

MATERIALE DEL CORSO DI
**MODELLI E METODI MATEMATICI
DELLA FISICA**

**Analisi Funzionale: spazi funzionali e di successioni;
distribuzioni, serie e trasformata di Fourier**

a cura di Paolo Maria Santini

<http://www.roma1.infn.it/people/santini/>

Docente del corso: Paolo Maria Santini

email: paolo.santini@roma1.infn.it

ufficio 109 (ex 43), primo piano, ed. Marconi - tel. 0649914239

June 9, 2010

RACCOLTA DI ESERCIZI (fino a serie ed integrale di Fourier incluso)

1 RACCOLTA DI ESERCIZI

Una buona parte degli esercizi qui raccolti, teorici e pratici, sono essenzialmente quelli proposti durante il corso; quindi lo studente deve saperli affrontare con sicurezza. Si consiglia anche di consultare le raccolte di esercizi di autori vari con link all'indirizzo:

<http://www.roma1.infn.it/people/santini/didattica.html>

1.1 Richiami di algebra lineare

1) Le matrici A e i vettori colonna \underline{b} sono qui sotto presentati nella notazione compatta delle matrici aumentate $(A : \underline{b})$. i) Caratterizzare il nucleo $\mathcal{N}(A)$ ed il range $\mathcal{R}(\hat{A})$ di A e trovare le loro dimensioni (si ricordi che $\dim \mathcal{R}(\hat{A})$ è il rango della matrice A). ii) Risolvere, quando possibile, i corrispondenti sistemi omogenei $A\underline{x} = \underline{0}$, al variare degli eventuali parametri liberi presenti. ii) Interpretare questo risultato dal punto di vista della dipendenza o indipendenza lineare dei vettori che costituiscono le colonne delle matrici A ; darne anche un'interpretazione geometrica in \mathbb{R}^n . iii) Risolvere, in parallelo, anche il problema duale: $A^t \underline{\phi} = \underline{0}$. iv) Risolvere, se possibile, il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ al variare degli eventuali parametri liberi presenti. iv) Determinare il range di $\mathcal{R}(\hat{A})$, utilizzando l'equazione $(\underline{\phi}, \underline{b}) = 0$ che lo caratterizza, e calcolare il rango di A . v) Calcolare autovalori e autovettori delle matrici quadrate.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & & 5 \\ -1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & b \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 & : & 34 \\ 2 & -6 & -1 & -2 & -5 & : & -8 \\ 3 & -9 & -5 & 1 & -11 & : & -20 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & : & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & : & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & : & 0 \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & : & b \\ 2 & 3 & 4 & 1 & : & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & : & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & : & 1 \\ 6 & 7 & : & 2 \\ -3 & 39 & : & a \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & : & 6 \\ 2 & 4 & : & 8 \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & : & 7 \\ 3 & 1 & : & 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & : & 2 \\ 2 & 3 & : & 7 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & : & 0 \\ 1 & -4 & 1 & : & 1 \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & : & 1 \\ 1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & : & 2 \\ 2 & -3 & 4 & : & 6 \\ 1 & -7 & -2 & : & 6 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 6 & 6 & -2 & : & -8 \\ 0 & 3 & -1 & : & -3 \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & : & 2 \\ 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 3 & 4 & 1 & : & b \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ a & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & a & 1 & : & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & : & 1 \\ a & a & 0 & : & 1 \\ a & 3a & 8 & : & 3 \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & : & 4 \\ -1 & 1 & a & : & 1 \\ a & a & 1 & : & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & : & 1 \\ 6 & 7 & : & 2 \\ -3 & 39 & : & b \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & : & 1 \\ a & 1 & : & 4 \end{array} \right), \\
& \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & : & 1 \\ a & 2 & : & 5 \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Spazi vettoriali

1) Mostrare che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali. Spazi finito - dimensionali: lo spazio dei vettori ordinari in \mathbb{R}^3 e quello dei quadrivettori in \mathbb{M}^4 ; lo spazio \mathbb{R} dei reali; lo spazio \mathbb{R}^n delle n -ple di numeri reali; lo spazio \mathbb{C} dei numeri complessi; lo spazio \mathbb{C}^n delle n -ple di numeri complessi; lo spazio $Mat(n, \mathbb{R})$ ($Mat(n, \mathbb{C})$) delle matrici $n \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio $Mat(m, n, \mathbb{R})$ ($Mat(m, n, \mathbb{C})$) delle matrici $m \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio \mathcal{P}_n dei polinomi di grado $n - 1$ a coefficienti reali (complessi). Spazi infinito - dimensionali: lo spazio \mathbb{R}^∞ (\mathbb{C}^∞) delle successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali (complessi); lo spazio delle successioni finite, convergenti a zero, limitate di numeri reali (complessi); gli spazi di successioni l_p , $p > 0$; lo spazio $C_{[a,b]}$ delle funzioni reali continue sull'intervallo reale $[a, b]$; lo spazio delle funzioni analitiche in un dominio \mathcal{D} ; gli spazi di funzioni $L_p([a, b])$, $p > 0$. Lo spazio degli stati $|\psi\rangle$ (kets) di un sistema fisico in Meccanica Quantistica (esso può essere finito o infinito dimensionale). Individuare la dimensione di questi spazi vettoriali e qualche

base significativa.

2) Mostrare che un insieme finito di punti isolati di \mathbb{R}^n non è uno spazio vettoriale.

3) L'introduzione di vincoli sui vettori di uno spazio vettoriale può far sì che il nuovo spazio non sia più vettoriale. Dire se i seguenti spazi sono vettoriali e calcolarne la dimensione. Possiamo immaginare una regola sui vincoli compatibili con le proprietà di uno spazio vettoriale?

i) $\{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\}$, ii) $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 = 0\}$,

iii) $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 + 3x_2^k = 0, k \in \mathbb{N}_+\}$, iv) $\{\underline{x} \in \mathcal{P}_n; \underline{x} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k t^k\}$,

v) $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq x_k, 2 \leq k \leq n\}$, vi) $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$,

vii) $\{A \in Mat(n, \mathbb{C}), tr A = 0\}$, viii) $\{A \in Mat(n, \mathbb{C}), det A = 0\}$

Risp. i) no; ii) sì; iii) sì, se $k = 1$, no altrimenti; iv) sì; v) no; vi) no; vii) sì; viii) no.

4) Sono dati k ($k \leq n$) vettori $\underline{v}^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$ di \mathbb{C}^n ed è definita la matrice $n \times k$ $M = (\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(k)})$ avente come colonne le componenti di tali vettori. Mostrare che, se il rango di M ($r(M)$) è k , allora i vettori sono indipendenti; se, invece, $r(M) < k$, allora sono dipendenti.

5) Dati i vettori $\underline{v}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}$, $\underline{v}^{(2)} = c\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}$ di uno spazio vettoriale V di dimensione 2, stabilire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ tali vettori sono dipendenti e indipendenti. ii) Se, ai vettori $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$, si aggiunge $\underline{v}^{(3)} = \underline{e}^{(1)}$, stabilire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono dipendenti e indipendenti. Se $V = \mathbb{R}^2$, disegnare tali vettori nei due casi.

Risp: $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$ sono lin. dipendenti per $c = 1/2$; sono lin. indep. per $c \neq 1/2$. $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}$ sono...

6) Dati i vettori $\underline{v}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)} + 3\underline{e}^{(3)}$, $\underline{v}^{(2)} = 2\underline{e}^{(1)} + c\underline{e}^{(2)} + d\underline{e}^{(3)}$ di uno spazio vettoriale di dimensione 3, stabilire per quali valori di $c, d \in \mathbb{R}$ tali vettori sono dipendenti e indipendenti. ii) Se, ai vettori $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$, si aggiunge $\underline{v}^{(3)} = \underline{e}^{(3)}$, stabilire per quali valori di $c, d \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono dipendenti e indipendenti.

R: i) Per $c = 4$, $d = 6$ i due vettori sono lin. dipendenti, con $\underline{v}^{(2)} = 2\underline{v}^{(1)}$. Altrimenti sono lin. indipendenti. ii) Per $c = 4$ i tre vettori sono lin. dipendenti, con $\underline{v}^{(2)} = 2\underline{v}^{(1)} + (d - 6)\underline{v}^{(3)}$. Per $c \neq 4$ sono lin. indipendenti.

7) Dati i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 1, 1, c)$, $\underline{v}^{(2)} = (a, 1, 0, 0)$, $\underline{v}^{(3)} = (0, b, 1, 0)$ di \mathbb{R}^4 , determinare per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono dipendenti o

indipendenti.

R: Se $a \neq 0$, $b = (a - 1)/a$, $c = 0$ i tre vettori sono lin. dip: $-a\underline{v}^{(1)} + \underline{v}^{(2)} + a\underline{v}^{(3)} = 0$. Altrimenti sono indipendenti.

8) i) Dati i polinomi $p_1(t) = 1 + at + 2t^2$, $p_2(t) = 2 + 3t + 4t^2$, stabilire per quali valori di a sono dipendenti o indipendenti. ii) Se $p_3(t) = -1 + 2t + ct^2$, stabilire per quali valori di a, c i tre polinomi $p_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

R: i) per $a = 3/2$ sono dipendenti, con $p_2(t) = 2p_1(t)$; altrimenti sono indipendenti. ii) sono dipendenti sia per $a = 3/2$ (ovvio) che per $c = -2$ sono indipendenti per $a \neq 3/2$, $c \neq -2$.

9) Dimostrare i) che due qualunque spazi vettoriali reali (complessi) aventi diversa dimensione non possono essere isomorfi; ii) che due qualunque spazi vettoriali reali (complessi) aventi la stessa dimensione n sono isomorfi e, in particolare, sono isomorfi a \mathbb{R}^n (a \mathbb{C}^n).

10) **Dimensione di spazio vettoriale.** Avendo definito come dimensione n di uno spazio vettoriale il numero massimo di vettori indipendenti di tale spazio, dimostrare che $\dim \mathbb{C}^n = n$.

11) **Base di uno spazio vettoriale finito-dimensionale.** Avendo definito come base nello spazio vettoriale V , con $\dim V = n$, un qualunque insieme di vettori $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$ indipendenti, mostrare che ogni vettore $\underline{v} \in V$ è esprimibile come combinazione lineare di tali vettori.

12) Mostrare che lo sviluppo di un generico vettore $\underline{v} \in V$ nella base $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$ di V è unico.

13) *Span.* Avendo definito lo span (involuppo lineare) di un insieme (finito, numerabile, continuo) di vettori di V come l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di tali vettori, mostrare che lo span di un insieme finito di vettori indipendenti $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^k$ dello spazio vettoriale V , di dimensione finita o infinita, è un sotto-spazio vettoriale V' di V tale che $\dim V' = k$, e che i vettori $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^k$ ne formano una base.

14) *Somma diretta di spazi complementari.* Avendo definito come complementari due spazi vettoriali V_1, V_2 tali che $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, e avendo definito come somma diretta $V_1 \oplus V_2$ degli spazi vettoriali complementari V_1, V_2 , quello spazio i cui elementi $\underline{x} \in V_1 \oplus V_2$ sono decomponibili nella somma $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$, dove $\underline{x}_j \in V_j$, i) mostrare che tale decomposizione è unica; ii) mostrare che $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

15) Siano $\underline{v}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$ tre vettori indipendenti di \mathbb{R}^3 . i) Dare una in-

interpretazione geometrica ai sottospazi $V_j = \text{span}(\underline{v}^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$ e $\Pi_{ij} = \text{span}(\underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(j)})$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$. ii) Mostrare che gli spazi V_j , $j = 1, 2, 3$ sono complementari, mentre gli spazi V_j e Π_{ij} , o gli spazi Π_{ij} e \mathbb{R}^3 non lo sono. iii) Mostrare che $\mathbb{R}^3 = \text{span}(\{\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}\}) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

1.3 Spazi normati finito ed infinito-dimensionali

1) Dimostrare le seguenti disuguaglianze

$$\begin{aligned} \sum_k |x_k y_k| &\leq (\sum_k |x_k|^p)^{1/p} (\sum_k |y_k|^q)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{Holder (discreta)}, \\ \int_a^b |f(t)g(t)| dt &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{Holder (continua)}, \\ (\sum_k |x_k + y_k|^p)^{1/p} &\leq (\sum_k |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_k |y_k|^p)^{1/p}, \quad \text{Minkowski (discreta)} \\ \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{Minkowski (continua)}. \end{aligned} \tag{2}$$

2) Mostrare che, se $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\underline{x}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad \|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

sono norme; e che quindi gli spazi $\mathbb{C}_\infty^n := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$; $\mathbb{C}_p^n := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$. $1 \leq p < \infty$ sono spazi vettoriali finito-dimensionali normati (nel caso di $\|\cdot\|_p$ usare le disuguaglianze di Holder e Minkowski).

3) Dimostrare le disuguaglianze

$$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\underline{x}\|_\infty, \quad \underline{x} \in \mathbb{C}^n, \tag{3}$$

4) Dato il vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, di componenti $x_k = 1/2^k$, $1 \leq k \leq n$, calcolare $\|\underline{x}\|_\infty$ e $\|\underline{x}\|_p$, $1 \leq p < \infty$.

Risp. $\|\underline{x}\|_\infty = 1/2$, $\|\underline{x}\|_p = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^{pn} - 1}{2^p - 1} \right)^{1/p}$

5) Disegnare e confrontare tra di loro le palle chiuse $\|\underline{x}\|_\infty \leq 1$ e $\|\underline{x}\|_p \leq 1$, $p \geq 1$, per $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. A che figure geometriche corrispondono?

Risp. \mathbb{R}^2 : rombo ($p = 1$), circonferenza ($p = 2$), ..., quadrato ($p = \infty$).

\mathbb{R}^3 : ottaedro ($p = 1$), sfera ($p = 2$), ..., cubo ($p = \infty$).

6) Stabilire che, se V è uno spazio vettoriale di dimensione n , le norme $\|\underline{x}\|_\infty$ e $\|\underline{x}\|_p$, $1 \leq p < \infty$ sono equivalenti, cioè che esistono $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ tali che: $a \|\underline{x}\|_p \leq \|\underline{x}\|_\infty \leq b \|\underline{x}\|_p \leq c \|\underline{x}\|_\infty$.

Risp. $n^{-1/p} \|\underline{x}\|_p \leq \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\underline{x}\|_\infty$, $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$

Spazi infinito-dimensionali

7) i) Mostrare che, se la funzione $f(x) \geq 0$ è monotona non crescente nell'intervallo $[n, N+1]$, allora

$$\int_n^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^N f(k) \leq f(n) + \int_n^N f(x) dx, \quad n, N \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

ii) Discutere le implicazioni di queste disuguaglianze per $N \rightarrow \infty$ e n finito o nullo, mostrando, in particolare, che la convergenza della somma $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$

implica ed è implicata dalla convergenza dell'integrale $\int_0^{\infty} f(x) dx$. iii) Come generalizzare questi risultati al caso di $x < 0$?

8) Mostrare che gli spazi $(l_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$ (delle successioni di \mathbb{R}^∞ (di \mathbb{C}^∞) tali che $\|\underline{x}\|_p < \infty$) e lo spazio $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ (delle successioni di \mathbb{R}^∞ (di \mathbb{C}^∞) limitate, cioè tali che $\|\underline{x}\|_\infty < \infty$) sono spazi vettoriali normati.

9) Sia $\underline{x} \in \mathbb{R}^\infty$, con componenti $x_k = 1/a^k$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Calcolare $\|\underline{x}\|_p$ e $\|\underline{x}\|_\infty$.

Risp. $\|\underline{x}\|_\infty = 1/a$, $\|\underline{x}\|_p = (a^p - 1)^{-1/p}$

10) Siano $\underline{x}^\pm = \{x_n^\pm\}_{n \in \mathbb{N}_+}$, $x_n^\pm = (n \pm 1)/n$. i) A quale spazio di successioni appartengono? ii) Mostrare che $\|\underline{x}^+\|_\infty = 2$, $\|\underline{x}^-\|_\infty = 1$.

11) Dato l'insieme delle successioni finite $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $e_k^{(n)} = \delta_{kn}$, calcolare $\|\underline{e}^{(n)} - \underline{e}^{(m)}\|_p$ e $\|\underline{e}^{(n)} - \underline{e}^{(m)}\|_\infty$, per $m \neq n$.

Risp. $\|\underline{e}^{(n)} - \underline{e}^{(m)}\|_p = 2^{1/p}$, $\|\underline{e}^{(n)} - \underline{e}^{(m)}\|_\infty = 1$.

12) Date le successioni $\underline{x}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_+$, tali che $x_k^{(n)} = \frac{n^2}{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}_+$, calcolare $\|\underline{x}^{(2)}\|_\infty$, $\|\underline{x}^{(2)}\|_5$, $\|\underline{x}^{(5)}\|_\infty$, $\|\underline{x}^{(5)}\|_3$.

R $\|\underline{x}^{(2)}\|_\infty = \frac{4}{a^3}$, $\|\underline{x}^{(2)}\|_5 = \frac{4}{a^2} \left(\frac{1}{a^5-1}\right)^{1/5}$, $\|\underline{x}^{(5)}\|_\infty = \frac{25}{a^6}$, $\|\underline{x}^{(5)}\|_3 = \frac{25}{a^5} \left(\frac{1}{a^3-1}\right)^{1/3}$.

13) Siano l_f e l_0 gli spazi delle successioni reali (o complesse) rispettivamente

finite e convergenti a 0. Dimostrare le seguenti inclusioni:

$$l_f \subset l_1 \subset l_2 \subset \dots \subset l_0 \subset l_\infty \subset \mathbb{C}^\infty.$$

14) Dare un esempio di successione appartenente a l_2 , ma non a l_1 ; a l_3 ma non a l_2 .

15) Dire se le norme $\|\cdot\|_p$ sono definibili negli spazi i) l_∞ , ii) l_f , iii) l_0 .

Risp. i) no; ii) sì; iii) no.

16) Mostrare che, se $\underline{x} \in l_p$, i) $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_p$, ii) a differenza del caso finito-dimensionale, le due norme non sono equivalenti.

17) Individuare i valori del parametro reale α tali che le seguenti successioni appartengono a l_p .

$$i) \frac{1}{n^\alpha + 1}; \quad ii) \sin(1/n^\alpha); \quad iii) n^\alpha e^{-n^2}; \quad iv) n^\alpha e^{\alpha n^2}; \quad v) \frac{n}{(1+n^2)^\alpha};$$

$$vi) \left(\frac{|\sin n|}{n} \right)^\alpha.$$

Risp. i) e ii): $\alpha > 1/p, \dots$

18) Definiti gli spazi normati $C_p[a, b] = (C_{[a,b]}, \|\cdot\|_p)$ delle funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ tali che

$$\|f(t)\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty,$$

e lo spazio normato $C_\infty[a, b] := (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ delle funzioni continue in $[a, b]$ con la norma del sup (uniforme)

$$\|f(t)\|_\infty := \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|,$$

dimostrare che:

i) $C_p(\mathbb{R}) \subset C_q(\mathbb{R})$, $1 \leq p < q$.

ii) $\|f(t)\|_p \leq (b-a)^{1/p} \|f(t)\|_\infty$, $f \in C_{[a,b]}$.

iii) A differenza del caso finito dimensionale, le due norme non sono equivalenti.

iv) Dedurre che la convergenza uniforme della successione di funzioni $f_n(t) \in C_{[a,b]}$ a $f(t)$ implica sia la convergenza nella norma $\|\cdot\|_p$ che la convergenza puntuale $\forall t \in [a, b]$.

19) Dato lo spazio delle funzioni continue in $[a, b]$, ad eccezione di un insieme finito di punti $t_i \in [a, b]$, intorno ai quali vale la disuguaglianza

$$|f(t)| < \frac{c_i}{|t - t_i|^{\alpha_i}},$$

mostrare che, se $f \in L_p[a, b]$, allora $f \in L_q[a, b]$, $p > q$.

20) Consideriamo l'insieme dei monomi $\{t^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[0, 1]$. Mostrare che t^n converge a 0 in media quadratica: $\|t^n - 0\|_2 = (2n + 1)^{-1/2} \rightarrow 0$, mentre non converge a 0 nella norma uniforme: $\|t^n - 0\|_\infty = 1$. Spiegare questa differenza tra le due norme mostrando che t^n converge puntualmente ad una funzione discontinua in $[0, 1]$.

21) Individuare i valori dei parametri reali α tali che le funzioni indicate appartengano a $L_1(\mathbb{R})$, $L_2(\mathbb{R})$.

$$i) |x|^\alpha e^{-x^2}; \quad ii) |x|^\alpha e^{\alpha x^2}; \quad iii) \frac{x}{(1+x^2)^\alpha}; \quad iv) \left(\frac{|\sin x|}{|x|} \right)^\alpha;$$

Risp. *i)* $L_1(\mathbb{R}) : \alpha > -1$, $L_2(\mathbb{R}) : \alpha > -1/2$; *ii)* $L_1(\mathbb{R}) : -1 < \alpha < 0$, $L_2(\mathbb{R}) : -1/2 < \alpha < 0$; *iii)* $L_1(\mathbb{R}) : \alpha > 1$, $L_2(\mathbb{R}) : \alpha > 3/4$; *iv)* $L_1(\mathbb{R}) : \alpha > 1$, $L_2(\mathbb{R}) : \alpha > 1/2$.

22) Individuare i valori dei parametri reali α e β tali che le seguenti funzioni siano L_1 , L_2 negli intervalli specificati.

$$i) \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{1}{|3-x^2|^\alpha}, [0, \infty); \quad ii) \frac{e^{-x^2}}{|2-x^2|^\alpha}, (-\infty, \infty);$$

$$iii) \frac{e^{\frac{\alpha}{1-x^2}}}{|1-x|^\beta}, [-1, 1]; \quad iv) |x|^\alpha \sin x, [0, \infty); \quad v) \frac{|x|^\alpha}{x^4 + 8x^2 + 1}, (-\infty, \infty);$$

$$vi) |x^2 + 2\alpha x - 3\alpha|^\alpha, (-\infty, \infty); \quad vii) \frac{|x|^{2\alpha} e^{\beta x}}{1 - \cosh x}, (-\infty, \infty);$$

$$viii) \frac{e^{-(1+\alpha)x^2}}{\sqrt{|x^2 - x - \alpha|}}, (-\infty, \infty); \quad ix) \frac{e^{-2x} \cosh(\alpha x)}{x^2 + \pi/2 + \alpha}, [0, \infty);$$

$$x) \frac{e^{-x} \sinh(\alpha x)}{x + \alpha}, [0, \infty); \quad xi) |2x^2 - (3 + 2\alpha)x + 3\alpha|^\alpha, [-2, 0];$$

$$xii) \frac{|x|^{3\alpha}}{x^4 + 8x^2 + \alpha};$$

Risp. *i)* $L_1[0, \infty) : 1/4 < \alpha < 1$, $L_2[0, \infty) : 0 < \alpha < 1/2$; *ii)* $L_1(\mathbb{R}) : \alpha < 1$, $L_2(\mathbb{R}) : \alpha < 1/2$; *iii)* $L_1[-1, 1], L_2[-1, 1] : \alpha < 0, \forall \beta$;

iv) $L_1[0, \infty) : -2 < \alpha < -1, L_2[0, \infty) : -\frac{3}{2} < \alpha < -\frac{1}{2};$ v) $L_1(\mathbb{R}) : -1 < \alpha < 3, L_2(\mathbb{R}) : -1/2 < \alpha < 7/2;$ vi) $L_1(\mathbb{R}) : -3 < \alpha < -1/2, L_2(\mathbb{R}) : -3 < \alpha < -1/4;$ vii) $L_1(\mathbb{R}) : -1 < \beta < 1, \alpha > 1/2, L_2(\mathbb{R}) : -1 < \beta < 1, \alpha > 3/4;$ viii) $L_1(\mathbb{R}) : -1 < \alpha, L_2(\mathbb{R}) : -1 \leq \alpha < -1/4; \dots$

23) Individuare i valori dei parametri reali α e β tali che le seguenti funzioni siano L_1 negli intervalli specificati.

$$i) x^{-\alpha} \ln x, (0, 1); \quad ii) x^{-\alpha} \ln x, (1, \infty)$$

Risp. i) $\alpha < 1;$ ii) $\alpha > 1$

1.4 Spazi metrici; proprietà metriche di spazi vettoriali normati; densità, completezza, basi

1) Mostrare che $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n; \|\underline{x}\|_2 = 1\}$ è uno spazio metrico, definendo come distanza la lunghezza dell'arco di geodetica congiungente ogni coppia di punti dello spazio, ma non è uno spazio vettoriale normato.

2) Mostrare che un insieme I di punti isolati di \mathbb{R} è uno spazio metrico, definendo come distanza, ad esempio, quella euclidea: $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in I$, ma non è uno spazio vettoriale normato.

3) Mostrare che uno spazio vettoriale normato è anche uno spazio metrico dotato della distanza $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$.

4) Dato lo spazio metrico (M, d) , mostrare che la sfera (palla) aperta $\mathcal{B}(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in M; d(\underline{x}, \underline{x}_0) < r\}$ e chiusa $\overline{\mathcal{B}}(\underline{x}_0, r) = \{\underline{x} \in M; d(\underline{x}, \underline{x}_0) \leq r\}$ sono rispettivamente insiemi aperti e chiusi.

5) Un sottoinsieme $(S, d) \subset (M, d)$ è detto i) "limitato" se è contenuto in qualche palla; ii) "totalmente limitato" se, $\forall \epsilon > 0$, esiste un insieme finito di punti $X_\epsilon = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n\}$ (detto ϵ -reticolo) tali che, $\forall \underline{x} \in S, d(\underline{x}, \underline{x}_j) < \epsilon$, per qualche $\underline{x}_j \in X_\epsilon$ (ovvero S ha il ricoprimento finito: $S \subset \cup_{k=1}^n \mathcal{B}(\underline{x}_k, \epsilon)$).

i) L'insieme dei punti $\{(m, n), m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$ è un ϵ -reticolo per quale valore di ϵ ? ii) Mostrare che, se S è totalmente limitato,

a) S è limitato; b) non si può costruire una successione $\{\underline{y}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset S$ tale che $d(\underline{y}^{(i)}, \underline{y}^{(j)}) \geq \epsilon_0$, per ogni ϵ_0 .

6) Mentre, nel caso finito dimensionale, un insieme limitato è anche totalmente limitato, nel caso infinito dimensionale ciò non è vero. Mostrare infatti che la palla $\overline{\mathcal{B}}(\underline{0}, 1)$ è un insieme limitato ma non totalmente limitato in $(l_p, \|\cdot\|_p)$ e/o in $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ (si utilizzi la successione $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $e_m^{(n)} = \delta_{nm}$).

7) Mostrare che, in uno spazio metrico (M, d) completo, le nozioni di sottoinsieme $S \subset M$ chiuso e completo coincidono.

8) i) Mostrare che, in uno spazio metrico (M, d) , un sottoinsieme $S \subset M$ è compatto se e solo se è completo e totalmente limitato (questo risultato generalizza, al caso infinito - dimensionale, il teorema di Heine - Borel, che afferma che un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato).

9) i) Dare un esempio di insieme chiuso e limitato che non è compatto (vedere gli esercizi 6 e 8). ii) Dare un esempio di sottoinsieme che non è aperto, né chiuso e né compatto. iii) Mostrare esempi di sottoinsiemi chiusi, ma non compatti.

10) Mostrare che ogni sottoinsieme S chiuso dello spazio metrico (M, d) compatto è compatto.

11) Mostrare che l_f è denso sia in $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$ che in $(l_p, \|\cdot\|_p)$; ma non è denso in $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

12) Mostrare che i) l_f non è chiuso rispetto a $\|\cdot\|_\infty$; ii) l_0 è chiuso rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.

13) Mostrare che se, in uno spazio metrico (M, d) , i sottoinsiemi $A \subset B \subset C$ sono tali che A è denso in B e B è denso in C , allora A è denso in C .

14) Utilizzando la completezza di \mathbb{R} e \mathbb{C} , dimostrare che \mathbb{R}_p^n e \mathbb{C}_p^n sono completi.

15) Utilizzando la completezza di \mathbb{C} , mostrare che gli spazi $(l_p, \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$, e $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sono completi.

16) Mostrare che lo spazio $C_\infty[a, b] = (C_{[a, b]}, \|\cdot\|_\infty)$ è completo, mentre lo spazio $C_p[a, b] = (C_{[a, b]}, \|\cdot\|_p)$ non lo è (per quest'ultimo punto basta trovare una successione di Cauchy $\{f_n(t)\} \subset C_{[a, b]}$ che converge ad una funzione discontinua). Qual'è allora il completamento di $C_p[a, b]$? Vedere i prossimi esercizi.

17) *Gli spazi $L_p[a, b]$ come completamento degli spazi $C_p[a, b]$.*

a) Sia $\chi_E(x)$ la funzione caratteristica dell'insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$: $\chi_E(x) = 0$, $x \notin E$, $\chi_E(x) = 1$, $x \in E$. Si definisce *funzione μ -semplice* la funzione

$$f_\mu(x) = \sum_k c_k \chi_{E_k}(x),$$

dove gli insiemi E_k sono disgiunti e la loro unione coincide con $[a, b]$. Le funzioni μ -semplici coincidono con le funzioni costanti a tratti, quando gli

insiemi misurabili E_k sono intervalli ordinari di $[a, b]$. Vale il seguente risultato (da giustificare in modo qualitativo):

Ogni funzione $f(x) \in L_2[a, b]$ è approssimabile in media quadratica (in norma $\|\cdot\|_2$) da successioni di funzioni μ -semplici $f_\mu(x)$ (cioè lo spazio delle funzioni μ -semplici è denso in L_2 nella norma $\|\cdot\|_2$).

b) Mostrare che, per ogni funzione $f(x)$ costante a tratti (o, più in generale, per ogni funzione μ -semplice), esiste una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni continue che converge ad essa nella norma $\|\cdot\|_2$ (in media quadratica), ma non nella norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Cioè lo spazio delle funzioni continue è denso, rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$, nello spazio delle funzioni μ -semplici. Suggerimento: per convincersi di ciò, basta mostrarlo per la funzione gradino $H(x) : H(x) = 0, x < 0, H(x) = 1, x > 0$, scegliendo la successione:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (5)$$

Allora: $\|f_n - H\|_2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, mentre $\|f_n - H\|_\infty = 1/2, \forall n$. Dedurre che lo spazio delle funzioni continue è denso in L_2 : $C[a, b] = L_2[a, b]$

c) Mostrare che lo spazio $\{f \in C[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)\}$ è denso $C_2[-\pi, \pi]$ e, quindi, in $L_2[-\pi, \pi]$.

18) Meditare ed, eventualmente, dimostrare (con l'ausilio di qualche libro di testo) i due teoremi di Weierstrass qui sotto riportati sull'approssimazione di funzioni continue mediante polinomi e polinomi trigonometrici.

Il primo teorema di Weierstrass. Se $f(t) \in C[0, 1]$, allora la successione di polinomi $\{P_n(t)\}$ definita da

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

converge uniformemente (cioè, nella norma del sup) a $f(t)$, su tutto l'intervallo $[0, 1]$. Cioè lo spazio dei polinomi è denso in $(C_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$, e quindi anche in $C_p[0, 1]$.

Il secondo teorema di Weierstrass. Se $f(t) \in C[-\pi, \pi]$ ed è periodica di periodo 2π , allora, $\forall \epsilon > 0$, esiste una successione di polinomi trigonometrici:

$$F_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos kt + \sum_{k=1}^n b_k \sin kt \right)$$

tale che $|f(t) - F_n(t)| < \epsilon$, uniformemente in $t \in [-\pi, \pi]$. Cioè lo spazio dei polinomi trigonometrici è denso in $\{f \in C_{[-\pi, \pi]}; f(-\pi) = f(\pi)\}$ nella norma uniforme, e quindi, dall'esercizio 3.0.3 - 15), anche rispetto a $\|\cdot\|_p$.

Insiemi completi di vettori, basi e separabilità

19) Qual'è lo span dei seguenti insiemi di vettori?

- i) $\text{span}\{\underline{e}^{(j)}\}_1^k \subset \mathbb{C}^n$, $e_l^{(j)} = \delta_{jl}$, $k < n$,
- ii) $\text{span}\{\underline{e}^{(j)}\}_1^n \subset \mathbb{C}^n$, $e_l^{(j)} = \delta_{jl}$,
- iii) $\text{span}\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $e_k^{(n)} = \delta_{nk}$,
- iv) $\text{span}\{t^k\}_{k=0, \dots, n-1}$,
- v) $\text{span}\{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Risp. i) $\{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n, x_j \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^n$, isomorfo a \mathbb{C}^k , $k < n$;
 ii) \mathbb{C}^n ; iii) insieme l_f delle successioni finite; iv) insieme \mathcal{P}_n dei polinomi di grado $n - 1$; v) insieme dei polinomi.

20) Mostrare che

- i) $\text{span}(\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}) = l_f$ è denso negli spazi $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$ e $(l_p, \|\cdot\|_p)$, ma non in $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
- ii) L'insieme dei vettori $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una buona base di $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$ e $(l_p, \|\cdot\|_p)$.

21) Mostrare che:

- i) $\text{span}(\{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \text{spazio dei polinomi}$ è denso in $C_\infty[a, b]$, e quindi anche in $C_p[a, b]$.
- ii) L'insieme dei monomi $\{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una buona base di $C_\infty[a, b]$ (e quindi di $C_p[a, b]$).

22) La base di Fourier. Mostrare che:

- i) $\text{span}(\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \text{spazio dei polinomi trigonometrici}$ è denso in $\{f \in C[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)\}$ nella norma uniforme, e quindi anche rispetto a $\|\cdot\|_p$.
- ii) L'insieme dei monomi trigonometrici $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una buona base di $\{f \in C[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)\}$, nella norma uniforme e in quella $\|\cdot\|_p$.
- iii) Poichè lo spazio $\{f \in C_2[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)\}$ è denso $C_2[-\pi, \pi]$ e, quindi, in $L_2[-\pi, \pi]$; dedurre che l'insieme dei monomi trigonometrici è una buona base (la base di Fourier) in $L_2[-\pi, \pi]$.

23) Mostrare che gli spazi metrici i) \mathbb{R}_p , ii) \mathbb{R}_p^n , iii) \mathbb{C}_p , iv) \mathbb{C}_p^n , v) l_p , vi) $C_{[a, b]}$, vii) $C_p[a, b]$ sono spazi metrici separabili.

Risp. i corrispondenti sottoinsiemi densi e numerabili sono i) \mathbb{Q} , ii) \mathbb{Q}^n , v) l'insieme delle successioni limitate di razionali; vi), vii) l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali.

24) *Convergenza uniforme ed in media per spazi di successioni.*

Mostrare che, dalla disuguaglianza $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_p$, $\underline{x} \in l_p$, segue che, per spazi di successioni, la convergenza in media implica la convergenza uniforme.

25) Mostrare che i) la successione $\underline{x}^{(n)}$, $x_k^{(n)} = \frac{k}{n(k+1)}$ converge uniformemente alla successione $\underline{0}$, ma non appartiene a l_p ; ii) la successione $\underline{x}^{(n)} \in l_f$, $x_k^{(n)} = \frac{1}{n^a}$, $a > 0$, $k \leq n$, $x_k^{(n)} = 0$, $k > n$ converge uniformemente alla successione $\underline{0}$, mentre converge a $\underline{0}$ in norma p solo se $a > 1/p$; iii) la successione $\underline{x}^{(n)} \in l_f$, $x_k^{(n)} = 1$, $k \leq n$, $x_k^{(n)} = 0$, $k > n$ è tale che $\|\underline{x}^{(n)}\|_\infty = 1$ e $\|\underline{x}^{(n)}\|_p = n^{1/p}$. Verificare che, in tutti questi casi, la disuguaglianza $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_p$, $\underline{x} \in l_p$ dell'esercizio precedente è verificata.

26) *Convergenza uniforme, in media, in media quadratica e puntuale per spazi funzionali.*

i) Usando le disuguaglianze $\|f(t)\|_p \leq (b-a)^{1/p} \|f(t)\|_\infty$ e $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$, $f \in C[a, b]$ (per la seconda, si usi la disuguaglianza di Cauchy - Schwartz), mostrare a) che la convergenza uniforme (nella norma del sup) in $[a, b]$ implica sia la convergenza puntuale che quella in $L_p[a, b]$, $1 \leq p$; ii) che la convergenza in media quadratica implica la convergenza in media.

ii) Mostrare che la convergenza in $L_p[a, b]$ non implica né la convergenza uniforme né quella puntuale.

iii) Mostrare che la convergenza puntuale non implica quella uniforme e neppure quella in media.

Sugg. Per il punto ii), considerare i seguenti esempi. a) la successione di funzioni $f_n(x) = e^{-nx}$ in $(0, 1)$, mostrando che: $\|f_n - 0\|_p = (1 - e^{-np})/(np) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, mentre $\|f_n - 0\|_\infty = 1$, $\forall n$ (in questo caso, $f_n(x)$ converge a 0 in $(0, 1)$ anche puntualmente). b) La successione $f_n(x)$ delle somme parziali di Fourier; essa converge a $f(x) \in L_2[a, b]$ in media quadratica: $\|f_n(x) - f(x)\|_2 \rightarrow 0$ ma, in generale, non converge puntualmente (basta scegliere $f(x)$ discontinuo), e quindi non c'è neppure convergenza uniforme.

c) La successione di funzioni

$\{f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)}, f_1^{(4)}, f_2^{(4)}, f_3^{(4)}, f_4^{(4)}, f_1^{(5)}, \dots\}$ definita così:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in I, \quad I = (\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}], \\ 0 & x \notin I, \end{cases} \quad (6)$$

mostrando che $f_i^{(k)}(x)$ converge a 0 in media quadratica: $\|f_i^{(k)}(x) - 0\|_2 \rightarrow 0$, ma *non converge in nessun punto* dell'intervallo, poichè, per ogni $x \in [0, 1]$, esiste un valore di (i, k) arbitrariamente grande tale che $f_i^{(k)}(x) = 1$ oppure $f_i^{(k)}(x) = 0$; inoltre $\|f_i^{(k)}(x) - 0\|_\infty = 1$. Per il punto iii), si consideri infine

la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & x \in (0, \frac{1}{n}], \\ 0 & x \notin (0, \frac{1}{n}], \end{cases} \quad (7)$$

mostrando che $f_n(x)$ converge a 0 puntualmente in $(0, 1)$, mentre $\|f_n - 0\|_2 \rightarrow 1$ e $\|f_n - 0\|_\infty = \sqrt{n} \rightarrow \infty$.

1.5 Spazi euclidei

1) Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 1)$, $\underline{v}^{(2)} = (2, -i) \in \mathbb{C}^2$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli.

$$\text{R. } \underline{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \underline{e}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{5}}(1 + \frac{i}{2})(1, -1)$$

2) Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 0, -1)$, $\underline{v}^{(2)} = (3, -2i, -1)$, $\underline{v}^{(3)} = (4 + i, -1 - 6i, 2 + i) \in \mathbb{C}^3$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli.

$$\text{R. } \underline{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \underline{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2i, 1), \underline{e}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i, -1, i)$$

3) i) Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 0, 0)$, $\underline{v}^{(2)} = (a, 1, 0)$, $\underline{v}^{(3)} = (c, b, 1) \in \mathbb{C}^3$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli. ii) Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 0, -1)$, $\underline{v}^{(2)} = (3, -2i, 1)$, $\underline{v}^{(3)} = (4 + i, -1 - 6i, 2 + i) \in \mathbb{C}^3$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli.

$$\text{R. i) } \{\underline{e}^{(j)}\}_1^3, e_k^{(j)} = \delta_{jk}; \text{ ii) } \underline{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \underline{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -i, 1), \underline{e}^{(3)} = \frac{3-2i}{\sqrt{78}}(1, 2i, 1)$$

4) i) Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (0, 0, 1)$, $\underline{v}^{(2)} = (1, i, a)$, $\underline{v}^{(3)} = (b, i(b - 2), c) \in \mathbb{C}^3$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli. ii) Mostrare che le funzioni $f = e^{-x}$, $g = xe^{-x}$ sono indipendenti in $L_2[0, \infty)$, e ortonormalizzarle

$$\text{R. i) } \underline{e}^{(1)} = (0, 0, 1), \underline{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0), \underline{e}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0). \text{ ii) } e^{(1)}(x) = 2e^{-x}, e^{(2)}(x) = 2\sqrt{2}(x - \frac{1}{2})e^{-x}.$$

5) Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz: $|(\underline{y}, \underline{x})|^2 \leq (\underline{y}, \underline{y})(\underline{x}, \underline{x})$ e usarla per mostrare che $\|\underline{x}\| := \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$ è una norma; dedurre che uno spazio euclideo è anche normato e metrico, con distanza $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$

6) Dimostrare il teorema di Pitagora: *Se i vettori $\{\underline{x}^{(k)}\}_1^n$ sono ortogonali, allora*

$$\|\sum_{k=1}^n \underline{x}^{(k)}\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\underline{x}^{(k)}\|^2. \quad (8)$$

7) Tensore metrico i) Mostrare che, se la base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^n$ di uno spazio euclideo E non è ortonormale, allora, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in E$,

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \bar{x}_i y_j, \quad g_{ij} := (\underline{e}^{(i)}, \underline{e}^{(j)}). \quad (9)$$

ii) mostrare che la matrice $(n \times n)$ $g = (g_{ij})$ è hermitiana non negativa (si verifichi che $(\underline{x}, \underline{x}) \geq 0$, $\forall \underline{x}_j \in \mathbb{C}$).

La matrice (g_{ij}) è detta “tensore metrico”. Se E è uno spazio pseudo-euclideo (come lo spazio di Minkovski), la matrice g è solo hermitiana.

8) Mostrare che:

i) \mathbb{C}_2^n è uno spazio euclideo, con prodotto scalare

$$(\underline{\xi}, \underline{\eta}) := \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k, \quad \underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{C}^n. \quad (10)$$

ii) La sua base ortonormale canonica è data dai vettori $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^n$, $e_i^{(j)} = \delta_{ji}$.

iii) Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k \right|^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^2 \right), \quad \text{disug. di Cauchy-Schwartz} \\ \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k + \eta_k|^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{disug. di Minkowski} \end{aligned} \quad (11)$$

9) Mostrare che:

i) lo spazio l_2 è euclideo, con

$$(\underline{\xi}, \underline{\eta}) := \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\xi}_k \eta_k, \quad \underline{\xi}, \underline{\eta} \in l_2. \quad (12)$$

ii) La sua base ortonormale canonica è data dai vettori $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^n$, $e_i^{(j)} = \delta_{ji}$ e valgono le disuguaglianze presenti nell’esercizio precedente, sostituendo n con ∞ .

10) Mostrare che:

i) lo spazio $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$ delle matrici $(n \times n)$ a coefficienti complessi è uno spazio euclideo, con prodotto scalare

$$(X, Y) := \text{tr} (X^\dagger Y) \quad \left(= \sum_{i,j=1}^n \bar{X}_{ij} Y_{ij} \right), \quad X, Y \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}), \quad (13)$$

dove $X^\dagger = \overline{X^T}$ è la matrice hermitiana coniugata (aggiunta) della matrice X , di componenti $(X^\dagger)_{ij} = \overline{X_{ji}}$;

ii) la norma e la distanza euclidea di matrici sono quindi date da:

$$\begin{aligned} \|X\|_2 &= \left(\sum_{i,j=1}^n |X_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \\ \|X - Y\|_2 &= \left(\sum_{i,j=1}^n |X_{ij} - Y_{ij}|^2 \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (14)$$

iii) valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^n \overline{X_{ij}} Y_{ij} \right|^2 &\leq \left(\sum_{i,j=1}^n |X_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{i,j=1}^n |Y_{ij}|^2 \right), \quad \text{Cauchy-Schwartz} \\ \left(\sum_{i,j=1}^n |X_{ij} + Y_{ij}|^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{i,j=1}^n |X_{ij}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i,j=1}^n |Y_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{Minkowski;} \end{aligned} \quad (15)$$

iv) la base ortonormale naturale è $\{E^{(i,j)}\}_{i,j=1}^n$, dove

$$(E^{(i,j)})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (16)$$

11) Mostrare che:

i) lo spazio \mathcal{P}_n dei polinomi di grado $(n-1)$ è uno spazio euclideo di dimensione n , con il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt; \quad (17)$$

ii) la norma e la distanza euclidea sono quindi date da:

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \\ d_2(f, g) &= \|f - g\|_2 = (f - g, f - g)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (18)$$

iii) valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right), \quad \text{Cauchy-Schwartz} \\ \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \text{Minkowski.} \end{aligned} \quad (19)$$

iv) i vettori $\{t^{j-1}\}_1^n$ sono indipendenti (quindi formano una base) ma non ortogonali.

v) Ortogonalizzarli, nell'intervallo $[-1, 1]$, ottenendo:

$$1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, ..$$

vi) Verificare che questi polinomi ortogonali coincidono, a meno di costanti moltiplicative, con i polinomi di Legendre $L_k(t)$ (che sono ortogonali ma non ortonormali):

$$L_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, ..$$

vii) Costruire infine la base ortonormale $\{P_j(t)\}_{j \in \mathbb{N}}$:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right), \quad P_3(t) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right), \quad ..$$

12) Mostrare che gli spazi $C_2[a, b]$ e $L_2[a, b]$ sono euclidei rispetto al prodotto scalare definito nell'esercizio precedente, nel quale sono indicate anche le corrispondenti norma e distanza, e le disuguaglianze di Cauchy-Schwartz e Minkowski.

13) Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ per ottenere le disuguaglianze:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \quad \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$$

e dedurre che i) $f, g \in L_2 \Rightarrow fg \in L_1$; ii) $f \in L_2[a, b] \Rightarrow f \in L_1[a, b]$.

R. Scegliere i) $g(t) = \frac{f(t)}{|f(t)|} |g(t)|$ e ii) $g(t) = \frac{f(t)}{|f(t)|}$.

14) Dimostrare che, se lo spazio euclideo è separabile, allora esiste in esso una base ortonormale. (Suggerimento: la separabilità implica l'esistenza di una base numerabile $\{\underline{x}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$; da essa, usando il procedimento di Gram-Schmidt, trovare un insieme di vettori ortonormali $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$, mostrando che,

ad ogni passo finito n , $\text{span}(\{\underline{x}^{(j)}\}_1^n) = \text{span}(\{\underline{e}^{(j)}\}_1^n)$, e che quindi l'insieme di vettori $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ è la base ortonormale cercata).

15) Sia S un sottospazio dello spazio euclideo E , e sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$ (N finito o infinito) una base ortonormale di S . Mostrare che, dato il generico vettore $\underline{x} \in E$,

i) il vettore di S che meglio approssima \underline{x} è

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(N)} &= \sum_{i=1}^N \xi_i \underline{e}^{(i)}, \\ \xi_i &:= (\underline{e}^{(i)}, \underline{x}), \quad \text{coefficienti di Fourier di } \underline{x} \text{ rispetto a } \{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N. \end{aligned} \quad (20)$$

ii) il vettore $\underline{x}^{(N)}$ è la “proiezione ortogonale” di $\underline{x} \in E$ su S , verificando cioè che il vettore $(\underline{x} - \underline{x}^{(N)})$ è ortogonale a tutti i vettori di S ;

iii) vale la disuguaglianza di Bessel:

$$\|\underline{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^N |\xi_i|^2. \quad (21)$$

iv) Se, $\forall \underline{x} \in E$, vale la relazione di Parseval:

$$\|\underline{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2, \quad (22)$$

il sistema di vettori $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ è una base ortonormale di E .

16) Dimostrare il seguente teorema: CNES affinché gli elementi della successione numerica $\{\xi_k\}_1^{\infty}$ siano i coefficienti di Fourier di un certo \underline{x} appartenente allo spazio di Hilbert H separabile, rispetto ad una base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, è che $\{\xi_k\}_1^{\infty} \in l_2$.

17) Il teorema precedente mostra che, introdotta una base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ nello spazio di Hilbert H separabile, viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra H e l_2 :

$$\underline{x} \in H \quad \Leftrightarrow \quad \{x_k\}_1^{\infty} \in l_2, \quad x_k := (\underline{e}^{(k)}, \underline{x}). \quad (23)$$

Mostrare che tale corrispondenza biunivoca è un isomorfismo sia lineare:

$$\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in H \quad \Leftrightarrow \quad \{\alpha x_k + \beta y_k\}_1^{\infty} \in l_2 \quad (24)$$

che euclideo:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k y_k. \quad (25)$$

18) Definire il complemento ortogonale S^\perp di $S \subset E$, rispetto allo spazio euclideo E , e dimostrare che:

i) $S \cap S^\perp = \{0\}$,

ii) ogni vettore $\underline{x} \in E$ è esprimibile in modo univoco nella forma $\underline{y} + \underline{z}$, con $\underline{y} \in S$, $\underline{z} \in S^\perp$ (quindi: $E = S \oplus S^\perp$),

iii) S^\perp è un sottospazio chiuso di E .

1.6 Funzionali lineari e distribuzioni

1) Un funzionale lineare sullo spazio vettoriale V è un operatore $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

$$f(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \underline{x}, \underline{y} \in V.$$

a) Se $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ e $\{\underline{e}^{(k)}\}_1^n$ è una base di \mathbb{C}^n , con $\underline{x} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}^{(k)}$, mostrare che l'operatore e_j che, applicato a \underline{x} , ne seleziona la componente j -esima x_j (rispetto alla base $\{\underline{e}^{(k)}\}$):

$$e_j(\underline{x}) = x_j \tag{26}$$

è un funzionale lineare.

b) Poichè il generico funzionale f sul generico $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ agisce nel seguente modo:

$$f(\underline{x}) = \sum_k^n f_k x_k, \quad f_k \in \mathbb{C},$$

esso è esprimibile come combinazione lineare dei funzionali e_j :

$$f = \sum_k^n f_k e_k.$$

L'insieme dei funzionali $\{e_j\}_1^n$ è quindi una buona base nello spazio dei funzionali su \mathbb{C}^n ; essendo inoltre soddisfatte le condizioni

$$e_j(\underline{e}^{(k)}) = \delta_{jk},$$

questa base è detta la *base duale* della base $\{\underline{e}^{(k)}\}_1^n$ di \mathbb{C}^n e gli $\{f_k\}_{k=1}^n$ sono le componenti del funzionale rispetto alla base $\{e_j\}_1^n$.

2) i) Usare i risultati dell'esercizio 1 per mostrare che l'insieme dei funzionali lineari sullo spazio vettoriale V è esso stesso uno spazio vettoriale V^* , detto il duale di V , tale che, se $f^{(1)}, f^{(2)} \in V^*$, allora:

$$(\alpha f^{(1)} + \beta f^{(2)})(\underline{x}) = \alpha f^{(1)}(\underline{x}) + \beta f^{(2)}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

ii) Se $\{\underline{e}^{(k)}\}_1^n$ è una base di V e $\{e_j\}_1^n$ è la base duale di V^* , allora il generico funzionale $f = \sum_k^n f_k e_k$ è rappresentato, nella base $\{e_j\}_1^n$, dal “vettore riga” (f_1, \dots, f_n) , mentre il generico vettore $\underline{x} \in V$: $\underline{x} = \sum_{k=1}^n x_k \underline{e}^{(k)}$ è rappresentato dal “vettore colonna” $(x_1, \dots, x_n)^T$, e l’azione di f su \underline{x}

$$f(\underline{x}) = \sum_k^n f_k x_k$$

è descritta dal prodotto riga per colonna.

3) Altri esempi di funzionali lineari.

a) Se $\{x\}_1^\infty \in l_2$,

$$f(\underline{x}) = \sum_{k=1}^\infty f_k x_k,$$

con $\{f_k\}_1^\infty \in l_2$, è un buon funzionale lineare.

b) Il generico funzionale lineare su $\varphi(t) \in C[a, b]$ è descritto dall’integrale:

$$f(\varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt, \quad f(t) \in C[a, b].$$

c) Nello spazio euclideo \mathbb{C}_2^n , il prodotto scalare

$$(\underline{a}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k x_k$$

è un buon funzionale lineare. Che relazione intercorre tra le componenti del vettore \underline{a} e le componenti del funzionale lineare f ? (R. $f_k = \bar{a}_k$)

d) Nello spazio euclideo l_2 , il prodotto scalare

$$(\underline{a}, \underline{x}) = \sum_{k=1}^\infty \bar{a}_k x_k$$

è un buon funzionale lineare.

e) Negli spazi euclidei $C_2[a, b], L_2[a, b]$, il prodotto scalare

$$F(\varphi) = (a, \varphi) = \int_a^b \overline{a(t)}\varphi(t)dt, \quad a(t), \varphi(t) \in C_2[a, b].$$

è un buon esempio di funzionale lineare.

f) l'operatore $\delta_{x_0} : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definito dalla

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0), \quad \varphi(x) \in C[a, b], \quad x_0 \in [a, b], \quad (27)$$

è un buon funzionale lineare, detto "delta di Dirac".

4) Sia $f : N \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare sullo spazio vettoriale normato N ;
 i) dare le definizioni di continuità e limitatezza del funzionale. ii) Mostrare che: a) se f è continuo in $\underline{0}$, allora è continuo in N ; b) f è continuo se e solo se è limitato sulla sfera unitaria: $\sup_{\|\underline{x}\| \leq 1} |f(\underline{x})| < \infty$.

5) Mostrare che l'insieme dei funzionali lineari limitati sullo spazio vettoriale normato N forma uno spazio vettoriale, con:

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(\underline{x}) = \alpha f_1(\underline{x}) + \beta f_2(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in N, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

esso stesso normato, il duale N^* di N , la cui norma, è definita così:

$$\|f\|_{N^*} = \sup_{\|\underline{x}\|_N \neq 0} \frac{|f(\underline{x})|}{\|\underline{x}\|_N} = \sup_{\|\underline{x}\|_N \neq 0} \left| f\left(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|_N}\right) \right| = \sup_{\|\underline{x}\|_N=1} |f(\underline{x})|; \quad (28)$$

da cui segue la disuguaglianza:

$$|f(\underline{x})| \leq \|f\|_{N^*} \|\underline{x}\|_N, \quad \|\underline{x}\|_N \neq 0. \quad (29)$$

6) Le norme di funzionali importanti.

i) Mostrare che, se $\underline{x} \in \mathbb{C}_2^n$, e $f(\underline{x}) = (\underline{a}, \underline{x})$, con $\underline{a} \in \mathbb{C}_2^n$, allora $\|f\| = \|\underline{a}\|_2$.

ii) Mostrare che, se $\varphi \in C_\infty[a, b]$, e $F(\varphi) = \int_a^b \varphi(t) dt$, allora $\|F\| = b - a$.

iii) Mostrare che, se $\varphi \in C_\infty[a, b]$, e $F(\varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t) dt$, con $f \in C_{[a,b]}$, allora $\|F\| = \|f\|_1$.

iv) Mostrare che, se $\varphi \in C_\infty[a, b]$, e $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$, allora $\|\delta_{x_0}\| = 1$.

v) Mostrare che, se $\varphi \in L_2[a, b]$, e $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$, allora δ_{x_0} non è limitato.

7) Norma indotta da N su N^* . Dati i funzionali lineari

$$f(\underline{x}) = \sum_k f_k x_k, \quad F(\varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t), \quad (30)$$

dove le f_k sono le componenti del funzionale f e $f(t)$ è la funzione che rappresenta il funzionale F , mostrare che: i) se $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l_p = N$, allora $\|f\| = \|f\|_q$, con $1/p + 1/q = 1$; cioè che $f \in l_q = N^*$. Trattare anche i

casi degeneri in cui $p = 1, q = \infty$ e $p = \infty, q = 1$. ii) Se $\varphi(t) \in L_p[a, b]$, allora $\|F\| = \|f\|_q$; cioè $N^* = L_q[a, b]$. Trattare anche i casi degeneri in cui $p = 1, q = \infty$ e $p = \infty, q = 1$. Suggerimento: usare la disuguaglianza di Holder...

8) Convergenza forte e debole di vettori. Una successione di elementi $\{\underline{x}^{(n)}\}$ dello spazio normato N

a) converge fortemente, o in norma, a \underline{x} se:

$$\|\underline{x}^{(n)} - \underline{x}\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

b) converge debolmente, o per componenti, a \underline{x} se, per ogni funzionale lineare $f \in N^*$:

$$|f(\underline{x}^{(n)}) - f(\underline{x})| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

9) Mostrare che, in l_p o in \mathbb{C}^n , se si scelgono come funzionali gli elementi della base duale $\{e_j\}$, allora la convergenza debole coincide con la convergenza “per componenti”:

$$|e_j(\underline{x}^{(n)}) - e_j(\underline{x})| = |x_j^{(n)} - x_j| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall j.$$

10) Mostrare che la convergenza forte implica la convergenza debole, essendo:

$$|f(\underline{x}^{(n)}) - f(\underline{x})| = |f(\underline{x}^{(n)} - \underline{x})| \leq \|f\| \|\underline{x}^{(n)} - \underline{x}\|,$$

iii) Dare un esempio in cui la convergenza debole non implica quella forte.

iv) Mostrare che, se lo spazio è finito - dimensionale, la convergenza debole implica quella forte.

11) Convergenza forte e debole di funzionali lineari. Data una successione di funzionali lineari $\{f^{(n)}\} \subset N^*$ su N ; essa:

a) converge debolmente a $f \in N^*$ se, $\forall \underline{x} \in N$:

$$|f^{(n)}(\underline{x}) - f(\underline{x})| = |(f^{(n)} - f)(\underline{x})| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

b) converge fortemente, o nella norma di N^* , se $\|f^{(n)} - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

i) Mostrare che la convergenza forte implica quella debole, usando la disuguaglianza $|f(\underline{x})| \leq \|f\|_{N^*} \|\underline{x}\|_N$ dell'esercizio 5, ma che il contrario non è vero.

ii) Mostrare che la successione di funzionali $\{f^{(n)}\}$ converge debolmente al funzionale f se e solo se $|f^{(n)}(\underline{e}^{(j)}) - f(\underline{e}^{(j)})| = |(f^{(n)} - f)(\underline{e}^{(j)})| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, per ogni elemento della base $\{e^{(j)}\}$ di N .

12) Lemma di Riemann - Lebesgue. i) Mostrare che le successioni di funzionali lineari $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definite da:

$$S_n(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\varphi(x)dx, \quad C_n(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\varphi(x)dx$$

convergono debolmente a 0, se lo spazio delle funzioni di prova φ è $L_1[-\pi, \pi]$. Suggerimento: conviene scegliere φ in $C^1[-\pi, \pi]$ (che è denso su $L_1[-\pi, \pi]$ nella norma $\|\cdot\|_1$) e integrare per parti. ii) Mostrare invece che $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non convergono fortemente a 0 (mostrando, ad esempio, che $\|\cos(nx)\|_1 = 4$ e $\|\cos(nx)\|_\infty = 1$).

13) Distribuzioni come funzionali lineari. i) Un funzionale lineare è una trasformazione lineare F da un opportuno spazio vettoriale di funzioni, non necessariamente normato, come, ad esempio, lo spazio di Schwartz \mathcal{S} delle funzioni $C^\infty(\mathcal{R})$ che vanno a zero per $|x| \rightarrow \infty$ più rapidamente di ogni potenza, o come lo spazio \mathcal{K} delle funzioni $C^\infty(\mathcal{R})$ che si annullano con tutte le derivate al di fuori di un intervallo I . Tale trasformazione è ben rappresentata dall'integrale:

$$F(\varphi) = \int_{\mathcal{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S} (\in \mathcal{K}),$$

Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra il funzionale F e la funzione $f(x)$ sotto integrale; se $f(x)$ è "regolare", allora il funzionale è detto regolare; altrimenti è detto "singolare". Funzionali lineari regolari e singolari sono anche detti "distribuzioni regolari e singolari".

La funzione $\varphi(x) \in \mathcal{S} (\in \mathcal{K})$ è detta "funzione di prova". Gli spazi in questione sono così ristretti da non essere normati; ma più è ristretto lo spazio delle φ e più ricche sono le proprietà dei funzionali lineari (distribuzioni) definibili su di esso. Pur non essendo normati, negli spazi di cui sopra è definita una nozione di convergenza. Ad esempio, Una successione $\{\varphi_n\}$ di \mathcal{K} converge a una funzione $\varphi \in \mathcal{K}$ ($\varphi_n \rightarrow \varphi$), se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^k \varphi_n(t)}{dt^k} = \frac{d^k \varphi(t)}{dt^k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

uniformemente in I . Allora un funzionale lineare su \mathcal{K} è continuo, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F(\varphi_n) - F(\varphi)| = 0$$

quando $\varphi_n \rightarrow \varphi$.

i) Mostrare che, se $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$, allora il funzionale f è continuo, stabilendo la disuguaglianza:

$$|f(\varphi_n) - f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} dt f(t)(\varphi_n(t) - \varphi(t)) \right| \leq \max_{t \in I} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \|f\|_1.$$

Punto materiale, carica puntiforme, forza impulsiva e delta di Dirac.

14) Si mostri, attraverso un procedimento di limite opportuno, che la densità di massa di un punto materiale, la densità di carica di una carica puntiforme e una forza impulsiva sono manifestazioni diverse della delta di Dirac. Per fare questo:

i) Si consideri una massa unitaria, distribuita uniformemente su un segmento di lunghezza $\epsilon = 2/n$ centrato intorno ad un punto qualsiasi x_0 ; la corrispondente densità di massa vale:

$$\delta_n(x - x_0) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } |x - x_0| < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } |x - x_0| > \frac{1}{n}. \end{cases} \quad (31)$$

che dà in effetti una massa unitaria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x - x_0) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dy \delta_n(y) = 1.$$

ii) Si osservi che, mentre il limite puntuale, per $n \rightarrow \infty$, della successione di funzioni $\delta_n(x)$ non è ben definito, in quanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x = x_0, \\ 0, & \text{se } x \neq x_0, \end{cases} \quad (32)$$

l'integrale di $\delta_n(x)$ (la massa) resta ben definito anche nel limite, continuando a valere 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) = 1.$$

iii) Si mostri che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x - x_0) \varphi(x) = \varphi(x_0). \quad (a)$$

dove $\varphi(x)$ è una qualunque funzione di $L_1(\mathbb{R})$ e continua in x_0 .
 I fisici introducono la “funzione generalizzata”, o “distribuzione”, $\delta(x - x_0)$ (detta “ δ ” di Dirac) come quell’oggetto matematico definito dall’equazione precedente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) \varphi(x) = \varphi(x_0), \quad (b)$$

immaginando di passare al limite sotto il segno di integrale nella formula (a) ed identificando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

(cosa delicata, dal punto di vista matematico, dato che tale limite non esiste, come già notato, in senso stretto). Il fisico con una buona base matematica sa, comunque, che l’espressione (b) va interpretata nel senso della formula (a). In questo senso si dice che *la successione di funzioni $\delta_n(x - x_0)$ è una rappresentazione della $\delta(x - x_0)$ di Dirac per $n \rightarrow \infty$.*

iv) Mostrare che:

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0) \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x_0), & a < x_0 < b; \\ 0, & x_0 < a, x_0 > b. \end{cases} \quad (33)$$

Riepilogando, in modo più rigoroso, la successione di funzionali

$$\delta_{x_0}^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x - x_0) \varphi(x) dx \quad (34)$$

a) converge debolmente (o sotto integrale, o nel senso delle distribuzioni) al funzionale δ_{x_0} , detto “delta di Dirac”, definito dalla sua azione sulla funzione di prova φ :

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0);$$

b) non converge in senso forte (o in norma); basta infatti mostrare che la successione di funzioni $\{\delta_n(x - x_0)\}$ non è di Cauchy. Per $\varphi \in (C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$, allora $\|\delta_n(x) - \delta_m(x)\|_1 = 1$; per $\varphi \in (C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, allora $\|\delta_n(x) - \delta_m(x)\|_{\infty} = |n - m|/2$.

c) la successione di funzioni $\{\delta_n(x - x_0)\}$ non converge puntualmente a nessuna funzione legittima;

d) Il funzionale δ_{x_0} è “singolare”, poichè non esiste una funzione $f(x)$ “regolare” tale che $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dt = \varphi(x_0)$.

16) Limitatezza e non del funzionale δ di Dirac Mostrare che il funzionale delta di Dirac δ_{x_0} i) è continuo (limitato) per $\varphi \in (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. (La disuguaglianza:

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

implica la limitatezza e anche la continuità). ii) Si mostri che δ_{x_0} non è un funzionale limitato se $\varphi(x)$ appartiene a $(L_2[a, b], \|\cdot\|_2)$, considerando la successione di funzioni continue

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{n}{2}(x-x_0)^2} \in L_2(\mathbb{R})$$

e mostrando che $\|\varphi_n(x)\|_2 = 1$, mentre $|\delta_{x_0}(\varphi_n)| = (n/\pi)^{1/4}$.

19) Rappresentazioni della δ di Dirac. Si mostri che, data la funzione $p(x)$, “regolare” sull’asse reale e tale che

$$\int_{\mathcal{R}} p(x) dx = 1,$$

allora la successione di funzionali

$$\delta_{x_0}^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} np(n(x-x_0))\varphi(x) dx \quad (35)$$

a) converge debolmente (o sotto integrale, o nel senso delle distribuzioni) al funzionale δ_{x_0} , detto “delta di Dirac”, definito dalla sua azione sulla funzione di prova φ :

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0);$$

b) non converge in senso forte (o in norma); basta infatti mostrare che la successione $\{np(nx)\}$ non è di Cauchy. Per $\varphi \in (C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, allora

$$\|np(n(x-x_0)) - mp(m(x-x_0))\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| p(y) - \frac{m}{n} p\left(\frac{m}{n}y\right) \right| dy, \quad (36)$$

che non tende a 0 per n, m sufficientemente grandi; si scelga, ad esempio, $m = n/2$ per avere

$$\int_{\mathbb{R}} \left| p(y) - \frac{m}{n} p\left(\frac{m}{n}y\right) \right| dy = \int_{\mathbb{R}} \left| p(y) - \frac{1}{2} p\left(\frac{y}{2}\right) \right| dy \neq 0. \quad (37)$$

Per $\varphi \in (C(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, allora $\|\delta_n(x) - \delta_m(x)\|_\infty = O(|n-m|)$ e, con la stessa scelta, $\|\delta_n(x) - \delta_m(x)\|_\infty = O(n)$.

c) La successione $\{np(nx)\}$ non converge puntualmente a nessuna funzione legittima.

20) i) Verificare che le seguenti funzioni:

$$i) H(1 - 2|x|); \quad ii) e^{-x^2}/\sqrt{\pi}; \quad iii) \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \quad iv) \frac{\sin x}{\pi x}$$

godono delle proprietà elencate nell'esercizio precedente. ii) Ottenere le corrispondenti successioni di funzioni che rappresentano $\delta(x)$ e graficarle. iii) Dimostrare che esse sono delle buone rappresentazioni della delta di Dirac anche senza passare al limite sotto il segno di integrale, scegliendo opportunamente lo spazio delle funzioni di prova. Per gli esempi i)-iii) si scelga lo spazio delle funzioni $L_1(\mathbb{R})$ continue in 0; per l'esempio iv) si scelga una φ tale che:

$$\begin{aligned} i) \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} &\text{ è assolutamente convergente in ogni intervallo finito} \\ &\text{(condizione del Dini);} \\ ii) \varphi(x) &\rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \text{ come } |\varphi(x)| \leq \frac{c}{|x|^{\text{epsilon}}}. \end{aligned} \quad (38)$$

21) Trovare i valori dei parametri α, β, γ affinché le seguenti successioni di funzioni siano buone rappresentazioni della $\delta(x)$.

$$i) \frac{\alpha n}{\beta^2 + n^\gamma x^2}; \quad ii) \alpha n^\gamma e^{-\beta n^\gamma |x|}.$$

22) Ancora sulla δ . Si mostri che:

$$i) \delta(x) = \delta(-x); \quad ii) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \in \mathbb{R}; \quad iii) \delta'(-x) = -\delta'(x); \quad iv) \delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x_n)}{|g'(x_n)|}, \quad g(x_n) = 0, \quad g'(x_n) \neq 0$$

23) Si mostri che:

$$i) H(x) + H(-x) = 1; \quad ii) x\delta(x) = 0; \quad iii) g(x)\delta(x - x_0) = g(x_0)\delta(x - x_0); \quad iv) \delta(x^2 - 1) = \frac{1}{2}[\delta(x - 1) + \delta(x + 1)]; \quad v) \delta(\sin x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n\pi); \quad vi) \delta(\cos x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - (n + 1/2)\pi)$$

24) Si mostri che:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \delta(2x) \cos x &= \frac{1}{2}; \quad \int_0^\infty dx \delta(x^2 - 1) \varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(1); \quad \int_{-1}^4 dx \delta(\sin x) \cos x = 0; \\ \int_{-\infty}^\infty dx \delta(\sin x e^{-x}) \frac{\sin x}{x - \pi} &= -e^\pi; \\ \int_0^\infty dx \delta(\cos x) e^{-x} &= \frac{1}{2 \sinh \frac{\pi}{2}}; \quad \int_{-1}^\infty dx \delta(\sin x) e^{-x} = \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} dx \delta(\sin x) e^{-x} = \frac{1}{2 \tanh \frac{\pi}{2}}$$

25) Si mostri che $\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = H(x)$.

26) Derivata di una distribuzione. Data la distribuzione (regolare o singolare) D definita dal funzionale lineare

$$D(\varphi) = \int_{\mathcal{R}} D(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

si definisce derivata D' della distribuzione D il funzionale lineare:

$$D'(\varphi) = -D(\varphi') = - \int_{\mathcal{R}} D(x) \varphi'(x) dx.$$

Si verifichi che questa definizione è consistente con la ben nota regola di integrazione per parti, valida per funzionali regolari.

27) Si mostri che, se D è una distribuzione (regolare o singolare) rappresentata dall'integrale:

$$D(\varphi) = \int_{\mathcal{R}} D(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

la sua derivata n -sima è definita dalla formula:

$$D^{(n)}(\varphi) = (-)^n D(\varphi^{(n)}) = (-)^n \int_{\mathcal{R}} D(x) \varphi^{(n)}(x) dx.$$

28) Si verifichi che, nel senso delle distribuzioni:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \delta(x); & dH(-x)/dx &= -\delta(x); & g(x)\delta'(x) &= g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x); \\ (H(x) \sin x)' &= H(x) \cos x; & (H(x) \cos x)' &= H(x) - H(x) \sin x, \\ \delta'(g(x)) &= \frac{1}{g'(x)} \frac{d\delta(g(x))}{dx} \end{aligned} \tag{39}$$

29) Data la funzione discontinua

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x < x_0, \\ g(x), & x > x_0, \end{cases} \tag{40}$$

con $f, g \in C^1$ nei rispettivi intervalli, avente la discontinuità (il salto) $\Delta = g(x_0) - f(x_0)$ nel punto di discontinuità x_0 ,

i) riscrivere $F(x)$ attraverso la funzione gradino H nel seguente modo:

$$F(x) = f(x)H(x_0 - x) + g(x)H(x - x_0). \tag{41}$$

ii) Utilizzare tale espressione e l'esercizio precedente per mostrare che

$$F'(x) = f'(x)H(x_0 - x) + g'(x)H(x - x_0) + \Delta\delta(x - x_0). \quad (42)$$

30) i) Mostrare che, se la funzione $f(x)$ è periodica: $f(x + 2) = f(x)$ e vale x nell'intervallo $-1 \leq x < 1$, allora:

$$f'(x) = 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - (2n + 1)).$$

ii) Mostrare che $([x])' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n)$, dove $[x]$ è la parte intera di x (con, ad esempio: $[1/2] = 0$, $[-1/2] = -1$).

31) Si mostri che:

$$\int_a^b dx \frac{d}{dx} (\delta(x - x_0)) \sin(x) = -H(b - x_0)H(x_0 - a) \cos x_0 = -H((b - x_0)(x_0 - a)) \cos x_0;$$

$$(H(x)(x^2 + 1))' = \delta(x) + 2xH(x); \quad \int_0^{\infty} dx \frac{d}{dx} [H(x) \tanh x] = 1;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dx} (\delta(x^2 - 4)) \varphi(x) dx = -\frac{1}{4} \varphi'(2); \quad \int_0^{\infty} \delta'(x^2 - 4) \varphi(x) dx = \frac{1}{16} \left(\frac{\varphi(2)}{2} - \varphi'(2) \right).$$

32) Altre distribuzioni rilevanti. Stabilire la validità delle seguenti relazioni, nel senso delle distribuzioni.

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = P \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \pm i\pi \delta(x - x_0); \quad (\ln |x|)' = P \left(\frac{1}{x} \right);$$

$$(|x|)' = \text{sign } x; \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} \frac{e^{ixt}}{x \pm i\epsilon} = \mp 2\pi i \delta(x) H(\mp t).$$

33) a) Mostrare che, data la successione di funzionali $\{f^{(n)}\}$, con $f^{(n)}(\varphi) = \int_0^{\infty} e^{-nx} \varphi(x) dx$, i) la successione $\{e^{-nx}\}$ converge a 0 puntualmente in $(0, \infty)$, ii) $\{f^{(n)}\} \rightarrow 0$ debolmente, ma non fortemente nella norma $\|\cdot\|_{\infty}$.
 b) Mostrare che, data la successione di funzionali $\{f^{(n)}\}$, con $f^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \tanh nx \varphi(x) dx$, i) la successione $\{\tanh nx\}$ converge a $\text{sgn } x$ puntualmente in $\mathbb{R} - 0$, ii) $\{f^{(n)}\}$ converge debolmente al funzionale $(\int_0^{\infty} - \int_{-\infty}^0) dx \varphi(x)$,

ma non fortemente ad esso nella norma $\|\cdot\|_\infty$.

c) Verificare i seguenti limiti, per $n \rightarrow \infty$, nel senso delle distribuzioni:

$$\begin{aligned} -\frac{n^3 x}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{4}} &\rightarrow \delta'(x), & n e^{-n|x|} &\rightarrow \delta(x), & \text{in } \mathbb{R}; \\ e^{-n|x|} &\rightarrow 0 & \text{in } \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (43)$$

34) Basi ortonormali e rappresentazioni della delta. Si mostri che, se $\{e^{(n)}(x)\}_1^\infty$ è una base ortonormale di $L_2[a, b]$, allora la completezza di tale insieme di funzioni equivale alla condizione che la successione delle somme parziali

$$\delta_n(x, y) := \sum_{k=1}^n \bar{e}^{(k)}(y) e^{(k)}(x)$$

converge debolmente alla $\delta(x - y)$, generando la cosiddetta “relazione di completezza”:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \bar{e}^{(k)}(y) e^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{e}^{(k)}(y) e^{(k)}(x) = \delta(x - y)$$

Si confronti la relazione di completezza con la condizione di ortonormalità:

$$\int_a^b \overline{e^{(j)}(x)} e^{(k)}(x) dx = \delta_{jk} \quad (44)$$

35) Equazioni algebriche e differenziali con distribuzioni. Dimostrare i seguenti risultati, nel senso delle distribuzioni.

$$\begin{aligned} (x - a)y(x) = 0 &\Rightarrow y(x) = c\delta(x - a); \\ (x - a)y(x) = x^2 - a^2 &\Rightarrow y(x) = c\delta(x - a) + x + a; \\ xy(x) = 1 &\Rightarrow y(x) = c\delta(x) + P\left(\frac{1}{x}\right); \\ xy'(x) = 0 &\Rightarrow y(x) = c\theta(x) + d; \\ xy'(x) = \delta(x) &\Rightarrow y(x) = cH\theta(x) + d - \delta(x); \\ (xy'(x))' = 0 &\Rightarrow y(x) = a\theta(x) + b \ln|x|. \end{aligned} \quad (45)$$

35) Trovare la soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria con potenziale di tipo delta

$$-y''(x) + a\delta(x)y(x) = k^2y(x)$$

1.7 Serie di Fourier

1) *La completezza della base discreta di Fourier* Ricordando che la successione di funzioni $\{e_n(x)\}$ ortonormali in $L_2[a, b]$:

$$(e_n, e_m) = \int_a^b dx \overline{e_n(x)} e_m(x) = \delta_{nm}$$

costituisce un sistema completo (una base) in $L_2[a, b]$ se e solo se:

$$\sum_n \overline{e_n(y)} e_n(x) = \delta(x - y), \quad x, y \in [a, b],$$

si mostri che le funzioni $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n \in \mathcal{Z}}$ costituiscono un sistema ortonormale e completo (una base ortonormale) di $L_2(-\pi, \pi)$; cioè si verifichi che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{i(n-m)x} = \delta_{nm}, \quad \text{ortonormalita'}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(x-y)}}{2\pi} = \delta(x - y), \quad \text{completezza.}$$

Suggerimento: si mostri che

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^N e^{inx} &= e^{-iNx} (1 + \dots + e^{2iNx}) = e^{-iNx} \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}} = \\ &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} = 2\pi \frac{\sin(\nu x)}{\pi x} \frac{(x/2)}{\sin(x/2)}, \quad \nu = N + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e si ricordi che $\delta_\nu(x) = \sin(\nu x)/(\pi x)$ rappresenta $\delta(x)$, nel limite $\nu \rightarrow \infty$.

2) Nello spazio euclideo $L_2[-\pi, \pi]$, dotato di prodotto scalare $(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{x(t)} y(t) dt$, si consideri il sottospazio finito-dimensionale M generato dai polinomi trigonometrici di ordine n :

$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt\}$ ($\dim M = 2n + 1$). i) Si mostri che la corrispondente base ortonormale è:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}.$$

ii) Si mostri che la proiezione ortogonale $f_n(t)$ di una generica funzione di $L_2[-\pi, \pi]$ sul sottospazio M generato dai polinomi trigonometrici di ordine n è proprio la serie di Fourier troncata all'ordine n :

$$f_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos kt + \sum_{k=1}^n b_k \sin kt \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dt \cos kt f(t) dt, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dt \sin kt f(t) dt$$
(46)

La serie di Fourier troncata è quindi il polinomio trigonometrico *più vicino*, nella norma $\|\cdot\|_2$, alla funzione continua da rappresentare.

iii) Volendo usare invece la base ortonormale degli esponenziali:

$$\left\{ \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{k=0}^n$$
(47)

mostrare che si ottiene:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^n g_k e^{ikt}, \quad g_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt.$$
(48)

3) Sviluppo in serie di Fourier

i) Si usi il risultato precedente per mostrare che un funzione $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ è sviluppabile in serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{s_n \sin(nx) + c_n \cos(nx)\},$$

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} f(x),$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx, \quad s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx$$

dove gli $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $\{c_n, s_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ sono i cosiddetti coefficienti di Fourier di $f(x)$ (o meglio, sono legati ai coefficienti di Fourier dalle relazioni $c_0 = a_0/\sqrt{2\pi}$, $c_n = a_n/\sqrt{\pi}$, $s_n = b_n/\sqrt{\pi}$, $f_n = g_n/\sqrt{2\pi}$; vedere l'esercizio precedente).

ii) Si verifichi l'equivalenza tra lo sviluppo in esponenziali e quello in seni e

coseni, trovando le seguenti relazioni tra i coefficienti c_0, c_n, s_n e i coefficienti f_n :

$$c_0 = f_0, \quad c_n = f_n + f_{-n}, \quad s_n = i(f_n - f_{-n}).$$

Quando converrà usare l'uno o l'altro sviluppo?

4) *Proprietà di convergenza della serie di Fourier.* Dimostrare che la serie di Fourier gode delle seguenti proprietà di convergenza.

i) La serie di Fourier converge in norma $\|\cdot\|_2$ a $f(x) \in L_2[-\pi, \pi]$; cioè:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f^{(n)}(x)\|_2 &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\ f^{(n)}(x) &:= \sum_{k=-n}^n f_k e^{ikx}, \quad f_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-ikx} f(x), \end{aligned} \quad (49)$$

ii) Essa converge puntualmente a $f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

in ogni punto $x \in [-\pi, \pi]$ in cui $f(x)$ è continua e soddisfa alla condizione del Dini (l'assoluta convergenza del rapporto incrementale

$$\frac{f(y+x) - f(x)}{y} \quad (50)$$

nell'intorno $y \in (-\delta, \delta)$ di quel punto). Converge infine uniformemente a $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^{(n)}(x) - f(x)\|_{\infty} = 0$$

in ogni punto $x \in [-\pi, \pi]$ in cui $f(x)$ è continua e la condizione del Dini è soddisfatta uniformemente.

iii) Se $f(x)$ è discontinua in $x_0 \in [-\pi, \pi]$, ma esistono i limiti destro e sinistro:

$$f_{\pm}(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x_0 \pm \epsilon)$$

e la condizione del Dini è soddisfatta per i rapporti incrementali destro e sinistro, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

In particolare, se f non è periodica: $f(\pi) \neq f(-\pi)$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(\pm\pi) = \frac{f_-(\pi) + f_+(-\pi)}{2}.$$

5) Altre proprietà della serie di Fourier.

i) Mostrare che, nell'intorno di una discontinuità del tipo descritto in iii) si verifica il cosiddetto "fenomeno di Gibbs". Cioè la somma parziale $f_n(x)$, per $n \gg 1$, oscilla molto rapidamente, a destra e a sinistra della discontinuità, in una regione dell'ordine di $O(n^{-1})$; il massimo di tale oscillazione si verifica per $x_M^\pm \sim x_0 \pm \pi/n$ e la differenza $|f_n(x_M^\pm) - f_\pm(x_0)| \sim 0.09|f_+(x_0) - f_-(x_0)|$ resta finita per $n \rightarrow \infty$. Dopo aver disegnato questo massimo, il grafico di $f_n(x)$ si raccorda con continuità, assumendo in x_0 il valor medio del limite destro e sinistro (come già visto in iii)).

ii) Dimostrare che, se la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π , ha derivate continue fino all'ordine $(k-1)$ e la derivata k -esima appartiene a $L_1[-\pi, \pi]$, allora i coefficienti c_n, s_n della corrispondente serie di Fourier vanno a zero, per $n \rightarrow \infty$, più rapidamente di n^{-k} :

$$|c_n|, |s_n| = o(n^{-k}), \quad n \gg 1$$

Dedurre che le derivate $f^{(j)}(x), j = 1, \dots, k$ della funzione $f(x)$ ammettono la rappresentazione in serie di Fourier ottenuta scambiando gli operatori di derivazione con la somma della serie.

6) *Formule di Parseval* Dimostrare le seguenti formule:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{f}(x)g(x) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} \bar{f}_n g_n = \bar{c}_0 c'_0 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \{\bar{c}_n c'_n + \bar{s}_n s'_n\},$$

dove $f_n, g_n, n \in \mathcal{Z}$ sono i coefficienti di Fourier di $f(x), g(x)$ nello sviluppo in esponenziali e $\{c_n, s_n\}, \{c'_n, s'_n\}$ sono i coefficienti di Fourier di $f(x), g(x)$ rispettivamente nello sviluppo in seni e coseni (vedere l'esercizio 3). Dedurre, in particolare, che:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} |f_n|^2 = |c_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \{|c_n|^2 + |s_n|^2\}.$$

7) *Teorema di convoluzione* Dimostrare che il prodotto di convoluzione $R(x)$ di due funzioni $G(x)$ e $I(x)$:

$$R(x) = \int_{-\pi}^{\pi} dx' G(x-x')I(x')$$

equivale alla semplice moltiplicazione dei corrispondenti coefficienti di Fourier:

$$R_n = 2\pi G_n I_n$$

8) a) Sviluppare le seguenti funzioni $f(x)$:

i) x ; ii) x^2 ; iii) $|x|$; iv) $\text{sign } x$; v) $\delta(x)$; vi) $H(x)$; vii) $c_1H(-x)+c_2H(x)$; viii) $(H(x) - H(-x)) \cos x$; ix) $\cosh(x/\pi)$; x) $\frac{\pi \text{sign}(x)-x}{2}$

in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ed utilizzare (quando possibile) le relative formule di Parseval (o dei limiti notevoli dello sviluppo) per ottenere le somme di opportune serie numeriche. b) Disegnare e confrontare i grafici delle funzioni e delle somme delle corrispondenti serie su tutto \mathbb{R} . c) Trovate le serie, vedere se sono o non sono uniformemente convergenti in $[-\pi, \pi]$, e mettere in relazione questa proprietà con le proprietà della funzione $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 i) \quad x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad \text{Parseval} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_0^{\infty} \frac{(-)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (x = \frac{\pi}{2}) \\
 ii) \quad x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^2} \cos nx, \quad \text{Parseval} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad (x = 0), \\
 iii) \quad |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}, \quad \text{Parseval} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4, \\
 iv) \quad \text{sign } x &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}, \quad \text{Parseval} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \\
 v) \quad \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \\
 vi) \quad H(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad \text{Parseval} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (x = \frac{\pi}{2}), \\
 vii) \quad c_1H(-x) + c_2H(x) &= \frac{c_1+c_2}{2} - \frac{2(c_1-c_2)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \\
 viii) \quad (H(x) - H(-x)) \cos x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kx, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k(2k+1)}{4(2k+1)^2-1} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \quad (x = \frac{\pi}{4}); \\
 ix) \quad \cosh \frac{x}{\pi} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-)^n \sinh(1)}{1+(\pi n)^2} e^{inx}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{1+(\pi n)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sinh(1)} - 1 \right) \quad (x = 0); \\
 x) \quad \frac{\pi \text{sign}(x)-x}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{4} \quad (x = \frac{\pi}{2}), \quad \text{Parseval} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},
 \end{aligned}$$

(51)

9) a) Sviluppare le seguenti funzioni $f(x)$:

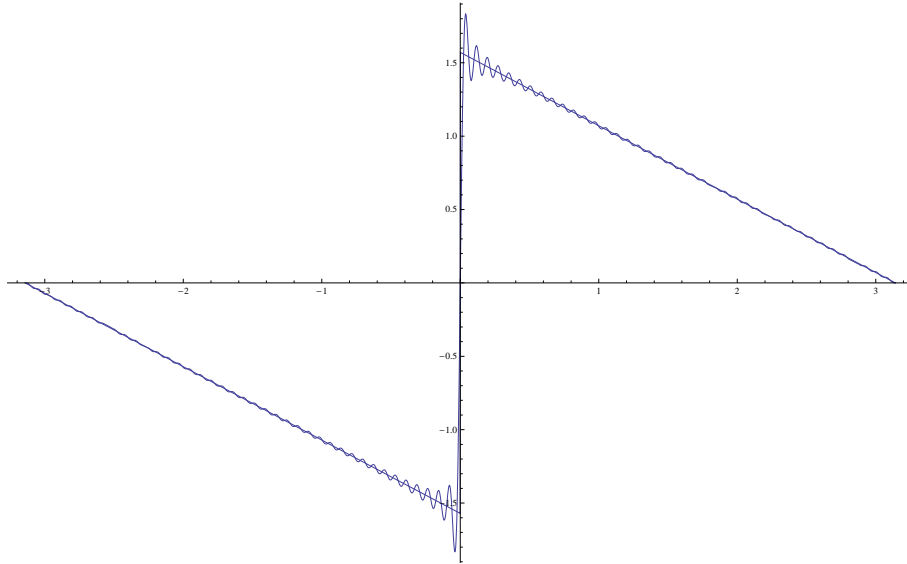
i) $e^{\alpha x}$; ii) x^3 ; iii) $xH(x)$; iv) $\sin \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$; v) $\cos \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ed utilizzare (quando possibile) le relative formule di Parseval (o dei limiti notevoli dello sviluppo) per ottenere le somme di opportune serie numeriche. 2) Disegnare e confrontare i grafici delle funzioni e delle somme delle corrispondenti serie su tutto \mathbb{R} . c) Trovate le serie, vedere se sono o non sono uniformemente convergenti in $[-\pi, \pi]$, e

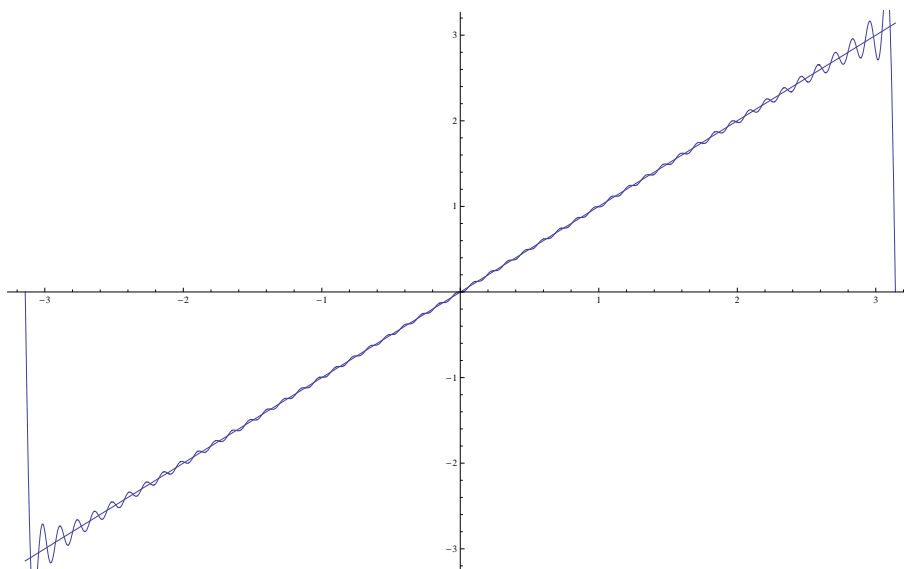
mettere in relazione questa proprietà con le proprietà della funzione $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 i) \quad e^{ax} &= \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-)^n}{a-in} e^{inx}, \quad \text{Parseval:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{\tanh(a\pi)} - \frac{1}{a} \right), \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^2+a^2} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{\sinh(a\pi)} - \frac{1}{a} \right) \quad (x=0); \\
 ii) \quad x^3 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} \left(\frac{6}{n^2} - \pi^2 \right) \sin nx, \quad \text{Parseval:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{6}{n^2} - \pi^2 \right)^2; \\
 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{2k+1} \left(\frac{6}{(2k+1)^2} - \pi^2 \right) &= -\frac{\pi^3}{16}, \quad (x = \pi/2), \\
 iii) \quad xH(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n} \sin nx, \\
 \text{Parseval:} \quad \frac{5}{48} \pi^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}; \\
 iv) \quad \sin \alpha x &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-)^n}{\alpha-n} \sin nx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\
 v) \quad \cos \alpha x &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-)^n}{\alpha-n} \cos nx, \quad \alpha \in \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{52}$$

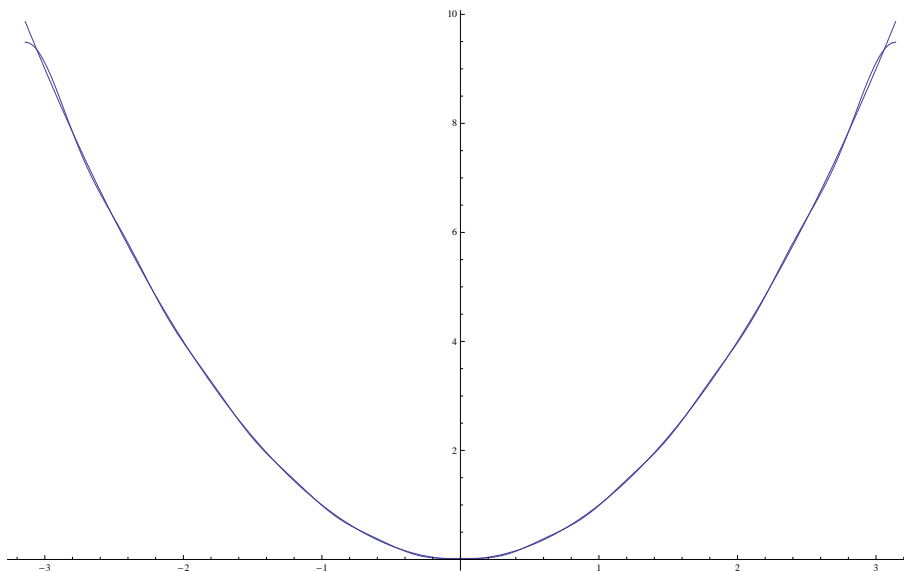
10) Sfruttando i risultati dell'esercizio 8, graficare le serie di Fourier troncate delle funzioni $f_1(x) = \frac{\pi \operatorname{sign}(x)-x}{2}$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, confrontando tali grafici con quelli delle tre funzioni. Si ottiene, ad esempio:



Grafici di $f_1(x)$ e della serie di Fourier troncata con 80 termini.



Grafici di $f_2(x)$ e della serie di Fourier troncata con 50 termini.



Grafici di $f_3(x)$ e della serie di Fourier troncata con 10 termini.

Perchè, nel caso della funzione $f_3(x) = x^2$, bastano pochi termini della serie per ottenere un'ottima approssimazione?

11) Calcolare $f(x)$ e $(\|f\|_2)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$, dalla conoscenza dei coefficienti Fourier dello sviluppo in esponenziali: *i)* $f_n = e^{-\alpha|n|}$, $\alpha > 0$; *ii)* $f_n =$

$a^{-|n|}$, $a > 1$, verificando che:

$$\begin{aligned} i) f(x) &= \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos x}, \quad (\|f\|_2)^2 = \frac{2\pi}{\tanh \alpha}; \\ ii) f(x) &= \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1 - 2a \cos x}, \quad (\|f\|_2)^2 = 2\pi \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

12) Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono definite dai seguenti sviluppi in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na^n} \sin nx, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{b^n} \cos nx, \quad a, b > 1 \quad (53)$$

in $[-\pi, \pi]$. i) Mostrare che la convergenza delle due serie è uniforme in $[-\pi, \pi]$. ii) Verificare che

$$\left(f, \frac{dg}{dx} \right) = \frac{\pi}{7}. \quad (54)$$

13) Verificare che la trasformazione

$$x \rightarrow x' = \frac{2\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)$$

trasforma l'intervallo $[a, b]$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ed utilizzare tale risultato per mostrare che lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[a, b]$ di una funzione $f(x)$ regolare in $[a, b]$ è dato da:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx \frac{2\pi}{b-a}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ s_n \sin \left(\frac{2\pi}{b-a} nx \right) + c_n \cos \left(\frac{2\pi}{b-a} nx \right) \right\},$$

$$f_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{i \frac{2\pi}{b-a} nx} f(x) dx, \quad s_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \sin \left(\frac{2\pi}{b-a} nx \right) f(x) dx,$$

$$c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad c_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b \cos \left(\frac{2\pi}{b-a} nx \right) f(x) dx.$$

14) Sviluppare le funzioni dell'esercizio 6 in serie di Fourier nell'intervallo $(0, L)$.

15) i) Mostrare che le successioni di funzioni $\{\cos(nx \frac{\pi}{L})\}_0^{\infty}$ e $\{\sin(nx \frac{\pi}{L})\}_0^{\infty}$ costituiscono basi ortonormali e complete nell'intervallo $[0, L]$.

ii) Verificare che gli sviluppi di una funzione $f(x)$, regolare in $[0, L]$, in tali basi sono dati da:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right), \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(nx \frac{\pi}{L}\right) f(x) dx, \quad \text{serie del seno,}$$

$$f(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(nx \frac{\pi}{L}\right), \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(nx \frac{\pi}{L}\right) f(x) dx, \quad \text{serie del coseno.}$$

iii) Usando il risultato dell'esercizio 7, si mostri che lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$ nell'intervallo $(0, L)$ è dato da:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ s_n \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) + c_n \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) \right\},$$

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) f(x) dx, \quad s_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) f(x) dx$$

e lo si confronti con gli sviluppi nelle serie del seno e del coseno per $x \in \mathbb{R}$ (disegnare i grafici delle somme dei tre sviluppi). Quando converrà usare uno sviluppo piuttosto che un'altro?

16) Costruire gli sviluppi nelle serie seno e coseno delle funzioni degli esercizi 7-8) nell'intervallo $[0, L]$ e confrontarli con lo sviluppo in serie di Taylor nello stesso intervallo (si veda l'esercizio 8), disegnando i grafici dei tre sviluppi per $x \in \mathcal{R}$. Quando converrà usare uno sviluppo piuttosto che un'altro?

1.8 La trasformata di Fourier

1) *La base continua di Fourier* Mostrare che le funzioni $\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}, k \in \mathcal{R}\}$ costituiscono una base ortonormale di $L_2(\mathcal{R})$; vale a dire, si verifichi che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i(k-k')x} = \delta(k-k'), \quad \text{ortonormalita'}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} = \delta(x-y), \quad \text{completezza.}$$

Suggerimento: Si osservi che:

$$\frac{\sin(nx)}{\pi x} = \int_{-n}^n \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$

e si ricordi che $\delta_0^{(n)}(x) = \sin(nx)/(\pi x)$ rappresenta $\delta(x)$, per $n \rightarrow \infty$.

2) La trasformata di Fourier. i) Dedurre che una qualunque funzione $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ è sviluppabile nella base $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{R}\}$ (ammette cioè la rappresentazione integrale di Fourier):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{f}(k),$$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x),$$

dove il coefficiente $\hat{f}(k)$ dello sviluppo è detto “trasformata di Fourier” di $f(x)$ e $\int_{\mathbb{R}} (dk/2\pi) \exp(ikx) \hat{f}(k)$ è detta “anti-trasformata di Fourier”. ii) Mostrare che, se $f \in L_1(\mathbb{R})$, la trasformata $\hat{f}(k)$ esiste e l’integrale è uniformemente convergente.

3) La trasformata di Fourier dalla serie di Fourier attraverso un procedimento di limite. Mostrare che la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L_2(\mathbb{R})$ è ottenibile dalla serie di Fourier di una funzione $f \in L_2[a, b]$ nel limite $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$, attraverso un’opportuno limite continuo, i) osservando che, in tale limite, la successione $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$k_n := \frac{2\pi}{b-a} n$$

si infittisce su tutto l’asse reale, tendendo alla variabile continua k (infatti $\Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{b-a} = 2\pi\Delta$, $\Delta := \frac{1}{b-a}$); ii) introducendo la notazione $f_n = \Delta \hat{f}(k_n)$, si ottiene:

$$f(x) = \Delta \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(k_n) e^{ik_n x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\Delta k_n}{2\pi} \hat{f}(k_n) e^{ik_n x} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{f}(k),$$

$$\hat{f}(k_n) = \int_a^b dx e^{-ik_n x} f(x) \rightarrow \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x). \quad (55)$$

iii) Mostrare che, in questo limite, la relazione di Parseval diventa:

$$(f, f) = \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{f}(k)|^2$$

4) Proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della trasformata di Fourier. Dimostrare che l'anti-trasformata di Fourier gode delle seguenti proprietà di convergenza.

i) Converge in norma $\|\cdot\|_2$ a $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$; cioè:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_n(x)\|_2 &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\ f_n(x) &:= \int_{-n}^n \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{f}(k) = \int_{-n}^n \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \int_{\mathbb{R}} dx' e^{ik(x-x')} f(x'), \end{aligned} \quad (56)$$

ii) Essa converge puntualmente a $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ in cui $f(x)$ è continua e soddisfa alla condizione di Dini (l'assoluta convergenza del rapporto incrementale

$$\frac{f(y+x) - f(x)}{y} \quad (57)$$

nell'intorno $y \in (-\delta, \delta)$ di quel punto). Converge infine uniformemente a $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

se $f(x)$ è continua in $[-\pi, \pi]$ e la condizione di Dini è soddisfatta uniformemente.

iii) Se $f(x)$ è discontinua in $x_0 \in [-\pi, \pi]$, ma esistono i limiti destro e sinistro:

$$f_{\pm}(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x_0 \pm \epsilon)$$

e la condizione del Dini è soddisfatta per i rapporti incrementali destro e sinistro, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

5) Esempi significativi di trasformate e antitrasformate di Fourier

i) Si mostri che le trasformate di Fourier delle funzioni $f_1(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$,

$f_2(x) = (1 + x^2)^{-1}$, $f_3(x) = \delta(x - x_0)$, $f_4(x) = \theta(x - x_0)$, $f_5(x) = \theta(L - |x|)$; $f_6(t) = \theta(t_0^2 - t^2) \sin \omega_0 t$; $f_7(x) = 1$; $f_8(x) = \theta(L^2 - x^2) e^{ik_0 x}$ sono, rispettivamente:

$$\hat{f}_1(k) = e^{-\frac{1}{2}(\sigma k)^2}; \quad \hat{f}_2(k) = \pi e^{-|k|}; \quad \hat{f}_3(k) = e^{-ikx_0};$$

$$\hat{f}_4(k) = \frac{e^{-ikx_0}}{i(k - i\epsilon)}; \quad \hat{f}_5(k) = 2 \frac{\sin kL}{k};$$

$$\hat{f}_6(\omega) = -i \left(\frac{\sin(\omega_0 - \omega)t_0}{\omega_0 - \omega} - \frac{\sin(\omega_0 + \omega)t_0}{\omega_0 + \omega} \right), \quad \hat{f}_7(k) = 2\pi \delta(k)$$

$$\hat{f}_8(k) = 2 \frac{\sin(k - k_0)L}{k - k_0}$$

verificando che tanto maggiore è la localizzazione della funzione quanto minore è quella della sua trasformata di Fourier. ii) Calcolare, infine, l'antitrasformata di Fourier delle funzioni $\hat{f}_j(k)$, riottenendo le funzioni $f_j(x)$ dalle quali erano partiti. iii) Ottenere le seguenti rappresentazioni di Fourier della delta di Dirac e della funzione $H(x - x_0)$ di Heaviside:

$$\delta(x - x_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x_0)}, \quad H(x - x_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi i} \frac{e^{ik(x-x_0)}}{k - i\epsilon}.$$

6) Mostrare che: $f(x) = x^n \Rightarrow \hat{f}(k) = 2\pi i^n \delta^{(n)}(k)$.

7) Si è già dimostrato che $L_2[a, b] \subset L_1[a, b]$. Se, invece, l'intervallo $[a, b]$ è infinito, allora l'inclusione non è più vera e c'è indipendenza tra $L_1(\mathbb{R})$ e $L_2(\mathbb{R})$. Costruire funzioni che appartengono a $L_2(\mathbb{R})$ ma non a $L_1(\mathbb{R})$, e funzioni che appartengono a $L_1(\mathbb{R})$ ma non a $L_2(\mathbb{R})$.

8) Proprietà della trasformata di Fourier i) Mostrare che, se $f \in L_1(\mathbb{R})$, allora la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ è limitata e $\hat{f}(k) \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$. ii) Mostrare che, se la successione di funzioni $\{f^{(n)}(x)\} \subset L_1(\mathbb{R})$ converge in norma $\|\cdot\|_1$ a $f \in L_1(\mathbb{R})$, allora la successione delle trasformate di Fourier $\{\hat{f}^{(n)}(x)\}$ converge uniformemente a $\hat{f}(k)$. iii) Mostrare che, se $f \in L_1(\mathbb{R})$, allora la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ è continua in \mathbb{R} .

R. i) $\hat{f}(k) \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$ per il lemma di Riemann-Lebesgue. iii) Se f è una funzione a gradini, \hat{f} è continua. Poiché le funzioni a gradini sono dense in $L_1(\mathbb{R})$, esiste successione di funzioni a gradini tale che $\|f^{(n)} - f\|_1 \rightarrow 0$, e quindi, usando ii), $\|\hat{f}^{(n)} - \hat{f}\|_\infty \rightarrow 0$, da cui segue che \hat{f} è continua.

9) È noto che, se $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ (che gode delle proprietà elencate nell'esercizio precedente) non appartiene necessariamente a tale spazio. Mostrarlo nei seguenti due esempi: i) la funzione $f_1(x) = H(1 - |x|)$, che dà luogo alla $\hat{f}_1(k) = 2(\sin k)/k$; ii) la funzione $f_2(x) = |x|^{-2/3}e^{-x^2}$, che dà luogo alla $\hat{f}_2(k) \sim |k|^{-1/2}$, $|k| \sim \infty$. Se, invece, $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, e $\hat{f}(k)$ esiste, allora $\hat{f}(k) \in L_2(\mathbb{R})$; mostrarlo per le funzioni $f_1(x)$ e $f_3(x) = |x|^{-1/3}e^{-x^2}$, che dà luogo alla $\hat{f}_3(k) \sim |k|^{-2/3}$, $|k| \sim \infty$.

10) Teorema (semplificato) di Plancherel. Se f appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e, in questa versione semplificata, anche a $L_2(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ e vale la relazione di Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{f}(k)|^2$$

e la sua generalizzazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{f_2(x)} f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \overline{\hat{f}_2(k)} \hat{f}_1(k)$$

R. Partire da $(f_2, f_1) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{f}_1(k) dk \overline{f_2(x)} dx$ e scambiare l'ordine di integrazione (teorema di Fubini); quindi porre $f_1 = f_2 = f$.

11) *Significato fisico della trasformata di Fourier* Se la funzione $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$ rappresenta un segnale (luminoso, acustico, ..) tale che $\int_{\mathcal{R}} dt |f(t)|^2 = 1$, si osservi, usando la definizione di trasformata di Fourier:

$$f(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}(\omega) = \int_{\mathcal{R}} dt e^{-i\omega t} f(t)$$

e la formula di Parseval, che $|f(t)|^2 dt$ è la probabilità che il segnale arrivi nell'intervallo $(t, t + dt)$ (e quindi la $\int_{\mathcal{R}} dt |f(t)|^2 = 1$ indica che il segnale è arrivato, prima o poi) e $|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega / (2\pi) = |\hat{f}(\omega)|^2 d\nu$ è la probabilità che il segnale contenga frequenze nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$. Se, invece, $f(x)$ è la funzione d'onda in meccanica quantistica di una particella localizzata, allora $|f(x)|^2 dx$ è la probabilità di trovare la particella nell'intervallo $(x, x + dx)$ e $|\hat{f}(k)|^2 dk / (2\pi)$ è la probabilità che la particella abbia numero d'onda nell'intervallo $(k, k + dk)$.

12) *Proprietà della trasformata di Fourier* Si verifichi le seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

$$\text{traslazione:} \quad g(x) = f(x + a) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = e^{ika} \hat{f}(k)$$

$$\begin{aligned}
& g(x) = e^{iax} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = \hat{f}(k - a) \\
\text{derivazione: } & g(x) = f^{(n)}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = (ik)^n \hat{f}(k) \\
& g(x) = L\left(\frac{d}{dx}\right)f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = L(ik)\hat{f}(k) \\
& g(x) = x^n f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = i^n \hat{f}^{(n)}(k) \\
\text{integrazione: } & g(x) = \int_{-\infty}^x dy f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = (ik)^{-1} \hat{f}(k)
\end{aligned}$$

13) Teorema di convoluzione Si mostri che, definito il prodotto di convoluzione $R(x)$ di due funzioni $G(x), I(x) \in L_1(\mathbb{R})$:

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x') I(x')$$

(spesso indicato con $R = G * I$), i) $R(x) \in L_1(\mathbb{R})$; ii) la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione R è il prodotto delle trasformate di Fourier di I e G :

$$\hat{R}(k) = \hat{G}(k)\hat{I}(k)$$

14) Si usi il teorema di convoluzione per calcolare il prodotto di convoluzione $R(x)$ delle funzioni $G(x)$ e $I(x)$, conoscendone le trasformate di Fourier $\hat{G}(k)$ e $\hat{I}(k)$, nei seguenti casi:

i) $\hat{G}(k) = (ik - 2)^{-1}$, $\hat{I}(k) = (ik + 1)^{-1}$; ii) $\hat{G}(k) = (ik - 1)^{-1}$, $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}$, $x_0 \in \mathcal{R}$; iii) $\hat{G}(k) = (k^2 + 1)^{-1}$, $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}$, $x_0 \in \mathcal{R}$
R. i) $-[H(x)e^{-x} + H(-x)e^{x-x_0}]/3$; ii) $-H(x_0 - x)e^{x-x_0}$; iii) $e^{-|x-x_0|}/2$

15) Equazioni differenziali con la trasformata di Fourier. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale del second'ordine non omogenea $u''(t) + \omega_0^2 u(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, 3$ col metodo della trasformata di Fourier, attraverso i seguenti passi.

i) Verificare che la trasformata di Fourier $\hat{u}(\omega)$ di $u(t)$ soddisfa all'equazione algebrica non omogenea

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\hat{u}(\omega) = \frac{2\pi}{(-i)^n} \delta^{(n)}(\omega),$$

dove $\delta^{(n)}$ è la derivata n -esima della delta di Dirac.

ii) Mostrare che la soluzione generale di tale equazione algebrica, nel senso delle distribuzioni, è:

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{2\pi}{(-i)^n} \frac{\delta^{(n)}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c\delta(\omega - \omega_0) + d\delta(\omega + \omega_0).$$

iii) Determinare $u(t)$ attraverso l'anti-trasformata di Fourier di $\hat{u}(\omega)$ per $n = 0, 1, 2, 3$.