MATERIALE DEL CORSO DI

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

Analisi Funzionale: teoria degli operatori

a cura di Paolo Maria Santini

http://www.roma1.infn.it/people/santini/

Docente del corso: Paolo Maria Santini

email: paolo.santini@roma1.infn.it

ufficio 109 (ex 43), primo piano, ed. Marconi - tel. 0649914239

June 17, 2010

RACCOLTA DI ESERCIZI (su operatori)

1 Esercizi vari nel finito-dimensionale

1) Date le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

verificare che $||A_1||_2 = 3,\ ||A_2||_2 = 1$ e confrontare il risultato con le disuguaglianze dell'esercizio 11) della sezione seguente.

) *Funzione di matrice.* Sia $f(\lambda)$ la funzione analitica definita dallo sviluppo di Taylor

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k, \quad |\lambda| < R.$$

Mostrare che, sostituendo allo scalare λ la matrice $n \times n$ A, si ottiene una serie di matrici le cui componenti convergono se $nM < R$, dove $M = \underset{1 \le i,j \le n}{max} |A_{ij}|$, portando alla definizione di funzione di matrice

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k.$$

Come si vedrà nell'esercizio 9 della sezione seguente, la condizione $nM < R$ non è necessaria, potendo essere sostituita da condizioni meno restrittive.

2) Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = 2\underline{e}^{(2)},\ \hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)},$$

trovarne la rappresentazione matriciale, dimostrare che $\hat{A}$ è auto-aggiunto (hermitiano) e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale.

3) Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = 2\underline{e}^{(1)} + 3\underline{e}^{(2)},$$

trovarne la rappresentazione matriciale, calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$.

4) Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{0},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = \bar{a}\underline{e}^{(3)},\ \hat{A}\underline{e}^{(3)} = a\underline{e}^{(2)},\ a \in \mathbb{C},$$

dimostrare che $\hat{A}$ è auto-aggiunto (hermitiano) e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale.

5) Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V bidimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \cos\theta \underline{e}^{(1)} - \sin\theta \underline{e}^{(2)}, \;\; \hat{A}\underline{e}^{(2)} = \sin\theta \underline{e}^{(1)} + \cos\theta \underline{e}^{(2)}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

trovarne la rappresentazione matriciale, dimostrare che $\hat{A}$ è unitario (ortogonale) e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale. Qual'è il significato geometrico della rappresentazione matriciale di $\hat{A}$ rispetto alla base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$?

6) Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(2)}, \;\; \hat{A}\underline{e}^{(2)} = \underline{e}^{(3)}, \;\; \hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)},$$

trovarne la rappresentazione matriciale, dimostrare che $\hat{A}$ è unitario e calcolarne autovalori, autovettori (verificandone l'ortogonalità) e la decomposizione spettrale.

7) Determinare i proiettori ortogonali che proiettono nelle direzioni di $\underline{v}^{(1)} = (1, i, -1)$, $\underline{v}^{(2)} = (0, i, 2i)$.

) Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{e}^{(j)}\}$, $\{\underline{\tilde{e}}^{(j)}\}$ due basi di tale spazio, legate dalla relazione

$$\underline{\tilde{e}}^{(j)} = \hat{T}\underline{e}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} T_{kj}\underline{e}^{(k)}.$$

Allora, se $\underline{\xi} = (\xi_1, .., \xi_n)^T$ e $\underline{\tilde{\xi}} = (\tilde{\xi}_1, .., \tilde{\xi}_n)^T \in \mathbb{C}^n$ sono i vettori che rappresentano $\underline{x} \in V$ rispetto alle basi $\{\underline{e}^{(j)}\}$ e $\{\underline{\tilde{e}}^{(j)}\}$, e A, $\tilde{A}$ sono le matrici che rappresentano l'operatore $\hat{A}: \; V \to V$ rispetto alle due basi:

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \underline{e}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k \underline{\tilde{e}}^{(k)}$$

$$\hat{A}\underline{e}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj}\underline{e}^{(k)}, \quad \hat{\tilde{A}}\underline{\tilde{e}}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_{kj}\underline{\tilde{e}}^{(k)}$$

i) mostrare che $\underline{\xi} = T\underline{\tilde{\xi}}$ e $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

ii) Mostrare che $tr\ \tilde{A} = tr\ A$, $det\ \tilde{A} = det\ A$, $det\ (\tilde{A} - \lambda I) = det\ (A - \lambda I)$, che lo spettro di A e di $\tilde{A}$ coincidono, definendo quindi la traccia, il determinante

e lo spettro dell'operatore $\hat{A}$.
iii) Quale trasformazione di similitudine $\tilde{A} = T^{-1}AT$ diagonalizza A? La risposta è nel prossimo esercizio.

8) Si mostri che, se la matrice $n \times n$ A ammette n autovettori indipendenti $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^n$, corrispondenti agli autovalori λ_i, $i = 1, .., n$: $A\underline{v}^{(i)} = \lambda_i \underline{v}^{(i)}$, $i = 1, .., n$, allora, data la matrice (non singolare) T le cui colonne sono gli autovettori di A:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & \dots & v_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n^{(1)} & \dots & v_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{2}$$

(per componenti: $T_{ij} := v_i^{(j)}$), e data la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$, l'equazione agli autovalori può essere riscritta nella forma matriciale:

$$AT = T\mathrm{d}iag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}iag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) = T^{-1}AT.$$

Quindi A è diagonalizzabile, e la matrice degli autovettori T realizza la trasformazione di similitudine che diagonalizza A. Si mostri che, se la matrice A non ammette un insieme completo di autovettori indipendenti, tale diagonalizzazione non è possibile.

9) Mostrare che, se A è diagonalizzabile attraverso la trasformazione T: $A = T\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)T^{-1}$, allora

$$f(A) = T\ diag\ (f(\lambda_1), f(\lambda_2), .., f(\lambda_n))T^{-1}.$$

10) Mostrare che, se gli autovalori di A sono distinti, allora i corrispondenti autovettori sono indipendenti, e quindi la matrice è diagonalizzabile. Si deduca che, se due o più autovalori sono coincidenti (lo spettro degenere), la matrice A può o non può possedere, a seconda dei casi, un insieme completo di autovettori indipendenti e, quindi, essere diagonalizzabile. Più precisamente, sia m_k la molteplicità (algebrica) dell'autovalore λ_k e sia n_k il numero di autovettori associati a tale autovalore (la cosidetta molteplicità geometrica dell'autovalore λ_k); si osservi che $n_k = dim\mathcal{N}(A - \lambda_k I)$ e che, in generale, $n_k \leq m_k$. Si deduca che la matrice è diagonalizzabile quando $n_k = m_k$ per ogni autovalore degenere.

11) i) Mostrare che la matrice identità in $\mathbb{C}^n$ (avente l'autovalore 1 con molteplicità algebrica n) possiede n autovettori indipendenti (una qualunque base di $\mathbb{C}^n$). ii) Mostrare che la matrice che rappresenta l'operatore di derivazione rispetto alla base $\{t^{j-1}/(j-1)\}$ nello spazio dei polinomi di grado $n-1$ è la matrice di Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

avente l'autovalore 0 con molteplicità algebrica n ed il solo autovettore 1 (è quindi non diagonalizzabile).

12) Siano $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^n$ gli autovettori indipendenti di una matrice $n \times n$ A, corrispondenti agli autovalori $\lambda_i,\ i = 1, .., n$: $A\underline{v}^{(i)} = \lambda_i \underline{v}^{(i)},\ i = 1, .., n$.
i) Dimostrare che le matrici $P^{(i)},\ i = 1, .., n$, definite dalle equazioni $P^{(i)} := TP_0^{(i)}T^{-1}$, dove $P_0^{(i)}$ è la matrice diagonale che ha tutte le componenti nulle, ad eccezione della i-esima (quindi: $P_{lm}^{(i)} := T_{li}(T^{-1})_{im}$), e dove T è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di A: $T_{ij} := v_i^{(j)}$, sono i proiettori sui sottospazi unidimensionali generati dagli autovettori $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^n$:

$$\begin{aligned} &P^{(i)}\underline{v} = c_i \underline{v}^{(i)}, \quad i = 1, .., n, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \underline{v} \in \mathbb{C}^n, \\ &c_i := \sum_{k=1}^n (T^{-1})_{ik} v_k, \end{aligned} \tag{4}$$

(quindi con $\underline{v} = \sum\limits_{i=1}^n c_i \underline{v}^{(i)}$), che soddisfano alle relazioni:

$$\begin{aligned} &P^{(i)}P^{(j)} = \delta_{ij} P^{(i)}, \\ &\sum_{k=1}^n P^{(k)} = I. \end{aligned} \tag{5}$$

ii) Mostrare che la matrice A è ricostruita tramite la seguente "decomposizione spettrale":

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P^{(i)}.$$

iii) Mostrare che

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) P^{(i)}.$$

iii) Dimostrare che, se A è hermitiana, unitaria e, più in generale, normale, essa ammette n autovettori $\{\underline{e}^{(j)} = \frac{\underline{v}^{(j)}}{||\underline{v}^{(j)}||}\}_{j=1}^n$ ortonormali e che, se la matrice T è costruita con tali autovettori come colonne, essa è unitaria.

Mostrare che in questo caso i proiettori del punto i) diventano ortogonali e hanno componenti: $P^{(i)}_{lm} = \frac{v^{(i)}_l \overline{v^{(i)}_m}}{||\underline{v}^{(j)}||||\underline{v}^{(j)}||}$.

13) Dati i due vettori indipendenti di $\mathbb{C}^2$, $\underline{v}^{(1)} = (i,1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (3i,1)^T$ ed i sottospazi unidimensionali $X_j = span\{\underline{v}^{(j)}\}$ $j = 1,2$ (le rette passanti per i due vettori), costruire i proiettori $P^{(i)}$ sui due sottospazi X_i $i = 1,2$ parallelamente ai sottospazi complementari generati dal restante vettore e verificare che $P^{(i)}P^{(j)} = \delta_{ij}P^{(i)}$, $P^{(1)} + P^{(2)} = I$.

14) Dati i tre vettori indipendenti di $\mathbb{C}^3$, $\underline{v}^{(1)} = (1,0,1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (-1,1,0)^T$, $\underline{v}^{(3)} = (0,1,2)^T$, i sottospazi unidimensionali $X_j = span\{\underline{v}^{(j)}\}$ $j = 1,2,3$ (le rette passanti per i tre vettori) e i sottospazi bidimensionali $X_{ij} = span\{\underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(j)}\}$ $i,j = 1,2,3$ (i piani passanti per due dei tre vettori), costruire: i) i proiettori sui tre sottospazi X_i $i = 1,2,3$ parallelamente ai sottospazi complementari generati dai restanti due vettori; ii) il proiettore su X_{12} parallelamente a X_3 e, in generale, il proiettore su X_{ij} parallelamente a X_k, $i \neq j \neq k$.

$$
i)\ P^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},
$$
$$
P^{(12)} = P^{(1)} + P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \ldots \tag{6}
$$

15) Nello spazio euclideo $\mathbb{C}^3$ si considerino i due vettori ortonormali $\underline{v}^{(1)} = (1/\sqrt{2})(i,0,1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (1/\sqrt{6})(i,2,1)^T$. i) Costruire i proiettori ortogonali sui sottospazi $X_j = span\{\underline{v}^{(j)}\}$ $j = 1,2$ (le rette passanti per i due vettori) e sul sottospazio bidimensionale $X_{12} = span\{\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\}$ (il piano passante per i due vettori). Verificare che questi proiettori sono hermitiani e positivi.

$$
i)\ P^{(1)} = \underline{v}^{(1)}\underline{v}^{(1)\dagger} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \underline{v}^{(2)}\underline{v}^{(2)\dagger} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2i & i \\ -2i & 4 & 2 \\ -i & 2 & 1 \end{pmatrix},
$$
$$
P^{(12)} = P^{(1)} + P^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & i & 2i \\ -i & 2 & 1 \\ -2i & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{7}
$$

16) Nello spazio euclideo $\mathbb{C}^3$ si considerino i tre vettori ortogonali $\underline{v}^{(1)} = (1,0,-1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (1,1,1)^T$, $\underline{v}^{(3)} = (1,-2,1)^T$. i) Costruire i proiettori ortogonali sui sottospazi $X_j = \{\alpha\underline{v}^{(j)},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ $j = 1,2,3$ (le rette passanti per i tre vettori) e i sui sottospazi bidimensionali $X_{ij} = \{\alpha \underline{v}^{(i)} + \beta \underline{v}^{(j)},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ $i, j = 1, 2, 3$ (i piani passanti per due vettori). Verificare che questi proiettori sono hermitiani e positivi.

$$i)\ P^{(1)} = \frac{\underline{v}^{(1)} \underline{v}^{(1)\dagger}}{||\underline{v}^{(1)}||^2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \frac{\underline{v}^{(2)} \underline{v}^{(2)\dagger}}{||\underline{v}^{(2)}||^2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P^{(3)} = \frac{\underline{v}^{(3)} \underline{v}^{(3)\dagger}}{||\underline{v}^{(3)}||^2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix},$$
$$P^{(12)} = P^{(1)} + P^{(2)} = \frac{\underline{v}^{(1)} \underline{v}^{(1)\dagger}}{||\underline{v}^{(1)}||^2} + \frac{\underline{v}^{(2)} \underline{v}^{(2)\dagger}}{||\underline{v}^{(2)}||^2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

17) Date le seguenti matrici quadrate A, i) indicare se sono matrici speciali: hermitiane, unitarie, normali, triangolari; ii) trovare autovalori e autovettori; iii) indicare se sono diagonalizzabili o non; iv) se diagonalizzabili, costruire le matrici di trasformazione T che le diagonalizzano; v) scrivere la decomposizione spettrale di A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} i & 3/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$
$$\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix},$$

18) Calcolare le seguenti funzioni di matrice $f(A)$ utilizzando, quando è possibile, sia la trasformazione che diagonalizza A, sia la definizione di $f(A)$

come serie.

$$
\begin{gathered}
f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ f'(a) & f(a) \end{pmatrix}, \\
\cos^2\left[\phi\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1-\cos^2\theta\sin^2\phi & 0 & -\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi \\ 0 & \cos^2\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi & 0 & 1-\sin^2\theta\cos^2\phi \end{pmatrix}, \\
\cos\begin{pmatrix} \pi & 2\pi i \\ \pi i & 2\pi i \end{pmatrix}, \sin\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\pi & -2\pi i \\ -\pi i & \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}, \\
\cos\begin{pmatrix} 0 & n\pi \\ n\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad H = -i\log\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\sin\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ \pi/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \cos\begin{pmatrix} 0 & -in\pi \\ in\pi & 0 \end{pmatrix}, \\
\sin\begin{pmatrix} 0 & -in\pi/2 \\ in\pi/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sin\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -3i/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \\
\cos\pi\begin{pmatrix} 2 & 2i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, \\
f\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(2a)+f(0) & f(2a)-f(0) \\ f(2a)-f(0) & f(2a)+f(0) \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{10}
$$

con $n \in \mathbb{N}$.

19) Costruire le matrici A che possiedono i seguenti autovalori e autovettori, valutando a priori se tali matrici sono speciali: hermitiane, unitarie, normali. Se gli autovettori sono ortogonali, conviene ortonormalizzarli; perchè?

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 = \tfrac{i}{4}, \lambda_2 = \tfrac{3}{4}i, &\quad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, &\quad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, &\ \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = i, &\ \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = i, &\ \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, &\ \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

20) Si consideri in $\mathbb{C}^3$ il sottospazio bidimensionale $V = \{(\alpha, \beta, \alpha+2\beta)^T, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$. i) mostrare che V è invariante rispetto alla matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 2i & 2i & -i \\ -1 & -1 & 1 \\ 2(i-1) & 2(i-1) & 2-i \end{pmatrix}, \tag{12}
$$

Introdotta la base $\{(1,1,3)^T, (1,-1,-1)^T\}$ dello spazio V, mostrare che la restrizione $A|_V$ di A al sottospazio V, riferita alla suddetta base, è la matrice (2×2):

$$
A|_V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i+1 & i-1 \\ i-1 & i+1 \end{pmatrix}, \tag{13}
$$

iii) Identificare gli autovettori di A (e i corrispondenti autovalori) che appartengono a V e verificare che essi coincidono con gli autovettori ed autovalori di $A|_V$.

21) Riformulare il teorema di Rouché-Capelli come Teorema dell'alternativa per matrici. *1) Unicità: la soluzione del sistema non omogeneo $A\underline{x} = \underline{y}$ è unica se e solo se il sistema omogeneo aggiunto $A^\dagger \underline{\phi} = \underline{0}$ (dove $A^\dagger$ è la matrice hermitiana coniugata della matrice A) ha solo la soluzione nulla:$\underline{\phi} = \underline{0}$. 2) Esistenza: il sistema non omogeneo $A\underline{x} = \underline{y}$ ha soluzione se e solo* *se il termine noto $\underline{y}$ è ortogonale ad ogni soluzione $\underline{\phi}$ del sistema omogeneo aggiunto $A^\dagger \underline{\phi} = \underline{0}$, cioè: $(\underline{\phi}, \underline{y})$.*

2 Operatori lineari

1) Dimostrare che l'insieme degli operatori lineari $\hat{A}: X \to Y$ dallo spazio vettoriale X allo spazio vettoriale Y è un spazio vettoriale, dove

$$(\alpha \hat{A} + \beta \hat{B}) \underline{x} = \alpha (\hat{A} \underline{x}) + \beta (\hat{B} \underline{x}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall \underline{x} \in R. \tag{14}$$

2) Mostrare che i seguenti esempi sono operatori lineari $\hat{A}: X \to Y$ su opportuni spazi normati.
i) Le matrici:

$$\begin{array}{l} A \in Mat(n, \mathbb{C}); \quad X = Y = \mathbb{C}^n; \\ A \in Mat(n, m, \mathbb{C}); \quad X = \mathbb{C}^m, \quad Y = \mathbb{C}^n. \end{array} \tag{15}$$

ii) Gli operatori di traslazione sinistra (o innalzamento) e destra (o abbassamento) su l_2:

$$\begin{array}{l} \hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}, \dots) \\ \hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots), \\ \text{cioè: } (\hat{E}^+ \underline{x})_n = x_{n+1}, \ n \geq 1, \\ (\hat{E}^- \underline{x})_n = x_{n-1}, \ n \geq 2, \ = 0, \ n = 1. \end{array} \tag{16}$$

iii) Gli operatori di proiezione ortogonale $\hat{P}$:

$$\hat{P} = \sum_{k=1}^{N} \underline{e}^{(k)} \underline{e}^{(k)\dagger}, \tag{17}$$

con $(\underline{e}^{(j)}, \underline{e}^{(k)}) = \delta_{jk}$.
iv) L'operatore di moltiplicazione per la funzione continua $u(x)$, con $X = Y = C[a, b]$:

$$\hat{A} f(x) := u(x) f(x), \quad f \in C[a, b]. \tag{18}$$

v) Gli operatori integrali di Fredholm e di Volterra su $C_\infty[a, b]$ (o su $L_2[a, b]$):

$$\begin{array}{ll} \hat{K} f(x) := \int\limits_a^b K(x, t) f(t) dt & \text{Fredholm,} \\ \hat{K} f(x) := \int\limits_a^x K(x, t) f(t) dt & \text{Volterra.} \end{array} \tag{19}$$

vi) L'operatore di derivazione $\hat{D} = d/dx$ sulla varietà lineare delle funzioni aventi derivata prima in $L_2[a,b]$ (tale varietà è densa in $L_2[a,b]$).

vii) L'operatore d'integrazione $\hat{\mathcal{I}} = \int\limits_a^x dt\cdot$ su $L_2[a,b]$.

viii) L'operatore di traslazione $\hat{T}_c$ su $L_2(\mathbb{R})$ tale che $(\hat{T}_c f)(x) = f(x+c)$.

3) i) Caratterizzare $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{R}(A)$ per le matrici:

$$i)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

determinando una base per i due sottospazi e verificando che dim $\mathcal{R}(A)$+dim $\mathcal{N}(A)$=3.

R. i) $\mathcal{N}(A) = span\{(1,0,-i)\}$, $\mathcal{R}(A) = \{\underline{y} \in \mathbb{C}^3,\ iy_1 + y_2 - y_3 = 0\} = span\{(0,1,1),\ (1,0,i)\}$. ii) $\mathcal{N}(B) = span\{(1,0,0)\}$, $\mathcal{R}(B) = \{\underline{y} \in \mathbb{C}^3,\ y_1 + y_3 - y_2 = 0\} = span\{(1,1,0),\ (0,1,1)\}$.

4) Dimostrare che, se $\hat{A}:\ V \to V$ è un operatore lineare su uno spazio finito-dimensionale V, allora dim $\mathcal{R}(\hat{A})$+dim $\mathcal{N}(\hat{A})$=dim V.

5) Sia A una matrice quadrata $(n \times n)$; mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti: i) det $A \neq 0$, ii) Ker$A$=$\{\underline{0}\}$, iii) $\mathcal{R}(A) = \mathbb{C}^n$.

6) i) Avendo definito un operatore invertibile nel seguente modo: l'operatore lineare $\hat{A}:\ X \to Y$ è invertibile se e solo se, per ogni $\underline{y} \in Y$, esiste unico $\underline{x} \in X$ tale che $\hat{A}\underline{x} = \underline{y}$, mostrare che tale proprietà è equivalente alle due condizioni seguenti: $\mathcal{R}(\hat{A}) = Y$ (esistenza) e $\mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{0}\}$ (unicità). ii) Nel caso finito-dimensionale, se $\hat{A}:\ X \to X$, mostrare che le seguenti tre proprietà sono equivalenti: i) l'invertibilità di $\hat{A}$, ii) la proprietà $\mathcal{R}(\hat{A}) = X$, iii) la proprietà $\mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{0}\}$.

7) i) Determinare dominio, nucleo e immagine per i seguenti operatori. i) gli operatori di traslazione $\hat{E}^{\pm}$; l'operatore di derivazione $\hat{D} = d/dx$; iii) l'operazione di integrazione

$$(\hat{\mathcal{I}} f)(x) := \int\limits_a^x f(t)dt \tag{21}$$

8) Determinare sotto quali condizioni i) l'operatore di traslazione $\hat{E}^-$ è invertibile e $(\hat{E}^-)^{-1} = \hat{E}^+$; ii) l'operatore di traslazione $\hat{E}^+$ è invertibile e $(\hat{E}^+)^{-1} = \hat{E}^-$; iii) l'operatore $\hat{D}$ è invertibile e $(\hat{D})^{-1} = \hat{\mathcal{I}}$; iv) l'operatore

$\hat{\mathcal{I}}$ è invertibile e $(\hat{\mathcal{I}})^{-1} = \hat{D}$. v) Mostrare che, in tutti questi esempi, poichè $\mathcal{D}(\hat{A}) \neq \mathcal{R}(\hat{A})$, non vale l'uguaglianza: $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{1}$.

9) Definito il prodotto tra operatori lineari $\hat{A}, \hat{B} : X \to X$ come segue:

$$(\hat{A}\hat{B})\underline{x} = \hat{A}(\hat{B}\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in X, \tag{22}$$

i) Verificare che $[\frac{d}{dx}, x] = 1$.
i) Mostrare, su altri esempi concreti, che, in generale, due operatori non commutano:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq \hat{0}. \tag{23}$$

iii) Verificare le seguenti identità operatoriali:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}, \quad [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$

10) Rappresentazione matriciale di operatori. Ricordando che, data la base $\{\underline{e}^{(j)}\}$ dello spazio vettoriale X, e la relazione $\hat{A}\underline{e}^{(j)} = \sum_{k=\geq 1} A_{kj}\underline{e}^{(k)}$, la matrice (A_{kj}) è la rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{A}$ rispetto alla suddetta base, determinare la rappresentazione matriciale degli operatori di derivazione, di integrazione e di traslazione del parametro a: $\hat{T}f(x) = f(x+a)$, rispetto alla base dei monomi $\{x^{j-1}\}_1^\infty$.
R.

$$\frac{d}{dx} = \hat{D} \to D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\hat{\mathcal{I}} \to \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\hat{T} \to T = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & \dots \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 3a & 6a^2 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4a & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{26}$$

11) Determinare la rappresentazione matriciale degli operatori $\hat{E}^+, \hat{E}^-$, rispetto alla base canonica di l_2, e dell' operatore alle differenze finite del second'ordine $(\hat{E}^+ + \hat{E}^- - 2\hat{1})$ (dove $\hat{1}$ è l'operatore identità), che discretizza l'operatore derivata seconda d^2/dx^2.

$$\hat{E}^+ \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\hat{E}^- \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\hat{E}^+ + \hat{E}^- - 2\hat{I} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{29}$$

Operatori limitati e non; norma di un operatore

12) Dato un operatore lineare $\hat{A}: \ X \to Y$ tra spazi normati $(X, ||\cdot||_x)$, $(Y, ||\cdot||_y)$, Dimostrare che le seguenti tre proprietà sono equivalenti: i) l'operatore lineare è continuo in $\underline{0}$, ii) l'operatore lineare $\hat{A}$ è continuo in X; iii) l'operatore lineare $\hat{A}$ è limitato.

13) Mostrare che le matrici $(n\times n)$ su $\mathbb{C}^n$, l'operatore identità $\hat{1}$ su qualunque spazio, gli operatori di traslazione $\hat{E}^{\pm}$, gli operatori di proiezione ortogonale $\hat{P}$, l'operatore di moltiplicazione per x sullo spazio $C[a,b]$, l'operatore di Fredholm su $C_\infty[a,b]$ e su $L_2[a,b]$ sono tutti esempi di operatori limitati, verificando che:

$$
\begin{aligned}
&||\hat{1}|| = 1,\\
&||A||_2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad A \in \; Mat(n, \mathbb{C}),\\
&||A||_1 \le \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{n} |A_{ik}|, \text{ max della somma dei val. ass. delle colonne},\\
&||A||_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}|, \text{ max della somma dei val. ass. delle righe},\\
&||\hat{E}^{\pm}|| = 1,\\
&||\hat{P}|| = 1,\\
&||x||_2 = \sup_{f\in L_2[a,b]} \frac{||xf(x)||_2}{||f(x)||_2} \le b, \quad ||x||_\infty = \sup_{f\in C_\infty[a,b]} \frac{||xf(x)||_\infty}{||f(x)||_\infty} \le b,\\
&||\hat{K}||_\infty = \sup_{f\in C_\infty[a,b]} \frac{||\hat{K}f||_\infty}{||f||_\infty} \le \max_{a\le s\le b} \int_a^b |K(s,t)| \le (b-a) \max_{a\le s,t\le b} |K(s,t)|,\\
&||\hat{K}||_2 = \sup_{f\in L_2[a,b]} \frac{||\hat{K}f||_2}{||f||_2} \le \left(\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dtds \right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

14) Mostrare che i) l'operatore di moltiplicazione per x sullo spazio $C_\infty(\mathbb{R})$ e ii) l'operatore di derivazione su $C_\infty[a,b]$ e su $L_2[a,b]$ non sono operatori limitati. (Sugg.: i) moltiplicare x per la successione di funzioni $\{e^{-|x-n|}\}$; ii) applicare d/dx alla successione di funzioni $\{\sin nx/n\}$.)

15) Mostrare che, se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono operatori lineari limitati, allora:

$$
\begin{aligned}
&||\hat{A} + \hat{B}|| \le ||\hat{A}|| + ||\hat{B}||, \quad \hat{A}, \hat{B} : X \to Y,\\
&||\hat{B}\hat{A}|| \le ||\hat{B}||||\hat{A}||, \quad \hat{A} : \; X \to Y, \quad \hat{B} : Y \to Z;
\end{aligned}
\tag{31}
$$

cioè la loro somma e il loro prodotto sono operatori lineari limitati.

16) Mostrare che lo spazio lineare degli operatori lineari $\hat{A} : X \to Y$ è completo se Y è completo.

17) Funzione di operatore $f(\hat{A})$. Sia X uno spazio di Banach (normato e completo) e $\hat{A} : X \to X$ e sia $f(\lambda)$ la funzione analitica definita dalla serie di Taylor $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ avente raggio di convergenza R. Se $||\hat{A}|| < R$, allora esiste l'operatore lineare $f(\hat{A}) : X \to X$ definito dalla serie $f(\hat{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{A}^k$.

18) i) Determinare il vettore $\underline{y} = e^{\hat{P}} \underline{x}$, dove $\underline{x} \in H$ e $\hat{P}$ è un operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio di H. ii) Determinare la successione

$\underline{y} = e^{\hat{E}^+}\underline{x}$, dove $\underline{x} \in l_2$.
R. i) $\underline{y} = \underline{x} + (e-1)\hat{P}\underline{x}$; ii) $y_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_{n+k}/k!$

L'equazione $(\hat{1} - \hat{A})\underline{x} = \underline{y}$

19) Data l'equazione $(\hat{1} - \hat{A})\underline{x} = \underline{y}$, dove $\underline{y} \in X$ è assegnato, $\hat{A}: \ X \to X$ è un operatore lineare limitato e X è uno spazio di Banach, i) mostrare che esiste unica la soluzione $\underline{x} \in X$ dell'equazione se $||\hat{A}|| < 1$, espressa come serie (di Neumann):

$$\underline{x} = (\hat{1} - \hat{A})^{-1}\underline{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{A}^n \underline{y}$$

ii) Dare un'interpretazione di tipo perturbativo alla serie di Neumann.

20) Usando il risultato precedente, determinare per quale valore di $\mu \in \mathbb{C}$ è possibile risolvere l'equazione $(\hat{1} - \hat{A})\underline{x} = \underline{y}$, con i) $\hat{A} = \mu\hat{P}$, dove $\hat{P}$ è operatore di proiezione nello spazio di Hilbert H; ii) $\hat{A} = \mu\hat{E}^+$ su l_2.
R. Nei due casi, la condizione sufficiente è che $|\mu| < 1$. i) $\underline{x} = (\hat{1} + \frac{\mu}{1-\mu}\hat{P})\underline{y}$; ii) $x_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^k y_{n+k}$. Si noti che, nel caso i), la soluzione ottenuta è in realtà definita per $\mu \neq 1$.

21) Data l'equazione integrale di Fredholm $x(t) = \mu\hat{K}x(t) + y(t)$, dove $\hat{K}: \ C_\infty[a,b] \to C_\infty[a,b]$ ($\hat{K}: \ L_2[a,b] \to L_2[a,b]$):

$$\hat{K}f(x) := \int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

e $K(x,y) \in C([a,b] \times [a,b])$ $(K(x,y) \in L_2([a,b] \times [a,b]))$,
i) Si mostri che condizione sufficiente per l'esistenza e unicità della soluzione $x(t)$ è:

$$|\mu| < ||\hat{K}||^{-1} \tag{32}$$

e, sotto questa ipotesi, mostrare che tale soluzione è rappresentata dalla serie di Neumann:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \hat{K}^k y(t). \tag{33}$$

22)*Serie di Neumann e metodo delle approssimazioni successive.* Data l'equazione integrale

$$f(x) = \mu \int\limits_a^b K(x,y)f(y)dy + g(x) =: \mu\hat{K}f(x) + g(x),$$

di Fredholm (o di Volterra, se $K(x,y) = \tilde{K}(x,y)\theta(x-y)$), dove $f(x)$ è la funzione incognita, $K(x,y)$ è il nucleo dell'operatore integrale, $g(x)$ è il termine noto,
i) determinare il disco del piano complesso μ all'interno del quale l'equazione ammette un'unica soluzione (condizione sufficiente).
ii) risolvere l'equazione integrale col metodo delle approssimazioni successive (con la serie di Neumann) e confrontare il raggio di convergenza della serie con quello del disco di i);
iii) costruire il prolungamento analitico, in μ, della soluzione $f(x,\mu)$ trovata in ii), al di fuori del disco al di fuori del disco di convergenza della serie di Neumann;
iv) determinare i valori di μ, se esistono, per i quali l'equazione omogenea

$$\psi(x) = \mu \int\limits_a^b K(x,y)\psi(y)dy \qquad (\Rightarrow\ \hat{K}\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad \lambda = \frac{1}{\mu})$$

ammette soluzioni non banali, e calcolarli (notare che essi sono i valori per i quali la soluzione $f(x,\mu)$ dell'equazione non omogenea è singolare). Tali valori speciali di μ sono ovviamente legati agli *autovalori* dell'operatore integrale:

$$\hat{K}\psi = \lambda\psi, \quad \lambda = \frac{1}{\mu}. \tag{34}$$

Le corrispondenti soluzioni non banali del problema omogeneo sono le autofunzioni (e il problema omogeneo è il *problema agli autovalori*).

$$
\begin{array}{l}
I=[0,1],\ K(x,y)=xe^y,\ g(x)=\left\{\begin{array}{l} 1, \quad \Rightarrow \quad f(x)=1+\frac{\mu(e-1)}{1-\mu}x, \\ e^{-x}, \quad \Rightarrow \quad f(x)=e^{-x}+\frac{\mu}{1-\mu}x. \end{array}\right. \\
I=[0,1],\ K(x,y)=xy,\ g(x)=\left\{\begin{array}{l} 1, \quad \Rightarrow \quad f(x)=1+\frac{3\mu}{2(3-\mu)}x, \\ x, \quad \Rightarrow \quad f(x)=\frac{3x}{3-\mu}, \\ x^2, \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^2+\frac{3\mu}{4(3-\mu)}x. \end{array}\right. \\
a=0,\ K(x,y)=\theta(x-y),\ g(x)=\left\{\begin{array}{l} 1, \quad \Rightarrow \quad f(x)=e^{\mu x}, \\ ax+b, \quad \Rightarrow \quad f(x)=(b+\frac{a}{\mu})e^{\mu x}-\frac{a}{\mu}, \end{array}\right. \\
a=0,\ \mu=-1,\ K(x,y)=(x-y)\theta(x-y),\ g(x)=1\ \Rightarrow\ f(x)=\cos x \\
a=0,\ \mu=-1,\ K(x,y)=(x-y)\theta(x-y),\ g(x)=x\ \Rightarrow\ f(x)=\sin x \\
a=0,\ K(x,y)=(x-y)\theta(x-y),\ g(x)=ax+b, \quad \Rightarrow \\
f(x)=b\cosh(\sqrt{\mu}x)+\frac{a}{\sqrt{\mu}}\sinh(\sqrt{\mu}x).
\end{array}
\tag{35}
$$

23) *Problema di scattering.* Usando la funzione di Green avanzata dell'operatore d^2/dx^2+k^2 (si veda la sezione 3.4.2), è possibile convertire il seguente problema al contorno:

$$
\phi''(x,k)+k^2\phi(x,k)=V(x)\phi(x,k), \quad x,k\in\mathbb{R}
$$

$$
\phi(x,k)\sim\frac{R(k)}{T(k)}e^{-ikx}+\frac{e^{ikx}}{T(k)},\ x\sim-\infty; \quad \phi(x,k)\sim\ e^{ikx},\ x\sim\infty
$$

associato all'equazione di Schrödinger stazionaria, nella seguente equazione integrale di Volterra:

$$
\phi(x,k)=e^{ikx}-\int_x^\infty\frac{\sin k(x-y)}{k}V(y)\phi(y,k)dy
$$

È quindi possibile usare il metodo delle approssimazioni successive per studiare le proprietà dell'autofunzione ϕ nel seguente modo.
i) Si riscrive l'equazione integrale per l'incognita $f(x,k)=\phi(x,k)e^{-ikx}$, tale che $f\sim 1,\ x\to\infty$:

$$
f(x,k)=1+\int_x^\infty\frac{e^{2ik(y-x)}-1}{2ik}V(y)f(y,k)dy
$$

e si cerca la soluzione come sviluppo in serie (di Neumann):

$$
f(x,k)=\sum_{i=0}^\infty h_i(x,k), \quad h_0=1, \tag{36}
$$

ottenendo la relazione di ricorrenza:

$$h_{j+1}(x,k) = \int_x^\infty \frac{e^{2ik(y-x)}-1}{2ik} V(y) h_j(y,k) dy, \quad j \geq 0. \tag{37}$$

ii) Dalla maggiorazione: $|e^{2ik(y-x)} - 1|/|2ik| \leq 1$, valida per Im $k \geq 0$, $k \neq 0$, mostrare che

$$|h_{j+1}(x,k)| \leq \tfrac{1}{|k|} \int_x^\infty |V(y)||h_j(y,k)| dy, \tag{38}$$

e quindi che:

$$\begin{aligned} &|h_n(x,k)| \leq \tfrac{1}{n!}\left(\tfrac{A(x)}{|k|}\right)^n \leq \tfrac{1}{n!}\left(\tfrac{A(-\infty)}{|k|}\right)^n, \\ &A(x) := \int_x^\infty |V(y)| dy. \end{aligned} \tag{39}$$

Quindi la serie di Neumann che rappresenta la soluzione è assolutamente e uniformemente convergente per Im $k \geq 0$, $k \neq 0$, se il potenziale è assolutamente convergente in $\mathbb{R}$: $V(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Sotto queste condizioni, quindi, la soluzione del problema esiste, è unica, ed è analitica nel semipiano superiore del piano complesso k. Sotto condizioni più stringenti sul potenziale V, si potrebbe dimostrare, in modo analogo, che l'autofunzione è non solo analitica nel semipiano superiore del piano complesso k, ma anche continua su tutto l'asse reale (dove avviene la fisica).

2.1 Operatori aggiunti, autoaggiunti, unitari e proiettori ortogonali

1) Mostrare che, se A è la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A} : E \to E$, la matrice che rappresenta l'operatore aggiunto $\hat{A}^\dagger$ è la matrice aggiunta (hermitianan coniugata) di A:

$$\hat{A} \to A \quad \Rightarrow \quad \hat{A}^\dagger \to A^\dagger : \quad (A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}. \tag{40}$$

2) Mostrare le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\left(\textstyle\sum_k \hat{A}_k\right)^\dagger = \textstyle\sum_k \hat{A}_k^\dagger, \qquad \left(c\hat{A}\right)^\dagger = \bar{c}\hat{A}^\dagger, \\ &\left(\hat{A}_1 \hat{A}_2 \dots \hat{A}_n\right)^\dagger = \hat{A}_n^\dagger \dots \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_1^\dagger, \qquad \left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger = \left(\hat{A}^\dagger\right)^{-1} \end{aligned} \tag{41}$$

3) Mostrare che:

$$(\hat{E}^+)^\dagger = \hat{E}^-, \qquad (\hat{E}^-)^\dagger = \hat{E}^+$$

4) Mostrare che:

$$(\hat{K}f)(t) := \int\limits_a^b K(t,s)f(s)ds \quad \Rightarrow \quad (\hat{K}^\dagger f)(t) := \int\limits_a^b \overline{K(s,t)}f(s)ds \tag{42}$$

Operatori autoaggiunti

5) Mostrare che la matrice che rappresenta un operatore autoaggiunto $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ in una base ortonormale è una matrice autoaggiunta (hermitiana):

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}}.$$

6) Mostrare che l'operatore integrale $(\hat{K}f)(t) := \int\limits_a^b K(t,s)f(s)ds$ è autoaggiunto ($\hat{K}^\dagger = \hat{K}$) se e solo se

$$K(t,s) = \overline{K(s,t)}$$

7) Mostrare che CNES affinchè un operatore sia autoaggiunto, è che la sua forma quadratica hermitiana $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})$ sia reale $\forall \underline{x} \in E$.

8) *Operatore non negativo.* Un operatore $\hat{A} : E \to E$ è autoaggiunto e non negativo se e solo se $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x}) \geq 0$, $\forall \underline{x} \in E$. Si mostri che, se $\hat{B} : E \to E$, gli operatori $\hat{B}^\dagger \hat{B}$ e $\hat{B}\hat{B}^\dagger$ sono autoaggiunti e non negativi.

9) Mostrare che ogni operatore lineare $\hat{A} : \; E \to E$ si puo scrivere nella seguente forma cartesiana::

$$\hat{A} = \hat{B} + i\hat{C}, \quad \hat{B} = \frac{\hat{A} + \hat{A}^\dagger}{2}, \quad \hat{C} = \frac{\hat{A} - \hat{A}^\dagger}{2i} \tag{43}$$

come somma, quindi, di un operatore autoaggiunto e di un operatore skew-aggiunto (anti-aggiunto).

10) Mostrare che l'operatore di derivazione $\hat{D} = d/dx$ sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni f tali che $\hat{D}f \in L_2[a,b]$ è anti-aggiunto (skew-adjoint), rispetto al prodotto scalare $(\varphi, \psi) = \int_a^b \overline{\varphi(x)}\psi(x)dx$, se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni al bordo:

$$\overline{\varphi(b)}\psi(b) - \overline{\varphi(a)}\psi(a) = 0;$$

in particolare, quindi, nel caso periodico:

$$\psi(a) = \psi(b), \quad \varphi(a) = \varphi(b)$$

e nel caso di $L_2(\mathbb{R})$: $a = -\infty,\ b = \infty,\ \varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$.

11) Mostrare che l'operatore quantità di moto $\hat{p} = -id/dx$ è autoaggiunto sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni f tali che $\hat{p}f \in L_2[a,b]$, rispetto al prodotto scalare $(\varphi, \psi) = \int_a^b \overline{\varphi(x)}\psi(x)dx$, se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni al bordo:

$$\overline{\varphi(b)}\psi(b) - \overline{\varphi(a)}\psi(a) = 0;$$

in particolare, quindi, nel caso periodico:

$$\psi(a) = \psi(b), \quad \varphi(a) = \varphi(b)$$

e nel caso in cui $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$ ($a = -\infty,\ b = \infty$).

12) *Problemi di Sturm Liouville.* Si consideri l'operatore differenziale del second'ordine

$$\hat{L} = \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x), \tag{44}$$

con $p(x), q(x) \in \mathbb{R},\ x \in [a,b]$.

i) Mostrare che $\hat{L}$ è autoaggiunto, rispetto al prodotto scalare $(\phi, \psi),\ \phi, \psi \in L_2[a,b]$, se e solo se

$$\left[p(x)\left(\bar{\phi}(x)\frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx}\psi(x)\right)\right]_a^b = 0. \tag{45}$$

ii) Mostrare che la condizione al contorno (45) è soddisfatta nei seguenti tre casi importanti:

a. Condizioni al contorno omogenee e miste:

$$\begin{array}{l} \psi(a) + \gamma_a\psi'(a) = \phi(a) + \gamma_a\phi'(a) = 0, \quad \gamma_a \in \mathbb{R}, \\ \psi(b) + \gamma_b\psi'(b) = \phi(b) + \gamma_b\phi'(b) = 0, \quad \gamma_b \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{46}$$

b. Condizioni al bordo periodiche:

$$\begin{array}{l} \psi(a) = \psi(b), \quad \psi'(a) = \psi'(b) \\ \phi(a) = \phi(b), \quad \phi'(a) = \phi'(b) \end{array} \tag{47}$$

c. Problema in $L_2(\mathbb{R})$:

$$a = -\infty,\ b = \infty, \quad \phi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$$

iii) Si osservi che l'operatore di Schrödinger stazionario

$$\hat{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

è un operatore di Sturm-Liouville con $p(x) = 1$, $q(x) = -V(x)$, e quindi valgono per lui i risultati di questo esercizio.

13) Dato l'operatore differenziale $\hat{A} = \sum_{k=1}^{N} c_k d^n/dx^n$, definito sulla varietà lineare (densa in $L_2(\mathbb{R})$) delle funzioni tali che $\hat{A}f \in L_2(\mathbb{R})$, quali sono le condizioni sulle costanti c_k che lo rendono autoaggiunto?
R. k pari: $c_k \in \mathbb{R}$; k dispari: $c_k \in i\mathbb{R}$.

14) Mostrare che, dati due operatori $\hat{A}, \hat{B} : H \to H$ autoaggiunti, ii) il loro commutatore $[\hat{A}, \hat{B}]$ è anti-aggiunto; ii) il loro prodotto $\hat{A}\hat{B}$ è autoaggiunto se e solo se i due operatori commutano: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{0}$.

15) Dato l'operatore $\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{dx} + x)$, definito sulla varietà lineare (densa in $L_2(\mathbb{R})$) delle funzioni tali che $\hat{A}f \in L_2(\mathbb{R})$, i) mostrare che $\hat{A}^+ \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{d}{dx} + x)$; ii) mostrare che gli operatori $\hat{A}^\dagger \hat{A}$, $\hat{A}\hat{A}^\dagger$ sono operatori autoaggiunti non negativi; iii) verificare che $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1$ e che iv) $\hat{H} := \hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ è un operatore autoaggiunto non negativo, l'operatore Hamiltoniano dell'oscillatore armonico quantistico.

16) Dati gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{N} = \hat{A}^+ \hat{A}$, dove $\hat{A}$ è definito nell'esercizio precedente, verificare le seguenti equazioni operatoriali:

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1, \quad [\hat{N}, \hat{A}] = -\hat{A}, \quad [\hat{N}, \hat{A}^\dagger] = \hat{A}^\dagger. \tag{48}$$

Operatori unitari

17) Definito l'operatore unitario $\hat{U} : \ H \to H$ come operatore invertibile tale che $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$, dimostrarne le seguenti proprietà.
i) $\hat{U}$ è limitato e $||\hat{U}|| = 1$.
ii) $\hat{U}$ è unitario se e solo se lascia invariato il prodotto scalare (e quindi la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori).

18) *Caso finito-dimensionale.* Nel caso finito-dimensionale,
i) $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{1}$.
ii) La matrice U che rappresenta l'operatore unitario $\hat{U}$ rispetto ad una base ortonormale è unitaria: $U^\dagger = U^{-1}$, ed è tale che le sue colonne (o righe) definiscono un sistema ortonormale di $\mathbb{C}^n$.

19) Mostrare che i seguenti operatori sono esempi rilevanti di operatori unitari.
i) le rotazioni in $\mathbb{R}^3$, descritte da matrici $U \in \ Mat(n, \mathbb{R})$ ortogonali: $U^T = U^{-1}$.

ii) Le traslazioni $\hat{T}_c f(x) = f(x+c),\ c \in \mathbb{R},\ f \in L_2(\mathbb{R})$.
iii) La trasformata integrale di Fourier: $\hat{\mathcal{F}}:\ L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$:

$$\tilde{f}(k) = (\hat{\mathcal{F}} f)(k) := \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x)$$

iv) L'operatore $\hat{E}^-:\ l_2 \to\ \mathcal{R}(\hat{E}^-)$ e l'operatore $\hat{E}^+:\ \mathcal{R}(\hat{E}^-) \to l_2$.

Proiettori e proiettori ortogonali

20) Sia V uno spazio vettoriale esprimibile come somma diretta degli spazi M e N. Allora il generico vettore $\underline{x} \in V$ è esprimibile in modo univoco nella forma $\underline{x} = \underline{x}_M + \underline{x}_N$, dove $\underline{x}_M \in M,\ \underline{x}_N \in N$. Si definisce "proiettore" di $\underline{x}$ su M lungo N l'operatore $\hat{P}_M$ tale che $\hat{P}_M \underline{x} = \underline{x}_M \in M$; analogamente, $\hat{1} - \hat{P}_M$ è il proiettore su N lungo M.
i) Dimostrare che CNES affinchè l'operatore $\hat{P}$ sia un proiettore è che $\hat{P}^2 = \hat{P}$ (idempotenza).
ii) Dimostrare che $\hat{P}$ è un proiettore ortogonale se e solo se è anche autoaggiunto.

21) Sia S un sottospazio (di dimensione m finita o infinita) dello spazio euclideo E, e sia $\{\underline{e}^{(k)}\}_1^m$ una base ortonormale di S.
i) Mostrare che il proiettore ortogonale su S è l'operatore

$$\hat{P}_m = \sum_{k=1}^{m} \underline{e}^{(k)} \underline{e}^{(k)^\dagger} = \sum_{k=1}^{m} |e^{(k)})(e^{(k)}|, \tag{49}$$

la cui azione sul generico vettore $\underline{x}$ è definita da: $\hat{P}_m \underline{x} = \sum_{k=1}^{m} (\underline{e}^{(k)}, \underline{x}) \underline{e}^{(k)}$.
ii) Verificare che $\hat{P}^2 = \hat{P}$ (cioè l'operatore è idempotente), proprietà caratterizzante ogni proiettore, e che $\hat{P}$ è autoaggiunto (proprietà condivisa dai proiettori ortogonali).
iii) Verificare che l'operatore $(\hat{1} - \hat{P}_m)$ è il proiettore ortogonale sul complemento ortogonale $S^\perp$ di S.

22) Se $\{\underline{v}^{(k)}\}_1^m$ è una base ortogonale di $S \subset E$,
i) mostrare che il proiettore ortogonale su S è dato da

$$\hat{P}_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{\underline{v}^{(k)} \underline{v}^{(k)^\dagger}}{||\underline{v}^{(k)}||^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{|v^{(k)})(v^{(k)}|}{(v^{(k)}, v^{(k)})}$$

ii) Costruire il proiettore ortogonale P_1 sullo spazio $S_1 = span\{(i,0,1)\}$ e il proiettore ortogonale P_2 sullo spazio $S_2 = span\{(i,0,1),(i,0,-1)\}$, verificando che $P_j^2 = P_j,\ P_j^\dagger = P_j,\ j = 1,2$.

R.

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

23) Mostrare che
i) se $S \subset E$ è un sottospazio invariante dell'operatore lineare $\hat{A}$ (cioè, se $\underline{x} \in S \Rightarrow \hat{A}\underline{x} \in S$), allora il complemento ortogonale $S^\perp \subset E$ di S è un sottospazio invariante dell'aggiunto $\hat{A}^\dagger$ di $\hat{A}$.
ii) Se $\hat{A}$ è autoaggiunto, allora se $S \subset E$ è un sottospazio invariante dell'operatore lineare $\hat{A}$, lo è anche di $S^\perp$.

2.2 Operatori di rango finito e compatti

Operatori di rango finito

1) *La diade.* Si consideri l'operatore

$$\hat{A} = \underline{a}\ \underline{b}^{\ \dagger} = |a)(b| \tag{51}$$

su uno spazio euclideo di dimensione n (finita o infinita), la cui azione sul generico vettore $\underline{x}$ è definita da: $\hat{A}\underline{x} = (\underline{b}, \underline{x})\underline{a}$. Mostrare che:

$$\begin{array}{c} \mathcal{R}(\hat{A}) = span\{\underline{a}\} \ \Rightarrow \ dim\ \mathcal{R}(\hat{A}) = 1, \\ \mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{x},\ (\underline{b}, \underline{x}) = 0\} \ \Rightarrow \ dim\ \mathcal{N}(\hat{A}) = n-1\ (codim \mathcal{N}(\hat{A}) = 1). \end{array} \tag{52}$$

2) *Operatore in forma diadica.* Si consideri l'operatore

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{m} \underline{a}_k \underline{b}_k^\dagger = \sum_{k=1}^{m} |a_k)(b_k|,$$

dove $\{\underline{a}_k\}_1^m$ e $\{\underline{b}_k\}_1^m$ sono due insiemi di vettori indipendenti, su uno spazio euclideo di dimensione $n > m$ (con n finito o infinito), la cui azione sul generico vettore $\underline{x}$ è definita da:

$$\hat{A}\underline{x} = \sum_{k=1}^{m} (\underline{b}_k, \underline{x})\underline{a}_k$$

i) Mostrare che:

$$\begin{array}{c} \mathcal{R}(\hat{A}) = span\{\underline{a}_k\}_1^m \ \Rightarrow \ dim\ \mathcal{R}(\hat{A}) = m, \\ \mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{x},\ (\underline{b}_k, \underline{x}) = 0,\ k = 1, .., m\} \\ \Rightarrow \ dim\ \mathcal{N}(\hat{A}) = n - m\ (codim \mathcal{N}(\hat{A}) = m). \end{array} \tag{53}$$

ii) Mostrare che $\hat{A}$ è autoaggiunto se $\underline{a}_k = \underline{b}_k$

3) Mostrare che, se lo spazio euclideo sul quale agisce l'operatore diadico dell'esercizio precedente è $L_2[a,b]$, allora l'operatore diadico diventa il seguente operatore integrale a "nucleo separabile" (o degenere):

$$\hat{K}_m = \int_a^b ds \left(\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\overline{b_k(s)} \right) \cdot \tag{54}$$

la cui azione su $f \in L_2[a,b]$ è quindi descritta da

$$\begin{aligned} &\hat{K}_m f(t) = \int_a^b dy \left(\sum_{k=1}^{m} a_k(t)\overline{b_k(s)} \right) f(s) = \\ &\sum_{k=1}^{m} \left(\int_\alpha^\beta \overline{b_k(s)} f(s) ds \right) a_k(t) = \sum_{k=1}^{m} (b_k, f) a_k(t). \end{aligned} \tag{55}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(\hat{K}_m) = span\{a_k(x)\}_1^m \;\Rightarrow\; dim\; \mathcal{R}(\hat{K}) = m, \\ &\mathcal{N}(\hat{K}_m) = \{f \in L_2[a,b],\; (\underline{b}_k, f) = 0,\; k = 1,..,m\} \\ &\Rightarrow\; dim\; \mathcal{N}(\hat{K}_m) = n - m\; (codim \mathcal{N}(\hat{K}_m) = m). \end{aligned} \tag{56}$$

4) Mostrare che l'operatore diadico dell'esercizio precedente è autoaggiunto se $a_k(x) = b_k(x)$.

5) Si consideri l'equazione integrale in $L_2[a,b]$:

$$(\hat{1} - \hat{K}_n)x(t) = y(t), \tag{57}$$

dove $\hat{K}_n$ è un operatore integrale di rango finito:

$$\hat{K}_n := \int_a^b ds \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\overline{b_k(s)} \cdot \quad , \qquad a_k, b_k \in L_2[a,b],$$

i) Mostrare che tale equazione è equivalente all'equazione algebrica in $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} &(I - B)\underline{x} = \underline{y}, \\ &I_{ij} = \delta_{ij}, \\ &B_{ij} := (b_i, a_j), \quad x_i := (b_i, x), \quad y_i := (b_i, y),\; i,j = 1,..,n, \end{aligned} \tag{58}$$

e che quindi la sua soluzione $x(t) \in L_2[a,b]$ è ottenibile dalla soluzione $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ dell'equazione algebrica nel seguente modo:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k(t) + y(t). \tag{59}$$

ii) Dedurre che, per l'equazione integrale (57) con nucleo separabile, vale il teorema dell'alternativa di Fredholm (come per i sistemi algebrici lineari): *O esiste unica la soluzione $x(t) \in L_2[a,b]$ dell'equazione (57), oppure l'equazione omogenea associata $\hat{K}_n\psi(t) = \psi(t)$ ammette soluzioni non banali in $L_2[a,b]$. In quest'ultimo caso, sia $\phi(t)$ la corrispondente soluzione dell'equazione omogenea aggiunta $\hat{K}_n^\dagger\phi(t) = 0$; allora l'equazione (57) ammette soluzione (non unica) se $(\phi, y) = 0$.*

22) Trovare la soluzione (unica) in $L_2[a,b]$ dell'equazione integrale $(\hat{1} - \hat{K})x(t) = y(t)$, con $\hat{K}$ operatore integrale di rango finito, nei seguenti esempi.

$$
\begin{array}{l}
i) \quad a=0, b=1, \quad K(t,s) = te^s/2, \;\; y(t) = \begin{cases} 1, & \Rightarrow \quad x(t) = 1 + (e-1)t, \\ e^{-t}, & \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t} + t. \end{cases} \\
ii) \quad a=0, b=1, \quad K(t,s) = ts, \;\; y(t) = \begin{cases} 1, & \Rightarrow \quad x(t) = 1 + \frac{3}{4}t, \\ t, & \Rightarrow \quad x(t) = \frac{3}{2}t, \\ t^2, & \Rightarrow \quad x(t) = t^2 + \frac{3}{8}t. \end{cases} \\
iii) \quad a=-1, b=1, \quad K(t,s) = t+s, \quad y(t) \; arbitrario, \quad \Rightarrow \\
x(t) = -\frac{1}{3}[(y_1 + 2y_2)t + (y_2 + \frac{2}{3}y_1)] + y(t)
\end{array}
\tag{60}
$$

23) Mostrare che,
i) se $[a,b] = [0,1]$, $K(t,s) = 2s$, allora il problema omogeneo $(\hat{1} - \hat{K})\psi(t) = 0$ ammette la soluzione $\psi(t) = 1$, e la soluzione $x(t)$ esiste, non unica, se e solo se $(t, y(t)) = \int_0^1 ty(t)dt = 0$, valendo $x(t) = C + y(t)$.
ii) se $[a,b] = [-1,1]$, $K(t,s) = \frac{\sqrt{3}}{2}(t+s)$, allora il problema omogeneo $(\hat{1} - \hat{K})\psi(t) = 0$ ammette la soluzione $\psi(t) = \sqrt{3}t + 1$, e la soluzione $x(t)$ esiste, non unica, se e solo se $y_1 + \sqrt{3}y_2 = 0$, valendo $x(t) = C(\sqrt{3}t + 1) + \sqrt{3}y_1 t/2 + y(t)$.

Operatori compatti

6) Mostrare l'equivalenza tra le seguenti due definizioni di operatore compatto.
a. Un operatore è compatto se trasforma insiemi limitati in insiemi totalmente limitati (quindi: i) gli operatori di rango finito sono operatori compatti, poiche', nell'immagine finito-dimensionale, insiemi limitati sono anche totalmente limitati; ii) l'operatore identità non è compatto, poichè trasforma la palla di raggio 1 (insieme limitato ma non totalmente limitato) in se stessa).
b. Un operatore è compatto se e solo se è il limite, in norma, di una succes-

sione di operatori di rango finito.

7) Mostrare che l'operatore $\hat{K}: \ l_2 \to l_2$ definito dalla $(\hat{K}\underline{x})_n = \alpha_n x_n$, dove $\{\alpha_n\}_1^\infty$ è una successione convergente, è un operatore compatto. Suggerimento: mostrare che $\hat{K}$ è il limite, in norma $||\cdot||_2$, della successione di operatori di rango finito $\hat{K}_n$, definiti da:

$$\hat{K}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, 0, \ldots)$$

8) Mostrare che gli operatori integrali $\hat{K}$ di Fredholm e di Volterra sono compatti. Suggerimento: si osservi che i polinomi di due variabili x, y:

$$K_{\underline{n}}(x, y) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} c_{ij} x^i y^j \tag{61}$$

sono esempi di nuclei separabili per operatori di Fredholm; si usi quindi il teorema di Weierstrass sulla completezza dell'insieme dei polinomi di due variabili negli spazi delle funzioni $C_\infty([a,b] \times [a,b])$ e $L_2([a,b] \times [a,b])$, per approssimare bene quanto si vuole il nucleo $K(x,y)$ di $\hat{K}$ con un nucleo $K_{\underline{n}}(x,y)$ dell'operatore $\hat{K}_{\underline{n}}$ di rango finito (e quindi approssimare bene quanto si vuole $\hat{K}$ con $\hat{K}_{\underline{n}}$).

9) Sia $\hat{K}$ un operatore compatto, e sia $\hat{K}_n$ un operatore di rango finito tale che $||\hat{K} - \hat{K}_n|| < 1$ (l'esistenza di un tale $\hat{K}_{\underline{n}}$ è assicurata dalla definizione di operatore compatto).
i) Mostrare che l'equazione

$$(\hat{1} - \hat{K})x(t) = y(t) \tag{62}$$

è riconducibile all'equazione $(\hat{1} - \hat{H}_{\underline{n}})x(t) = \tilde{y}(t)$, per l'operatore di rango finito $\hat{H}_{\underline{n}}$, dove

$$\hat{H}_{\underline{n}} := \left(\hat{1} - (\hat{K} - \hat{K}_{\underline{n}})\right)^{-1} \hat{K}_{\underline{n}}, \quad \tilde{y}(t) := \left(\hat{1} - (\hat{K} - \hat{K}_{\underline{n}})\right)^{-1} y(t). \tag{63}$$

ii) Dedurre che, se $\hat{K}$ è un operatore compatto, per l'equazione (62) vale il teorema dell'alternativa di Fredholm: *o esiste unica la soluzione $x(t) \in L_2[a,b]$ dell'equazione (62), oppure l'equazione omogenea associata $\hat{K}\psi(t) = \psi(t)$ ammette soluzioni non banali in $L_2[a,b]$. In quest'ultimo caso, sia $\phi(t)$ la corrisondente soluzione dell'equazione $\hat{K}^\dagger \phi(t) = \phi(t)$; allora l'equazione (62) ammette soluzione (non unica) se $(\phi, y) = 0$.*

2.3 Spettro di operatori lineari

1) Caso *finito-dimensionale*. Data l'equazione agli autovalori

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x} \tag{64}$$

in $\in \mathbb{C}^n$, convincersi che si possono verificare i seguenti due casi.
Caso 1. Se det $(A - \lambda I) \neq 0$, allora esiste l'operatore inverso $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$, detto "risolvente" di A, e le seguenti tre proprietà sono contemporaneamente soddisfatte i) Ker $(A - \lambda I) = \{\underline{0}\}$; ii) $R_\lambda(A)$ è limitato; iii) $\mathcal{D}(R_\lambda(A)) = \mathcal{R}(A - \lambda I) = \mathbb{C}^n$.
L'insieme $\rho(A) \subset \mathbb{C}^n$ dei valori di λ per i quali det $(A - \lambda I) \neq 0$ è detto "insieme regolare" o "insieme risolvente" dell'operatore A.
Caso 2. det $(A - \lambda I) = 0$; allora l'equazione agli autovalori $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ ammette soluzioni non banali $\underline{x}^{(j)}$ corrispondenti alle n radici complesse $\lambda_j,\ j = 1, .., n$ del polinomio caratteristico det $(A - \lambda I) = 0$. Le n radici complesse $\lambda_j,\ j = 1, .., n$ sono dette "autovalori", e le corrispondenti soluzioni non banali $\underline{x}^{(j)}$ di (64) sono detti autovettori. L'insieme degli autovalori è detto "spettro discreto (puntuale)" della matrice A: $\sigma_p(A) = \{\lambda_j,\ j = 1, .., n\}$.
Per $\lambda \in \sigma_p(A)$, il risolvente chiaramente non esiste (è singolare); è invece regolare per $\lambda \in \rho(A)$. Per matrici aventi la decomposizione spettrale

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j,$$

il risolvente ha la forma

$$R_\lambda(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda} P_j$$

che evidenzia come $R_\lambda(A)$ è meromorfo in $\mathbb{C}$, con singolarità polari in corrispondenza degli autovalori di A. Naturalmente, l'insieme risolvente $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \ \lambda \neq \lambda_j,\ j = 1, .., n\}$ è aperto, mentre lo spettro $\sigma_p(A) = \{\lambda_j,\ j = 1, .., n\}$ è chiuso.

2) Nel caso infinito-dimensionale le proprietà i), ii) e iii) dell'esercizio precedente sono, generalmente, scorrelate, portando all'introduzione di tre diversi spettri.
Sia $\hat{A}$ un operatore densamente definito in H: $\hat{A} :\ \mathcal{D}(\hat{A}) \to \mathcal{R}(\hat{A})$, con $\mathcal{D}(\hat{A})$ denso in H (quindi $(\hat{A} - \lambda\hat{1}) :\ \mathcal{D}(\hat{A}) \to \mathcal{R}(\hat{A} - \lambda\hat{1})$). Allora:
Caso 1. Sono verificate le tre proprietà i), ii) e iii) dell'esercizio precedente:

i) Ker $(A - \lambda I) = \{\underline{0}\}$; esiste quindi il risolvente

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1} : \ \mathcal{R}(\hat{A} - \lambda\hat{1}) \to \mathcal{D}(\hat{A}).$$

ii) $R_\lambda(A)$ è limitato.
iii) Il dominio $\mathcal{R}(\hat{A} - \lambda\hat{1})$ di $R_\lambda(A)$ è denso in H.
L'insieme $\rho(\hat{A})$ dei numeri complessi λ per i quali sono soddisfatte le tre proprietà è detto "insieme regolare" o "insieme risolvente" dell'operatore $\hat{A}$.
Caso 2. L'insieme dei λ per i quali almeno una delle tre proprietà non è soddisfatta è lo spettro di $\hat{A}$: $\sigma(\hat{A}) = \mathbb{C} - \rho(\hat{A})$. Si possono presentare i seguenti tre sottocasi.
2a. Lo spettro discreto (puntuale):

$$\sigma_p(\hat{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ Ker(A - \lambda I) \neq \{\underline{0}\}\};$$

in questo caso non è soddisfatta la i), e quindi esistono soluzioni non banali dell'equazione agli autovalori (64) in H (dette autovettori o autofunzioni, a seconda dei casi) e non esiste $R_\lambda(A)$.
2b. Lo spettro continuo:

$$\sigma_c(\hat{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ R_\lambda(A) \text{ non è limitato su } H\};$$

in questo caso non è soddisfatta la proprietà ii).
2c. Lo spettro residuo:

$$\sigma_r(\hat{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathcal{R}(\hat{A} - \lambda\hat{1}) \text{ non è denso in } H\};$$

in questo caso non è soddisfatta la proprietà iii), con $R_\lambda(A)$ limitato o non.
Si ha quindi che $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) \cup \sigma_c(\hat{A}) \cup \sigma_r(\hat{A})$.

3) i) Nel caso di spettro continuo si ha, spesso, la seguente situazione: l'equazione agli autovalori ammette soluzioni limitate $\underline{x}(\lambda)$ ma non appartenenti ad H, approssimabili con successioni di funzioni $\underline{x}^{(n)}(\lambda) \in H$ tali che $||\underline{x}^{(n)}(\lambda)|| = 1$ e $||\hat{A}\underline{x}^{(n)}(\lambda) - \lambda\underline{x}^{(n)}(\lambda)|| \to 0$ per $n \to \infty$. Mostrare che, in questo caso, $R_\lambda(A)$ non è limitato.
ii) Nel caso di spettro residuo, si osservi che, se $\lambda_0 \in \sigma_r(\hat{A})$, allora esiste $\underline{\eta} \in H$ tale che: $(\underline{\eta}, (\hat{A}-\lambda_0\hat{1})\underline{\xi}) = 0$, $\ \forall\underline{\xi} \in H$; quindi $((\hat{A}^\dagger - \bar{\lambda}_0\hat{1})\underline{\eta}, \underline{\xi})$, $\forall\underline{\xi} \in H$. Ne consegue che $\hat{A}^\dagger\underline{\eta} = \bar{\lambda}_0\underline{\eta}$; cioè $\bar{\lambda}_0 \in \sigma_p(\hat{A}^\dagger)$.

4) *Proprietà del risolvente.* Sia $\hat{A}$ limitato, mostrare che:
i) se $\lambda \in \rho(\hat{A})$, allora $R_\lambda(A)$ è definito su tutto H ed è limitato.
ii) $\rho(\hat{A})$ è aperto e $\sigma(\hat{A})$ è chiuso.
iii) $\sigma(\hat{A})$ è un compatto (chiuso e limitato) contenuto nel disco $|\lambda| \leq ||\hat{A}||$,

mentre $\{|\lambda| > ||\hat{A}||\} \subset \rho(\hat{A})$.
iv) Per $\lambda \in \rho(\hat{A})$, $R_\lambda(A)$ è un operatore analitico in λ, tale che:

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{dR_\lambda}{d\lambda} = (R_\lambda)^2.$$

5) Mostrare che, se $\hat{A}$ è limitato, allora i) $\rho(\hat{A}^+) = \bar{\rho}(\hat{A})$, $\sigma(\hat{A}^+) = \bar{\sigma}(\hat{A})$; ii) se $\hat{A}$ è anche auto-aggiunto, allora $\hat{A}$ non ha spettro residuo.

6) i) Dimostrare che, se $\hat{A}$ è autoaggiunto, allora i suoi autovalori sono reali e gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.
ii) Dimostrare che, se $\hat{A}$ è unitario, allora i suoi autovalori hanno modulo unitario e gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.

7) *Lo spettro di* $\hat{E}^+$. Mostrare che $\sigma(\hat{E}^+) = \sigma_p(\hat{E}^+) \cup \sigma_c(\hat{E}^+) = \{|\lambda| \leq 1\}$, con:

$$\sigma_p(\hat{E}^+) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < 1\}, \quad \sigma_c(\hat{E}^+) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = 1\}.$$

8) *Lo spettro di* $\hat{E}^-$. Mostrare che $\sigma(\hat{E}^-) = \sigma_c(\hat{E}^-) \cup \sigma_r(\hat{E}^-) = \{|\lambda| \leq 1\}$, con:

$$\sigma_c(\hat{E}^-) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ 0 < |\lambda| \leq 1\}, \quad \sigma_r(\hat{E}^-) = \{0\}.$$

9) *Lo spettro di* $\hat{A} := \hat{E}^+ + \hat{E}^-$. Dato l'operatore $\hat{A}: \ l_2 \to l_2$ definito da $(\hat{A}\underline{x})_n = x_{n+1} + x_{n-1}$, $n \geq 1$, con $x_0 = 0$, mostrare che i) $\hat{A}$ è autoaggiunto; ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = [-2, 2]$ e l'autovettore dello spettro continuo ha componenti $x_n = \sin n\theta(\lambda)$, dove $exp(\pm i\theta(\lambda)) = \frac{\lambda \pm \sqrt{4-\lambda^2}}{2}$.
Sugg. cercare la soluzione dell'equazione agli autovalori nella forma $x_n = z^n$, ottenendo $z_\pm = \frac{\lambda \pm \sqrt{4-\lambda^2}}{2}$. Quindi $x_n = \alpha z_+^n + \beta z_-^n$ è limitato se $|z_\pm| = 1$....

10) Dato l'operatore $\hat{A}: \ l_2 \to l_2$: $\hat{A}(x_1, x_2, ..) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..)$, con $\{\alpha_k\}_1^\infty \in l_2$, mostrare che:
i) $\hat{A}$ è compatto.
ii) $\hat{A}^\dagger(x_1, x_2, ..) = (\bar{\alpha}_1 x_1, \bar{\alpha}_2 x_2, ..)$, e che quindi $\hat{A}$ è autoaggiunto se e solo se $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_+$.
iii) L'insieme degli autovalori di $\hat{A}$ è l'insieme numerabile $\{\alpha_k\}_1^\infty$, e i corrispondenti autovettori sono gli elementi della base canonica $\{\underline{e}^{(k)}\}_1^\infty$, $e_j^{(k)} = \delta_{kj}$.
iv) $\lambda = 0$, punto d'accumulazione degli autovalori, è spettro continuo. Quindi:
$\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) \cup \sigma_c(\hat{A}) = \{\alpha_k\}_1^\infty \cup \{0\}$.

11) Dato l'operatore $\hat{A}: \;\; l_2 \to l_2$: $(\hat{A}\underline{x})_n = \alpha_n x_n + x_{n+1}$, mostrare che l'insieme degli autovalori di $\hat{A}$ è l'insieme numerabile $\{\alpha_k\}_1^\infty$, e i corrispondenti autovettori $\underline{x}^{(k)}$ sono dati da

$$x_j^{(k)} = \begin{cases} \prod\limits_{s=1}^{j-1} (\alpha_k - \alpha_s), & j \le k, \\ 0, & j > k. \end{cases} \tag{65}$$

12) *Spettro dell'operatore quantità di moto.* Dato l'operatore quantità di moto $\hat{p} = -id/dx$, agente sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{p}f \in L_2[a,b]$, mostrare che:
i) gli autovalori (reali) e le autofunzioni (ortogonali) di $\hat{p}$ nello spazio delle funzioni di cui sopra, con condizioni periodiche in $[-\pi,\pi]$: $f(-\pi) = f(\pi)$, sono:

$$\lambda_n = n, \quad \psi_n(x) = e^{inx} \quad (\hat{p}\psi_n = \lambda_n \psi_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \; .$$

ii) L'operatore $\hat{p}$ non ha invece spettro discreto (autovalori e autofunzioni) in $L_2(\mathbb{R})$; tuttavia ammette le autofunzioni "limitate" $e^{i\lambda x}$ dell'equazione agli autovalori $\hat{p}\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostrare quindi che $\lambda \in \mathbb{R}$ è lo spettro continuo di $\hat{p}$ in $L_2(\mathbb{R})$:

$$\sigma(\hat{p}) = \sigma_c(\hat{p}) = \{\lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sugg. Per mostrare che $R_\lambda(\hat{p})$ non è limitato, si consideri, ad esempio, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{c}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{n^2}} e^{i\lambda x} \in L_2(\mathbb{R}), \quad c = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$$

tale che: $||f_n||_2 = 1$ e $||(\hat{p}f_n - \lambda f_n||_2 = 1/n \to 0$ per $n \to \infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Riepilogando, sebbene non esistano autofunzioni in $L_2(\mathbb{R})$ e quindi il risolvente $R_\lambda(\hat{p})$ esiste, è possibile construire una successione di funzioni di $L_2(\mathbb{R})$ di norma unitaria che i) convergono puntualmente alle autofunzioni "limitate" $e^{i\lambda x}$; ii) sono autofunzioni approssimate di $L_2(\mathbb{R})$. Ne segue che il risolvente non può essere limitato (se lo fosse, infatti, si avrebbe:

$$(\hat{p} - \lambda)f_n = y_n \quad \Rightarrow \quad f_n = R_\lambda(\hat{p})y_n \quad \Rightarrow$$

$$1 = ||f_n|| = ||R_\lambda(\hat{p})y_n|| \le ||R_\lambda(\hat{p})||||y_n|| < \epsilon||R_\lambda(\hat{p})||, \quad n > N_\epsilon$$
$$\Rightarrow \quad ||R_\lambda(\hat{p})|| > 1/\epsilon,$$

che è l'assurdo cercato).
I risultati elementari di questo esercizio hanno valenza generale; le soluzioni

non banali dell'equazione agli autovalori non appartenenti a $L_2(\mathbb{R})$ ma limitate, sono le cosidette "autofunzioni dello spettro continuo", e giocano anch'esse un ruolo molto importante in fisica.

13) *Spettro dell'operatore energia cinetica.* Dato l'operatore energia cinetica $\hat{p}^2 = -d^2/dx^2$, agente sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{p}^2 f \in L_2[a,b]$, mostrare che:
i) gli autovalori (reali) e le autofunzioni (ortonormali) di $\hat{p}^2$, nello spazio delle funzioni di cui sopra, che si annullano al bordo dell'intervallo $[0,l]$: $\psi(0) = \psi(l) = 0$, sono:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (\hat{p}^2 \psi_n = \lambda_n \psi_n), \quad n \in \mathbb{Z};$$

quindi: $\sigma(\hat{p}^2) = \sigma_p(\hat{p}^2) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
ii) L'operatore $\hat{p}^2$ non ha invece spettro discreto (autovalori e autofunzioni) in $L_2(\mathbb{R})$; tuttavia ammette, come per l'operatore impulso, spettro continuo. Mostrare che $\sigma(\hat{p}^2) = \sigma_c(\hat{p}^2) = \mathbb{R}^+$, e che le corrispondenti autofunzioni limitate dello spettro continuo sono $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$, $\lambda > 0$.

14) *Spettro dell'operatore posizione.* Dato l'operatore di posizione (l'operatore di moltiplicazione per x), agente sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni $f(x)$ tali che $xf(x) \in L_2[a,b]$, mostrare che:
i) x è autoaggiunto.
ii) L'equazione agli autovalori $x\psi = \lambda\psi$ ammette, in $L_2[a,b]$, la sola soluzione banale $\psi = 0$ quasi ovunque; quindi non c'è spettro discreto.
iii) Si osservi che l'equazione agli autovalori ammette, però, la soluzione $\psi(x,\lambda) = \delta(x-\lambda) \notin L_2[a,b]$, nel senso delle distribuzioni; inoltre il risolvente $R_\lambda = (x-\lambda)^{-1}$ esiste ma è illimitato per $\lambda \in [a,b]$. Quindi: $\sigma(x\cdot) = \sigma_c(x\cdot) = [a,b]$.

15) Dato l'operatore $\hat{A} = x(d/dx)$, agente sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{A}f \in L_2[a,b]$, con $1 < a < b$, mostrare che gli autovalori e le autofunzioni di $\hat{A}$ nello spazio delle funzioni di cui sopra, con condizioni periodiche in $[a,b]$: $f(a) = f(b)$, sono:

$$\lambda_n = \frac{2\pi n}{\ln(b/a)} i, \quad \psi_n(x) = e^{\frac{2\pi n \ln x}{\ln(b/a)} i}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Quindi $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

16) Dato l'operatore $\hat{A} = id/dx + a(x)$, $a(x) \in \mathbb{R}$, agente sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{A}f \in L_2[a,b]$, i) mostrare che è autoaggiunto; ii) mostrare che gli autovalori e le autofunzioni di $\hat{A}$ nello spazio delle funzioni di cui sopra, con condizioni periodiche in $[-\pi, \pi]$: $f(-\pi) = f(\pi)$, sono:

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x)dx, \quad \psi_n(x) = e^{-i\lambda_n x + i\int_0^x a(x')dx'}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

quindi $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. iii) Mostrare che, nello spazio $L_2(\mathbb{R})$, $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}$.

17) Trovare autovalori ed autovettori dell'operatore $\hat{T}$: $\hat{T}f(x) = f(x+1)$ in $L_2[-\pi, \pi]$, con condizioni periodiche al bordo: $f(-\pi) = f(\pi)$. Essendo l'operatore unitario, verificare che gli autovalori hanno modulo 1 e le autofunzioni sono ortogonali.
R. $\sigma(\hat{T}) = \sigma_p(\hat{T}) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, con $\lambda_n = e^{in}$, $\psi_n(x) = e^{inx}$.

18) *Problema di Sturm Liouville.* Si consideri il seguente problema agli autovalori:

$$\hat{L}\psi(x) + \lambda r(x)\psi(x) = 0,$$

per l'operatore di Sturm-Liouville $\hat{L}$, con $r(x) \in \mathbb{R}^+$, $p(x), q(x) \in \mathbb{R}$. Mostrare che:

i) Se $\hat{L}$ è auto-aggiunto, allora l'autovalore λ è reale.

ii) Se, inoltre, le condizioni al contorno sono reali, allora l'autofunzione $\psi(x)$ è reale.

iii) Autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.

iv) Se sono soddisfatte le condizioni al contorno

$$p(a)[\psi_2(a)\psi_1'(a) - \psi_2'(a)\psi_1(a)] = p(b)[\psi_2(b)\psi_1'(b) - \psi_2'(b)\psi_1(b)] = 0$$

(i casi a) e c) del precedente ... appartengono a questa categoria), allora gli autovalori sono non degeneri ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

19) *Problema di Sturm-Liouville proprio.*
Il problema di Sturm-Liouville è proprio se:
i) $p(x), r(x) > 0$, $q(x) \leq 0$, $x \in [a, b]$; ii) le condizioni al bordo a) sono soddisfatte, con $\gamma_a \leq 0$, $\gamma_b \geq 0$.
Dimostrare che, in un problema di Sturm-Liouville proprio, gli autovalori sono maggiori o uguali a zero (uguali a zero se $q = 0$ e $\psi = cost.$).

20) Mostrare che il problema di Schrödinger stazionario

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \psi \in L_2(\mathbb{R})$$

è un problema di Sturm-Liouville con $p = r = 1,\ q(x) = -V(x),\ \lambda = E$; è quindi proprio se $V(x) > 0$. Conseguentemente, se $V(x) > 0$ (come nel caso dell'oscillatore armonico: $V(x) = x^2$), allora lo spettro energetico è positivo e non degenere.

21) *L'approccio astratto di Dirac alla teoria spettrale dell'oscillatore armonico quantistico.* Si consideri gli operatori $\hat{A}, \hat{A}^\dagger :\ H \to H$ e $\hat{N} = \hat{A}^\dagger \hat{A}$, che soddisfano alle regole di commutazione

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1, \quad [\hat{N}, \hat{A}] = -\hat{A}, \quad [\hat{N}, \hat{A}^\dagger] = \hat{A}^\dagger \tag{66}$$

Mostrare che i) $\hat{N}$ è autoaggiunto e non negativo; ii) $\hat{N}$ ha per autovalori l'insieme dei naturali $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e i corrispondenti autovettori normalizzati sono ortogonali:

$$\hat{N}\underline{x}^{(n)} = n\underline{x}^{(n)}, \quad (\underline{x}^{(n)}, \underline{x}^{(m)}) = \delta_{nm},\ n, m \in \mathbb{N}; \tag{67}$$

e valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{l} \underline{x}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{A}^\dagger)^n \underline{x}^{(0)},\ n \in \mathbb{N}, \\ \hat{A}\underline{x}^{(n)} = \sqrt{n}\underline{x}^{(n-1)},\ n \in \mathbb{N}, \\ \hat{A}^\dagger \underline{x}^{(n)} = \sqrt{n+1}\underline{x}^{(n+1)}\ n \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{68}$$

iii) L'operatore $\hat{H} = \hat{N} + 1/2$ è autoaggiunto, non negativo, e soddisfa all'equazione agli autovalori:

$$\hat{H}\underline{x}^{(n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\underline{x}^{(n)},\ n \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

iv) Mostrare che gli operatori

$$\begin{array}{l} \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{d}{dx} + x), \quad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{d}{dx} + x), \\ \hat{N} = \hat{A}^\dagger \hat{A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1\right), \end{array} \tag{70}$$

soddisfano alle regole di commutazione (66) e quindi godono delle proprietà spettrali precedenti. In particolare,
a) si ottiene l'equazione agli autovalori per l'operatore Hamiltoniano $\hat{H}$ dell'oscillatore armonico quantistico:

$$\begin{array}{l} \hat{H}\psi_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\psi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \hat{H} = \hat{N} + 1/2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right). \end{array} \tag{71}$$

b) L'equazione $\hat{A}\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$, che diventa

$$(\frac{d}{dx} + x)\psi_0(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{72}$$

implica che la gaussiana è l'autofunzione dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico quantistico.
c) Le altre autofunzioni normalizzate si ottengono dalla formula (68a):

$$\begin{array}{l} \psi_n(x) = c_n \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ c_n = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}, \\ (\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}. \end{array} \tag{73}$$

22) *Lo spettro dell'operatore Trasformata di Fourier.* Dato l'operatore "trasformata di Fourier":

$$(\hat{\mathcal{F}} f)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx, \tag{74}$$

i) mostrare che la gaussiana $\psi_0(x)$ dell'esercizio precedente è autofunzione di $\hat{\mathcal{F}}$ con autovalore 1:

$$(\hat{\mathcal{F}}\psi_0)(k) = \psi_0(k). \tag{75}$$

ii) Usare la proprietà:

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right) f(x) \quad \Leftrightarrow \quad (-i) \left(k - \frac{d}{dk}\right) \hat{f}(k) \tag{76}$$

della trasformata di Fourier e la (73a) per dimostrare che l'autofunzione $\psi_n(x)$ dell'oscillatore armonico è anche autofunzione dell'operatore $\hat{\mathcal{F}}$, con autovalore $(-i)^n$:

$$(\hat{\mathcal{F}}\psi_n)(k) = (-i)^n \psi_n(k). \tag{77}$$

23) *Problema agli autovalori per equazioni integrali.* Si consideri l'equazione agli autovalori

$$\hat{K}\psi(t) = \lambda\psi(t), \tag{78}$$

dove $\hat{K}$ è l'operatore integrale di Fredholm, $[a, b]$ è l'intervallo d'integrazione, $K(t, s)$ è il nucleo separabile dell'operatore integrale, definito nei seguenti modi:

i) $K(t, s) = s$, $[0, 1]$; *ii)* $K(t, s) = te^s$, $[0, 1]$; *iii)* $K(t, s) = t+s$, $[0, 1]$; *iv)* $K(t, s) = t-s$, $[0, 1]$; *v)* $K(t, s) = t+s$, $[-1, 1]$; *vi)* $K(t, s) = t-s$, $[-1, 1]$; *vii)* $K(t, s) = t^2 s + ts^2$, $[0, 1]$; *viii)* $K(t, s) = \cos(t + s)$, $[0, \pi]$.

Trovare gli autovalori $\lambda_j,\ j = 1,..,m$ e le autofunzioni $\psi_j(t),\ j = 1,..,m$ di $\hat{K}$
R.

$$\begin{array}{l}
i)\quad \lambda_1 = 1/2,\quad \psi_1(t) = 1;\\
ii)\quad \lambda_1 = 1,\quad \psi_1(t) = t;\\
iii)\quad \lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = \pm\sqrt{3}t + 1,\\
iv)\quad \lambda_\pm = \pm\frac{i}{2\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3} \pm i,\\
v)\quad \lambda_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = \pm\sqrt{3}t + 1;\\
vi)\quad \lambda_\pm = \mp i\frac{2}{\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = \pm i\sqrt{3}t + 1;\\
vii)\quad \lambda_\pm = (-60 \pm 16\sqrt{15})^{-1} = \frac{15\pm4\sqrt{15}}{60},\ \psi_\pm(t) = t^2 + 3(\lambda_\pm - \frac{1}{4})t;\\
viii),\ ix)\quad \lambda_\pm = \pm\frac{\pi}{2},\ \psi_+(t) = \cos t,\ \psi_-(t) = \sin t.
\end{array} \tag{79}$$

24) *Operatori de Fredholm di rango finito, spettro e teorema dell'alternativa.* Si consideri l'equazione $(\hat{1} - \mu\hat{K})x(t) = y(t)$, dove $\hat{K}$ è un operatore integrale di rango finito con nucleo $K(t,s)$, $[a,b]$ è l'intervallo d'integrazione e $y(t)$ è il termine noto, definiti nei seguenti modi:

i) $K(t,s) = s,\ [0,1],\ y(t)$ arb.; *ii)* $K(t,s) = te^s,\ [0,1],\ y(t)$ arb.; *iii)* $K(t,s) = t + s,\ [0,1],\ y(t)$ arb.; *iv)* $K(t,s) = t - s,\ [0,1],\ y(t)$ arb.; *v)* $K(t,s) = t+s,\ [-1,1],\ y(t)$ arb.; *vi)* $K(t,s) = t-s,\ [-1,1],\ y(t)$ arb.; *vii)* $K(t,s) = t^2s+ts^2,\ [0,1],\ y(t)$ arb.; *viii)* $K(t,s) = \cos(t+s),\ [0,\pi],\ y(t) = \cos 3t$; *ix)* $K(t,s) = \cos(t+s),\ [0,\pi],\ y(t)$ arb.

a. Trovare gli autovalori $\lambda_j,\ j = 1,..,m$ e le autofunzioni $\psi_j(t),\ j = 1,..,m$ di $\hat{K}$, cioè trovare le soluzioni non banali dell'equazione omogenea $\hat{K}\psi(t) = \lambda\psi(t)$ (è la replica di un esercizio precedente).
Risp:

$$\begin{array}{l}
i)\quad \lambda_1 = 1/2,\quad \psi_1(t) = 1;\\
ii)\quad \lambda_1 = 1,\quad \psi_1(t) = x;\\
iii)\quad \lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = \pm\sqrt{3}t + 1,\\
iv)\quad \lambda_\pm = \pm\frac{i}{2\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = 2\sqrt{3}t - \sqrt{3} \pm i,\\
v)\quad \lambda_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = \pm\sqrt{3}t + 1;\\
vi)\quad \lambda_\pm = \mp i\frac{2}{\sqrt{3}},\ \psi_\pm(t) = \pm i\sqrt{3}t + 1;\\
vii)\quad \lambda_\pm = (-60 \pm 16\sqrt{15})^{-1} = \frac{15\pm4\sqrt{15}}{60},\ \psi_\pm(t) = t^2 + 3(\lambda_\pm - \frac{1}{4})t;\\
viii),\ ix)\quad \lambda_\pm = \pm\frac{\pi}{2},\ \psi_+(t) = \cos t,\ \psi_-(t) = \sin t.
\end{array} \tag{80}$$

b. Risolvere l'equazione $(\hat{1} - \mu\hat{K})x(t) = y(t),\ \mu = 1/\lambda$ al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$ determinando, in particolare, i vincoli che vanno imposti su $y(t)$, nel caso in cui $\lambda = \lambda_j,\ j = 1,..,m$, affinchè l'equazione suddetta abbia soluzioni.

Risp:

$i)$ $\lambda \neq 1/2: \ x(t) = \frac{2}{2\lambda-1} y_1 + y(t), \ \text{dove: } y_1 = \int\limits_0^1 t y(t) dt;$
$\lambda = 1/2:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_1 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C + y(t), \ C$ costante arbitraria.

$ii)$ $\lambda \neq 1: \ x(t) = \frac{1}{\lambda-1} y_1 t + y(t), \ \text{dove: } y_1 = \int\limits_0^1 e^t y(t) dt;$
$\lambda = 1:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_1 = 0$;
in questo caso: $x(t) = Ct + y(t), \ C$ costante arbitraria.

$iii)$ $\lambda \neq \lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}: \ x(t) = \frac{(\lambda-1/2)y_1+y_2}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} t + \frac{(\lambda-1/2)y_2+y_1/3}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} + y(t),$
dove: $y_1 = \int\limits_0^1 y(t) dt, \ y_2 = \int\limits_0^1 t y(t) dt.$
$\lambda = \lambda_+:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_1 + \sqrt{3} y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(\sqrt{3}t + 1) + \sqrt{3} y_1 t + y(t), \ C$ costante arbitraria.
$\lambda = \lambda_-:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_1 - \sqrt{3} y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(-\sqrt{3}t + 1) - \sqrt{3} y_1 t + y(t), \ C$ costante arbitraria.

$iv)$ $\lambda \neq \lambda_\pm = \pm \frac{i}{2\sqrt{3}}: \ x(t) = \frac{(\lambda+1/2)y_1-y_2}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} t - \frac{(\lambda-1/2)y_2+y_1/3}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} + y(t),$
dove: $y_1 = \int\limits_0^1 y(t) dt, \ y_2 = \int\limits_0^1 t y(t) dt.$
$\lambda = \lambda_+:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $2y_1 - \sqrt{3}(\sqrt{3} + i) y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(2\sqrt{3}t - \sqrt{3} + i) - y_1 + y(t), \ C$ costante arbitraria.
$\lambda = \lambda_-:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $2y_1 - \sqrt{3}(\sqrt{3} - i) y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(2\sqrt{3}t - \sqrt{3} - i) - y_1 + y(t), \ C$ costante arbitraria.

$v)$ $\lambda \neq \lambda_\pm = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}: \ x(t) = \frac{\lambda y_1 + 2y_2}{\lambda^2 - \frac{4}{3}} t + \frac{\lambda y_2 + \frac{2}{3} y_1}{\lambda^2 - \frac{4}{3}} + y(t),$
dove: $y_1 = \int\limits_{-1}^1 y(t) dt, \ y_2 = \int\limits_{-1}^1 t y(t) dt.$
$\lambda = \lambda_+:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_1 + \sqrt{3} y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(\sqrt{3}t + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 t + y(t), \ C$ costante arbitraria.
$\lambda = \lambda_-:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_1 - \sqrt{3} y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(-\sqrt{3}t + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 t + y(t), \ C$ costante arbitraria.

$vi)$ $\lambda \neq \lambda_\pm = \mp i \frac{2}{\sqrt{3}}: \ x(t) = \frac{\lambda y_1 - 2y_2}{\lambda^2 + \frac{4}{3}} t - \frac{\lambda y_2 + \frac{2}{3} y_1}{\lambda^2 + \frac{4}{3}} + y(t),$
dove: $y_1 = \int\limits_{-1}^1 y(t) dt, \ y_2 = \int\limits_{-1}^1 t y(t) dt.$
$\lambda = \lambda_+:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $i y_1 + \sqrt{3} y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(i\sqrt{3}t + 1) + i\frac{\sqrt{3}}{2} y_1 t + y(t), \ C$ costante arbitraria.
$\lambda = \lambda_-:$ non esiste la soluzione x(t), a meno che $i y_1 + \sqrt{3} y_2 = 0$;
in questo caso: $x(t) = C(-i\sqrt{3}t + 1) - i\frac{\sqrt{3}}{2} y_1 t + y(t), \ C$ costante arbitraria.
(81)

viii) $\lambda \neq \lambda_\pm = \pm\frac{\pi}{2},\ x(t) = \cos(3t)$.
$\lambda = \pm\frac{\pi}{2}$, le cond. di ortogonalità sono soddisfatte; quindi:
$\lambda = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ x(t) = C\cos t + \cos 3t;\ \lambda = -\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ x(t) = C\sin t + \cos 3t,$
C costante arbitraria.*ix)* $\lambda \neq \lambda_\pm = \pm\frac{\pi}{2},\ x(t) = \frac{y_1}{\lambda-\frac{\pi}{2}}\cos t - \frac{y_2}{\lambda+\frac{\pi}{2}}\sin t + y(t),$
$y_1 = \int\limits_0^\pi dt \cos t y(t), \quad y_2 = \int\limits_0^\pi dt \sin t y(t),$
$\lambda = \frac{\pi}{2}, \quad$: non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_1 = 0$,
in questo caso: $x(t) = C\cos t - \frac{y_2}{\pi}\sin t + y(t);$
$\lambda = -\frac{\pi}{2}, \quad$: non esiste la soluzione x(t), a meno che $y_2 = 0$,
in questo caso: $x(t) = C\sin t - \frac{y_1}{\pi}\cos t + y(t);$

(82)

25) Problema di scattering. Si studi il problema di scattering da potenziale descritto dall'equazione di Schrödinger

$$-\psi''(x,k) + V(x)\psi(x,k) = k^2\psi(x,k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k > 0,$$

dove $\psi(x,k)$, l'autofunzione dello spettro continuo dell'operatore di Schrödinger $-d^2/dx^2 + V(x)$, rappresenta la funzione d'onda di un fascio di particelle quantistiche che viene diffuso dal potenziale localizzato $V(x)$ e $\lambda = E = k^2 > 0$ è l'energia di tale fascio (lo spettro continuo $\sigma_c = \{\lambda > 0\}$), con le seguenti condizioni al contorno:

$$\psi(x,k) \sim \ R(k)e^{-ikx} + e^{ikx},\ x \sim -\infty; \qquad \psi(x,k) \sim \ T(k)e^{ikx},\ x \sim \infty$$

che descrivono un fascio incidente di particelle di vettore d'onda k ed intensità 1 che viene in parte riflesso ed in parte trasmesso attraverso il potenziale ($R(k)$ e $T(k)$ sono rispettivamente i coefficienti di riflessione e trasmissione).
i) Si osservi che la funzione $\phi(x,k) = \psi(x,k)/T(k)$ soddisfa al problema al contorno più semplice:

$$\phi''(x,k) + k^2\phi(x,k) = V(x)\phi(x,k), \quad x \in \mathbb{R},, \quad k > 0$$

$$\phi(x,k) \sim \frac{R(k)}{T(k)}e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{T(k)},\ x \sim -\infty; \quad \phi(x,k) \sim \ e^{ikx},\ x \sim \infty$$

e si usi la funzione di Green avanzata dell'operatore $d^2/dx^2 + k^2$ per riscrivere tale problema sottoforma di equazione integrale di Volterra (vedere la sezione 3.4.2), ottenendo:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - \int\limits_x^\infty dy \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)\phi(y,k)$$

e le seguenti rappresentazioni integrali dei coefficienti di riflessione e trasmissione:

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{-iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k), \quad \frac{R(k)}{T(k)} = \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k).$$

L'equazione integrale, equivalente all'equazione differenziale più la condizione al contorno, è la formulazione più conveniente del problema; la più utile per estrarre informazioni.

ii) Usare i risultati sulla teoria delle equazioni integrali per dedurre che la serie di Neumann della soluzione è uniformemente convergente; quindi la soluzione dell'equazione di Volterra esiste ed è unica per ogni potenziale $V(x)$ localizzato. Inoltre $\phi(x,k)e^{-ikx}$ e $1/T(k)$ sono analitiche nel semipiano superiore del piano complesso k (vedere la sezione 3.4.2).

iii) Siano $k_j,\ j = 1,..,N$ gli zeri della funzione $1/T(k)$ nel semipiano superiore del piano complesso k (i poli del coefficiente di trasmissione). Allora, poichè $\lambda_j = E_j = k_j^2 \in \mathbb{R}$, ne segue che a) k_j è immaginario puro: $k_j = ip_j,\ p_j > 0,\ j = 1,..,N$, b) le funzioni $\phi(x,k_j),\ j = 1,..,N$ sono esponenzialmente localizzate:

$$\phi_j(x) := \phi(x,k_j) = O(e^{-p_j|x|}), \quad |x| \to \infty, \quad j = 1,..N$$

e quindi sono le autofunzioni dell'operatore di Schrödinger in $L_2(\mathbb{R})$:

$$-\phi_j''(x) + V(x)\phi_j(x) = -p_j^2\phi_j(x), \quad x \in \mathcal{R}$$

corrispondenti agli autovalori negativi $\lambda_j = E_j = -p_j^2 < 0$ dell'energia (lo spettro discreto: $\sigma_p = \{-p_j^2\}_1^N$). Riassumendo: $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c = \{-p_j^2\}_1^N \cup \mathbb{R}^+$.

iv) Mostrare che l'insieme degli autovalori $\lambda_j = -p_j^2,\ j = 1,..,N$ è limitato inferiormente.

Sugg. Moltiplicare scalarmente l'equazione di Schrödinger per l'autofunzione ϕ_j normalizzata a 1, ottenendo:

$$\lambda_j - (\phi_j, V\phi_j) = (\phi_j', \phi_j') \geq 0 \ \Rightarrow \ |\lambda_j| \leq -(\phi_j, V\phi_j) \leq |(\phi_j, V\phi_j)| \leq ||V||_\infty.$$

v) Si mostri che, se $V(x) = u_0\delta(x - x_0)$, l'equazione integrale ammette la seguente soluzione esplicita:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - u_0 H(x_0 - x)\frac{\sin k(x - x_0)}{k} e^{ikx_0}.$$

Quindi:

$$\phi(x,k) = \frac{2ik - u_0}{2ik} e^{ikx} + \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik} e^{-ikx}, \quad x < x_0$$

$$T(k) = \frac{2ik}{2ik - u_0}, \qquad R(k) = \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik - u_0}.$$

Trovata la $\phi(x,k)$, si ricostruisca infine la $\psi(x,k) = \frac{2ik}{2ik-u_0}\phi(x,k)$.
vi) Si verifichi che la soluzione limitata trovata per $k \in \mathbb{R}$, se prolungata al di fuori dell'asse reale k, diverge sempre ad uno dei due infiniti, a meno che $k = -iu_0/2 \in i\mathbb{R}^+$. Quindi, se il potenziale di tipo delta è positivo ($u_0 > 0$), non esistono funzioni d'onda in $L_2(\mathbb{R})$; se, invece, è negativo, allora esiste una ed una sola funzione d'onda localizzata $\psi_1(x) := \phi(x, i|u_0|/2) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\psi_1(x) = H(x - x_0)e^{-\frac{|u_0|}{2}x} + H(x_0 - x)e^{\frac{|u_0|}{2}x}$$

corrispondente all'energia negativa $E_1 = k_1^2 = -u_0^2/4$, che descrive uno stato legato (una particella quantistica localizzata): $\sigma_p = \{E_1\}$.
vii) Si assuma che $V(x) = \epsilon v(x)$, $\epsilon << 1$. Si mostri allora che la soluzione $\phi(x,k)$ di tale equazione integrale può essere cercata come serie di potenze nel parametro ϵ e si ottenga, in particolare, i primi termini di tale sviluppo in serie (di Neumann), verificando che:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - \epsilon \int_x^{\infty} dy \frac{\sin k(x-y)}{k} v(y) e^{iky} + O(\epsilon^2),$$

$$T(k) = 1 + \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x) + O(\epsilon^2), \quad R(k) = \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x) e^{-2ikx} + O(\epsilon^2)$$

Riassumendo, l'operatore di Schrödinger stazionario $\hat{L} = -d^2/dx^2 + V(x)$, con $V(x)$ regolare e sufficientemente localizzato in $\mathbb{R}$ ($\int_{\mathbb{R}} |V(x)|(1+|x|)dx < \infty$), è un operatore non limitato e autoaggiunto in $L_2(\mathbb{R})$, con il seguente spettro: $\sigma(\hat{L}) = \sigma_p(\hat{L}) \cup \sigma_c(\hat{L}) = \{\lambda_j < 0\}_1^N \cup \mathbb{R}^+$. Per rendere rigorosi questi risultati, è utile introdurre l'operatore (integrale) risolvente $R_\lambda(\hat{L})$:

$$R_\lambda(\hat{L})y(x) = (\hat{L} - \lambda\hat{1})^{-1}y(x) = \int G(x,x')y(x')dx',$$

il cui nucleo $G(x,x')$ è la cosidetta funzione di Green dell'operatore $(\hat{L} - \lambda\hat{1})$, definita dall'equazione

$$(\hat{L} - \lambda\hat{1})G(x,x') = \delta(x - x'), \quad x, x' \in \mathbb{R}$$

con opportune condizioni al contorno (vedere la sezione 3.4.2). Essendo $\hat{L}$ autoaggiunto, l'operatore integrale $R_\lambda(\hat{L})$ è pure autoaggiunto ($\overline{G(x,x')} = G(x',x)$); inoltre è compatto. Il passaggio dall'operatore illimitato $\hat{L}$ all'operatore auoaggiunto e compatto $R_\lambda(\hat{L})$ permette di rendere rigorosi i precedenti risultati.

26) Si studi, usando la strategia dell'esercizio precedente, il seguente problema di scattering da potenziale

$$\phi''(x,k) + k^2\phi(x,k) = V(x)\phi(x,k), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \phi(x,k) \sim \ e^{-ikx}, \ x \sim -\infty$$

mostrando che, in questo caso, è conveniente usare la funzione di Green ritardata dell'operatore $d^2/dx^2 + k^2$ (vedere la sezione 1.2.2).

2.4 Funzione di Green

1) Si consideri un sistema fisico descritto dall'equazione differenziale lineare

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)R(x) = I(x), \quad x \in [a,b]$$

dove $L(\frac{d}{dx})$ è un operatore differenziale lineare rispetto alla variabile indipendente x, $I(x)$ è un dato input (forcing) esterno e $R(x)$, la soluzione da determinare, è la risposta del sistema all'input esterno. Si consideri inoltre la soluzione $G(x,x')$ del problema particolare:

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)G(x,x') = \delta(x-x'), \quad x,x' \in [a,b]$$

Essa prende il nome di *funzione di Green associata all'operatore* L; si noti che, in questa equazione, x' appare come parametro.
i) Si osservi che la funzione di Green ha il significato fisico di risposta del sistema all'input esterno impulsivo $\delta(x-x')$.
ii) Si osservi che la funzione di Green è definita a meno della soluzione generale $h(x)$ del problema omogeneo corrispondente: $Lh(x) = 0$; ovvero, che la differenza tra due funzioni di Green diverse G e $\tilde{G}$ è una soluzione dell'equazione omogenea:

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)[G(x,x') - \tilde{G}(x,x')] = 0$$

Tale arbitrarietà è di solito sfruttata quando si deve selezionare quella funzione di Green che soddisfa ad opportune condizioni al bordo.
iii) Si mostri che la soluzione dell'equazione di partenza ammette la seguente rappresentazione integrale in termini della funzione di Green:

$$R(x) = \int_a^b dx' G(x,x')I(x') + h(x)$$

molto utile sia per studiare le proprietà matematiche della soluzione, sia per estrarne le informazioni fisiche più rilevanti.
iv) Si mostri che, se $G(x,x',\lambda)$ è la funzione di Green dell'operatore $(L(d/dx)-\lambda)$, allora l'operatore integrale $\int_a^b dx' G(x,x',\lambda)\cdot$ è il risolvente di $(L(d/dx)-\lambda)$.

2) Dato l'operatore $\hat{L} = d/dt + 3$ e la distribuzione $g(t) = H(t)e^{-\gamma t}$, si calcoli $\hat{L}g(t)$ e si determini il valore di γ per il quale $g(t-t')$ è una funzione di Green dell'operatore $\hat{L}$.
Risp. $\gamma = 3$

3) Dato l'operatore $\hat{L} = d^2/dt^2 + 4$ e la distribuzione $g(t) = AH(t)\sin\omega t$, si calcoli $\hat{L}g(t)$ e si determini i valori di γ e di A per i quali $g(t-t')$ è una funzione di Green dell'operatore $\hat{L}$.
Risp. $\omega = 2,\ A = 1/\omega = 1/2$ ($\omega = -2$ non dà una soluzione distinta)

4) Trovare la soluzione $f(x)$ del seguente problema al contorno:

$$\left(x\frac{d}{dx} - 1\right) f(x) = 1, \quad f(1) = 1,$$

usando un'opportuna funzione di Green dell'operatore $d/dx - 1/x$.

5) Determinare il moto dell'oscillatore armonico forzato che è a riposo per $t < -5$ e soddisfa l'equazione:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \pi^2\right) x(t) = 3\delta(t^2 - 4).$$

6) Determinare la funzione di Green che risolve il problema al contorno:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x - x'), \quad 0 \le x, x' \le 1, \quad G(0,x') = G(1,x') = 0$$

che descrive, ad esempio, la configurazione assunta da una corda elastica, tesa orizzontalmente, soggetta ad una forza verticale che agisce sul punto x'.

Risp. $G(x,x') = -H(x'-x)(1-x')x - H(x-x')x'(1-x)$

7) Risolvere il problema al contorno:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + k^2u(x) = F(x), \quad 0 \le x, x' \le 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

dove $F(x)$ è un imput assegnato, attraverso la funzione di Green $G(x,x')$ del problema

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x-x'), \quad 0 \le x, x' \le 1, \quad G(0,x') = G(1,x') = 0$$

Risp.

$$\begin{aligned} &u(x) = \int_0^1 G(x,x')F(x')dx', \\ &G(x,x') = -H(x'-x)\tfrac{\sin kx \sin k(1-x')}{k \sin k} - H(x-x')\tfrac{\sin kx' \sin k(1-x))}{k \sin k} \end{aligned} \tag{83}$$

8) Funzione di Green fondamentale La funzione di Green più usata è la cosidetta *funzione di Green fondamentale*, che dipende da x e x' solo attraverso la differenza $x - x'$ e ammette la rappresentazione integrale di Fourier:

$$G_{fond}(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} \hat{G}(k).$$

Si mostri che:

$$L(d/dx)G(x-x') = \delta(x-x') \Rightarrow \hat{G}(k) = \frac{1}{L(ik)} \Rightarrow G_{fond}(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x-x')}}{L(ik)}$$

Nelle più comuni applicazioni fisiche $L(\cdot)$ è un polinomio nel suo argomento; quindi $L(ik)$ è un polinomio nella variabile di Fourier k. Il calcolo della funzione di Green fondamentale è quindi ricondotto alla valutazione di un integrale facilmente calcolabile usando il teorema dei residui:

$$G_{fond}(x-x') = iH(x-x') \sum_j Res(\frac{e^{ik(x-x')}}{L(ik)}, k_j^+) - iH(x'-x) \sum_j Res(\frac{e^{ik(x-x')}}{L(ik)}, k_j^-),$$

dove $k_j^{\pm}$ sono gli zeri di $L(ik)$ rispettivamente nel semipiano superiore e inferiore del piano complesso k. Un'attenzione particolare dovrà essere dedicata al caso in cui qualche zero di $L(ik)$ si trova sull'asse reale; in questo caso il cammino d'integrazione potrà essere scelto in uno dei seguenti modi. i) il cammino d'integrazione potrà disegnare un piccolo semicerchio che aggira la singolarità da sopra o da sotto; ii) l'integrale potrà essere inteso nel senso del valor principale. Queste tre scelte, tutte legittime dal punto di vista matematico, porteranno alla costruzione di tre funzioni di Green diverse; quale scelta effettuare dipenderà dal contesto fisico in cui tale calcolo è svolto.

9) Si mostri che la funzione di Green fondamentale per l'operatore del prim'ordine $\hat{L} = d/dt + \gamma, \ \gamma > 0$ (che descrive, ad esempio, il moto di una particella in un mezzo resistivo) è:

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{ik+\gamma} \quad \Rightarrow \quad G(t-t') = H(t-t')e^{-\gamma(t-t')}$$

Si verifichi inoltre che $\hat{L}G(t-t') = \delta(t-t')$.

10) Si usi la funzione di Green dell'esercizio precedente per mostrare che il moto di una particella in un mezzo resistivo, soggetta ad una forza esterna $I(t) = I_0 e^{-|t|}$ e ferma nel remoto passato, è descritto da:

$$R(t) = I_0 \left(H(t) \left[\frac{2e^{-\gamma t}}{1-\gamma^2} - \frac{e^{-t}}{1-\gamma} \right] + H(-t) \frac{e^t}{1+\gamma} \right)$$

Si giunga a tale risultato in due modi diversi: i) calcolando la funzione di Green fondamentale e poi calcolando l'integrale elementare $\int dt' G(t - t')I(t')$; ii) calcolando la trasformata di Fourier $\hat{I}$ e poi l'integrale di Fourier $\int (dk/2\pi) e^{ikt} \hat{G}(k) \hat{I}(k)$
$= \int (dk/2\pi) e^{ikt} \hat{I}(k)/L(ik)$, avendo usato, in qust'ultima strategia, il teorema di convoluzione.

11) Si mostri che la trasformata di Fourier della funzione di Green fondamentale per l'operatore del second'ordine $\hat{L} = d^2/dt^2 + \omega_0^2, \ \omega_0 > 0$ (che descrive, ad esempio, l'oscillatore armonico) è data da:

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{-k^2 + \omega_0^2}$$

Osservando che $\hat{G}(k)$ ha due poli semplici sul cammino d'integrazione, costruire le diverse funzioni di Green associate, mostrando che:
i) se il cammino d'integrazione evita le singolarità con due piccole semicirconferenze che aggirano le singolarità da sotto, allora si ottiene la cosidetta *funzione di Green ritardata*:

$$G_{rit}(t-t') = H(t-t') \frac{\sin \omega_0 (t-t')}{\omega_0}$$

Essa descrive la risposta dell'oscillatore, al tempo t, ad un input impulsivo verificatosi al tempo t' antecedente (ritardato). Tale risposta, ritardata, rispetta quindi il principio di causa - effetto.

ii) Se il cammino d'integrazione evita le singolarità con due piccole semicirconferenze che passano sopra, allora si ottenga invece la cosidetta *funzione di Green avanzata*:

$$G_{avan}(t-t') = H(t'-t)\frac{\sin\omega_0(t'-t)}{\omega_0}$$

Essa descrive la risposta, al tempo t, ad un input impulsivo verificatosi al tempo t' successivo. Tale risposta è quindi anticipata (avanzata) e non rispetta il principio di causa - effetto. Questa funzione di Green, non molto utile in un problema evolutivo, è invece largamente usata in problemi di scattering da potenziale, dove t è sostituita da x (si veda il problema di scattering di questa sezione).
iii) Se una semi-circonferenza evita ω_0 da sotto e l'altra evita $-\omega_0$ da sopra, si ottienga la cosidetta *funzione di Green di Feynmann, o causale*:

$$G_{Feyn}(t-t') = H(t-t')\frac{e^{i\omega_0(t-t')}}{2i\omega_0} + H(t'-t)\frac{e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i\omega_0}$$

Questa risposta non è quindi causale nel senso evolutivo classico . Lo diventa invece in un contesto quanto - relativistico, quando nella teoria sono presenti sia particelle, sia antiparticelle.
iv) Se l'integrale è inteso nel senso del valor principale, allora si ottenga la cosidetta *funzione di Green stazionaria*:

$$G_{staz}(t-t') = [H(t-t') - H(t'-t)]\frac{\sin\omega_0(t-t')}{2\omega_0}$$

12) Si verifichi, applicando l'operatore $L = d^2/dt^2 + \omega_0^2$ a tutte le funzioni $G(t-t')$ ottenute nell'esercizio precedente, che esse sono effettivamente funzioni di Green (cioè che $\hat{L}G(t-t') = \delta(t-t')$).

13) Si verifichi che la differenza tra due qualsiasi funzioni di Green dell'esercizio precedente è una soluzione dell'omogenea. Ad esempio, si verifichi che:

$$G_{rit}(t-t') - G_{avan}(t-t') = \frac{\sin\omega_0(t-t')}{\omega_0}$$

14) Si verifichi che la funzione di Green fondamentale per l'operatore del second'ordine $\hat{L} = d^2/dt^2 + 2\gamma d/dt + \omega_0^2,\ \gamma, \omega_0 > 0$ (che descrive, ad esempio, un oscillatore armonico smorzato) è data da:

$$G(t-t') = H(t-t')e^{-\gamma(t-t')}\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}, \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}, \quad \omega_0 > \gamma$$

$$G(t-t') = H(t-t')\frac{e^{-\gamma_- t} - e^{-\gamma_+ t}}{2\gamma\sqrt{1-(\omega_0/\gamma)^2}}, \ \ \gamma_\pm := \gamma(1 \pm \sqrt{1-(\omega_0/\gamma)^2}) > 0, \ \ \omega_0 < \gamma$$

15) Usando un'opportuna funzione di Green, si mostri che la dinamica di un oscillatore armonico che, nel remoto passato, oscilla liberamente: $R(t) \sim A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \ t \sim -\infty$ e che è soggetto all'input esterno $I(t) = I_0 e^{-|t|}$, è data da:

$$R(t) = \frac{I_0}{1+\omega_0^2}[H(t)\frac{2\sin\omega_0 t}{\omega_0} + e^{-|t|}] + A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

16) Usando un'opportuna funzione di Green, trovare la soluzione $x(t)$ del seguente problema al contorno per l'oscillatore armonico:

$$\begin{array}{l} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x(t) = \theta(t)(e^{-t} - e^{-3t}), \\ x(t) \sim \sin\omega t, \qquad t \to -\infty. \end{array} \tag{84}$$

17) Causalità e analiticità. Si consideri un sistema caratterizzato dalla seguente relazione integrale:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')I(t')dt' + H(t)$$

dove $I(t)$ esprime l'insieme delle interazioni del sistema con l'ambiente esterno (I come "input" esterno), $H(t)$ è lo stato normale del sistema in assenza di interazioni, $R(t)$ è la risposta del sistema all'imput esterno e la funzione $G(t,t')$ rappresenta "la suscettività del sistema".
i) Si mostri che le seguenti proprietà fisiche del sistema hanno le seguenti implicazioni matematiche:

$$linearita' \qquad \Leftrightarrow \qquad indipendenza\ di\ G(t,t')\ da\ I(t')$$

$$causalita' \quad \Leftrightarrow \quad G(t,t') = 0, \ t' > t, \quad \Leftrightarrow \quad G(t,t') = H(t-t')S(t,t')$$

$$Invarianza\ per\ traslazioni\ temporali \qquad \Leftrightarrow \qquad G(t,t') = G(t-t')$$

Quindi, un sistema fisico lineare, causale e invariante per traslazioni temporali è descritto dalla seguente relazione:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-t')I(t')dt' + h(t)$$

ii) Si osservi che, se il sistema lineare è descritto dall'equazione differenziale $L(d/dt)R(t) = I(t)$, allora la suscettività è nient'altro che la funzione di Green ritardata del sistema: $G_{rit}(t-t') = H(t-t')S(t-t')$.
iii) Si verifichi infine che, se l'input è impulsivo: $I(t) = I_0 \delta t - t_0)$, allora $R(t) = H(t-t_0)S(t-t_0) + H(t)$ (la risposta, successiva al momento in cui si verifica l'impulso, è completamente descritta dalla suscettività del sistema che, per questa ragione, è anche detta "risposta del sistema ad un evento impulsivo").

18) Introdotte le trasformate di Fourier di R, S e I:

$$\hat{R}(k) = \int_{\mathcal{R}} dt e^{-ikt} R(t), \quad \hat{I}(k) = \int_{\mathcal{R}} dt e^{-ikt} I(t), \quad \hat{S}(k) = \int_{\mathcal{R}} dt e^{-ikt} S(t)$$

si ottengano i seguenti risultati:
a) La proprietà di causalità si traduce, nello spazio di Fourier, nell'analiticità della funzione $\hat{S}(k)$ nel semipiano inferiore.
b) la rappresentazione integrale per la risposta $R(t)$ di un sistema invariante per traslazioni temporali si riduce alla semplice moltiplicazione (teorema di convoluzione)

$$\hat{R}(k) = \hat{G}(k)\hat{I}(k) + \hat{H}(k)$$

nello spazio di Fourier, rendendo estremamente utile studiare il problema in questo spazio.
c) Se il sistema è reale (se, cioè, un input reale induce una risposta anch'essa reale), allora le trasformate di Fourier in questione soddisfano alle relazioni:

$$\overline{I(\hat{k})} = \hat{I}(-k), \quad \overline{R(\hat{k})} = \hat{R}(-k), \quad k \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \overline{G(\hat{k})} = \hat{G}(-k), \ k \in \mathcal{R}.$$

19) Equazioni differenziali con la Trasformata di Fourier. Un sistema fisico lineare è descritto da un'equazione differenziale di ordine N nella variabile temporale:

$$L(d/dt)R(t) := \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n R}{dt^n}(t) = I(t),$$

dove i coefficienti a_k sono costanti reali.
i) Si mostri che, applicando la trasformata di Fourier all'equazione differenziale, quest'ultima si riduce al sistema algebrico:

$$L(i\omega)\hat{R}(\omega) = \hat{I}(\omega)$$

ii) Si verifichi che la soluzione generale del sistema algebrico, nel senso delle distribuzioni, è:

$$R(\omega) = \frac{\hat{I}(\omega)}{L(i\omega)} + \sum_j C_j \delta(\omega - \omega_j),$$

dove $\omega_j,\ j = 1,..,N$ sono le N radici (complesse) del polinomio $L(i\omega)$ e $C_j,\ j = 1,..,N$ sono costanti arbitrarie e $\delta(\cdot)$ è la delta di Dirac. Si osservi che il termine $\sum_j C_j \delta(\omega - \omega_j)$, soluzione generale dell'equazione algebrica omogenea, dà luogo alla soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea.
iii) La soluzione generale dell'equazione differenziale è infine ottenuta facendo l'antitrasformata di questa espressione:

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{R}(\omega) e^{i\omega t}.$$

Se, infine, la funzione $\hat{I}(\omega)$ è prolungabile al di fuori dell'asse reale ω, allora questo integrale è calcolabile col teorema dei residui.

20) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale del second'ordine non omogenea

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = t^n, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

col metodo della trasformata di Fourier, attraverso i seguenti passi.
i) Verificare che la trasformata di Fourier $\hat{u}(\omega)$ di $u(t)$ soddisfa all'equazione algebrica non omogenea

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\hat{u}(\omega) = \frac{2\pi}{(-i)^n} \delta^{(n)}(\omega),$$

dove $\delta^{(n)}$ è la derivata n-esima della delta di Dirac.
ii) Mostrare che la soluzione generale di tale equazione algebrica, nel senso delle distribuzioni, è:

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{2\pi}{(-i)^n} \frac{\delta^{(n)}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c\delta(\omega - \omega_0) + d\delta(\omega + \omega_0).$$

iii) Determinare $u(t)$ attraverso l'anti-trasformata di Fourier di $\hat{u}(\omega)$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

21) *Il feedback (o servo-meccanismo)* Quando il fenomeno fisico porta ad una risposta che tende a crescere troppo, spesso il sistema fisico reagisce riducendo l'input di una quantità proporzionale alla risposta eccessiva. Questo meccanismo di feedback è di solito descritto, nel caso lineare, attraverso la sostituzione $\hat{I}(k) \to \hat{I}(k) - \mu\hat{R}(k),\ \ \mu \in \mathbb{R}_+$. La risposta sarà data quindi dalla:

$$\hat{R}(k) = \frac{\hat{G}(k)}{1+\mu\hat{G}(k)}\hat{I}(k)$$

Se la funzione $\hat{G}$ è una funzione razionale del tipo $\hat{G}(k) = N(k)/D(k)$, allora:

$$\hat{R}(k) = \frac{N(k)}{D(k)+\mu N(k)}\hat{I}(k)$$

La causalità quindi impone che gli zeri $\{k_j\}$ del denominatore si debbano trovare nel semipiano superiore o, al limite, sull'asse reale. In questo caso, quindi, la risposta prende la forma:

$$R(t) = \sum_j Res\left(\frac{e^{ik_jt}\hat{N}(k)}{D(k)+\mu N(k)}\hat{I}(k),\ k_j\right),\quad Im\ k_j \geq 0.$$

Si osservi che la condizione $Im\ k_j > 0$ non solo è compatibile con la causalità, ma pure con la stabilità della solutione. In questo caso, infatti, i fattori e^{ik_jt} descrivono oscillazioni smorzate o, al limite, pure oscillazioni.

22) Problema di scattering. Si studi il problema di scattering da potenziale descritto dall'equazione di Schrödinger

$$-\psi''(x,k) + V(x)\psi(x,k) = k^2\psi(x,k),\quad x \in \mathbb{R},\quad k > 0,$$

dove $\psi(x,k)$, l'autofunzione dello spettro continuo dell'operatore di Schrödinger $-d^2/dx^2 + V(x)$, rappresenta la funzione d'onda di un fascio di particelle quantistiche che viene diffuso dal potenziale localizzato $V(x)$ e $\lambda = E = k^2 > 0$ è l'energia di tale fascio (lo spettro continuo $\sigma_c = \{\lambda > 0\}$), con le seguenti condizioni al contorno:

$$\psi(x,k) \sim\ R(k)e^{-ikx} + e^{ikx},\ x \sim -\infty;\qquad \psi(x,k) \sim\ T(k)e^{ikx},\ x \sim \infty$$

che descrivono un fascio incidente di particelle di vettore d'onda k ed intensità 1 che viene in parte riflesso ed in parte trasmesso attraverso il potenziale ($R(k)$ e $T(k)$ sono rispettivamente i coefficienti di riflessione e trasmissione).
i) Si osservi che la funzione $\phi(x,k) = \psi(x,k)/T(k)$ soddisfa al problema al contorno più semplice:

$$\phi''(x,k) + k^2\phi(x,k) = V(x)\phi(x,k),\quad x \in \mathbb{R},,\quad k > 0$$

$$\phi(x,k) \sim \frac{R(k)}{T(k)}e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{T(k)}, \ x \sim -\infty; \quad \phi(x,k) \sim \ e^{ikx}, \ x \sim \infty$$

e si usi la funzione di Green avanzata dell'operatore d^2/dx^2+k^2 per riscrivere tale problema sottoforma di equazione integrale di Volterra (vedere la sezione 3.4.2), ottenendo:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - \int_x^\infty dy \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)\phi(y,k)$$

e le seguenti rappresentazioni integrali dei coefficienti di riflessione e trasmissione:

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{-iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k), \quad \frac{R(k)}{T(k)} = \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k).$$

L'equazione integrale, equivalente all'equazione differenziale più la condizione al contorno, è la formulazione più conveniente del problema; la più utile per estrarre informazioni.
ii) Usare i risultati sulla teoria delle equazioni integrali per dedurre che la serie di Neumann della soluzione è uniformemente convergente; quindi la soluzione dell'equazione di Volterra esiste ed è unica per ogni potenziale $V(x)$ localizzato. Inoltre $\phi(x,k)e^{-ikx}$ e $1/T(k)$ sono analitiche nel semipiano superiore del piano complesso k (vedere la sezione 3.4.2).
iii) Siano $k_j, \ j = 1,..,N$ gli zeri della funzione $1/T(k)$ nel semipiano superiore del piano complesso k (i poli del coefficiente di trasmissione). Allora, poichè $\lambda_j = E_j = k_j^2 \in \mathbb{R}$, ne segue che a) k_j è immaginario puro: $k_j = ip_j, \ p_j > 0, \ j = 1,..,N$, b) le funzioni $\phi(x,k_j), \ j = 1,..,N$ sono esponenzialmente localizzate:

$$\phi_j(x) := \phi(x,k_j) = O(e^{-p_j|x|}), \quad |x| \to \infty, \quad j = 1,..N$$

e quindi sono le autofunzioni dell'operatore di Schrödinger in $L_2(\mathbb{R})$:

$$-\phi_j''(x) + V(x)\phi_j(x) = -p_j^2\phi_j(x), \quad x \in \mathcal{R}$$

corrispondenti agli autovalori negativi $\lambda_j = E_j = -p_j^2 < 0$ dell'energia (lo spettro discreto: $\sigma_p = \{-p_j^2\}_1^N$). Riassumendo: $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c = \{-p_j^2\}_1^N \cup \mathbb{R}^+$.
iv) Mostrare che l'insieme degli autovalori $\lambda_j = -p_j^2, \ j = 1,..,N$ è limitato inferiormente.
Sugg. Moltiplicare scalarmente l'equazione di Schrödinger per l'autofunzione ϕ_j normalizzata a 1, ottenendo:

$$\lambda_j - (\phi_j, V\phi_j) = (\phi_j', \phi_j') \geq 0 \ \Rightarrow \ |\lambda_j| \leq -(\phi_j, V\phi_j) \leq |(\phi_j, V\phi_j)| \leq ||V||_\infty.$$

v) Si mostri che, se $V(x) = u_0\delta(x - x_0)$, l'equazione integrale ammette la seguente soluzione esplicita:

$$\phi(x, k) = e^{ikx} - u_0 H(x_0 - x)\frac{\sin k(x - x_0)}{k}e^{ikx_0}.$$

Quindi:

$$\phi(x, k) = \frac{2ik - u_0}{2ik}e^{ikx} + \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik}e^{-ikx}, \quad x < x_0$$

$$T(k) = \frac{2ik}{2ik - u_0}, \qquad R(k) = \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik - u_0}.$$

Trovata la $\phi(x, k)$, si ricostruisca infine la $\psi(x, k) = \frac{2ik}{2ik - u_0}\phi(x, k)$.
vi) Si verifichi che la soluzione limitata trovata per $k \in \mathbb{R}$, se prolungata al di fuori dell'asse reale k, diverge sempre ad uno dei due infiniti, a meno che $k = -iu_0/2 \in i\mathbb{R}^+$. Quindi, se il potenziale di tipo delta è positivo ($u_0 > 0$), non esistono funzioni d'onda in $L_2(\mathbb{R})$; se, invece, è negativo, allora esiste una ed una sola funzione d'onda localizzata $\psi_1(x) := \phi(x, i|u_0|/2) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\psi_1(x) = H(x - x_0)e^{-\frac{|u_0|}{2}x} + H(x_0 - x)e^{\frac{|u_0|}{2}x}$$

corrispondente all'energia negativa $E_1 = k_1^2 = -u_0^2/4$, che descrive uno stato legato (una particella quantistica localizzata): $\sigma_p = \{E_1\}$.
vii) Si assuma che $V(x) = \epsilon v(x),\ \epsilon << 1$. Si mostri allora che la soluzione $\phi(x, k)$ di tale equazione integrale può essere cercata come serie di potenze nel parametro ϵ e si ottenga, in particolare, i primi termini di tale sviluppo in serie (di Neumann), verificando che:

$$\phi(x, k) = e^{ikx} - \epsilon \int_x^\infty dy \frac{\sin k(x - y)}{k}v(y)e^{iky} + O(\epsilon^2),$$

$$T(k) = 1 + \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x) + O(\epsilon^2), \quad R(k) = \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x)e^{-2ikx} + O(\epsilon^2)$$

23) Si studi, usando la strategia dell'esercizio precedente, il seguente problema di scattering da potenziale

$$\phi''(x, k) + k^2\phi(x, k) = u(x)\phi(x, k), \quad x \in \mathcal{R}, \qquad \phi(x, k) \sim\ e^{-ikx},\ x \sim -\infty$$

mostrando che, in questo caso, è conveniente usare la funzione di Green ritardata dell'operatore $d^2/dx^2 + k^2$.

2.5 Problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali con la serie e trasformata di Fourier

1) Si consideri il seguente problema di Cauchy (al valore iniziale sulla retta):

$$\begin{aligned} &[\partial/\partial t + i\omega(-i\partial/\partial x)]u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,t) \in L_2(\mathbb{R}) \text{ rispetto a } x. \end{aligned} \tag{85}$$

dove $\omega(-i\partial/\partial x)$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti e $u_0(x)$ è la condizione iniziale assegnata. Tale problema si risolve convenientemento con l'uso della trasformata di Fourier nel seguente modo.
i) Si mostri che la trasformata di Fourier $\hat{u}(k,t) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-ikx} u(x,t)$ della soluzione risolve il problema al valore iniziale per l'equazione differenziale ordinaria:

$$[d/dt + i\omega(k)]\hat{u}(k,t) = 0, \quad \hat{u}(k,0) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-ikx} u_0(x),$$

chiaramente più semplice di quello di partenza, che ha la soluzione esplicita $\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-i\omega(k)t}$. Quindi il problema di Cauchy ammette la seguente soluzione (esplicita a meno del calcolo di integrali di Fourier):

$$u(x,t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - i\omega(k)t} \hat{u}(k,0)$$

$$\hat{u}(k,0) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-ikx} u_0(x)$$

ii) Si mostri che tale soluzione può anche essere scritta nella forma:

$$u(x,t) = \int_{\mathcal{R}} dx' K(x-x',t) u_0(x'), \qquad K(x,t) := \int_{\mathcal{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - i\omega(k)t}$$

2) Usare i risultati dell'esercizio precedente per risolvere il problema di Cauchy per l'equazione del calore $u_t - u_{xx} = 0$ (che descrive fenomeni di diffusione) e per l'equazione di Schrödinger $iu_t + u_{xx} = 0$ (di una particella libera), mostrando che,
i) se $u(x,0) = u_0\delta(x-x_0)$, allora:

$$u(x,t) = u_0 \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad \text{equ. del calore}$$

$$u(x,t) = u_0 \frac{e^{i\frac{(x-x_0)^2}{4t} - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad \text{equ. di Schrödinger}$$

ii) se $u(x,0) = u_0 e^{-(\frac{x}{\Delta})^2}$, allora:

$$u(x,t) = \frac{u_0 \Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4t}} e^{-\frac{x^2}{\Delta^2+4t}}, \quad \text{equ. del calore}$$

$$u(x,t) = \frac{u_0 \Delta}{(\Delta^2 + 4it)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{\Delta^2+4it}}, \quad -\pi < arg\,(\Delta^2+4it) < \pi, \text{ equ. di Schrödinger.}$$

3) Si consideri una corda vibrante (descritta dall'equazione $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$) di lunghezza L, bloccata agli estremi. Si determini l'elevazione trasversale $u(x,t)$ del profilo nei due casi seguenti:
i) $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = f(x)$; ii) $u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0$.

Risp. *i)* $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi v}{L}t) \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad \beta_n = \frac{2}{n\pi} \int\limits_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$

ii) $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\frac{n\pi v}{L}t) \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad \alpha_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L g(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$

4) Si consideri una sbarra metallica di lunghezza L mantenuta alle temperature costanti T_1 e T_2 agli estremi $x = 0$ e $x = L$ rispettivamente. Se la temperatura iniziale è $u(x,0) = u_0(x),\ 0 < x < L$, si determini la temperatura $u(x,t)$ della sbarra al variare del tempo (si usi l'equazione del calore: $u_t - a^2 u_{xx} = 0$) e si valuti tale temperatura per $t >> 1$ (suggerimento: risolvere prima il caso $T_1 = T_2 = 0$ e poi quello generale).

Risp. $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1,$

$c_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L [u_0(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1] \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$

5) Si consideri una sbarra metallica di lunghezza L soggetta ai flussi di calore $u_x(0,t) = \phi_1$ e $u_x(L,t) = \phi_2$ costanti ai bordi $x = 0$ e $x = L$ rispettivamente. Si determini la temperatura $u(x,t)$ sapendo che $u(x,0) = u_0(x)$.

6) Si consideri una superficie metallica di forma rettangolare (lati a e b) il cui bordo è mantenuto alla temperatura costante T_0. Si determini la temperatura $u(x,y,t),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b$ della superficie metallica al variare del tempo (usando l'equazione del calore $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$), se la temperatura iniziale è descritta dalla funzione $u(x,y,0) = u_0(x,y)$.

7) Si consideri l'equazione di Schrödinger non stationaria $i\psi_t + \psi_{xx} + V(x)\psi = 0$ con $V(x) = 0,\ 0 < x < L;\ V(x) = \infty,\ x < 0,\ x > L$. Si determini l'evoluzione della funzione d'onda $\psi(x,t)$ soggetta alla condizione iniziale $\psi(x,0) = \psi_0(x)$ assegnata.

Risp. $\psi(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad c_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \psi_0(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$