi$

4.55 Scritto del 21/01/19; P. M. Santini

2) ([**2**]+[**4**]) Calcolare tutti i valori di i) $(1-i\sqrt{3})^{1/3}$, ii) $\arcsin(3i)$.
R. i) $\sqrt[3]{2} \exp(i(5\pi/9 + 2k\pi/3))$, $k = 0, 1, 2$,
ii) $2k\pi - i\log(\sqrt{10}-3)$ e $(2k+1)\pi - i\log(\sqrt{10}+3)$, $k \in \mathbb{Z}$

3) ([**6**]) Calcolare $I = \int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz$ lungo un qualunque contorno γ che va da $-i$ a i girando una volta intorno a 1 in senso orario.
R. integrale da $-i$ a i, non girando intorno a singolarità: $-i\pi/2$; integrale intorno a 1: $-\pi i$. Quindi $I = (-3\pi i)/2$
4) [**5**] Data la funzione $f(z) = \frac{z-\pi/2}{\cos z}$, individuare le sue singolarità in $\overline{\mathbb{C}}$ e la loro natura, calcolando inoltre, dove è possibile, i corrispondenti residui.
R. $z_n = \pi(n+1/2)$, $n \neq 0$ poli semplici; $\pi/2$ singolarità eliminabile; ∞ punto d'acc. di poli semplici. $\mathrm{Res}(f, z_n) = (-1)^{n+1}\pi n$
5) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale di Fourier

$$I(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{x+1+i} dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

R. $I(k) = \theta(-k)\exp(-ik+k)$
6) ([**6**]) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx$$

R. $I = \pi/\sqrt{2}$