MATERIALE DEL CORSO DI

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

a cura di Paolo Maria Santini

http://www.roma1.infn.it/people/santini/

Docente del corso: Paolo Maria Santini

email: paolo.santini@roma1.infn.it

ufficio 43, primo piano, ed. Marconi - tel. 0649914239

Esercitatore: Ugo Aglietti

email: ugo.aglietti@roma1.infn.it

ufficio BIB-1, secondo piano, ed. Marconi - tel. 0649914855

Esercitatore: Stefano Arnone

email: stefano.arnone@roma1.infn.it

ufficio n. 145, secondo piano, ed. Marconi - tel. 0649914293

August 20, 2005

PROGRAMMA DEL CORSO; AA 2004-05

TESTI CONSIGLIATI

ELENCO TESINE PER L'ESAME ORALE; AA 2004-05

RACCOLTA DI ESERCIZI

ESONERI E SCRITTI PROPOSTI

1 PROGRAMMA DETTAGLIATO (e provvisorio) DEL CORSO; AA 2004-05

1.0.1 Richiami di algebra lineare.

Matrici quadrate e rettangolari. Determinante di una matrice quadrata. Minori di una matrice, ordine dei suoi minori e rango della matrice come il massimo ordine dei sui minori. Sistemi di equazioni lineari sotto-determinati, determinati e sovra-determinati. Sistemi omogenei. Forma matriciale $A\underline{x} = \underline{b}$ del sistema lineare e del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ associato, con A matrice rettangolare $n \times m$, $\underline{x}$ vettore m - dimensionale e $\underline{b}$ vettore n - dimensionale. Esistenza e unicità della soluzione $\underline{x}$ del sistema e relazione con il rango della matrice rettangolare A e della sua aumentata $[A, \underline{b}]$.

1.0.2 Spazi vettoriali

· **Definizione di spazio vettoriale** V sul campo $\mathbb{R}$ (o sul campo $\mathbb{C}$) come insieme di oggetti (vettori) $\underline{v} \in V$ su cui sono definite due operazioni; un'operazione interna, la *somma*, che gode della proprietà associativa e commutativa, e un'operazione esterna, il *prodotto per uno scalare* $\alpha \in \mathbb{R}$, (o $\alpha \in \mathbb{C}$), che gode della proprietà associativa e distributiva (rispetto alla somma di scalari e di vettori). Esistenza del vettore nullo $\underline{0}$ e del vettore opposto $-\underline{v}$.
· **Esempi significativi di spazi vettoriali**: lo spazio dei vettori ordinari in $\mathbb{R}^3$ e quello dei quadrivettori in $\mathbb{M}^4$; lo spazio $\mathbb{R}$ dei reali; lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-ple di numeri reali; lo spazio $\mathbb{C}$ dei numeri complessi; lo spazio $\mathbb{C}^n$ delle n-ple di numeri complessi; lo spazio $Mat(n, \mathbb{R})$ $(Mat(n, \mathbb{C}))$ delle matrici $n \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio $\mathcal{P}_n$ dei polinomi di grado $n-1$ a coefficienti reali (complessi); le successioni $\{x_n\}$ di numeri reali (complessi); lo spazio degli stati $|\psi >$ (kets) di un sistema fisico in Meccanica Quantistica; lo spazio $C_{[a,b]}$ delle funzioni reali (complesse) continue sull'intervallo reale $[a, b]$; lo spazio $L_p([a, b])$, $p \in \mathbb{N}^+$.
· **Dipendenza ed indipendenza lineare** di un insieme di vettori $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^m \subset V$. Dipendenza ed indipendenza lineare di un insieme di vettori $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}^n$, con $\underline{v}^{(j)} = (v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_n^{(j)})^T$; relazione tra il rango della matrice $(v_i^{(j)})$, $i = 1, .., n$, $j = 1, .., m$ ed il numero m di vettori. Esempi.
· **Dimensione di uno spazio vettoriale** V.

· **Base** $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$ in V. Sviluppo di un generico vettore $\underline{v} \in V$ nella base:

$$\underline{v} \in V \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_j \underline{e}^{(i)}, \quad v_i \in \mathbb{R} \quad (v_i \in \mathbb{C}).$$

Coordinate (componenti) v_i, $i = 1, \ldots, n$ del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$.
· Illustrazione dei concetti di dipendenza e indipendenza lineare, di dimensione e di base attraverso gli esempi significativi.
· **Isomorfismo tra spazi vettoriali**; esempio: $\mathcal{P}_n$ è isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Isomorfismo tra tutti gli spazi vettoriali reali (complessi) di dimensione finita n; ruolo speciale giocato dallo spazio $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$.
· **Sottospazio vettoriale**. Definizione; esempi banali: V e $\{\underline{0}\}$. Esempio non banale: l'inviluppo (span) lineare di m vettori indipendenti. Esempi significativi in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathcal{P}_n$. Sottospazi aventi intersezione nulla e loro somma diretta $\oplus$. $\dim(V_1 \oplus V_1)$=$\dim V_1$+$\dim V_2$. Sottospazi complementari rispetto a V. Esempi significativi in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathcal{P}_n$.
· Coordinate di un vettore in diverse basi di V. **Trasformazioni di coordinate**.

1.0.3 Spazi euclidei

· **Spazio euclideo** come spazio vettoriale complesso (reale) dotato di *prodotto scalare*. Proprietà assiomatiche del prodotto scalare. Definizioni indotte di *norma (lunghezza)* di un vettore; di *distanza* tra due vettori e di *angolo* tra due vettori.
· Esempi di spazi euclidei (tutti gli spazi vettoriali significativi precedentemente introdotti) con i loro prodotti scalari.
· Definizione di **ortogonalità di due vettori**. Indipendenza di un insieme di vettori ortogonali e osservazione che n vettori ortogonali costituiscono una base dello spazio euclideo n-dimensionale V. Esistenza di basi ortonormali e loro costruzione da una base generica attraverso il **procedimento di ortogonalizzazione di Gram - Schmidt**.
· Espressione della coordinata i-esima v_i del vettore $\underline{v}$ e della componente A_{ij} della matrice A che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ mediante il prodotto scalare: $v_i = (\underline{e}^{(i)}, \underline{v})$, $A_{ij} = (\underline{e}^{(i)}, \hat{A}\underline{e}^{(j)})$, se la base è ortonormale.
· **Uguaglianza di Parseval**; **disuguaglianza di Bessel**; **disuguaglianza di Cauchy - Schwartz** e disuguaglianza triangolare. Teorema di Pitagora.

1.0.4 Elementi di Analisi Funzionale

· **Spazi vettoriali metrici e normati, euclidei e non**. Esempi significativi: lo spazio $\mathbb{C}_2^n = (\mathbb{C}^n, d_2)$ degli elementi di $\mathbb{C}^n$ dotati di metrica $d_2(\underline{x}, \underline{y}) = ||\underline{x} - \underline{y}||_2$; lo spazio $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, d_\infty)$ degli elementi di $\mathbb{C}^n$ dotato della metrica $d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \max_{k=1..n} |x_k - y_k|$; lo spazio l_2 delle successioni modulo quadro convergenti con distanza d_2; gli spazi metrici $C_2[a,b] = (C[a,b], d_2)$ e $C[a,b]$ delle funzioni continue con, rispettivamente, le metriche:

$$d_2(f,g) = \left(\int_a^b dt |f(t) - g(t)|^2 \right)^{1/2}, \quad d_\infty(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Disuguaglianza di Holder e di Minkowski (senza dimostrazione). Topologia indotta dalla metrica: sfera aperta e chiusa; ϵ-intorno; punto di aderenza; chiusura di un insieme; punto di accumulazione; insieme chiuso e aperto; insieme denso e ovunque denso; spazio metrico separabile. Esempi significativi di insiemi ovunque densi e di spazi metrici separabili: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$; .... Successioni di Cauchy e completezza di uno spazio metrico. Esempi significativi: .... Base in uno spazio metrico. Esempi significativi di ....
· **Spazi metrici completi e teorema delle contrazioni** (o del punto fisso). Metodo delle approssimazioni successive). Applicazioni di tale teorema i) alla soluzione di equazioni trascendenti. ii) Alla ricerca di punti fissi di mappe. iii) Teorema di esistenza e unicità locale della soluzione del problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie. iv) Teoremi di esistenza e unicità delle soluzioni di equazioni integrali di Fredholm e di Volterra.

1.0.5 Funzionali lineari e distribuzioni

· Definizione di **funzionale lineare su uno spazio vettoriale** V. Il funzionale "componente j-esima" di un vettore come esempio significativo di funzionale lineare. Lo spazio dei funzionali lineari è esso stesso uno spazio vettoriale V^*, detto il duale di V. Base duale. Espressione generale di un funzionale lineare f sul generico vettore $\underline{v} \in V$ nel caso discreto e continuo:

$$f(\underline{v}) = \sum_k f_k v_k, \quad f(\underline{v}) = \int f(t) v(t) dt.$$

· **Funzionali regolari e singolari** ed il funzionale "**delta di Dirac**": δ_{t_0}, definito dalla $\delta_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$. Spazi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$ delle funzioni di prova e nozione di convergenza in tali spazi; continuità del funzionale. Formalizzazione dei concetti di punto materiale, carica puntiforme e forza impulsiva attraverso la funzione $\delta(t)$ di Dirac. **Successione di funzioni $f_n(x) = np(nx)$ che convergono alla delta** in senso debole. Esempi: la lorenziana $\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$ e la gaussiana $ne^{-n^2x^2}/\pi$. Il **lemma di Riemann-Lebesque** e la dimostrazione che $\frac{\sin(nx)}{\pi x} \to \delta(x)$, $n \to \infty$, in senso debole. **La derivata di una distribuzione** e la **funzione gradino $\theta(x)$ di Heaviside**.

1.1 Operatori lineari

· **Definizione di operatore (trasformazione, applicazione) lineare $\hat{A}$** sullo spazio vettoriale V, $\hat{A}: V \to V$; generalizzazione della definizione al caso di trasformazione lineare tra due spazi vettoriali X e Y diversi.
· **Esempi significativi**: le matrici $Mat(n, \mathbb{C})$ sullo spazio $\mathbb{C}^n$; le matrici $(n \times m)$ tra gli spazi $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{C}^n$; gli operatori integrali

$$\hat{I} := \int_a^t dt' \cdot, \quad \hat{K} = \int_a^b dt' K(t,t') \cdot, \quad \hat{K} = \int_a^t dt' K(t,t') \cdot$$

sui polinomi di grado finito e sulle funzioni continue e quello di derivazione $\hat{D} = d/dt$ sui polinomi di grado finito e sulle funzioni $C^1[a,b]$. L'operazione di traslazione $\hat{T}f(t) = f(t+d)$ sui polinomi di grado finito e sulle funzioni continue.
· **Rappresentazione, rispetto ad una base di V, dell'operatore $\hat{A}: V \to V$ come matrice quadrata** A; rappresentazione, rispetto alle basi di X, Y, dell'operatore $\hat{A}: X \to Y$ come matrice rettangolare.
· **Isomorfismo tra lo spazio degli operatori su V (dim$V = n$) e le matrici** $(n \times n)$; isomorfismo tra lo spazio degli operatori su $V: X \to Y$ (dim$X = m$, dim$Y = n$) e le matrici $(n \times m)$. Prodotto di operatori come prodotto di matrici; trasformazione di un vettore come prodotto di una matrice per un vettore colonna. Le rappresentazioni matriciali di esempi significativi di operatori, come gli operatori $\hat{D}$ e $\hat{T}$.
· **Dominio, Range (codominio) $\mathcal{R}(\hat{A})$ e Ker (nucleo) $\mathcal{N}(\hat{A})$ dell'operatore** $\hat{A}$ come sottospazi di V. dim$\mathcal{R}(\hat{A})$+dim$\mathcal{N}(\hat{A})$=dim$V$=n. Rango dell'operatore $\hat{A}$ (e della matrice A che lo rappresenta) come dimensione di $\mathcal{R}(\hat{A})$.
· **Proiettori**. Sia M un sottospazio di V, e N un suo complemento: $V = M \oplus N$, $dim(M) + dim(N) = dim(V)$. Definizione di *proiettore $\hat{P}_M$ su M lungo N*. Osservazione che $\hat{I} - \hat{P}_M$ proietta su N lungo M. CNES affinchè un operatore $\hat{P}$ sia un proiettore è che sia *idempotente* (cioè che $\hat{P}^2 = \hat{P}$). Se

$\{\underline{v}^{(k)}\}$ è una base di $\mathbb{C}^n$, allora la matrice $P^{(i)} = TP_0^{(i)}T^{-1}$ è il proiettore sul sottospazio unidimensionale generato da $\underline{v}^{(i)}$ lungo il sottospazio generato dai restanti vettori della base (T è la matrice che ha per colonne i vettori di base e $P_0^{(i)}$ è la matrice diagonale il cui elemento (ii) è 1 e tutti gli altri elementi sono nulli). Gli operatori $P^{(i)},\ i = 1,..,n$ sono caratterizzati dalle equazioni:

$$P^{(i)}P^{(j)} = \delta_{ij}P^{(i)},\ i,j = 1,..,n, \quad \sum_{i=1}^{n} P^{(i)} = I.$$

· **Invertibilità di un operatore** come esistenza e unicità del vettore $\underline{x} \in V$ tale che $\hat{A}\underline{x} = \underline{y}$, per ogni $\underline{y} \in V$. Dimostrazione che, se V è finito-dimensionale, allora l'invertibilità di $\hat{A}$, la proprietà $\mathcal{R}(\hat{A}) = V$ e la proprietà $\mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{0}\}$ sono equivalenti. *Inverso* $\hat{A}^{-1}$ *di un operatore* $\hat{A}$ su V (tale che : $\hat{A}^{-1}\underline{y} = \underline{x}$; con $\hat{A}^{-1}A = A\hat{A}^{-1} = I$).

· **Operatori limitati e non** su spazi normati. L'operatore integrale $\hat{K}$ come esempio di operatore limitato (per il quale esiste $C > 0$ tale che $||\hat{K}f|| < C||f||$); l'operatore di derivazione come esempio di operatore non limitato. Operatore di contrazione $\hat{K}$ ed esistenza dell'inverso $(\hat{1}-\hat{K})^{-1}$ dell'operatore $(\hat{1} - \hat{K})$.

· **Cambiamento di base**. Rappresentazioni di operatori lineari in diverse basi di V. Due matrici A' e A sono le rappresentazioni in basi diverse dello stesso operatore $\hat{A}$ se e solo se sono legate dalla **trasformazione di similitudine** $A' = TAT^{-1}$, dove T è la matrice di trasformazione delle corrispondenti basi: $\underline{e}'^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} T_{kj}\underline{e}^{(k)}$ Invarianza della traccia, del determinante di una matrice e, più in generale, del suo polinomio caratteristico, rispetto a trasformazioni di similitudine permette di parlare di traccia, determinante e polinomio caratteristico dell'operatore stesso.

1.1.1 Teoria spettrale degli operatori lineari

· **Sottospazi invarianti** rispetto ad un operatore $\hat{A}$. *Sottospazi invarianti unidimensionali* ed **equazione agli autovalori**; *autovalori ed autovettori* di un operatore $\hat{A}$. Gli autovalori di $\hat{A}$ come zeri del polinomio caratteristico $det(A - \lambda I)$; esistenza di almeno un autovettore di un operatore $\hat{A}$ nel complesso. Teorema sulla diagonalizzabilità di un operatore lineare $\hat{A}$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita n: i) tale operatore è diagonalizzabile se e solo se possiede n autovettori indipendenti; ii) la matrice T della trasformazione di similitudine che porta A nella sua forma diagonale

$diag(\lambda_1, .., \lambda_n) = T^{-1}AT$ ha per colonne gli autovettori di A; iii) A ammette la decomposizione spettrale $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P^{(k)}$. Condizione sufficiente per l'esistenza di $m \leq n$ vettori indipendenti è che $\hat{A}$ possegga m autovalori distinti. Problema agli autovalori per l'operatore diadico $\hat{K}$ agente su uno spazio euclideo finito o infinito-dimensionale e sua riduzione al caso finito-dimensionale.

1.1.2 Operatori hermitiani, unitari, diadici e di proiezione

· **Hermitiano coniugato** $\hat{A}^\dagger$ dell' operatore $\hat{A}$. Definizione, in uno spazio euclideo E, e sua unicità. Involutività dell'operazione di coniugazione hermitiana. La rappresentazione $A^\dagger$ dell'operatore $\hat{A}^\dagger$ in una base ortonormale è la matrice hermitiana coniugata della matrice A che rappresenta $\hat{A}$ nella stessa base: $(A^\dagger)_{ij} = \bar{A}_{ji}$.
· I coefficienti del polinomio caratteristico di $\hat{A}^\dagger$ sono i complessi coniugati dei coefficienti del polinomio caratteristico di $A^\dagger$; quindi, in particolare: $\det\hat{A}^\dagger = \overline{det\hat{A}}$, tr $\hat{A}^\dagger = \overline{tr\hat{A}}$, $\{autovalori\ di\ \hat{A}^\dagger\} = \overline{\{autovalori\ di\ \hat{A}\}}$. L'hermitiano coniugato di una combinazione lineare di operatori, del prodotto di operatori e dell'inverso di un operatore. Le forti analogie tra l'operazione di coniugazione complessa di un numero complesso e l'operazione di coniugazione hermitiana di un operatore.
· **Operatore hermitiano (auto-aggiunto)** come operatore invariante rispetto all'operazione di coniugazione hermitiana: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ e sua rappresentazione, rispetto a basi ortonormali, in termini di matrici hermitiane (cioè tali che: $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$).
· Proprietà di operatori hermitiani: i) CNES affinchè un operatore sia hermitiano è che la sua forma quadratica $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})$ (detta, in questo caso, forma hermitiana) sia reale $\forall \underline{x} \in V$; ii) i coefficienti del polinomio caratteristico sono reali e, quindi, gli autovalori sono reali; iii) autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali; iv) ogni operatore $\hat{A}$ ammette la rappresentazione cartesiana: $\hat{A} = \hat{B} + i\hat{C}$, con $\hat{B}, \hat{C}$ operatori hermitiani. Operatori hermitiani definiti positivi. Operatore di Schrödinger stazionario su $L_2(\mathbb{R})$ come operatore hermitiano e il suo problema agli autovalori (cenni).
· **Operatore diadico**. Definizione di operatore diadico:

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{m} \underline{a}_k \underline{b}_k^\dagger = \sum_{k=1}^{m} |a_k >< b_k|, \quad \underline{a}_k,\ \underline{b}_k \in E$$

su uno spazio euclideo E finito o infinito-dimensionale. Nucleo e immagine; rango finito di tale operatore.

· **Proiettori ortogonali**. Dato il sottospazio M dello spazio euclideo E, si definisce la proiezione ortogonale di un generico $\underline{x} \in E$ sul sottospazio M come quel vettore $\underline{x}_M$ tale che $\underline{x} - \underline{x}_M$ è ortogonale a tutti i vettori di M. Tale proiezione esiste ed è unica e definisce la minima distanza tra $\underline{x} \in E$ ed il sottospazio M. Se $\{\underline{v}^{(k)}\}_1^m = \{|v^{(k)} >\}_1^m$ è una base ortonormale del sottospazio M (di dimensione m, finita o infinita), avente componenti $v_j^{(k)}, \ k = 1,..,m, \ j = 1,..,n$ rispetto ad una base ortonormale $\{\underline{e}^{(k)}\}_1^n$ di E, allora l'operatore $\hat{P}$ di proiezione ortogonale su $M : \hat{P}\underline{x} = \underline{x}_M$ è dato dalla:

$$\hat{P} = \sum_{k=1}^{m} \underline{v}^{(k)} \underline{v}^{(k)\dagger} = \sum_{k=1}^{m} |v^{(k)} >< v^{(k)}| \quad \Rightarrow \quad \hat{P}\underline{x} = \underline{x}_M = \sum_{k=1}^{m} (\underline{v}^{(k)}, \underline{x}) \underline{v}^{(k)} \tag{1}$$

(è quindi un esempio particolare di operatore diadico nel quale: $|a_k >= |b_k >= |v^{(k)} >$ e $< v^{(k)}|v^{(j)} >= \delta_{kj}$), e la sua rappresentazione matriciale P nella base ortonormale $\{\underline{e}^{(k)}\}_1^n$ di E è data dalla $P_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} v_i^{(k)} \overline{v_j^{(k)}}$.

Il proiettore ortogonale, oltre a essere idempotente, è anche hermitiano positivo. Il complemento ortogonale $M^{\perp}$ (che esiste ed è unico) del sottospazio M è l'immagine di $\hat{I} - \hat{P}$. Esempi significativi: i) in $\mathbb{C}^n$ e ii) la serie di Fourier troncata come proiezione ortogonale di una funzione di $L_2[0, 2\pi]$ sul sottospazio dei polinomi trigonometrici di ordine finito.

· Definizione di **operatore unitario** $\hat{U}$: $\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \hat{I}$ (nel caso finito dimensionale essa implica $|det\hat{U}| = 1$, l'invertibilità di $\hat{U}$ e $\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{I}$, $\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{-1}$). La rappresentazione matriciale U di $\hat{U}$ è data da matrici unitarie: $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = I$, $U^{\dagger} = U^{-1}$ (matrici ortogonali, nel caso reale).

· Proprietà di operatori unitari: 1) un operatore $\hat{U}$ è unitario se e solo se: i) è un'*isometria*, lascia cioè invariante il prodotto scalare tra due generici vettori; ii) lascia invariante la norma di un generico vettore; iii) trasforma basi ortonormali in basi ortonormali; iv) la matrice che lo rappresenta è tale che le sue colonne (e le sue righe) definiscono un sistema di vettori ortonormali. 2) gli autovalori di un operatore unitario hanno modulo 1, gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali. 3) Se $\hat{A}$ è hermitiano, allora $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{\dagger}$ è hermitiano.

· **Uno operatore hermitiano su uno spazio euclideo di dimensione** n **ammette** n **autovettori ortogonali** (è sempre diagonalizzabile attraverso una trasformazione unitaria). La dimostrazione si basa sul fatto che, se $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$ e M è un suo sottospazio invariante, allora anche il complemento ortogonale di M è un sottospazio invariante.

1.2 Serie e Trasformata di Fourier

La serie di Fourier troncata come proiezione ortogonale di un elemento di L_2 su un sottospazio finito dimensionale; la **serie di Fourier completa come sistema ortonormale e completo in** L_2. Disuguaglianza di Bessel ed equazione di Parseval. **Nucleo di Dirichlet, condizione di Dini e teorema di Fejer**. Sviluppo in serie di Fourier di funzioni elementari. **Relazione di Parseval**. Nucleo di convoluzione. **Trasformata di Fourier** come limite continuo della serie di Fourier. **Antitrasformata di Fourier** e condizione di Dini. Equazione di Parseval. Nucleo di convoluzione. Uso della Trasformata di Fourier per risolvere equazioni differenziali alle derivate ordinarie e parziali della Fisica - Matematica (cenni).

1.3 Funzione di Green

· Definizione di **funzione di Green** $G(x, x')$ **di un operatore** e suo significato fisico. Costruzione della funzione di Green di operatori differenziali del primo e secondo ordine con condizioni al contorno opportune. Uso della funzione di Green sia per trovare la rappresentazione integrale della soluzione di problemi al contorno per equazioni differenziali del primo e secondo ordine, sia per convertirle in equazioni integrali, più semplici da studiare dal punto di vista matematico. Uso della Trasformata di Fourier per costruire la **funzione di Green fondamentale** $G(x - x')$ di operatori differenziali a coefficienti costanti.

1.4 Equazioni integrali

· **Equazioni di Volterra e di Fredholm lineari**. Equazioni omogenee associate e relativi **problemi agli autovalori**. **Operatore integrale come contrazione**; esistenza, unicità e costruzione della soluzione di equazioni integrali col metodo delle approssimazioni successive. L'operatore diadico su spazi funzionali è un **operatore integrale con nucleo separabile**. Risoluzione di eequazioni integrali con nucleo separabile attraverso la soluzione del sistema algebrico corrispondente. Operatore compatto come limite in norma di una successione di operatori diadici. **Teorema dell'alternativa di Fredholm**.

1.5 Equazioni differenziali alle derivate parziali

Equazione del calore ed equazione di Schrödinger non stazionaria. Problemi di Cauchy sulla retta con la trasformata di Fourier.

2 TESTI CONSIGLIATI

Gli argomenti svolti in questo corso sono un sottoinsieme di quelli contenuti nel libro (attenzione agli errori di stampa!):

1) C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, "Metodi Matematici della Fisica", Carocci Editore, Roma, 2002.

Si consiglia anche:

2) F. Calogero, "Metodi Matematici della Fisica", Dispense Istituto di Fisica, Universita' di Roma, 1975. Materiale reperibile su rete all'indirizzo:
http://www.phys.uniroma1.it/web_disp/d1/index.html

Inoltre, per ulteriori approfondimenti:

3) B. Friedman, "Principles and techniques of applied mathematics", Dover Publications, New York 1990.

4) S. Fomin, A. Kolmogorov, "Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale", MIR 1980

5) I. M. Gel'fand, "Lectures on Linear Algebra", Dover Publications, NY, 1989.

6) G. Fano, "Metodi matematici della Meccanica Quantistica", Zanichelli, Bologna, 1967.

7) V. Smirnov, "Corso di Matematica Superiore", Volume II, Editori Riuniti, 1977.

8) I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, "Generalized functions", Vol.1, Academic Press, 1964.

9) P. Dennery, A. Krzwicki, "Mathematics for Physicists", Harper and Row, 1967.

3 ELENCO DELLE TESINE PER L'ESAME ORALE; A.A. 2004-05

L'esame orale consiste nella presentazione di una delle seguenti tesine, a scelta del candidato.

3.1 Teoria spettrale di operatori finito e infinito dimensionali

Sottospazi invarianti unidimensionali ed equazione agli autovalori; autovalori ed autovettori di un operatore $\hat{A}$. Gli autovalori di $\hat{A}$ come zeri del polinomio caratteristico $det(A - \lambda I)$; esistenza di almeno un autovettore di un operatore $\hat{A}$ nel complesso. Teorema sulla diagonalizzabilità di un operatore lineare $\hat{A}$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita n: i) tale operatore è diagonalizzabile se e solo se possiede n autovettori indipendenti; ii) la matrice di trasformazione di similitudine T che porta A nella sua forma diagonale $diag(\lambda_1, .., \lambda_n) = T^{-1}AT$ ha per colonne gli autovettori di A; iii) A ammette la decomposizione spettrale $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P^{(k)}$. Condizione sufficiente per l'esistenza di $m \leq n$ vettori indipendenti è che $\hat{A}$ possegga m autovalori distinti. Teorema sulla diagonalizzabilità di un operatore hermitiano $\hat{A}$ su uno spazio vettoriale di dimensione finita n: l'operatore hermitiano su uno spazio euclideo di dimensione n ammette n autovettori ortogonali (è sempre diagonalizzabile attraverso una trasformazione unitaria). Operatori integrali con nucleo separabile e, più in generale, compatti; problema agli autovalori associato. Teorema dell'alternativa.

3.2 Operatori hermitiani e unitari

Definizione di operatore hermitiano e sue proprietà rilevanti: i) CNES affinchè un operatore sia hermitiano è che la sua forma quadratica $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})$ (detta, in questo caso, forma hermitiana) sia reale $\forall \underline{x} \in V$; ii) i coefficienti del polinomio caratteristico sono reali e, quindi, gli autovalori sono reali; iii) autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali; iv) ogni operatore $\hat{A}$ ammette la rappresentazione cartesiana: $\hat{A} = \hat{B} + i\hat{C}$, con $\hat{B}, \hat{C}$ operatori hermitiani. Operatori hermitiani definiti positivi. Proiettore ortogonale $\hat{P}$ e complemento ortogonale $M^{\perp}$ del sottospazio M. Esempi significativi: i) in $\mathbb{C}^n$ e ii) la serie di Fourier troncata come proiezione ortogonale di una funzione di $L_2[0, 2\pi]$ sul sottospazio dei polinomi trigonometrici di ordine finito. Teorema sulla diagonalizzazione di un operatore hermitiano finito-dimensionale: un operatore hermitiano su uno spazio euclideo di dimensione

n ammette n autovettori ortogonali (è sempre diagonalizzabile attraverso una trasformazione unitaria). Definizione di operatore unitario. La rappresentazione matriciale U di $\hat{U}$ è data da matrici unitarie: $U^\dagger U = UU^\dagger = I$, $U^\dagger = U^{-1}$ (matrici ortogonali, nel caso reale). Proprietà di operatori unitari: 1) un operatore $\hat{U}$ è unitario se e solo se: i) è un'*isometria*, lascia cioè invariato il prodotto scalare tra due generici vettori; ii) lascia invariata la norma di un generico vettore; iii) trasforma basi ortonormali in basi ortonormali; iv) la matrice che lo rappresenta è tale che le sue colonne (e le sue righe) definiscono un sistema di vettori ortonormali. 2) gli autovalori di un operatore unitario hanno modulo 1, gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali. 3) Se $\hat{A}$ è hermitiano, allora $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger$ è hermitiano.

3.3 Funzionali lineari, distribuzioni e funzione di Green

Definizione di funzionale lineare su uno spazio vettoriale V. Il funzionale "componente j-esima" di un vettore come esempio significativo di funzionale lineare. Lo spazio dei funzionali lineari è esso stesso uno spazio vettoriale V^*, detto il duale di V. Base duale. Espressione generale di un funzionale lineare f sul generico vettore $\underline{v} \in V$ nel caso discreto e continuo:

$$f(\underline{v}) = \sum_k f_k v_k, \quad f(v) = \int f(t)v(t)dt.$$

Funzionali regolari e singolari ed il funzionale delta di Dirac: δ_{t_0}, definito dalla $\delta_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$. Spazi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$ delle funzioni di prova e nozione di convergenza in tali spazi; continuità del funzionale. Schematizzazione dei concetti di punto materiale, carica puntiforme e forza impulsiva attraverso la funzione $\delta(t)$ di Dirac. Successione di funzioni $f_n(x) = np(nx)$ che convergono alla delta in senso debole. Esempi: la lorenziana $\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$, la gaussiana $ne^{-n^2x^2}/\pi$ ed il nucleo di Dirichlet $\frac{\sin(nx)}{\pi x}$. Il lemma di Riemann-Lebesque e la proprietà $\frac{\sin(nx)}{\pi x} \to \delta(x)$, $n \to \infty$. La derivata di una distribuzione e la funzione gradino $\theta(x)$ di Heaviside. La trasformazione di problemi al contorno per equazioni differenziali in equazioni integrali, più semplici da studiare dal punto di vista matematico attraverso la funzione di Green. Definizione di funzione di Green $G(x, x')$ di un operatore e suo significato fisico. Costruzione della funzione di Green di operatori differenziali del primo e secondo ordine con condizioni al contorno opportune. Uso della Trasformata di Fourier per costruire la funzione di Green fondamentale $G(x - x')$ di operatori differenziali a coefficienti costanti.

3.4 Serie e integrale di Fourier

La serie di Fourier troncata come proiezione ortogonale di un elemento di L_2 su un sottospazio finito dimensionale; la serie di Fourier completa come sistema ortonormale e completo in L_2. Nucleo di Dirichlet, condizione di Dini e teorema di Fejer. Sviluppo in serie di Fourier di funzioni elementari. Relazione di Parseval. Nucleo di convoluzione. Trasformata di Fourier come limite continuo della serie di Fourier. Antitrasformata di Fourier e condizione di Dini. Relazione di Parseval. Nucleo di convoluzione. Uso della Trasformata di Fourier per risolvere problemi al contorno per equazioni differenziali alle derivate ordinarie e parziali della Fisica - Matematica.

3.5 Contrazioni, teorema del punto fisso e sue applicazioni

Spazi metrici completi, contrazioni e teorema del punto fisso (o delle approssimazioni successive). Applicazioni di tale teorema: i) soluzione di equazioni trascendenti; ii) ricerca di punti fissi di mappe; iii) teoremi di esistenza e unicità delle soluzioni di equazioni integrali di Fredholm e di Volterra.

3.6 Equazioni integrali

Dai problemi al contorno per equazioni differenziali alle equazioni integrali, attraverso la funzione di Green. Operatore integrale come operatore limitato. Equazioni di Volterra e di Fredholm lineari. Equazioni omogenee associate e relativi problemi agli autovalori. Operatore integrale come contrazione; esistenza, unicità e costruzione della soluzione di equazioni integrali col metodo delle approssimazioni successive. Operatore diadico su uno spazio funzionale e l'operatore integrale con nucleo separabile. Equazione integrale con nucleo separabile e sua risoluzione esplicita attraverso il sistema algebrico corrispondente. Operatore compatto come limite in norma di una successione di operatori diadici. Teorema dell'alternativa di Fredholm.

3.7 Alcune applicazioni

Uso della trasformata di Fourier per risolvere sia equazioni differenziali sia il problema di Cauchy sulla retta per equazioni differenziali alle derivate parziali, come l'equazione di Schrödinger non stazionaria e del calore. Funzione di Green e formulazione del problema di scattering sulla retta con potenziale localizzato attraverso l'equazione di Volterra; stati legati come poli del coefficiente di trasmissione. Uso del teorema del punto fisso per risolvere equazioni trascendenti o equazioni integrali, e per trovare i punti fissi di mappe non lineari ed equazioni integrali.

4 RACCOLTA DI ESERCIZI

Una buona parte degli esercizi qui raccolti, teorici e pratici, sono essenzialmente quelli proposti durante il corso; quindi lo studente deve saperli affrontare con sicurezza. Si consiglia anche di consultare le raccolte di esercizi di C.Bernardini, F.Calogero e di autori vari, reperibili su rete all'indirizzo:

http://www.phys.uniroma1.it/web_disp/d1/index.html

4.1 Spazi vettoriali finito-dimensionali

+++ Mostrare che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali: lo spazio dei vettori ordinari in $\mathbb{R}^3$ e quello dei quadrivettori in $\mathbb{M}^4$; lo spazio $\mathbb{R}$ dei reali; lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-ple di numeri reali; lo spazio $\mathbb{C}$ dei numeri complessi; lo spazio $\mathbb{C}^n$ delle n-ple di numeri complessi; lo spazio $Mat(n, \mathbb{R})$ $(Mat(n, \mathbb{C}))$ delle matrici $n \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio $\mathcal{P}_n$ dei polinomi di grado $n-1$ a coefficienti reali (complessi); le successioni $\{x_n\}$ di numeri reali (complessi); lo spazio degli stati $|\psi >$ (kets) di un sistema fisico in Meccanica Quantistica; lo spazio $C^p_{[a,b]}$, $p \in \mathbb{N}^+$ delle funzioni reali (complesse) continue con derivate continue fino all'ordine p sull'intervallo reale (a, b); lo spazio $L_p([a, b])$, $p \in \mathbb{N}^+$. Individuare la dimensione di questi spazi vettoriali e qualche base significativa.

+++ Le matrici A e i vettori colonna $\underline{b}$ sono qui sotto presentati nella notazione compatta delle matrici aumentate $(A : \underline{b})$. i) Risolvere, quando possibile, i corrispondenti sistemi omogenei $A\underline{x} = \underline{0}$, al variare degli eventuali parametri liberi presenti, caratterizzando il nucleo $\mathcal{N}(A)$ a calcolando la sua dimensione. ii) Interpretare questo risultato dal punto di vista della dipendenza o indipendenza lineare dei vettori che costituiscono le colonne delle matrici A; darne anche un'interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^n$. iii) Risolvere, in parallelo, anche il problema duale: $A^\dagger \underline{\phi} = \underline{0}$. iv) Risolvere, se possibile, il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ al variare degli eventuali parametri liberi presenti. iv) Determinare il range di $\mathcal{R}(\hat{A})$, utilizzando l'equazione $(\underline{\phi}, \underline{b}) = 0$ che lo caratterizza, e calcolare il rango di A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ -1 & 1 & : & 1 \\ 1 & 1 & : & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 & 1 & : & 34 \\ 2 & -6 & -1 & -2 & -5 & : & -8 \\ 3 & -9 & -5 & 1 & -11 & : & -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & : & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & : & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & : & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & : & b \\ 2 & 3 & 4 & 1 & : & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & : & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 & : & 1 \\ 6 & 7 & : & 2 \\ -3 & 39 & : & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & : & 6 \\ 2 & 4 & : & 8 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & : & 7 \\ 3 & 1 & : & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & : & 2 \\ 2 & 3 & : & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & : & 0 \\ 1 & -4 & 1 & : & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 \\ 1 & 2 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & : & 2 \\ 2 & -3 & 4 & : & 6 \\ 1 & -7 & -2 & : & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ 6 & 6 & -2 & : & -8 \\ 0 & 3 & -1 & : & -3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 2 \\ 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 3 & 4 & 1 & : & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ a & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & a & 1 & : & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & : & 1 \\ a & a & 0 & : & 1 \\ a & 3a & 8 & : & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 4 \\ -1 & 1 & a & : & 1 \\ a & a & 1 & : & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 & : & 1 \\ 6 & 7 & : & 2 \\ -3 & 39 & : b & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & : & 1 \\ a & 1 & : & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 1 \\ a & 2 & : & 5 \end{pmatrix} \tag{2}$$

+++ Dati i vettori $\underline{v}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)}$, $\underline{v}^{(2)} = c\underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}$ di uno spazio vettoriale V di dimensione 2, stabilire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ tali vettori sono dipendenti e indipendenti. ii) Se, ai vettori $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$, si aggiunge $\underline{v}^{(3)} = \underline{e}^{(1)}$, stabilire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono dipendenti e indipendenti. Se $V = \mathbb{R}^2$, disegnare tali vettori nei due casi.

Risp: $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$ sono lin. dipendenti per $c = 1/2$; sono lin. indip. per $c \neq 1/2$. $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}$ sono...

+++ Dati i vettori $\underline{v}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + 2\underline{e}^{(2)} + 3\underline{e}^{(3)}$, $\underline{v}^{(2)} = 2\underline{e}^{(1)} + c\underline{e}^{(2)} + d\underline{e}^{(3)}$ di uno spazio vettoriale di dimensione 3, stabilire per quali valori di $c, d \in \mathbb{R}$ tali vettori sono dipendenti e indipendenti. ii) Se, ai vettori $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}$, si aggiunge $\underline{v}^{(3)} = \underline{e}^{(3)}$, stabilire per quali valori di $c, d \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono dipendenti e indipendenti. iii) Se, ai vettori $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}$, si aggiunge $\underline{v}^{(4)} = \underline{e}^{(1)}$, stabilire per quali valori di $c, d \in \mathbb{R}$ i quattro vettori sono dipendenti o indipendenti. Se $V = \mathbb{R}^3$, disegnare tali vettori in tutti i casi presi in considerazione.

Risp: i) Per $c = 4$, $d = 6$ i vettori sono lin. dipendenti. Per $c = 4$, $d \neq 6$, o per $c \neq 4$, $d = 6$, i due vettori son lin. indipendenti. ii) Per $c = 3$ i tre vettori sono lin. dipendenti. Per $c \neq 3$ i tre vettori sono lin. indipendenti.

+++ Dimostrare che due qualunque spazi vettoriali reali (complessi) aventi diversa dimensione non possono essere isomorfi; e che due qualunque spazi vettoriali reali (complessi) aventi la stessa dimensione n sono isomorfi e, in particolare, sono isomorfi a $\mathbb{R}^n$ (a $\mathbb{C}^n$).

+++ Mostrare che, se i vettori $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$ in V sono linearmente indipendenti e se $dim\ V = n$, allora essi costituiscono una base di V.

+++ Mostrare che lo sviluppo di un generico vettore $\underline{v} \in V$ nella base $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$ di V è unico.

+++ Mostrare che l'inviluppo lineare di un insieme di vettori $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^k$ dello spazio vettoriale V di dimensione finita o infinita è un sotto-spazio vettoriale V' di V tale che $dim\ V' = k$, e che i vettori $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^k$ ne formano una base.

+++ Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 1)$, $\underline{v}^{(2)} = (2, -i) \in \mathbb{C}^2$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli.

+++ Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 0, -1)$, $\underline{v}^{(2)} = (3, -2i, 1)$, $\underline{v}^{(3)} = (4 + i, -1 - 6i, 2 + i) \in \mathbb{C}^3$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli.

+++ Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (1, 0, 0)$, $\underline{v}^{(2)} = (a, 1, 0)$, $\underline{v}^{(3)} = (c, b, 1) \in \mathbb{C}^3$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli.

+++ Mostrare che i vettori $\underline{v}^{(1)} = (0, 0, 1)$, $\underline{v}^{(2)} = (1, i, a)$, $\underline{v}^{(3)} = (b, i(b - 2), c) \in \mathbb{C}^3$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ sono indipendenti; quindi ortonormalizzarli.

+++ Mostrare che, nello spazio vettoriale dei polinomi di grado $n - 1$, euclideo rispetto al prodotto scalare:

$$\int_{-1}^{1} \bar{x}(t) y(t) dt,$$

i) i vettori $\{t^{j-1}\}_1^n$ sono indipendenti ma non ortogonali.
ii) Ortogonalizzarli nella forma:

$$1,\ t,\ t^2 - \frac{1}{3},\ t^3 - \frac{3}{5}t,\ ..$$

iii) Verificare che questi polinomi ortogonali coincidono, a meno di costanti moltiplicative, con i polinomi di Legendre (che sono ortogonali ma non ortonormali):

$$L_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, ...$$

iv) Costruire infine la base ortonormale $\{P_j(t)\}$:

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,\ P_2(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(t^2 - \frac{1}{3}),\ P_3(t) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(t^3 - \frac{3}{5}t),\ ..$$

+++ Dimostrare che, se $\hat{A}$ è un operatore lineare su uno spazio finito-dimensionale V, allora $\dim\mathcal{R}(\hat{A})+\dim\mathcal{N}(\hat{A})=\dim V$.

+++ Dimostrare che, se $\hat{A}$ è un operatore lineare su uno spazio finito-dimensionale V, allora le seguenti tre proprietà sono equivalenti: i) l'invertibilità di $\hat{A}$, ii) la proprietà $\mathcal{R}(\hat{A}) = V$, iii) la proprietà $\mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{0}\}$.

+++ Sia A una matrice quadrata; si mostri che il rango di A è pari alla $\dim\mathcal{R}(\hat{A})$

+++ Definizione di operatore invertibile. Sia $\hat{A}$ è un operatore lineare $\hat{A}:\ X \to Y$, allora $\hat{A}$ è invertibile se e solo se, per ogni $\underline{y} \in Y$, esiste unico $\underline{x} \in X$ tale che $\hat{A}\underline{x} = \underline{y}$. Mostrare che tale proprietà è equivalente alle due condizioni seguenti: i) esistenza di ....

+++ Mostrare che i seguenti insiemi $V_k = \{\alpha_k \underline{v}^{(k)},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\}$, dove $\{\underline{v}^{(k)}\}$ sono vettori indipendenti e $k \leq 3$, sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$, e che dim $V_k = 1$. Dare un'interpretazione geometrica di tali sottospazi come rette individuate dai vettori $\underline{v}^{(k)}$. Mostrare che tali sottospazi hanno intersezione banale. Introdotto il sottospazio $\pi = (V_1 \oplus V_2)$, mostrare che dim $(V_1 + V_2) = 2$ e darne un'interpretazione geometrica come piano individuato dalle rette V_1 e V_2. Mostrare infine che π e V_3 hanno intersezione banale e che $\pi \oplus V_3 = \mathbb{R}^3$.

+++ Determinare la rappresentazione matriciale degli operatori di derivazione, di integrazione e di traslazione rispetto ad un'opportuna base (i monomi) dello spazio dei polinomi di grado finito.

+++ Determinare i proiettori ortogonali che proiettono nelle direzioni di $\underline{v}^{(1)} = (1, i, -1)$, $\underline{v}^{(2)} = (0, i, 2i)$.

+++ Si consideri in $\mathbb{C}^3$ il sottospazio bidimensionale $V = \{(\alpha, \beta, \alpha + 2\beta)^T, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$. i) mostrare che V è invariante rispetto alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 2i & -i \\ -1 & -1 & 1 \\ 2(i-1) & 2(i-1) & 2-i \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Introdotta la base $\{(1,1,3)^T, (1,-1,-1)^T\}$ dello spazio V, mostrare che la restrizione $A|_V$ di A al sottospazio V, riferita alla suddetta base, è la matrice

(2×2):

$$A|_V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i+1 & i-1 \\ i-1 & i+1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

iii) Identificare gli autovettori di A (e i corrispondenti autovalori) che appartengono a V e verificare che essi coincidono con gli autovettori ed autovalori di $A|_V$.

+++ Riformulare il teorema di Rouché-Capelli come Teorema dell'alternativa per matrici. *1) Unicità: la soluzione del sistema non omogeneo $A\underline{x} = \underline{b}$ è unica se e solo se il sistema omogeneo aggiunto $A^\dagger \underline{\phi} = \underline{0}$ (dove $A^\dagger$ è la matrice hermitiana coniugata della matrice A) ha solo la soluzione nulla. 2) Esistenza: il sistema non omogeneo $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione se e solo se il termine noto $\underline{b}$ è ortogonale ad ogni soluzione $\underline{\phi}$ del sistema omogeneo aggiunto $A^\dagger \underline{\phi} = \underline{0}$, cioè: $(\underline{\phi}, \underline{b})$.*

4.1.1 Diagonalizzazione di matrici

.

+++ Si mostri che, se la matrice $n \times n$ A ammette n autovettori indipendenti $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^n$, corrispondenti agli autovalori λ_i, $i = 1, .., n$: $A\underline{v}^{(i)} = \lambda_i \underline{v}^{(i)}$, $i = 1, .., n$, allora, data la matrice (non singolare) T le cui colonne sono gli autovettori di A:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} & \dots & v_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n^{(1)} & \dots & v_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

(per componenti: $T_{ij} := v_i^{(j)}$), e data la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$, l'equazione agli autovalori può essere riscritta nella forma matriciale:

$$AT = T\mathrm{d}iag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}iag(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) = T^{-1}AT.$$

Quindi A è diagonalizzabile, e la matrice degli autovettori T realizza la trasformazione di similitudine che diagonalizza A. Si mostri che, se la matrice A non ammette un insieme completo di autovettori indipendenti, tale diagonalizzazione non è possibile.

+++ Mostrare che, se A è diagonalizzabile attraverso la trasformazione T: $A = T\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)T^{-1}$, allora $f(A) = T\mathrm{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), .., f(\lambda_n))T^{-1}$.

+++ Mostrare che, se gli autovalori di A sono distinti, allora i corrispondenti autovettori sono indipendenti, e quindi la matrice è diagonalizzabile.

Si deduca che, se due o più autovalori sono coincidenti (lo spettro degenere), la matrice A può o non può possedere, a seconda dei casi, un insieme completo di autovettori indipendenti e, quindi, essere diagonalizzabile. Più precisamente, sia m_k la molteplicità (algebrica) dell'autovalore λ_k e sia n_k il numero di autovettori associati a tale autovalore (la cosidetta molteplicità geometrica dell'autovalore λ_k); si osservi che $n_k = dim\mathcal{N}(A - \lambda_k I)$ e che, in generale, $n_k \leq m_k$. Si deduca che la matrice è diagonalizzabile quando $n_k = m_k$ per ogni autovalore degenere. Mostrare infine che la matrice identità in $\mathbb{C}^n$ (avente l'autovalore 1 con molteplicità algebrica n) possiede n autovettori indipendenti (una qualunque base di $\mathbb{C}^n$), mentre la matrice che rappresenta l'operatore di derivazione rispetto alla base $\{t^{j-1}/(j-1)!\}$ nello spazio dei polinomi di grado $n-1$ è la matrice di Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

avente l'autovalore 0 con molteplicità algebrica n ed il solo autovettore 1 (è quindi non diagonalizzabile).

4.1.2 Decomposizione spettrale e proiettori

+++ Siano $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^n$ gli autovettori indipendenti di una matrice $n \times n$ A, corrispondenti agli autovalori λ_i, $i = 1, .., n$: $A\underline{v}^{(i)} = \lambda_i \underline{v}^{(i)}$, $i = 1, .., n$.
i) Dimostrare che le matrici $P^{(i)}$, $i = 1, .., n$, definite dalle equazioni $P^{(i)} := TP_0^{(i)}T^{-1}$, dove $P_0^{(i)}$ è la matrice diagonale che tutte le componenti nulle, ad eccezione della i-esima (quindi: $P_{lm}^{(i)} := T_{li}(T^{-1})_{im}$), e dove T è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di A: $T_{ij} := v_i^{(j)}$, sono i proiettori sui sottospazi unidimensionali generati dagli autovettori $\{\underline{v}^{(i)}\}_{i=1}^n$:

$$P^{(i)}\underline{v} = c_i \underline{v}^{(i)}, \;\; i = 1, .., n, \;\; c \in \mathbb{C}, \;\; \underline{v} \in \mathbb{C}^n,$$

se $\underline{v} = \sum\limits_{i=1}^n c_i \underline{v}^{(i)}$, e la matrice A è ricostruita tramite la seguente "decomposizione spettrale":

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i P^{(i)}.$$

ii) Dimostrare che, se A è hermitiana, unitaria e, più in generale, normale, essa ammette n autovettori $\{\frac{\underline{v}^{(j)}}{||\underline{v}^{(j)}||}\}_{j=1}^{n}$ ortonormali e che, se la matrice T è costruita con tali autovettori come colonne, essa è unitaria. Mostrare che in questo caso i proiettori del punto i) diventano ortogonali e hanno componenti: $P^{(i)}_{lm} = \frac{v^{(i)}_l \overline{v^{(i)}_m}}{||\underline{v}^{(j)}||||\underline{v}^{(j)}||}$.

+++ Dati i due vettori indipendenti di $\mathbb{C}^2$, $\underline{v}^{(1)} = (i,1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (3i,1)^T$ ed i sottospazi unidimensionali $X_j = \{\alpha\underline{v}^{(j)},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ $j = 1,2$ (le rette passanti per i due vettori), costruire i proiettori $P^{(i)}$ sui due sottospazi X_i $i = 1,2$ parallelamente ai sottospazi complementari generati dal restante vettore e verificare che $P^{(i)}P^{(j)} = \delta_{ij}P^{(i)},\ P^{(1)} + P^{(2)} = I$.

+++ Dati i tre vettori indipendenti di $\mathbb{C}^3$, $\underline{v}^{(1)} = (1,0,1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (-1,1,0)^T$, $\underline{v}^{(3)} = (0,1,2)^T$, i sottospazi unidimensionali $X_j = \{\alpha\underline{v}^{(j)},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ $j = 1,2,3$ (le rette passanti per i tre vettori) e i sottospazi bidimensionali $X_{ij} = \{\alpha\underline{v}^{(i)} + \beta\underline{v}^{(j)},\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}\}$ $i,j = 1,2,3$ (i piani passanti per due dei tre vettori), costruire: i) i proiettori sui tre sottospazi X_i $i = 1,2,3$ parallelamente ai sottospazi complementari generati dai restanti due vettori; ii) il proiettore su X_{12} parallelamente a X_3 e, in generale, il proiettore su X_{ij} parallelamente a X_k, $i \neq j \neq k$.

$$
\begin{gathered}
i)\ P^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \\
P^{(12)} = P^{(1)} + P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \dots
\end{gathered}
\tag{7}
$$

+++ Nello spazio euclideo $\mathbb{C}^3$ si considerino i due vettori ortonormali $\underline{v}^{(1)} = (1/\sqrt{2})(i,0,1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (1/\sqrt{6})(i,2,1)^T$. i) Costruire i proiettori ortogonali sui sottospazi $X_j = \{\alpha\underline{v}^{(j)},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ $j = 1,2$ (le rette passanti per i due vettori) e sul sottospazio bidimensionale $X_{12} = \{\alpha\underline{v}^{(1)} + \beta\underline{v}^{(2)},\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}\}$ (il piano passante per i due vettori). Verificare che questi proiettori sono hermitiani e positivi.

$$i)\ P^{(1)} = \underline{v}^{(1)}\underline{v}^{(1)\dagger} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \underline{v}^{(2)}\underline{v}^{(2)\dagger} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2i & i \\ -2i & 4 & 2 \\ -i & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P^{(12)} = P^{(1)} + P^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & i & 2i \\ -i & 2 & 1 \\ -2i & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

+++ Nello spazio euclideo $\mathbb{C}^3$ si considerino i tre vettori ortogonali $\underline{v}^{(1)} = (1,0,-1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (1,1,1)^T$, $\underline{v}^{(3)} = (1,-2,1)^T$. i) Costruire i proiettori ortogonali sui sottospazi $X_j = \{\alpha\underline{v}^{(j)},\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ $j = 1,2,3$ (le rette passanti per i tre vettori) e i sui sottospazi bidimensionali $X_{ij} = \{\alpha\underline{v}^{(i)} + \beta\underline{v}^{(j)},\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}\}$ $i,j = 1,2,3$ (i piani passanti per due vettori). Verificare che questi proiettori sono hermitiani e positivi.

$$i)\ P^{(1)} = \frac{\underline{v}^{(1)}\underline{v}^{(1)\dagger}}{||\underline{v}^{(1)}||^2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^{(2)} = \frac{\underline{v}^{(2)}\underline{v}^{(2)\dagger}}{||\underline{v}^{(2)}||^2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P^{(3)} = \frac{\underline{v}^{(3)}\underline{v}^{(3)\dagger}}{||\underline{v}^{(3)}||^2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix},$$
$$P^{(12)} = P^{(1)} + P^{(2)} = \frac{\underline{v}^{(1)}\underline{v}^{(1)\dagger}}{||\underline{v}^{(1)}||^2} + \frac{\underline{v}^{(2)}\underline{v}^{(2)\dagger}}{||\underline{v}^{(2)}||^2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

+++ *La diade.* Si consideri l'operatore

$$\hat{A} = \underline{a}\ \underline{b}^{\ \dagger} = |a >< b| \tag{10}$$

su uno spazio euclideo di dimensione n (finita o infinita). Mostrare che:

$$\begin{array}{c} \mathcal{R}(\hat{A}) = \{\underline{x} = \alpha\underline{a},\ \alpha \in \mathbb{C}\} \ \Rightarrow\ dim\ \mathcal{R}(\hat{A}) = 1, \\ \mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{x},\ (\underline{b},\underline{x}) = 0\} \ \Rightarrow\ dim\ \mathcal{N}(\hat{A}) = n-1. \end{array} \tag{11}$$

+++ *Operatore in forma diadica.* Si consideri l'operatore

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{m} \underline{a}_k \underline{b}_k^\dagger = \sum_{k=1}^{m} |a_k >< b_k|$$

su uno spazio euclideo di dimensione $n > m$ (con n finito o infinito). Mostrare che:

$$\begin{array}{c} \mathcal{R}(\hat{A}) = \{\underline{x} = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k\underline{a}_k,\ \alpha_k \in \mathbb{C},\ k = 1,..,m\} \ \Rightarrow\ dim\ \mathcal{R}(\hat{A}) = m, \\ \mathcal{N}(\hat{A}) = \{\underline{x},\ (\underline{b}_k,\underline{x}) = 0,\ k = 1,..,m\} \ \Rightarrow\ dim\ \mathcal{N}(\hat{A}) = n-m. \end{array} \tag{12}$$

+++ Date le seguenti matrici quadrate A, i) indicare se sono matrici speciali: hermitiane, unitarie, normali, triangolari; ii) trovare autovalori e autovettori; iii) indicare se sono diagonalizzabili o non; iv) se diagonalizzabili, costruire le matrici di trasformazione T che le diagonalizzano; v) scrivere la decomposizione spettrale di A.

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} i & 3/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{13}$$

+++ Calcolare le seguenti funzioni di matrice $f(A)$ utilizzando, quando è possibile, sia la trasformazione che diagonalizza A, sia la definizione di $f(A)$

come serie.

$$
\begin{gathered}
f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ f'(a) & f(a) \end{pmatrix}, \\
\cos^2\left[\phi\begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1-\cos^2\theta\sin^2\phi & 0 & -\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi \\ 0 & \cos^2\phi & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi & 0 & 1-\sin^2\theta\cos^2\phi \end{pmatrix}, \\
\cos\begin{pmatrix} \pi & 2\pi i \\ \pi i & 2\pi i \end{pmatrix}, \sin\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\pi & -2\pi i \\ -\pi i & \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}, \\
\cos\begin{pmatrix} 0 & n\pi \\ n\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad H = -i\log\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\sin\begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ \pi/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \cos\begin{pmatrix} 0 & -in\pi \\ in\pi & 0 \end{pmatrix}, \\
\sin\begin{pmatrix} 0 & -in\pi/2 \\ in\pi/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sin\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -3i/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \\
\cos\pi\begin{pmatrix} 2 & 2i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, \\
f\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(2a)+f(0) & f(2a)-f(0) \\ f(2a)-f(0) & f(2a)+f(0) \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{14}
$$

con $n \in \mathbb{N}$.

+++ Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}, \ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = 2\underline{e}^{(2)}, \ \hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)},$$

dimostrare che $\hat{A}$ è hermitiano e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale.

+++ Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)}, \ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = 2\underline{e}^{(1)} + 3\underline{e}^{(2)},$$

calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$.

+++ Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{0}, \ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = \bar{a}\underline{e}^{(3)}, \ \hat{A}\underline{e}^{(3)} = a\underline{e}^{(2)}, \ a \in \mathbb{C},$$

dimostrare che $\hat{A}$ è hermitiano e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale.

+++ Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V bidimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \cos\theta\underline{e}^{(1)} - \sin\theta\underline{e}^{(2)}, \;\; \hat{A}\underline{e}^{(2)} = \sin\theta\underline{e}^{(1)} + \cos\theta\underline{e}^{(2)}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

dimostrare che $\hat{A}$ è unitario (ortogonale) e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale. Qual'è il significato geometrico della rappresentazione matriciale di $\hat{A}$ rispetto alla base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$?

+++ Se l'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(2)}, \;\; \hat{A}\underline{e}^{(2)} = \underline{e}^{(3)}, \;\; \hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)},$$

dimostrare che $\hat{A}$ è unitario e calcolarne autovalori, autovettori (verificandone l'ortogonalità) e la decomposizione spettrale.

+++ Si costruiscano le matrici A che possiedono i seguenti autovalori e autovettori, valutando a priori se tali matrici sono speciali: hermitiane, unitarie, normali. Se gli autovettori sono ortogonali, conviene ortonormalizzarli; perchè?

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = \tfrac{i}{4}, \lambda_2 = \tfrac{3}{4}i, \quad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \quad \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \; \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = i, \; \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = i, \; \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \; \underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{15}$$

4.2 Spazi funzionali

+++ Individuare i valori del parametro reale α tali che le seguenti successioni appartengono a l_2.

$$i)\ \frac{1}{n^\alpha + 1}; \qquad ii)\ \sin(1/n^\alpha);$$

Per quali valori di α appartengono invece a l_1?

+++ Indiduare i valori dei parametri reali α tali che le funzioni indicate siano $L_1(\mathbb{R}),\ L_2(\mathbb{R})$.

$$i)\ |x|^\alpha e^{-x^2}; \quad ii)\ \frac{x}{(1+x^2)^\alpha}; \quad iii)\ \left(\frac{|\sin x|}{|x|}\right)^\alpha; \quad iv)$$

Risp. (i) $L_1(\mathbb{R})\ :\ \alpha > -1,\ L_2(\mathbb{R})\ :\ \alpha > -1/2;$ $ii)$ $L_1(\mathbb{R})\ :\ \alpha > 1,\ L_2(\mathbb{R}):\ \alpha > 3/4;$ $iii)$ $L_1(\mathbb{R}):\ \alpha > 1,\ L_2(\mathbb{R}):\ \alpha > 1/2.$

+++ Indiduare i valori dei parametri reali α e β tali che le seguenti funzioni siano $L_1,\ L_2$ negli intervalli specificati.

$$i)\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{1}{|3-x^2|^\alpha},\ [0,\infty); \qquad ii)\ \frac{e^{-x^2}}{|2-x^2|^\alpha},\ (-\infty,\infty);$$

$$iii)\ \frac{e^{\frac{\alpha}{1-x^2}}}{|1-x|^\beta},\ [-1,1]; \quad iv)\ |x|^\alpha \sin x,\ [0,\infty); \quad v)\ \frac{|x|^\alpha}{x^4+8x^2+1}\ (-\infty,\infty);$$

$$vi)\ |x^2+2\alpha x-3\alpha|^\alpha,\ (-\infty,\infty); \qquad vii)\ \frac{|x|^{2\alpha}e^{\beta x}}{1-\cosh x},\ (-\infty,\infty);$$

$$xi)\ \frac{e^{-(1+\alpha)x^2}}{\sqrt{|x^2-x-\alpha|}},\ (-\infty,\infty); \qquad x)\ \frac{e^{-2x}\cosh(\alpha x)}{x^2+\pi/2+\alpha},\ [0,\infty);$$

$$xi)\ \frac{e^{-x}\sinh(\alpha x)}{x+\alpha},\ [0,\infty); \qquad xii)\ |2x^2-(3+2\alpha)x+3\alpha|^\alpha,\ [-2,0];$$

$$xiii)\ \frac{|x|^{3\alpha}}{x^4+8x^2+\alpha};$$

Risp. $i)$ $L_1[0,\infty):\ 1/4 < \alpha < 1,\ L_2[0,\infty):\ 0 < \alpha < 1/2;$ $ii)$ $L_1(\mathbb{R}):\ \alpha < 1,\ L_2(\mathbb{R}):\ \alpha < 1/2;$ $iii)$ $L_1[-1,1], L_2[-1,1]:\ \alpha < 0, \forall\beta;$ $iv)$ $L_1[0,\infty),\ L_2[0,\infty):\ mai;$ $v)$ $L_1(\mathbb{R}):\ \alpha < 3,\ L_2(\mathbb{R}):\ \alpha < 7/2;$ $vi)$ $L_1(\mathbb{R}):\ -3 < \alpha < -1/2,\ L_2(\mathbb{R}):\ -3 < \alpha < -1/4;$ $vii)$ $L_1(\mathbb{R}),\ L_2(\mathbb{R}):\ -1 < \beta < 1,\ \alpha > 1;$ $viii)$ $L_1(\mathbb{R}):\ -1 < \alpha,\ L_2(\mathbb{R}):\ -1 \leq alpha < -1/2$

+++ Sia $\chi_E(x)$ la funzione caratteristica dell'insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$: $\chi_E(x) = 0,\ x \notin\ E,\ \chi_E(x) = 1,\ x \in\ E$. Si definisce *funzione μ-semplice* la funzione

$$f_\mu(x) = \sum_k c_k \chi_{E_k}(x),$$

dove gli insiemi E_k sono disgiunti e la loro unione coincide con $[a, b]$. Le funzioni μ-semplici coincidono con le funzioni costanti a tratti, quando gli insiemi misurabili E_k sono intervalli ordinari di $[a, b]$. Vale il seguente risultato (da giustificare in modo qualitativo):
Ogni funzione $f(x) \in L_2[a, b]$ è approssimabile in media quadratica (in L_2) da successioni di funzioni μ-semplici $f_\mu(x)$ (cioè lo spazio delle funzioni μ-semplici è denso in L_2, nella norma $||\cdot||_2$).

+++ Mostrare che, per ogni funzione $f(x)$ costante a tratti (o, più in generale, per ogni funzione μ-semplice), esiste una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni continue che converge ad essa nella norma $||\cdot||_2$ (in media), ma non nella norma uniforme $||\cdot||_\infty$. Cioè lo spazio delle funzioni continue è denso, rispetto alla norma $||\cdot||_2$, nello spazio delle funzioni μ-semplici e, quindi, grazie al risultato precedente, è denso in L_2: $\overline{C[a, b]} = L_2[a, b]$. Suggerimento: è sufficiente mostrarlo per la funzione gradino $H(x) :\ H(x) = 0,\ x < 0,\ H(x) = 1,\ x > 0$, scegliendo la successione:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{n}. \end{cases} \tag{16}$$

Allora: $||f_n - H||_2 \to 0,\ n \to \infty$, mentre $||f_n - H||_\infty = 1/2,\ \forall\ n$.

+++ *Convergenza uniforme, in media quadratica e puntuale.*
i) Mostrare che la convergenza uniforme in $[a, b]$ implica la convergenza in $L_2[a, b]$ (e, più in generale, in $L_p[a, b],\ p \in \mathbb{N}$).
ii) Mostrare che la convergenza in $L_2[a, b]$ non implica né la convergenza uniforme né quella puntuale.
iii) Mostrare che la convergenza puntuale non implica quella uniforme (ovvio) e neppure quella in media.
Sugg. Per il punto i), si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = e^{-nx}$ in $(0, 1)$, mostrando che: $||f_n - 0||_2 \to 0,\ n \to \infty,\ ||f_n - 0||_\infty = 1,\ \forall\ n$. Per il punto ii), si consideri il seguente esempio classico di successione di funzioni $\{f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)}, f_1^{(4)}, f_2^{(4)}, f_3^{(4)}, f_4^{(4)}, f_1^{(5)}, ...\}$ definita cosi':

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in I,\ I = (\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}], \\ 0 & x \notin I \end{cases} \tag{17}$$

mostrando che $f_i^{(k)}(x)$ converge a 0 in media quadratica, ma *non converge in nessun punto* dell'intervallo, poichè, per ogni $x \in [0,1]$, esiste un valore di (i,k) arbitrariamente grande tale che $f_i^{(k)}(x) = 1$ oppure $f_i^{(k)}(x) = 0$. Per il punto iii), si consideri infine la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & x \in (0, \frac{1}{n}], \\ 0 & x \notin (0, \frac{1}{n}], \end{cases} \tag{18}$$

mostrando che $f_n(x)$ converge a 0 puntualmente in $(0,1]$, mentre $||f_n||_2 = 1$.

4.2.1 Funzionali lineari e distribuzioni

+++ Un funzionale lineare sullo spazio vettoriale V è un operatore $f: V \to \mathbb{C}$ tale che:

$$f(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \alpha f(\underline{x}) + \beta f(\underline{y}), \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ \ \underline{x}, \underline{y} \in V.$$

Esempi di funzionali lineari su spazi vettoriali.
1) Se $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{x} = \sum\limits_k^n x_k \underline{e}^{(k)}$, il funzionale e_j che, applicato a $\underline{x}$, ne seleziona la componente j - esima x_j (rispetto alla base $\{\underline{e}^{(k)}\}$) è un funzionale lineare: $e_j(\underline{x}) = x_j$. L'insieme dei funzionali $\{e_j\}_1^n$ è una buona base nello spazio dei funzionali su $\mathbb{C}^n$, sono soddisfatte le condizioni

$$e_j(\underline{e}^{(k)}) = \delta_{jk},$$

e questa base è detta la *base duale*; lo spazio dei funzionali lineari su V è quindi esso stesso uno spazio vettoriale V^*, di dimensione N, detto "spazio duale". Un qualunque funzionale su $\mathbb{C}^n$ si esprime allora come combinazione lineare degli elementi della base duale: $f = \sum\limits_k^n f_k e_k$ e, in questa base, è rappresentato dal "vettore riga" $(f_1, .., f_n)$. La sua azione sul generico vettore $\underline{x}$, rappresentato dal "vettore colonna" $(x_1, .., x_n)^T$, è data da:

$$f(\underline{x}) = \sum_k^n f_k x_k$$

cioè dal prodotto riga per colonna.
2) Se $\underline{x} \in l_2$, valgono le stesse considerazioni di prima, sostituendo la somma finita con la somma infinita.

3) Se, infine, $\underline{x}$ appartiene ad uno spazio funzionale, ad esempio, $\underline{x} \in C[a,b]$, allora $x_k \to x(t),\ f_k \to f(t)$, e quindi il generico funzionale lineare è descritto dall'integrale:

$$f(\underline{x}) = \int_a^b f(t)x(t)dt.$$

i) Mostrare che, in uno spazio euclideo, il prodotto scalare $(\underline{a}, \underline{x})$ è un esempio di funzionale lineare. Che relazione intercorre tra le componenti del vettore $\underline{a}$ e le componenti del funzionale lineare f?
ii) Mostrare che l'insieme dei funzionali lineari limitati sullo spazio vettoriale V forma esso stesso uno spazio vettoriale V^*, detto il duale di V, tale che, se $f_1, f_2 \in V^*$, allora:

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(\underline{x}) = \alpha f_1(\underline{x}) + \beta f_2(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

ii) Mostrare che l'insieme dei funzionali lineari limitati sullo spazio normato N forma uno spazio vettoriale, con:

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(\underline{x}) = \alpha f_1(\underline{x}) + \beta f_2(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

esso stesso normato, il duale N^* di N, la cui norma, è definita così:

$$||f|| = \sup_{||\underline{x}|| \neq 0} \frac{|f(\underline{x})|}{||\underline{x}||} = \sup_{||\underline{x}|| \neq 0} |f(\frac{\underline{x}}{||\underline{x}||})| = \sup_{||\underline{x}||=1} |f(\underline{x})|. \tag{19}$$

da cui: $|f(\underline{x})| \leq ||f|| ||\underline{x}||$.

+++ Mostrare che , se $N = l_p$ (L_p), allora la norma di N^*, indotta da N, è $|| \cdot ||_q$, con $1/p + 1/q = 1$.

+++ *Convergenza forte e convergenza debole.* Una successione di elementi $\{\underline{x}^{(n)}\}$ dello spazio normato N
a) converge fortemente, o in norma, a $\underline{x}$ se:

$$||\underline{x}^{(n)} - \underline{x}|| \to 0, \quad n \to \infty.$$

b) converge debolmente, o per componenti, a $\underline{x}$ se, per ogni funzionale lineare $f \in N^*$:

$$|f(\underline{x}^{(n)}) - f(\underline{x})| \to 0, \quad n \to \infty.$$

i) Mostrare che, in l_p o in $\mathbb{C}^n$, se si scelgono come funzionali gli elementi della base duale $\{e_j\}$, allora la convergenza debole coincide con la convergenza "per componenti":

$$|e_j(\underline{x}^{(n)}) - e_j(\underline{x})| = |x_j^{(n)} - x_j| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall j.$$

ii) Mostrare che la convergenza forte implica la convergenza debole, essendo:

$$|f(\underline{x}^{(n)}) - f(\underline{x})| = |f(\underline{x}^{(n)} - \underline{x})| \leq ||f||||\underline{x}^{(n)} - \underline{x}||,$$

iii) Dare un esempio in cui la convergenza debole non implica quella forte.
iv) Mostrare che, se lo spazio è finito - dimensionale, la convergenza debole implica quella forte.

+++ *Convergenza forte e debole di funzionali lineari.* Data una successione di funzionali lineari $\{f^{(n)}\}$ su N; essa:
a) converge debolmente a $f \in N^*$ se, $\forall \underline{x} \in N$:

$$|f^{(n)}(\underline{x}) - f(\underline{x})| = |(f^{(n)} - f)(\underline{x})| \to 0, \quad n \to \infty.$$

b) converge fortemente, o nella norma di N^*, se $||f^{(n)} - f|| \to 0, \ n \to \infty$.

+++ *Lemma di Riemann - Lebesque.* Mostrare che le successioni di funzionali lineari

$$S_n(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\varphi(x)dx, \quad C_n(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\varphi(x)dx$$

convergono debolmente a 0, se lo spazio delle funzioni di prova φ è $L_1[-\pi, \pi]$. Suggerimento: conviene scegliere φ in $C^1[-\pi, \pi]$ (che è denso su $L_1[-\pi, \pi]$ nella norma $|| \cdot ||_1$) e integrare per parti.

+++ *Punto materiale, carica puntiforme, forza impulsiva e delta di Dirac.* Si mostri, attraverso un procedimento di limite opportuno, che la densità di massa di un punto materiale, la densità di carica di una carica puntiforme e una forza impulsiva sono manifestazioni diverse della delta di Dirac. Per fare questo:
i) Si consideri una massa unitaria, distribuita uniformemente su un segmento di lunghezza $\epsilon = 2/n$ centrato intorno ad un punto qualsiasi x_0; la corrispondente densità di massa vale:

$$\delta_n(x - x_0) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & se \quad |x - x_0| < \frac{1}{n} \\ 0, & se \quad |x - x_0| > \frac{1}{n}. \end{cases} \tag{20}$$

che dà in effetti una massa unitaria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x - x_0) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dy \delta_n(y) = 1.$$

ii) Si osservi che, mentre il limite, per $n \to \infty$, della successione di funzioni $\delta_n(x)$ non è ben definito, in quanto:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & se \quad x = x_0, \\ 0, & se \quad x \neq x_0, \end{cases} \tag{21}$$

l'integrale di $\delta_n(x)$ (la massa) resta ben definito anche nel limite, continuando a valere 1:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) = 1.$$

+++ i) Si consideri la famiglia di funzioni $\delta_n(x)$ definita nell'esercizio precedente e si mostri che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x - x_0)\varphi(x) = \varphi(x_0). \tag{a}$$

dove $\varphi(x)$ è una qualunque funzione di $L_1(\mathbb{R})$ e continua in x_0.
iv) I fisici introducono la "funzione generalizzata", o "distribuzione", $\delta(x - x_0)$ (detta "δ" di Dirac) come quell'oggetto matematico definito dall'equazione precedente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0)\varphi(x) = \varphi(x_0), \tag{b}$$

immaginando di passare al limite sotto il segno di integrale nella formula (a) ed identificando:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

(cosa delicata, dal punto di vista matematico, dato che tale limite non esiste, come già notato, in senso stretto). Il fisico con una buona base matematica sa, comunque, che l'espressione (b) va interpretata nel senso della formula (a). In questo senso si dice che *la successione di funzioni $\delta_n(x - x_0)$ è una rappresentazione della $\delta(x - x_0)$ di Dirac per $n \to \infty$.*
ii) Mostrare che:

$$\int_a^b dx \delta(x - x_0)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x_0), & se \quad a < x_0 < b; \\ 0, & se \quad x_0 < a, \ x_0 > b. \end{cases} \tag{22}$$

+++ *Distribuzioni come funzionali lineari.* i) Un funzionale lineare è una trasformazione lineare f da un opportuno spazio vettoriale di funzioni, non necessariamente normato, come, ad esempio, lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}$ delle funzioni $C^\infty(\mathcal{R})$ che vanno a zero per $|x| \to \infty$ più rapidamente di ogni potenza, o come lo spazio $\mathcal{K}$ delle funzioni $C^\infty(\mathcal{R})$ che si annullano con tutte le derivate al di fuori di un intervallo I. Tale trasformazione è ben rappresentata dall'integrale:

$$f(\varphi) = \int_{\mathcal{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S} \ (\in \mathcal{K}),$$

Quindi c'è una corrispondenza biunivoca tra il funzionale f e la funzione $f(x)$ sotto integrale; se $f(x)$ è "regolare", allora il funzionale è detto regolare; altrimenti è detto "singolare". Funzionali lineari regolari e singolari sono anche detti "distribuzioni regolari e singolari".

La funzione $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ $(\in \mathcal{K})$ è detta "funzione di prova". Gli spazi in questione sono così ristretti da non essere normati; ma più è ristretto lo spazio delle φ e più ricche sono le proprietà dei funzionali lineari (distribuzioni) definibili su di esso. Pur non essendo normati, negli spazi di cui sopra è definita una nozione di convergenza. Ad esempio, Una successione $\{\varphi_n\}$ di $\mathcal{K}$ converge a una funzione $\varphi \in \mathcal{K}$ $(\varphi_n \to \varphi)$, se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^k\varphi_n(t)}{dt^k} = \frac{d^k\varphi(t)}{dt^k}, \quad k = 0, 1, ..$$

uniformemente in I. Allora un funzionale lineare su $\mathcal{K}$ è continuo, se

$$\lim_{n\to\infty} |f(\varphi_n) - f(\varphi)| = 0$$

quando $\varphi_n \to \varphi$.

i) Mostrare che, se $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$, allora il funzionale f è continuo, stabilendo la disuguaglianza:

$$|f(\varphi_n) - f(\varphi)| = |\int_{\mathbb{R}} dt f(t)(\varphi_n(t) - \varphi(t))| \leq \max_{t\in I} |\varphi_n(t) - \varphi(t))| \ ||f||_1.$$

+++ Mostrare che il funzionale δ_{t_0} definito dalla:

$$\delta_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0),$$

detto *funzionale delta di Dirac*, è continuo, poichè la convergenza uniforme con cui $\varphi_n \to \varphi$ implica la convergenza puntuale in t_0. ii) Osservare che il funzionale è "singolare", poichè non esiste una funzione $f(t)$ "regolare" tale che $\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt = \varphi(t_0)$ (la funzione, o meglio, "il simbolo", che fa ciò è la funzione delta di Dirac: $\delta(t - t_0)$).

+++ Si mostri che δ_{x_0} è un funzionale limitato se $\varphi(x)$ appartiene allo spazio normato $(C[a,b], ||\cdot||_\infty)$, valendo la disuguaglianza:

$$|\delta_{x_0}(\varphi)| = |\varphi(x_0)| \leq ||\varphi||_\infty.$$

Non è invece limitato se $\varphi(x)$ appartiene a $(L_2[a,b], ||\cdot||_2)$. Suggerimento: si consideri la successione di funzioni continue

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{n}{2}(x-x_0)^2}$$

e si mostri che $||\varphi_n(x)||_2 = 1$, mentre $|\delta_{x_0}(\varphi_n)| = (n/\pi)^{1/4}$. Quindi non può esistere una costante C tale che:

$$|\delta_{x_0}(\varphi_n)| \leq C \cdot 1 = C.$$

+++ Si consideri la successione di distribuzioni

$$f_n(\varphi) = \int_{-1}^{1} f_n(x)\varphi(x)dx,$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/n, \\ n - n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ n + n^2 x & -1/n \leq x \leq 0. \end{cases} \tag{23}$$

agente sulle funzioni di prova che appartengono allo spazio metrico $(C[-1,1], ||\cdot||_\infty)$. Si mostri che i) la funzione continua $f_n(x)$ descrive un triangolo isoscele di base $(-1/n, 1/n)$ e altezza n; ii) che l'area di questo triangolo è 1; iii) che la successione di funzionali f_n converge "debolmente" (nel senso delle distribuzioni) al funzionale δ_0, osservando che:

$$\begin{aligned} |f_n(\varphi) - \delta_0(\varphi)| &= |\int_{-1}^{1}[f_n(x)\varphi(x) - \varphi(0)]dx| = \\ = \int_{-1/n}^{1/n} f_n(x)|\varphi(x) - \varphi(0)| &\leq \max_{x\in[-1/n,1/n]} |\varphi(x) - \varphi(0)| \to \infty, \; n \to \infty. \end{aligned} \tag{24}$$

iv) Mostrare che D_n non converge "fortemente", nella sua norma naturale $||\cdot||_1$, non essendo neppure una successione di Cauchy. Infatti:

$$||f_n - f_m||_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|dx = \frac{(m^2-n^2)^2}{2m^2n^2} - \frac{(m-n)^2}{mn}.$$

Scegliendo, ad esempio, $m = 2n$, allora $||f_n - f_m||_1 = 5/8$, che ovviamente non converge a 0. v) Mostrare che considerazioni simili possono essere ripetute anche per tutte le successioni di funzioni che rappresentano le delta (vedere il prossimo esercizio).

+++ Si mostri che, data la funzione $p(x)$, "regolare" sull'asse reale e tale che

$$\int_{\mathcal{R}} p(x)dx = 1,$$

allora la successione di funzioni $\delta_n(x) := np(nx)$ fornisce, nel limite $n \to \infty$, una buona rappresentazione di $\delta(x)$, nel senso che:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} np(n(x - x_0))\varphi(x)dx = \varphi(x_0).$$

Per farlo, introdurre il cambiamento di variabile $y = n(x - x_0)$ e poi fare il limite $n \to \infty$. Che ipotesi vanno fatte su $p(x)$ e $\varphi(x)$ affinchè si possa passare al limite sotto il segno d'integrale?

+++ i) Verificare che le seguenti funzioni:

$i)\ \theta(1 - 2|x|);\quad ii)\ e^{-x^2}/\sqrt{\pi};\quad iii)\ \frac{1}{\pi(1+x^2)};\quad iv)\ \frac{\sin x}{\pi x}$

godono delle proprietà elencate nell'esercizio precedente. ii) Ottenere le corrispondenti successioni di funzioni che rappresentano $\delta(x)$ e graficarle. iii) Dimostrare che esse sono delle buone rappresentazioni della delta di Dirac senza passare al limite sotto il segno di integrale, scegliendo opportunamente lo spazio delle funzioni di prova. Per gli esempi i)-iii) si scelga lo spazio delle funzioni $L_1(\mathbb{R})$ continue in 0; per l'esempio iv) si scelga una φ tale che:

$i)$ $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ è assolutamente convergente in ogni intervallo finito (condizione del Dini);
$ii)$ $\varphi(x) \to 0,\ |x| \to \infty.$ (25)

+++ Trovare i valori dei parametri α, β, γ affinchè le seguenti successioni di funzioni siano buone rappresentazioni della $\delta(x)$.

$i)\ \frac{\alpha n}{\beta^2+n^\gamma x^2};\quad ii)\ \alpha n^\gamma e^{-\beta n^\gamma |x|}.$

+++ Si mostri che:

$i)\ \delta(x) = \delta(-x);\ ii)\ \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x);\quad iii)\ \theta(x) + \theta(-x) = 1;\quad iv)\ \delta'(-x) = -\delta'(x);\quad v)\ \delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x_n)}{|g'(x_n)|},\ g(x_n) = 0,\ g'(x_n) \neq 0$

+++ Si mostri che:

$i)$ $x\delta(x)=0$; $ii)$ $g(x)\delta(x-x_0)=g(x_0)\delta(x-x_0)$; $iii)$ $\delta(x^2-1)=\frac{1}{2}[\delta(x-1)+\delta(x+1)]$; $iv)$ $\delta(\sin x)=\sum_{n\in\mathcal{Z}}\delta(x-n\pi)$; $v)$ $\delta(\cos x)=\sum_{n\in\mathcal{Z}}\delta(x-(n+1/2)\pi)$

+++ Si mostri che:

$$\int_{-1}^{1} dx\delta(2x)\cos x=\frac{1}{2};\quad \int_{0}^{\infty} dx\delta(x^2-1)\varphi(x)=\varphi(1);\quad \int_{-1}^{4} dx\delta(\sin x)\cos x=0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(\sin xe^{-x})\frac{\sin x}{x-\pi}=-e^{-\pi};$$

$$\int_{0}^{\infty} dx\delta(\cos x)e^{-x}=\frac{1}{2\sinh\frac{\pi}{2}};\qquad \int_{-1}^{\infty} dx\delta(\sin x)e^{-x}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2\sinh\frac{\pi}{2}}$$

+++ Si mostri che $\int_{-\infty}^{x}\delta(y)dy=\theta(x)$.

+++ *Derivata di una distribuzione.* Data la distribuzione singolare D definita dal funzionale lineare

$$D(\varphi)=\int_{\mathcal{R}} D(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathcal{S},$$

si definisce derivata D' della distribuzione D il funzionale lineare:

$$D'(\varphi)=-D(\varphi')=-\int_{\mathcal{R}} D(x)\varphi'(x)dx.$$

Si verifichi che questa definizione è consistente con la ben nota regola di integrazione per parti, valida per funzionali regolari.

+++ Si mostri che, se D è una distribuzione singolare rappresentata dall'integrale:

$$D(\varphi)=\int_{\mathcal{R}} D(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\in\mathcal{S},$$

la sua derivata n-sima è definita dalla formula:

$$D^{(n)}(\varphi)=(-)^nD(\varphi^{(n)})=(-)^n\int_{\mathcal{R}} D(x)\varphi^{(n)}(x)dx.$$

+++ Si verifichi che, nel senso delle distribuzioni:

$$\begin{aligned}&\theta'(x)=\delta(x);\quad g(x)\delta'(x)=g(0)\delta'(x)-g'(0)\delta(x);\\&(\theta(x)\sin x)'=\theta(x)\cos x;\quad (\theta(x)\cos x)'=\delta(x)-\theta(x)\sin x\end{aligned}\tag{26}$$

+++ Mostrare che, se la funzione $f(x)$ è periodica: $f(x+2)=f(x)$ e vale x nell'intervallo $-1 \leq x < 1$, allora:

$$f'(x) = 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-(2n+1)).$$

+++ Si mostri che:

$$\int_a^b dx \delta'(x-x_0)\sin(x) = -\theta(b-x_0)\theta(x_0-a)\cos x_0; \quad (\theta(x)(x^2+1))' = \delta(x)+2\theta(x)x.$$

$$\int_0^\infty dx \delta'(x^2-4)\varphi(x) = -\frac{1}{4}\varphi'(2); \quad \int_0^\infty dx \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\tanh x\right] = 1;$$

+++ *Altre distribuzioni rilevanti.* Stabilire la validità delle seguenti relazioni, nel senso delle distribuzioni.

$$\frac{1}{x-x_0 \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \pm i\pi\delta(x-x_0); \qquad (\ln|x|)' = P\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(|x|)' = sgnx; \qquad \lim_{\epsilon\to 0, t\to\infty} \frac{e^{ixt}}{x \pm i\epsilon} = 2\pi i\delta(x) sgn(t) H(\mp\, sgnt).$$

+++ Verificare i seguenti limiti, per $n \to \infty$, nel senso delle distribuzioni:

$$\tanh(nx) \to sgnx, \quad -\tfrac{n^3 x}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{n^2x^2}{4}} \to \delta'(x), \quad ne^{-n|x|} \to \delta(x), \quad in\ \mathbb{R}; \\ e^{-n|x|} \to 0\ in\ \mathbb{R}^+. \tag{27}$$

+++ *Basi ortonormali e rappresentazioni della delta.* Si mostri che, se $\{e_n(x)\}$ è una base ortonormale di $L_2[a,b]$, allora la completezza di tale insieme di funzioni equivale alla condizione che la successione delle somme parziali

$$f_N(x,y) := \sum_{k=1}^{N} \bar{e}_k(y) e_k(x)$$

converge alla $\delta(x-y)$:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \bar{e}_k(y)e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{e}_k(y)e_k(x) = \delta(x-y)$$

+++ *Equazioni algebriche e differenziali con distribuzioni.* Dimostrare i seguenti risultati, nel senso delle distribuzioni.

$$\begin{array}{l} (x-a)y(x)=0 \quad \Rightarrow \quad y(x)=c\delta(x-a); \\ (x-a)y(x)=x^2-a^2 \quad \Rightarrow \quad y(x)=c\delta(x-a)+x+a; \\ xy(x)=1 \quad \Rightarrow \quad y(x)=c\delta(x)+P\left(\frac{1}{x}\right); \\ xy'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad y(x)=c\theta(x)+d; \\ xy'(x)=\delta(x) \quad \Rightarrow \quad y(x)=cH\theta(x)+d-\delta(x); \\ (xy'(x))'=0 \quad \Rightarrow \quad y(x)=a\theta(x)+b\ln|x|. \end{array} \tag{28}$$

+++ Trovare la soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria con potenziale di tipo delta

$$-y''(x)+a\delta(x)y(x)=k^2y(x)$$

4.2.2 Serie di Fourier

+++ *La completezza della base discreta di Fourier* Ricordando che la successione di funzioni $\{e_n(x)\}$ ortonormali in $L_2[a,b]$:

$$(e_n,e_m)=\int_a^b dx\overline{e_n(x)}e_m(x)=\delta_{nm}$$

costituisce un sistema completo (una base) in $L_2[a,b]$ se e solo se:

$$\sum_n \overline{e_n(y)}e_n(x)=\delta(x-y), \qquad x,y\in[a,b],$$

si mostri che le funzioni $\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n\in\mathcal{Z}}$ costituiscono un sistema ortonormale e completo (una base ortonormale) di $L_2(-\pi,\pi)$; cioè si verifichi che:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}e^{i(n-m)x}=\delta_{nm}, \qquad ortonormalita'$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{in(x-y)}}{2\pi}=\delta(x-y), \qquad completezza.$$

Suggerimento: si mostri che

$$\sum_{-N}^{N}e^{inx}=e^{-iNx}(1+..+e^{2iNx})=e^{-iNx}\frac{1-e^{i(2N+1)x}}{1-e^{ix}}=$$

$$\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} = 2\pi\frac{\sin(\nu x)}{\pi x}\frac{(x/2)}{\sin(x/2)}, \qquad \nu = N + \frac{1}{2}$$

e si ricordi che $\delta_\nu(x) = \sin(\nu x)/(\pi x)$ rappresenta $\delta(x)$, nel limite $\nu \to \infty$.

+++ Nello spazio euclideo delle funzioni continue reali $C[0, 2\pi]$, dotato di prodotto scalare $(x, y) = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)$, si consideri il sottospazio finito-dimensionale M generato dai polinomi trigonometrici di ordine n: $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt,$ ($\dim M = 2n + 1$). i) Si mostri che la corrispondente base ortonormale è:

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\}.$$

ii) Si mostri che *la proiezione ortogonale $F_n(t)$ di una generica funzione continua $f(t) \in C[0, 2\pi]$ sul sottospazio M generato dai polinomi trigonometrici di ordine n è proprio la serie di Fourier troncata all'ordine n*:

$$\begin{gathered} F_n(t) = \tfrac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=1}^n a_k \cos kt + \sum_{k=1}^n b_k \sin kt\right), \\ a_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) dt,\ \ a_k = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dt \cos kt f(t) dt,\ \ b_k = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dt \sin kt f(t) dt \end{gathered} \tag{29}$$

La serie di Fourier troncata è quindi il polinomio trigonometrico *più vicino, nella norma $||\cdot||_2$, alla funzione continua* da rappresentare.

+++ Dimostrare i due Teoremi di Weierstrass qui sotto riportati sull'approssimazione di funzioni continue mediante polinomi e polinomi trigonometrici.
Il primo teorema di Weierstrass Se $f(t) \in C[a, b]$, allora la successione di polinomi $\{P_n(t)\}$ definita da

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{k}{n} t^k (1-t)^{n-k}$$

converge uniformemente (cioè, nella norma del sup) a $f(t)$, su tutto l'intervallo $[a, b]$.
Il secondo teorema di Weierstrass Se $f(t) \in C[-\pi, \pi]$ ed è periodica di periodo 2π, allora, $\forall \epsilon > 0$, esiste una successione di polinomi trigonometrici:

$$F_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=1}^n a_k \cos kt + \sum_{k=1}^n b_k \sin kt\right)$$

tale che $|f(t) - F_n(t)| < \epsilon$, uniformemente in $t \in [-\pi, \pi]$.

+++ *Sviluppo in serie di Fourier* Si usi il risultato precedente per mostrare che un funzione $f(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ è sviluppabile in serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} f_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{s_n \sin(nx) + c_n \cos(nx)\},$$

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} f(x), \quad s_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx,$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx$$

dove gli $\{f_n\}$, $n \in \mathcal{Z}$ e i$\{c_n, s_n\}$ $n \in \mathcal{N}$ sono i cosidetti coefficienti di Fourier di $f(x)$. Si verifichi, in particolare, l'equivalenza tra lo sviluppo in esponenziali e quello in seni e coseni. Quando converrà usare l'uno o l'altro?

+++ *Proprietà di convergenza della serie di Fourier.* Giustificare e (di)mostrare che la serie di Fourier gode delle seguenti proprietà di convergenza.
i) La serie di Fourier converge in norma $||\cdot||_2$ a $f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$; cioè:

$$\begin{aligned} &||f(x) - f_n(x)||_2 \to 0, \quad n \to \infty, \\ &f_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} f_k e^{ikx}, \quad f_k = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{dx}{2\pi} e^{-ikx} f(x), \end{aligned} \tag{30}$$

Inoltre la successione delle somme parziali $f_n(x)$ converge "quasi ovunque" (cioè a meno di un insieme di punti di $[-\pi,\pi]$ a misura di Lebesque nulla) a $f(x)$.
ii) Essa converge puntualmente a $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

in ogni punto $x \in [-\pi,\pi]$ in cui $f(x)$ è continua e soddisfa alla condizione del Dini (l'assoluta convergenza del rapporto incrementale in quel punto).
iii) Se $f(x)$ è discontinua in $x_0 \in [-\pi,\pi]$, ma esistono i limiti destro e sinistro:

$$f_\pm(x_0) = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(x_0 \pm \epsilon)$$

e la condizione del Dini è soddisfatta per i rapporti incrementali destro e sinistro, allora

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \frac{f_+(x_0) + f_-(x_0)}{2}.$$

In particolare, se f non è periodica: $f(\pi) \neq f(-\pi)$, allora

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\pm\pi) = \frac{f_+(\pi) + f_-(-\pi)}{2}.$$

iv) Mostrare che, nell'intorno di una discontinuità del tipo descritto in iii) si verifica il cosidetto "fenomeno di Gibbs". Cioè la somma parziale $f_n(x)$, per $n >> 1$, oscilla molto rapidamente, a destra e a sinistra della discontinuità, in una regione dell'ordine di $O(n^{-1})$; il massimo di tale oscillazione si verifica per $x_M \sim \pi/n$ e la differenza $|f_n(x_M) - f_\pm(x_0)| \sim 0.09|f_+(x_0) - f_-(x_0)|$ resta finita per $n \to \infty$. Dopo aver disegnato questo massimo, il grafico di $f_n(x)$ si raccorda con continuità, assumendo in x_0 il valor medio del limite destro e sinistro (come già visto in iii)).
v) Dimostrare che, se la funzione $f(x)$ ha derivate continue fino all'ordine $(k-1)$ e la derivata k-esima soddisfa alla condizione di Dini, allora i coefficienti c_n, s_n della corrispondente serie di Fourier soddisfano alle maggiorazioni:

$$|c_n|, |s_n| < \frac{M}{n^{k+1}}, \quad M > 0.$$

Dedurre che le derivate $f^{(j)}(x), j = 1, .., k$ della funzione $f(x)$ ammettono la rappresentazione in serie di Fourier ottenuta scambiando gli operatori di derivazione con la somma della serie. Cosa succede alla derivata $f^{(k+1)}(x)$?

+++ *Formule di Parseval* Dimostrare le seguenti formule:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \bar{f}(x) g(x) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} \bar{f}_n g_n = \bar{c}_0 c'_0 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \{\bar{c}_n c'_n + \bar{s}_n s'_n\},$$

dove $f_n,\ g_n,\ n \in \mathcal{Z}$ sono i coefficienti di Fourier di $f(x),\ g(x)$ nello sviluppo in esponenziali e $\{c_n, s_n\}$, $\{c'_n, s'_n\}$ sono i coefficienti di Fourier di $f(x),\ g(x)$ rispettivamente nello sviluppo in seni e coseni. Dedurre, in particolare, che:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 = \sum_{n\in\mathcal{Z}} |f_n|^2 = |c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \{|c_n|^2 + |s_n|^2\}.$$

+++ *Teorema di convoluzione* Dimostrare che il prodotto di convoluzione $R(x)$ di due funzioni $G(x)$ e $I(x)$:

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x') I(x')$$

equivale alla semplice moltiplicazione dei corrispondenti coefficienti di Fourier:

$$R_n = 2\pi G_n I_n$$

+++ Sviluppare le seguenti funzioni
i) x; *ii)* x^2; *iii)* $|x|$; *iv)* $sign\ x$; *v)* $\delta(x)$; *vi)* $\theta(x)$; *vii)* $e^{\alpha x}$; *viii)* $\sin(\alpha x)$; *ix)* $\cos(\alpha x)$; *x)* $c_1\theta(-x) + c_2\theta(x)$
in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ed utilizzare (quando possibile) le relative formule di Parseval (o dei limiti notevoli dello sviluppo) per ottenere le somme di opportune serie numeriche. Infine confrontare i grafici delle funzioni e delle somme delle serie su tutto $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll}
i) & x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}}{n}\sin nx, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \\
ii) & x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^2}\cos nx, \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\ (x=0), \\
iii) & |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4, \\
iv) & sign\ x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \\
v) & \delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx, \\
vi) & \theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}, \\
x) & c_1\theta(-x) + c_2\theta(x) = \frac{c_1+c_2}{2} - \frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}
\end{array} \tag{31}$$

+++ Calcolare $f(x)$ e $I = \int_{-\pi}^{\pi} dx|f(x)|^2$, dalla conoscenza dei coefficienti Fourier dello sviluppo in esponenziali: *i)* $f_n = e^{-\alpha|n|}$, $\alpha > 0$; *ii)* $f_n = a^{|n|}$, $a > 1$, verificando che:

$$i)\ f(x) = \frac{1 - e^{-2\alpha x}}{1 + e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\cos x},\ I = \frac{2\pi}{\tanh\alpha};$$

$$ii)\ f(x) = \frac{a^2-1}{a^2+1-2a\cos x},\ I = 2\pi\frac{a^2+1}{a^2-1}$$

+++ Verificare che la trasformazione

$$x \to x' = \frac{2\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})$$

mappa l'intervallo $[a,b]$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ ed utilizzare tale risultato per mostrare che lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $[a,b]$ di una funzione $g(x)$ regolare in $[a,b]$ è dato da:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx\frac{2\pi}{b-a}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{s_n \sin(nx\frac{2\pi}{b-a}) + c_n \cos(nx\frac{2\pi}{b-a})\},$$

$$b_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{inx\frac{2\pi}{b-a}} g(x)dx, \quad s_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b \sin(nx\frac{2\pi}{b-a})g(x)dx,$$

$$c_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx, \quad c_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b \cos(nx\frac{2\pi}{b-a})g(x)dx.$$

+++ Sviluppare le funzioni dell'esercizio 6 in serie di Fourier nell'intervallo $(0,L)$.

+++ i) Mostrare che le successioni di funzioni $\{\cos(nx\frac{\pi}{L})\}_0^\infty$ e $\{\sin(nx\frac{\pi}{L})\}_0^\infty$ costituiscono basi ortonormali e complete nell'intervallo $[0,L]$.
ii) Verificare che gli sviluppi di una funzione $f(x)$, regolare in $[0,L]$, in tali basi sono dati da:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx\frac{\pi}{L}), \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(nx\frac{\pi}{L})f(x)dx, \quad \textit{serie del seno},$$

$$f(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx\frac{\pi}{L}), \quad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(nx\frac{\pi}{L})f(x)dx, \quad \textit{serie del coseno}.$$

iii) Usando il risultato dell'esercizio 7, si mostri che lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$ nell'intervallo $(0,L)$ è dato da:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{s_n \sin(nx\frac{2\pi}{L}) + c_n \cos(nx\frac{2\pi}{L})\},$$

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(nx\frac{2\pi}{L})f(x)dx, \quad s_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(nx\frac{2\pi}{L})f(x)dx$$

e lo si confronti con gli sviluppi nelle serie del seno e del coseno per $x \in \mathcal{R}$ (disegnare i grafici delle somme dei tre sviluppi). Quando converrà usare uno sviluppo piuttosto che un'altro?

+++ Costruire gli sviluppi nelle serie seno e coseno delle funzioni dell'esercizio 6 nell'intervallo $[0, L]$ e confrontarli con lo sviluppo in serie di Taylor nello stesso intervallo (si veda l'esercizio 8), disegnando i grafici dei tre sviluppi per $x \in \mathcal{R}$. Quando converrà usare uno sviluppo piuttosto che un'altro?

4.2.3 La trasformata di Fourier

+++ *La base continua di Fourier* Mostrare che le funzioni $\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi},\ k \in \mathcal{R}\}$ costituiscono una base ortonormale di $L_2(\mathcal{R})$; vale a dire, si verifichi che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i(k-k')x} = \delta(k-k'), \qquad \textit{ortonormalita'}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} = \delta(x-y), \qquad \textit{completezza.}$$

Suggerimento: Si osservi che:

$$\frac{\sin(nx)}{\pi x} = \int_{-n}^{n} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$

e si ricordi che $\delta_n(x) = \sin(nx)/(\pi x)$ rappresenta $\delta(x)$, per $n \to \infty$.

+++ *La trasformata di Fourier* Si deduca che una qualunque funzione $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ è sviluppabile nella base $\{e^{ikx},\ k \in \mathcal{R}\}$ (ammette cioè la rappresentazione integrale di Fourier):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{f}(k),$$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x),$$

dove il coefficiente $\hat{f}(k)$ dello sviluppo è detto "trasformata di Fourier" di $f(x)$.

+++ *Formula di Parseval* Scambiando l'ordine degli integrali, si ottenga la formula di Parseval per la trasformata di Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{f}(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$$

che, nel caso in cui $f(x) = g(x)$, si riduce alla

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{f}(k)|^2$$

+++ *Significato fisico della trasformata di Fourier* Se la funzione $f(t) \in L_2(\mathcal{R})$ rappresenta un segnale (luminoso, acustico, ..) tale che $\int_{\mathcal{R}} dt |f(t)|^2 = 1$, si osservi, usando la definizione di trasformata di Fourier:

$$f(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega), \qquad \hat{f}(\omega) = \int_{\mathcal{R}} dt e^{-i\omega t} f(t)$$

e la formula di Parseval, che $|f(t)|^2 dt$ è la probabilità che il segnale arrivi nell'intervallo $(t, t+dt)$ (e quindi la $\int_{\mathcal{R}} dt |f(t)|^2 = 1$ indica che il segnale è arrivato, prima o poi) e $|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega/(2\pi) = |\hat{f}(\omega)|^2 d\nu$ è la probabilità che il segnale contenga frequenze nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$. Se, invece, $f(x)$ è la funzione d'onda in meccanica quantistica di una particella localizzata, allora $|f(x)|^2 dx$ è la probabilità di trovare la particella nell'intervallo $(x, x + dx)$ e $|\hat{f}(k)|^2 dk/(2\pi)$ è la probabilità che la particella abbia numero d'onda nell'intervallo $(k, k + dk)$.

+++ Si mostri che le trasformate di Fourier delle funzioni $f_1(x) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\Delta})^2}$, $f_2(x) = (1+x^2)^{-1}$, $f_3(x) = \delta(x - x_0)$, $f_4(x) = \theta(x - x_0)$, $f_5(x) = \theta(L - |x|)$; $f_6(t) = \theta(t_0^2 - t^2) \sin \omega_0 t$ sono, rispettivamente:

$$\hat{f}_1(k) = \sqrt{2\pi} \Delta e^{-\frac{1}{2}(\Delta k)^2}; \qquad \hat{f}_2(k) = \pi e^{-|k|}; \qquad \hat{f}_3(k) = e^{-ikx_0};$$

$$\hat{f}_4(k) = \frac{e^{-ikx_0}}{i(k - i\epsilon)}; \quad \hat{f}_5(k) = 2\frac{\sin kL}{k}; \quad \hat{f}_6(\omega) = -i\left(\frac{\sin(\omega_0 - \omega)t_0}{\omega_0 - \omega} - \frac{\sin(\omega_0 + \omega)t_0}{\omega_0 + \omega}\right)$$

verificando che tanto maggiore è la localizzazione della funzione quanto minore è quella della sua trasformata di Fourier. Si calcoli infine l'antitrasformata di Fourier delle funzioni $\hat{f}_j(k)$ riottenendo le funzioni $f_j(x)$.

+++ *Proprietà della trasformata di Fourier* Si verifichi le seguenti proprietà della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}
&traslazione: \qquad && g(x) = f(x + a) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = e^{ika} \hat{f}(k) \\
& && g(x) = e^{iax} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = \hat{f}(k - a) \\
&differenziazione: && g(x) = f^{(n)}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = (ik)^n \hat{f}(k)
\end{aligned}$$

$$g(x) = L(\frac{d}{dx})f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = L(ik)\hat{f}(k)$$

$$g(x) = x^n f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = i^n \hat{f}^{(n)}(k)$$

integrazione :
$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} dy f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{g}(k) = (ik)^{-1}\hat{f}(k)$$

+++ *Teorema di convoluzione* Si mostri che il prodotto di convoluzione $R(x)$ di due funzioni $G(x)$ e $I(x)$:

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x - x') I(x')$$

equivale alla semplice moltiplicazione delle corrispondenti trasformate di Fourier:

$$\hat{R}(k) = \hat{G}(k)\hat{I}(k)$$

+++ Si calcoli il prodotto di convoluzione $R(x)$ delle funzioni $G(x)$ e $I(x)$, conoscendone le trasformate di Fourier $\hat{G}(k)$ e $\hat{I}(k)$, nei seguenti casi:
i) $\hat{G}(k) = (ik - 2)^{-1}$, $\hat{I}(k) = (ik + 1)^{-1}$; *ii)* $\hat{G}(k) = (ik - 1)^{-1}$, $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}$, $x_0 \in \mathcal{R}$;
Risp. *i)* $-[\theta(x)e^{-x} + \theta(-x)e^{x-x_0}]/3$; *ii)* $-\theta(x_0 - x)e^{x-x_0}$

+++ **Equazioni differenziali con la trasformata di Fourier**. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale del second'ordine non omogenea $u''(t) + \omega_0^2 u(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, 3$ col metodo della trasformata di Fourier, attraverso i seguenti passi.
i) Verificare che la trasformata di Fourier $\hat{u}(\omega)$ di $u(t)$ soddisfa all'equazione algebrica non omogenea

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\hat{u}(\omega) = \frac{2\pi}{(-i)^n}\delta^{(n)}(\omega),$$

dove $\delta^{(n)}$ è la derivata n-esima della delta di Dirac.
ii) Mostrare che la soluzione generale di tale equazione algebrica, nel senso delle distribuzioni, è:

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{2\pi}{(-i)^n}\frac{\delta^{(n)}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c\delta(\omega - \omega_0) + d\delta(\omega + \omega_0).$$

iii) Determinare $u(t)$ attraverso l'anti-trasformata di Fourier di $\hat{u}(\omega)$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

4.3 Problemi di Sturm Liouville

+++ Si consideri l'operatore differenziale del second'ordine

$$\hat{L} = \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x), \tag{32}$$

con $p(x), q(x) \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$.
i) Mostrare che $\hat{L}$ è autoaggiunto, rispetto al prodotto scalare (ϕ, ψ), $\phi, \psi \in L_2[a, b]$, se e solo se

$$\left[p(x)\left(\bar{\phi}(x)\frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx}\psi(x)\right)\right]_a^b = 0. \tag{33}$$

ii) Mostrare che la condizione al contorno (33) è soddisfatta nei seguenti tre casi importanti:

a. Condizioni al contorno omogenee e miste:

$$\begin{array}{l} \psi(a) + \gamma_a\psi'(a) = \phi(a) + \gamma_a\phi'(a), \quad \gamma_a \in \mathbb{R} \\ \psi(b) + \gamma_b\psi'(b) = \phi(b) + \gamma_b\phi'(b) \quad \gamma_b \in \mathbb{R} \end{array} \tag{34}$$

b. Condizioni al bordo periodiche:

$$\begin{array}{l} \psi(a) = \psi(b), \quad \psi'(a) = \psi'(b) \\ \phi(a) = \phi(b), \quad \phi'(a) = \phi'(b) \end{array} \tag{35}$$

c. Problema in $L_2(\mathbb{R})$:

$$a = -\infty, \; b = \infty, \quad \phi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$$

+++ *Problema agli autovalori.* Si consideri il seguente problema agli autovalori:

$$\hat{L}\psi(x) + \lambda r(x)\psi(x) = 0,$$

con $r(x) \in \mathbb{R}^+$, $p(x), q(x) \in \mathbb{R}$. Mostrare che:

i) Se $\hat{L}$ è auto-aggiunto, allora l'autovalore λ è reale.

ii) Se, inoltre, le condizioni al contorno sono reali, allora l'autofunzione $\psi(x)$ è reale.

iii) Autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.

iv) Se sono soddisfatte le condizioni al contorno

$$p(a)[\psi_2(a)\psi_1'(a) - \psi_2'(a)\psi_1(a)] = p(b)[\psi_2(b)\psi_1'(b) - \psi_2'(b)\psi_1(b)] = 0$$

(i casi a) e c) del precedente esercizio appartengono a questa categoria), allora gli autovalori sono non degeneri ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

+++ *Problema di Sturm-Liouville proprio.*
Il problema di Sturm-Liouville è proprio se:
i) $p(x), r(x) > 0,\ q(x) \leq 0,\ x \in [a,b]$; ii) le condizioni al bordo a) sono soddisfatte, con $\gamma_a \leq 0,\ \gamma_b \geq 0$.
Dimostrare che, in un problema di Sturm-Liouville proprio, gli autovalori sono maggiori o uguali a zero (uguali a zero se $q = 0$ e $\psi = cost.$).

+++ Mostrare che il problema di Schrödinger stazionario

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \psi \in L_2(\mathbb{R})$$

è un problema di Sturm-Liouville proprio. Quindi, se $V(x) > 0$ (come nel caso dell'oscillatore armonico: $V(x) = x^2$), allora lo spettro energetico è positivo e non degenere.

4.3.1 Funzione di Green

+++ Si consideri un sistema fisico descritto dall'equazione differenziale lineare

$$L(\frac{d}{dx})R(x) = I(x), \quad x \in (\alpha, \beta)$$

dove $L(\frac{d}{dx})$ è un operatore differenziale lineare rispetto alla variabile indipendente x, $I(x)$ è un dato input (forcing) esterno e $R(x)$, la soluzione da determinare, è la risposta del sistema all'input esterno. Si consideri inoltre la soluzione $G(x, x')$ del problema particolare:

$$L(\frac{d}{dx})G(x, x') = \delta(x - x'), \quad x, x' \in (\alpha, \beta)$$

Essa prende il nome di *funzione di Green associata all'operatore* L; si noti che, in questa equazione, x' appare come parametro.
i) Si osservi che la funzione di Green ha il significato fisico di risposta del sistema all'input esterno impulsivo $\delta(x - x')$.
ii) Si osservi che la funzione di Green è definita a meno della soluzione generale $H(x)$ del problema omogeneo corrispondente: $LH(x) = 0$; ovvero, che la differenza tra due funzioni di Green diverse G e $\tilde{G}$ è una soluzione dell'equazione omogenea:

$$L(\frac{d}{dx})[G(x, x') - \tilde{G}(x, x')] = 0$$

Tale arbitrarietà è di solito sfruttata quando si deve selezionare quella funzione di Green che soddisfa ad opportune condizioni al bordo.
iii) Si mostri che la soluzione dell'equazione di partenza ammette la seguente rappresentazione integrale in termini della funzione di Green:

$$R(x) = \int_{\alpha}^{\beta} dx' G(x,x') I(x') + H(x)$$

molto utile sia per studiare le proprietà matematiche della soluzione, sia per estrarne le informazioni fisiche più rilevanti.

+++ Dato l'operatore $L = d/dt + 3$ e la distribuzione $g(t) = \theta(t)e^{-\gamma t}$, si calcoli $Lg(t)$ e si determini il valore di γ per il quale $g(t-t')$ è una funzione di Green dell'operatore L.
Risp. $\gamma = 3$

+++ Dato l'operatore $L = d^2/dt^2 + 4$ e la distribuzione $g(t) = A\theta(t)\sin\omega t$, si calcoli $Lg(t)$ e si determini i valori di γ e di A per i quali $g(t-t')$ è una funzione di Green dell'operatore L.
Risp. $\omega = 2,\ A = 1/\omega = 1/2$ ($\omega = -2$ non dà una soluzione distinta)

+++ Trovare la soluzione $f(x)$ del seguente problema al contorno:

$$(x\frac{d}{dx} - 1)f(x) = 1, \quad f(1) = 1,$$

usando un'opportuna funzione di Green dell'operatore $d/dx - 1/x$.

+++ Trovare la soluzione $x(t)$ del seguente problema al contorno per l'oscillatore armonico:

$$(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)x(t) = \theta(t)(e^{-t} - e^{-3t}), \quad x(t) - \sin\omega t \to 0, \quad t \to -\infty$$

usando la funzione di Green di $d^2/dt^2 + \omega^2$.

+++ Determinare il moto dell'oscillatore armonico forzato che è a riposo per $t < -5$ e soddisfa l'equazione:

$$(\frac{d^2}{dt^2} + \pi^2)x(t) = 3\delta(t^2 - 4).$$

+++ Determinare la funzione di Green che risolve il problema al contorno:

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x - x'), \quad 0 \le x, x' \le 1, \quad G(0,x') = G(1,x') = 0$$

che descrive, ad esempio, la configurazione assunta da una corda elastica, tesa orizzontalmente, soggetta ad una forza verticale che agisce sul punto x'.

Risp. $G(x,x') = -\theta(x'-x)(1-x')x - \theta(x-x')x'(1-x)$

+++ Risolvere il problema al contorno:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + k^2u(x) = F(x), \quad 0 \le x, x' \le 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

dove $F(x)$ è un imput assegnato, attraverso la funzione di Green $G(x,x')$ del problema

$$\frac{d^2G}{dx^2} = \delta(x-x'), \quad 0 \le x, x' \le 1, \quad G(0,x') = G(1,x') = 0$$

Risp.

$$\begin{array}{l} u(x) = \int\limits_0^1 G(x,x')F(x')dx', \\ G(x,x') = -\theta(x'-x)\frac{\sin kx \sin k(1-x')}{k \sin k} - \theta(x-x')\frac{\sin kx' \sin k(1-x))}{k \sin k} \end{array} \tag{36}$$

+++ **Funzione di Green fondamentale** La funzione di Green più usata è la cosidetta *funzione di Green fondamentale*, che dipende da x e x' solo attraverso la differenza $x - x'$ e ammette la rappresentazione integrale di Fourier:

$$G_{fond}(x-x') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')}\hat{G}(k).$$

Si mostri che:

$$L(d/dx)G(x-x') = \delta(x-x') \Rightarrow \hat{G}(k) = \frac{1}{L(ik)} \Rightarrow G_{fond}(x-x') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik(x-x')}}{L(ik)}$$

Nelle più comuni applicazioni fisiche $L(\cdot)$ è un polinomio nel suo argomento; quindi $L(ik)$ è un polinomio nella variabile di Fourier k. Il calcolo della funzione di Green fondamentale è quindi ricondotto alla valutazione di un integrale facilmente calcolabile usando il teorema dei residui:

$$G_{fond}(x-x') = i\theta(x-x') \sum_j Res(\frac{e^{ik(x-x')}}{L(ik)}, k_j^+) - i\theta(x'-x) \sum_j Res(\frac{e^{ik(x-x')}}{L(ik)}, k_j^-),$$

dove $k_j^{\pm}$ sono gli zeri di $L(ik)$ rispettivamente nel semipiano superiore e inferiore del piano complesso k. Un'attenzione particolare dovrà essere dedicata al caso in cui qualche zero di $L(ik)$ si trova sull'asse reale; in questo caso il cammino d'integrazione potrà essere scelto in uno dei seguenti modi. i) il cammino d'integrazione potrà disegnare un piccolo semicerchio che aggira la singolarità da sopra o da sotto; ii) l'integrale potrà essere inteso nel senso del valor principale. Queste tre scelte, tutte legittime dal punto di vista matematico, porteranno alla costruzione di tre funzioni di Green diverse; quale scelta effettuare dipenderà dal contesto fisico in cui tale calcolo è svolto (si veda, ad esempio, gli esercizi relativi alla sezione 3.2).

+++ Si mostri che la funzione di Green fondamentale per l'operatore del prim'ordine $L = d/dt + \gamma,\ \gamma > 0$ (che descrive, ad esempio, il moto di una particella in un mezzo resistivo) è:

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{ik + \gamma} \quad \Rightarrow \quad G(t - t') = \theta(t - t')e^{-\gamma(t-t')}$$

Si verifichi inoltre che $LG(t - t') = \delta(t - t')$.

+++ Si usi la funzione di Green dell'esercizio precedente per mostrare che il moto di una particella in un mezzo resistivo, soggetta ad una forza esterna $I(t) = I_0 e^{-|t|}$ e ferma nel remoto passato, è descritto da:

$$R(t) = I_0\{\theta(t)[\frac{2e^{-\gamma t}}{1-\gamma^2} - \frac{e^{-t}}{1-\gamma}] + \theta(-t)\frac{e^t}{1+\gamma}\}$$

Si giunga a tale risultato in due modi diversi: i) calcolando la funzione di Green fondamentale e poi calcolando l'integrale elementare $\int dt' G(t - t')I(t')$; ii) calcolando la trasformata di Fourier $\hat{I}$ e poi l'integrale di Fourier $\int (dk/2\pi)e^{ikt}\hat{G}(k)\hat{I}(k)$
$= \int (dk/2\pi)e^{ikt}\hat{I}(k)/L(ik)$, avendo usato, in qust'ultima strategia, il teorema di convoluzione.

+++ Si mostri che la trasformata di Fourier della funzione di Green fondamentale per l'operatore del second'ordine $L = d^2/dt^2 + \omega_0^2,\ \omega_0 > 0$ (che descrive, ad esempio, l'oscillatore armonico) è data da:

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{-k^2 + \omega_0^2}$$

Osservando che $\hat{G}(k)$ ha due poli semplici sul cammino d'integrazione, si costruisca le diverse funzioni di Green associate, mostrando che:

i) se il cammino d'integrazione evita le singolarità con due piccole semi-circonferenze che aggirano le singolarità da sotto, allora si ottiene la cosidetta *funzione di Green ritardata*:

$$G_{rit}(t-t') = \theta(t-t')\frac{\sin\omega_0(t-t')}{\omega_0}$$

Essa descrive la risposta dell'oscillatore, al tempo t, ad un input impulsivo verificatosi al tempo t' antecedente (ritardato). Tale risposta, ritardata, rispetta quindi il principio di causa - effetto.
ii) Se il cammino d'integrazione evita le singolarità con due piccole semicirconferenze che passano sopra, allora si ottenga invece la cosidetta *funzione di Green avanzata*:

$$G_{avan}(t-t') = \theta(t'-t)\frac{\sin\omega_0(t'-t)}{\omega_0}$$

Essa descrive la risposta, al tempo t, ad un input impulsivo verificatosi al tempo t' successivo. Tale risposta è quindi anticipata (avanzata) e non rispetta il principio di causa - effetto. Questa funzione di Green, non molto utile in un problema evolutivo, è invece largamente usata in problemi di scattering da potenziale, dove t è sostituita da x (si veda il problema di scattering di questa sezione).
iii) Se una semi-circonferenza evita ω_0 da sotto e l'altra evita $-\omega_0$ da sopra, si ottienga la cosidetta *funzione di Green di Feynmann, o causale*:

$$G_{Feyn}(t-t') = \theta(t-t')\frac{e^{i\omega_0(t-t')}}{2i\omega_0} + \theta(t'-t)\frac{e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i\omega_0}$$

Questa risposta non è quindi causale nel senso evolutivo classico . Lo diventa invece in un contesto quanto - relativistico, quando nella teoria sono presenti sia particelle, sia antiparticelle.
iv) Se l'integrale è inteso nel senso del valor principale, allora si ottenga la cosidetta funzione di Green stazionaria:

$$G_{staz}(t-t') = [\theta(t-t') - \theta(t'-t)]\frac{\sin\omega_0(t-t')}{2\omega_0}$$

+++ Si verifichi, applicando l'operatore $L = d^2/dt^2 + \omega_0^2$ a tutte le funzioni $G(t-t')$ ottenute nell'esercizio precedente, che esse sono effettivamente funzioni di Green (cioè che $LG(t-t') = \delta(t-t')$).

+++ Si verifichi che la differenza tra due qualsiasi funzioni di Green dell'esercizio precedente è una soluzione dell'omogenea. Ad esempio, si verifichi che:

$$G_{rit}(t-t') - G_{avan}(t-t') = \frac{\sin \omega_0 (t-t')}{\omega_0}$$

+++ Si verifichi che la funzione di Green fondamentale per l'operatore del second'ordine $L = d^2/dt^2 + 2\gamma d/dt + \omega_0^2,\ \gamma, \omega_0 > 0$ (che descrive, ad esempio, un oscillatore armonico smorzato) è data da:

$$G(t-t') = \theta(t-t') e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin \omega(t-t')}{\omega}, \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \omega_0 > \gamma$$

$$G(t-t') = \theta(t-t') \frac{e^{-\gamma_- t} - e^{-\gamma_+ t}}{2\gamma\sqrt{1-(\omega_0/\gamma)^2}}, \quad \gamma_\pm := \gamma(1 \pm \sqrt{1-(\omega_0/\gamma)^2}) > 0, \quad \omega_0 < \gamma$$

+++ Usando un'opportuna funzione di Green, si mostri che la dinamica di un oscillatore armonico che, nel remoto passato, oscilla liberamente: $R(t) \sim A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),\ t \sim -\infty$ e che è soggetto all'input esterno $I(t) = I_0 e^{-|t|}$, è data da:

$$R(t) = \frac{I_0}{1+\omega_0^2} [\theta(t) \frac{2\sin \omega_0 t}{\omega_0} + e^{-|t|}] + A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

+++ **Causalità e analiticità**. Si consideri un sistema caratterizzato dalla seguente relazione integrale:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t') I(t') dt' + H(t)$$

dove $I(t)$ esprime l'insieme delle interazioni del sistema con l'ambiente esterno (I come "input" esterno), $H(t)$ è lo stato normale del sistema in assenza di interazioni, $R(t)$ è la risposta del sistema all'imput esterno e la funzione $G(t,t')$ rappresenta "la suscettività del sistema".
i) Si mostri che le seguenti proprietà fisiche del sistema hanno le seguenti implicazioni matematiche:

$$linearita' \quad \Leftrightarrow \quad indipendenza\ di\ G(t,t')\ da\ I(t')$$

$$causalita' \quad \Leftrightarrow \quad G(t,t') = 0,\ t' > t, \quad \Leftrightarrow \quad G(t,t') = \theta(t-t') S(t,t')$$

$$Invarianza\ per\ traslazioni\ temporali \quad \Leftrightarrow \quad G(t,t') = G(t-t')$$

Quindi, un sistema fisico lineare, causale e invariante per traslazioni temporali è descritto dalla seguente relazione:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-t')I(t')dt' + H(t)$$

ii) Si osservi che, se il sistema lineare è descritto dall'equazione differenziale $L(d/dt)R(t) = I(t)$, allora la suscettività è nient'altro che la funzione di Green ritardata del sistema: $G_{rit}(t-t') = \theta(t-t')S(t-t')$.
iii) Si verifichi infine che, se l'input è impulsivo: $I(t) = I_0\delta t - t_0)$, allora $R(t) = \theta(t-t_0)S(t-t_0) + H(t)$ (la risposta, successiva al momento in cui si verifica l'impulso, è completamente descritta dalla suscettività del sistema che, per questa ragione, è anche detta "risposta del sistema ad un evento impulsivo").

+++ Introdotte le trasformate di Fourier di R, S e I:

$$\hat{R}(k) = \int_{\mathcal{R}} dte^{-ikt}R(t), \quad \hat{I}(k) = \int_{\mathcal{R}} dte^{-ikt}I(t), \quad \hat{S}(k) = \int_{\mathcal{R}} dte^{-ikt}S(t)$$

si ottengano i seguenti risultati:
a) La proprietà di causalità si traduce, nello spazio di Fourier, nell'analiticità della funzione $\hat{S}(k)$ nel semipiano inferiore.
b) la rappresentazione integrale per la risposta $R(t)$ di un sistema invariante per traslazioni temporali si riduce alla semplice moltiplicazione (teorema di convoluzione)

$$\hat{R}(k) = \hat{G}(k)\hat{I}(k) + \hat{H}(k)$$

nello spazio di Fourier, rendendo estremamente utile studiare il problema in questo spazio.
c) Se il sistema è reale (se, cioè, un input reale induce una risposta anch'essa reale), allora le trasformate di Fourier in questione soddisfano alle relazioni:

$$\overline{I(\hat{k})} = \hat{I}(-k), \quad \overline{R(\hat{k})} = \hat{R}(-k), \quad k \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \overline{G(\hat{k})} = \hat{G}(-k), \ k \in \mathcal{R}.$$

+++ **Equazioni differenziali con la Trasformata di Fourier**. Un sistema fisico lineare è descritto da un'equazione differenziale di ordine N nella variabile temporale:

$$L(d/dt)R(t) := \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n R}{dt^n}(t) = I(t),$$

dove i coefficienti a_k sono costanti reali.
i) Si mostri che, applicando la trasformata di Fourier all'equazione differenziale, quest'ultima si riduce al sistema algebrico:

$$L(i\omega)\hat{R}(\omega) = \hat{I}(\omega)$$

ii) Si verifichi che la soluzione generale del sistema algebrico, nel senso delle distribuzioni, è:

$$R(\omega) = \frac{\hat{I}(\omega)}{L(i\omega)} + \sum_j C_j \delta(\omega - \omega_j),$$

dove $\omega_j, \; j = 1,..,N$ sono le N radici (complesse) del polinomio $L(i\omega)$ e $C_j, \; j = 1,..,N$ sono costanti arbitrarie e $\delta(\cdot)$ è la delta di Dirac. Si osservi che il termine $\sum_j C_j \delta(\omega - \omega_j)$, soluzione generale dell'equazione algebrica omogenea, dà luogo alla soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea.
iii) La soluzione generale dell'equazione differenziale è infine ottenuta facendo l'antitrasformata di questa espressione:

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{R}(\omega) e^{i\omega t}.$$

Se, infine, la funzione $\hat{I}(\omega)$ è prolungabile al di fuori dell'asse reale ω, allora questo integrale è calcolabile col teorema dei residui.

+++ Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale del second'ordine non omogenea

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = t^n, \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

col metodo della trasformata di Fourier, attraverso i seguenti passi.
i) Verificare che la trasformata di Fourier $\hat{u}(\omega)$ di $u(t)$ soddisfa all'equazione algebrica non omogenea

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\hat{u}(\omega) = \frac{2\pi}{(-i)^n} \delta^{(n)}(\omega),$$

dove $\delta^{(n)}$ è la derivata n-esima della delta di Dirac.
ii) Mostrare che la soluzione generale di tale equazione algebrica, nel senso delle distribuzioni, è:

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{2\pi}{(-i)^n} \frac{\delta^{(n)}(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} + c\delta(\omega - \omega_0) + d\delta(\omega + \omega_0).$$

iii) Determinare $u(t)$ attraverso l'anti-trasformata di Fourier di $\hat{u}(\omega)$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

+++ *Il feedback (o servo-meccanismo)* Quando il fenomeno fisico porta ad una risposta che tende a crescere troppo, spesso il sistema fisico reagisce riducendo l'input di una quantità proporzionale alla risposta eccessiva. Questo meccanismo di feedback è di solito descritto, nel caso lineare, attraverso la sostituzione $\hat{I}(k) \to \hat{I}(k) - \mu\hat{R}(k), \ \mu \in \mathcal{R}^+$. La risposta sarà data quindi dalla:

$$\hat{R}(k) = \frac{\hat{G}(k)}{1 + \mu\hat{G}(k)}\hat{I}(k)$$

Se la funzione $\hat{G}$ è una funzione razionale del tipo $\hat{G}(k) = N(k)/D(k)$, allora:

$$\hat{R}(k) = \frac{N(k)}{D(k) + \mu N(k)}\hat{I}(k)$$

La causalità quindi impone che gli zeri $\{k_j\}$ del denominatore si debbano trovare nel semipiano superiore o, al limite, sull'asse reale. In questo caso, quindi, la risposta prende la forma:

$$R(t) = \sum_j Res\left(\frac{e^{ik_j t}\hat{N}(k)}{D(k) + \mu N(k)}\hat{I}(k), \ k_j\right), \quad Im \ k_j \geq 0.$$

Si osservi che la condizione $Im \ k_j > 0$ non solo è compatibile con la causalità, ma pure con la stabilità della solutione. In questo caso, infatti, i fattori $e^{ik_j t}$ descrivono oscillazioni smorzate o, al limite, pure oscillazioni.

+++ **Problema di scattering**. Si studi il problema di scattering da potenziale descritto dall'equazione di Schrödinger

$$\psi''(x,k) + k^2\psi(x,k) = V(x)\psi(x,k), \quad x \in \mathcal{R},$$

dove $\psi(x,k)$ rappresenta la funzione d'onda di un fascio di particelle quantistiche che viene diffuso dal potenziale localizzato $V(x)$ e $E = k^2$ è l'energia di tale fascio, con le seguenti condizioni al contorno:

$$\psi(x,k) \sim \ R(k)e^{-ikx} + e^{ikx}, \ x \sim -\infty; \quad \psi(x,k) \sim \ T(k)e^{ikx}, \ x \sim \infty$$

che descrivono un fascio incidente di particelle di vettore d'onda k ed intensità 1 che viene in parte riflesso ed in parte trasmesso attraverso il potenziale ($R(k)$ e $T(k)$ sono rispettivamente i coefficienti di riflessione e trasmissione).

i) Si osservi che la funzione $\phi(x,k) = \psi(x,k)/T(k)$ soddisfa al problema al contorno più semplice:

$$\phi''(x,k) + k^2\phi(x,k) = V(x)\phi(x,k), \quad x \in \mathcal{R}, \quad x,k \in \mathcal{R}$$

$$\phi(x,k) \sim \frac{R(k)}{T(k)}e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{T(k)}, \; x \sim -\infty; \quad \phi(x,k) \sim \; e^{ikx}, \; x \sim \infty$$

e si usi la funzione di Green avanzata dell'operatore $d^2/dx^2 + k^2$ per riscrivere tale problema sottoforma di equazione integrale di Volterra, ottenendo:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - \int_x^\infty dy \frac{\sin k(x-y)}{k} V(y)\phi(y,k)$$

e le seguenti rappresentazioni integrali dei coefficienti di riflessione e trasmissione:

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{-iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k), \quad \frac{R(k)}{T(k)} = \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k).$$

L'equazione integrale, equivalente all'equazione differenziale più la condizione al contorno, è la formulazione più conveniente del problema; la più utile per estrarre informazioni.
ii) Usare i risultati sulla teoria delle equazioni integrali per dedurre che la serie di Neumann della soluzione è uniformemente convergente; quindi la soluzione dell'equazione di Volterra esiste ed è unica per ogni potenziale $V(x)$ localizzato. Inoltre $\phi(x,k)e^{-ikx}$ e $1/T(k)$ sono analitiche nel semipiano superiore del piano complesso k.
iii) Siano $k_j, \; j = 1, ..$ gli zeri della funzione $1/T(k)$ nel semipiano superiore del piano complesso k (i poli del coefficiente di trasmissione). Allora è possibile mostrare a) che essi sono numeri immaginari puri: $k_j = ip_j, \; p_j > 0, \; j = 1, ..$, b) che le funzioni $\phi(x, k_j), \; j = 1, ..$ sono esponenzialmente localizzate:

$$\phi_j(x) := \phi(x, k_j) = O(e^{-p_j|x|}), \quad |x| \to \infty, \quad j = 1, ..$$

e quindi sono le autofunzione dell'operatore di Schrödinger in $L_2(\mathbb{R})$:

$$-\phi_j''(x) + V(x)\phi_j(x) = -p_j^2\phi_j(x), \quad x \in \mathcal{R}$$

corrispondenti agli autovalori negativi $E_j = -p_j^2 < 0$ dell'energia.
iv) Si mostri che, se $u(x) = u_0\delta(x - x_0)$, l'equazione integrale ammette la seguente soluzione esplicita:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - u_0\theta(x_0 - x)\frac{\sin k(x - x_0)}{k}e^{ikx_0}.$$

Quindi:

$$\phi(x,k) = \frac{2ik - u_0}{2ik} e^{ikx} + \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik} e^{-ikx}, \quad x < x_0$$

$$T(k) = \frac{2ik}{2ik - u_0}, \qquad R(k) = \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik - u_0}.$$

Trovata la $\phi(x,k)$, si ricostruisca infine la $\psi(x,k) = \frac{2ik}{2ik-u_0}\phi(x,k)$.
v) Si verifichi che la soluzione limitata trovata per $k \in \mathbb{R}$, se prolungata al di fuori dell'asse reale k, diverge sempre ad uno dei due infiniti, a meno che $k = -iu_0/2 \in i\mathcal{R}^+$. Quindi, se il potenziale di tipo delta è positivo ($u_0 > 0$), non esistono funzioni d'onda in $L_2(\mathbb{R})$; se, invece, è negativo, allora esiste una ed una sola funzione d'onda localizzata $\psi_1(x) := \phi(x, i|u_0|/2) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\psi_1(x) = \theta(x - x_0) e^{-\frac{|u_0|}{2}x} + \theta(x_0 - x) e^{\frac{|u_0|}{2}x}$$

corrispondente all'energia negativa $E_1 = k_1^2 = -u_0^2/4$, che descrive uno stato legato (una particella quantica localizzata).
vi) Si assuma che $u(x) = \epsilon v(x)$, $\epsilon << 1$. Si mostri allora che la soluzione $\phi(x,k)$ di tale equazione integrale può essere cercata come serie di potenze nel parametro ϵ e si ottenga, in particolare, i primi termini di tale sviluppo in serie (di Neumann), verificando che:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - \epsilon \int_x^\infty dy \frac{\sin k(x-y)}{k} v(y) e^{iky} + O(\epsilon^2),$$

$$T(k) = 1 + \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x) + O(\epsilon^2), \quad R(k) = \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x) e^{-2ikx} + O(\epsilon^2)$$

iv) Si mostri che l'operatore di Schrödinger è auto-aggiunto sia in $L_2(\mathbb{R})$ (con autofunzioni localizzate sulla retta), sia in $L_2[a,b]$ con condizioni periodiche al bordo: $\psi(a) = \psi(b)$, $\psi'(a) = \psi'(b)$ (si osservi che, in questi due casi, l'operatore è autoaggiunto).

15) Si studi, usando la strategia dell'esercizio precedente, il seguente problema di scattering da potenziale

$$\phi''(x,k) + k^2\phi(x,k) = u(x)\phi(x,k), \quad x \in \mathcal{R}, \qquad \phi(x,k) \sim\ e^{-ikx},\ x \sim -\infty$$

mostrando che, in questo caso, è conveniente usare la funzione di Green ritardata dell'operatore $d^2/dx^2 + k^2$.

4.3.2 Equazioni integrali

+++ *Operatore integrale come operatore limitato e contrazione.* Si consideri l'operatore integrale $\hat{K}$, definito sullo spazio delle funzioni continue $f(x) \in C[a,b]$ nel seguente modo:

$$\hat{K}f(x) := \int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

dove $K(x,y)$ è una funzione continua nel quadrato $[a,b] \times [a,b]$.
i) Mostrare che è un operatore limitato, in norma uniforme, verificando che:

$$||\hat{K}f||_\infty < M(b-a)||f||_\infty, \qquad M := \max_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)|.$$

ii) Mostrare che è una contrazione se: $M(b-a) < 1$.

+++ *Applicazione del Teorema del punto fisso e metodo delle approssimazioni successive.* Data l'equazione integrale

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + g(x) =: \lambda\hat{K}f(x) + g(x),$$

di Fredholm (o di Volterra, se $K(x,y) = \tilde{K}(x,y)\theta(x-y)$), dove $f(x)$ è la funzione incognita, $K(x,y)$ è il nucleo dell'operatore integrale, $g(x)$ è il termine noto, i) determinare il disco del piano complesso λ all'inerno del quale l'operatore $\lambda\hat{A}$ è una contrazione; ii) risolvere l'equazione integrale col metodo delle approssimazioni successive; iii) costruire il prolungamento analitico, in λ, della soluzione $f(x,\lambda)$ trovata in ii), al di fuori del disco nel quale l'operatore integrale è una contrazione; iv) determinare i valori di λ, se esistono, per i quali l'equazione omogenea

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\psi(y)dy \qquad (\Rightarrow\ \hat{K}\psi(x) = \mu\psi(x), \quad \mu = \frac{1}{\lambda})$$

ammette soluzioni non banali, e calcolarli (notare che essi sono i valori di λ per i quali la soluzione $f(x,\lambda)$ dell'equazione non omogenea è singolare). Tali valori speciali di λ sono ovviamente gli *autovalori* dell'operatore integrale, le corrispondenti soluzioni non banali del problema omogeneo sono le *autofunzioni* (e il problema omogeneo è il *problema agli autovalori*).

$$
\begin{array}{l}
I=[0,1],\ K(x,y)=xe^y,\ g(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \Rightarrow\ f(x)=1+\frac{\lambda(e-1)}{1-\lambda}x, \\ e^{-x}, & \Rightarrow\ f(x)=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x. \end{array}\right. \\
I=[0,1],\ K(x,y)=xy,\ g(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \Rightarrow\ f(x)=1+\frac{3\lambda}{2(3-\lambda)}x, \\ x, & \Rightarrow\ f(x)=\frac{3x}{3-\lambda}, \\ x^2, & \Rightarrow\ f(x)=x^2+\frac{3\lambda}{4(3-\lambda)}x. \end{array}\right. \\
a=0,\ K(x,y)=\theta(x-y),\ g(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \Rightarrow\ f(x)=e^{\lambda x}, \\ ax+b, & \Rightarrow\ f(x)=(b+\frac{a}{\lambda})e^{\lambda x}-\frac{a}{\lambda}, \end{array}\right. \\
a=0,\ \lambda=-1,\ K(x,y)=(x-y)\theta(x-y),\ g(x)=1\ \Rightarrow\ f(x)=\cos x \\
a=0,\ \lambda=-1,\ K(x,y)=(x-y)\theta(x-y),\ g(x)=x\ \Rightarrow\ f(x)=\sin x \\
a=0,\ K(x,y)=(x-y)\theta(x-y),\ g(x)=ax+b,\quad \Rightarrow \\
f(x)=b\cosh(\sqrt{\lambda}x)+\frac{a}{\sqrt{\lambda}}\sinh(\sqrt{\lambda}x).
\end{array}
\tag{37}
$$

+++ *Operatore in forma diadica.* Si consideri l'operatore

$$
\hat{K}=\sum_{k=1}^{m}\underline{a}_k\underline{b}_k^{\dagger}=\sum_{k=1}^{m}|a_k><b_k|
$$

su uno spazio euclideo di dimensione $n>m$ (con n finito o infinito). Mostrare che:

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{R}(\hat{A})=\{\underline{x}=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\underline{a}_k,\ \alpha_k\in\mathbb{C},\ k=1,..,m\}\ \Rightarrow\ dim\ \mathcal{R}(\hat{A})=m, \\
\mathcal{N}(\hat{A})=\{\underline{x},\ (\underline{b}_k,\underline{x})=0,\ k=1,..,m\}\ \Rightarrow\ dim\ \mathcal{N}(\hat{A})=n-m.
\end{array}
\tag{38}
$$

+++ Mostrare che, se lo spazio euclideo sul quale agisce l'operatore diadico dell'esercizio precedente è $C[\alpha,\beta]$ o $L_2[\alpha,\beta]$, allora l'operatore diadico diventa il seguente operatore integrale a "nucleo separabile" (o degenere):

$$
\begin{array}{c}
\hat{K}f(x)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}dyK(x,y)f(y), \\
K(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k(x)\overline{b_k(y)}.
\end{array}
\tag{39}
$$

In questo caso, dimostrare che:
1) l'equazione integrale

$$
f(x)=\lambda\int_{a}^{b}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k(x)\overline{b_k(y)}\right)f(y)dy+g(x)
$$

è equivalente al seguente sistema algebrico

$$(I - \lambda K)\underline{f} = \underline{g}, \tag{40}$$

dove i vettori m-dimensionali $\underline{f}, \underline{g}$ e la matrice $m \times m$ K sono definiti dai prodotti scalari:

$$f_j = (b_j, f), \quad g_j = (b_j, g), \quad K_{ij} = (b_i, a_j).$$

+++ Assegnate le funzioni $K(x,y)$ e $g(x)$, continue rispettivamente in $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ e in $[\alpha, \beta]$, consideriamo l'equazione integrale di Fredholm:

$$f(x) = \lambda \int_\alpha^\beta K(x,y)f(y)dy + g(x), \quad \Leftrightarrow \quad (\hat{1} - \lambda\hat{K})f = g, \tag{41}$$

dove λ è un parametro complesso arbitrario, e l'equazione omogenea associata:

$$\psi(x) = \lambda \int_\alpha^\beta K(x,y)\psi(y)dy, \quad \Leftrightarrow \quad (\hat{1} - \lambda\hat{K})\psi = 0. \tag{42}$$

Osservare che la (42) è l'equazione agli autovalori per l'operatore integrale $\hat{K}$; essa avrà soluzioni non banali $\psi_j(x),\ j = 1, .., m$, *le autofunzioni di* $\hat{K}$, solo in corrispondenza di valori speciali $\lambda_j,\ j = 1, .., m$ del parametro λ, *gli autovalori* $\hat{K}$ (o meglio, i reciproci degli autovalori).

Si dimostri il seguente *teorema dell'alternativa (di Fredholm).*

1. Se $\lambda \neq \lambda_j,\ j = 1, .., m$, allora esiste unica la soluzione $f(x)$ (continua in $[\alpha, \beta]$) dell'equazione integrale (5.3). Se, invece, $\lambda = \lambda_j,\ j = 1, .., m$, l'equazione omogenea associata (42) ammette un certo numero di soluzioni non banali:

$$\psi_j(x) - \lambda_j \int_a^b K(x,y)\psi_j(y)dy = 0, \quad j = 1, .., m$$

e altrettante soluzioni ammette l'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{K}^\dagger$, hermitiano coniugato di $\hat{K}$:

$$\phi_j(x) = \bar{\lambda}_j \int_\alpha^\beta \overline{K(y,x)}\phi_j(y)dy, \quad \Leftrightarrow \quad (\hat{1} - \bar{\lambda}_j\hat{K}^\dagger)\phi_j = 0, \quad j = 1, .., m. \tag{43}$$

2. Infine l'equazione (5.3), con $\lambda = \lambda_j$, ammette soluzione se e solo se il termine noto $g(x)$ è ortogonale a tutte le corrispondenti autofunzioni $\phi_j(x)$ di $\hat{K}^\dagger$: $(\phi_j, g) = 0$. Si noti che tale soluzione, se esiste, non è unica, poichè ad essa è possibile aggiungere una qualunque combinazione lineare delle autofunzioni che corrispondono all'autovalore λ_j.

Suggerimento. i) Dimostrare il teorema dell'alternativa nel caso in cui il nucleo dell'operatore integrale è degenere; in questo caso, infatti, l'equazione integrale è equivalente ad un sistema algebrico lineare e quindi si possono usare noti risultati, come il teorema di Rouché-Capelli. ii) Estendere la dimostrazione al caso generale semplicemente osservando che, grazie al teorema di Weierstrass sulla completezza dell'insieme dei polinomi nello spazio delle funzioni continue, è possibile approssimare in modo uniforme il nucleo $K(x,y)$ *bene quanto si vuole* con polinomi $K_m(x,y)$ delle due variabili x, y (che sono i più semplici esempi di nuclei separabili). Alternativamente, usare le argomentazioni contenute nei prossimi due esercizi.

+++ Dato un operatore $\hat{R}$, "piccolo" in norma: $||\hat{R}|| = \gamma < 1$, si dimostri che l'equazione

$$(\hat{1} - \hat{R})f = g$$

per l'incognita f ed il termine noto g ammette un'unica soluzione $f = (\hat{1} - \hat{R})^{-1}g$, cioè che esiste l'inverso $(\hat{1} - \hat{R})^{-1}$ dell'operatore $\hat{1} - \hat{R}$. Inoltre si ha, come nel caso scalare, che:

$$(\hat{1} - \hat{R})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{R}^k.$$

+++ Si dimostri che, se l'operatore $\hat{K}$ è il limite in norma di una successione di operatori diadici

$$\hat{K}_m = \sum_{k=1}^{m} |a_k >< b_k|,$$

ed è quindi compatto, allora l'equazione

$$(\hat{1} - \hat{K})f = g \tag{44}$$

è equivalente all'equazione

$$(\hat{1} - \hat{A}_m)f = \tilde{g},$$

dove l'operatore diadico $\hat{A}_m$ ed il termine noto $\tilde{g}$ sono definiti da:

$$
\begin{gathered}
\hat{A}_m = \sum_{k=1}^{m} |\tilde{a}_k >< b_k|, \qquad |\tilde{a}_k >= \left(\hat{1} - (\hat{K} - \hat{K}_m)\right)^{-1} |a_k >, \\
\tilde{g} = \left(\hat{1} - (\hat{K} - \hat{K}_m)\right)^{-1} g.
\end{gathered}
\tag{45}
$$

Osservare infine che, essendo l'operatore $\hat{A}_m$ diadico, è applicabile immediatamente il teorema dell'alternativa all'equazione (44), e quindi anche all'equazione di partenza.

Sugg. Scrivere $(\hat{1} - \hat{K}) = (\hat{1} - \hat{R}) - \hat{K}_m$, $\hat{R} := \hat{K} - \hat{K}_m$ e notare che, per $m > M_\epsilon$, $\hat{R}$ è piccolo: $||\hat{R}f||/||f|| < \epsilon < 1$ e quindi $\hat{1} - \hat{R}$ è invertibile. Applicando l'inverso $(\hat{1} - \hat{R})^{-1}$ si ottiene l'equazione diadica.

+++ Si mostri che la derivata d/dx non è un operatore limitato, applicandola alla successione di funzioni $f_n(x) = e^{inx}$, e osservando che $||df_n/dx|| = n||f_n||$, e che quindi non esiste $C > 0$ tale che: $||df_n/dx|| < C||f_n||$. A maggior ragione, quindi, la derivata non è una contrazione, né un operatore compatto. Tuttavia molti dei risultati teorici validi per operatori compatti possono essere trasferiti al caso di operatori differenziali, poichè è possibile in genere trasformare un'equazione differenziale con condizioni al contorno in un'equazione integrale di tipo Fredholm o Volterra, usando un'opportuna funzione di Green.

+++ Si consideri l'equazione $(\hat{1} - \lambda\hat{K})f(x) = g(x)$, dove $\hat{K}$ è l'operatore integrale con nucleo $K(x,y)$, $[\alpha,\beta]$ è l'intervallo d'integrazione e $g(x)$ è il termine noto, definiti nei seguenti modi:

i) $K(x,y) = y$, $[0,1]$, $g(x)$ arb.; *ii)* $K(x,y) = xe^y$, $[0,1]$, $g(x)$ arb.; *iii)* $K(x,y) = x+y$, $[0,1]$, $g(x)$ arb.; *iv)* $K(x,y) = x-y$, $[0,1]$, $g(x)$ arb.; *v)* $K(x,y) = x+y$, $[-1,1]$, $g(x)$ arb.; *vi)* $K(x,y) = x-y$, $[-1,1]$, $g(x)$ arb.; *vii)* $K(x,y) = x^2y + xy^2$, $[0,1]$, $g(x)$ arb.; *viii)* $K(x,y) = \cos(x+y)$, $[0,\pi]$, $g(x) = \cos 3x$; *ix)* $K(x,y) = \cos(x+y)$, $[0,\pi]$, $g(x)$ arb.

1. Trovare gli autovalori λ_j, $j = 1,..,m$ e le autofunzioni $\psi_j(x)$, $j = 1,..,m$ di $\hat{K}$, cioè trovare le soluzioni non banali dell'equazione omogenea $(\hat{1} - \lambda\hat{K})\psi(x) = 0$.

Risp:

$$
\begin{array}{l}
i) \quad \lambda_1 = 2, \quad \psi_1(x) = 1; \\
ii) \quad \lambda_1 = 1, \quad \psi_1(x) = x; \\
v) \quad \lambda_\pm = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \psi_\pm(x) = 2\lambda_\pm x + 1; \\
vi) \quad \lambda_\pm = \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \psi_\pm(x) = 2\lambda_\pm x + 1; \\
vii) \quad \lambda_\pm = -60 \pm 16\sqrt{15}, \ \psi_\pm(x) = x^2 + 3(\frac{1}{\lambda_\pm} - \frac{1}{4})x; \\
viii), \ ix) \quad \lambda_\pm = \pm\frac{2}{\pi}, \ \psi_+(x) = \cos x, \ \psi_-(x) = \sin x.
\end{array}
\tag{46}
$$

2. Risolvere l'equazione $(\hat{1} - \lambda\hat{K})f(x) = g(x)$ al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$ determinando, in particolare, i vincoli che vanno imposti sul termine noto $g(x)$, nel caso in cui $\lambda = \lambda_j, \ j = 1, .., m$, affinchè l'equazione suddetta abbia soluzioni.

Risp:

i) $\lambda \neq 2: \ f(x) = \frac{2\lambda}{2-\lambda} g_1 + g(x),$ dove: $g_1 = \int\limits_0^1 dx x g(x);$
$\lambda = 2:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $g_1 = 0$;
in questo caso: $f(x) = C + g(x),\ C$ costante arbitraria.

ii) $\lambda \neq 1: \ f(x) = \frac{\lambda}{1-\lambda} g_1 x + g(x),$ dove: $g_1 = \int\limits_0^1 dx e^x g(x);$
$\lambda = 1:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $g_1 = 0$;
in questo caso: $f(x) = Cx + g(x),\ C$ costante arbitraria.

v) $\lambda \neq \lambda_\pm = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}: \ f(x) = \frac{\lambda(g_1+2g_2\lambda)}{1-\frac{4}{3}\lambda^2} x + \frac{\lambda(g_2+\frac{2}{3}g_1\lambda)}{1-\frac{4}{3}\lambda^2} + g(x),$
dove: $g_1 = \int\limits_{-1}^1 dx g(x),\ g_2 = \int\limits_{-1}^1 dx x g(x).$
$\lambda = \lambda_+:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $\frac{2}{3}\lambda_+ g_1 + g_2 = 0$;
in questo caso: $f(x) = C(2\lambda_+ x + 1) + \lambda_+ g_1 x + g(x),\ C$ costante arbitraria.
$\lambda = \lambda_-:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $\frac{2}{3}\lambda_- g_1 + g_2 = 0$;
in questo caso: $f(x) = C(2\lambda_- x + 1) + \lambda_- g_1 x + g(x),\ C$ costante arbitraria.

vi) $\lambda \neq \lambda_\pm = \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}: \ f(x) = \frac{\lambda(g_1-2g_2\lambda)}{1+\frac{4}{3}\lambda^2} x - \frac{\lambda(g_2+\frac{2}{3}g_1\lambda)}{1+\frac{4}{3}\lambda^2} + g(x),$
dove: $g_1 = \int\limits_{-1}^1 dx g(x),\ g_2 = \int\limits_{-1}^1 dx x g(x).$
$\lambda = \lambda_+:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $\frac{2}{3}\lambda_+ g_1 + g_2 = 0$;
in questo caso: $f(x) = C(2\lambda_+ x + 1) + \lambda_+ g_1 x + g(x),\ C$ costante arbitraria.
$\lambda = \lambda_-:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $\frac{2}{3}\lambda_- g_1 + g_2 = 0$;
in questo caso: $f(x) = C(2\lambda_- x + 1) + \lambda_- g_1 x + g(x),\ C$ costante arbitraria.

vii) $\lambda \neq \lambda_\pm = -60 \pm 16\sqrt{15},\ f(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)}[\big(g_1(1-\frac{\lambda}{4}) + g_2\frac{\lambda}{3}\big)\, x^2 +$
$\big(g_2(1-\frac{\lambda}{4}) + g_1\frac{\lambda}{5}\big)\, x] + g(x),\ g_j = \int\limits_0^1 dx x^j g(x),\ D(\lambda) = -\frac{\lambda^2+120\lambda-240}{240};$
$\lambda = \lambda_+:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $\frac{\lambda_\pm}{5} g_1 + (1 - \frac{\lambda_\pm}{4}) g_2 = 0$;
in questo caso: $f(x) = C[x^2 + 3(\frac{1}{\lambda_+} - \frac{1}{4})x] - 3g_1 x + g(x),\ C$ costante arbitraria.
$\lambda = \lambda_-:$ non esiste la soluzione f(x), a meno che $\frac{\lambda_-}{5} g_1 + (1 - \frac{\lambda_-}{4}) g_2 = 0$;
in questo caso: $f(x) = C[x^2 + 3(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{4})x] - 3g_1 x + g(x),\ C$ costante arbitraria.

viii) $\lambda \neq \lambda_\pm = \pm\frac{2}{\pi},\ f(x) = \cos(3x).$
$\lambda = \pm\frac{2}{\pi}$, le cond. di ortogonalità sono soddisfatte; quindi:
$\lambda = \frac{2}{\pi} \ \Rightarrow \ f(x) = C\cos x + \cos 3x;\ \lambda = -\frac{2}{\pi} \ \Rightarrow \ f(x) = C\sin x + \cos 3x,$
C costante arbitraria.

(47)

$$
\begin{array}{l}
ix)\ \lambda \neq \lambda_\pm = \pm\frac{2}{\pi},\ f(x) = \frac{\lambda g_1}{1-\frac{\pi}{2}\lambda}\cos x - \frac{\lambda g_2}{1+\frac{\pi}{2}\lambda}\sin x + g(x), \\
g_1 = \int\limits_0^\pi dx \cos x g(x), \quad g_2 = \int\limits_0^\pi dx \sin x g(x), \\
\lambda = \frac{\pi}{2}, \quad : \text{ non esiste la soluzione f(x), a meno che } g_1 = 0, \\
\text{in questo caso: } f(x) = C\cos x - \frac{g_2}{\pi}\sin x + g(x); \\
\lambda = -\frac{\pi}{2}, \quad : \text{ non esiste la soluzione f(x), a meno che } g_2 = 0, \\
\text{in questo caso: } f(x) = C\sin x - \frac{g_1}{\pi}\cos x + g(x);
\end{array}
\tag{48}
$$

4.3.3 Problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali

+++ Si consideri il seguente problema di Cauchy (al valore iniziale sulla retta):

$$[\partial/\partial t + i\omega(-i\partial/\partial x)]u(x,t) = 0,\ \ x \in \mathcal{R},\ \ u(x,0) = u_0(x),\ \ u(x,t) \in L_2(\mathcal{R})\ in\ x.$$

dove $\omega(-i\partial/\partial x)$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti e $u_0(x)$ è la condizione iniziale assegnata. Tale problema si risolve convenientemento con l'uso della trasformata di Fourier nel seguente modo.
i) Si mostri che la trasformata di Fourier $\hat{u}(k,t) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-ikx} u(x,t)$ della soluzione risolve il problema al valore iniziale per l'equazione differenziale ordinaria:

$$[d/dt + i\omega(k)]\hat{u}(k,t) = 0, \quad \hat{u}(k,0) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-ikx} u_0(x),$$

chiaramente più semplice di quello di partenza, che ha la soluzione esplicita $\hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-i\omega(k)t}$. Quindi il problema di Cauchy ammette la seguente soluzione (esplicita a meno del calcolo di integrali di Fourier):

$$u(x,t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - i\omega(k)t}\hat{u}(k,0)$$

$$\hat{u}(k,0) = \int_{\mathcal{R}} dx e^{-ikx} u_0(x)$$

ii) Si mostri che tale soluzione può anche essere scritta nella forma:

$$u(x,t) = \int_{\mathcal{R}} dx' K(x-x',t) u_0(x'), \qquad K(x,t) := \int_{\mathcal{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - i\omega(k)t}$$

+++ Usare i risultati dell'esercizio precedente per risolvere il problema di Cauchy per l'equazione del calore $u_t - u_{xx} = 0$ (che descrive fenomeni di

diffusione) e per l'equazione di Schrödinger $iu_t + u_{xx} = 0$ (di una particella libera), mostrando che,
i) se $u(x,0) = u_0\delta(x - x_0)$, allora:

$$u(x,t) = u_0 \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad \text{equ. del calore}$$

$$u(x,t) = u_0 \frac{e^{i\frac{(x-x_0)^2}{4t} - i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad \text{equ. di Schrödinger}$$

ii) se $u(x,0) = u_0 e^{-(\frac{x}{\Delta})^2}$, allora:

$$u(x,t) = \frac{u_0 \Delta}{\sqrt{\Delta^2 + 4t}} e^{-\frac{x^2}{\Delta^2+4t}}, \quad \text{equ. del calore}$$

$$u(x,t) = \frac{u_0 \Delta}{(\Delta^2 + 4it)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{\Delta^2+4it}}, \quad -\pi < arg\,(\Delta^2+4it) < \pi, \text{ equ. di Schrödinger.}$$

+++ Si consideri una corda vibrante (descritta dall'equazione $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$) di lunghezza L, bloccata agli estremi. Si determini l'elevazione trasversale $u(x,t)$ del profilo nei due casi seguenti:
i) $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = f(x)$; ii) $u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0$.

Risp. *i)* $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi v}{L}t) \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad \beta_n = \frac{2}{n\pi} \int\limits_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$

ii) $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\frac{n\pi v}{L}t) \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad \alpha_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L g(x) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$

+++ Si consideri una sbarra metallica di lunghezza L mantenuta alle temperature costanti T_1 e T_2 agli estremi $x = 0$ e $x = L$ rispettivamente. Se la temperatura iniziale è $u(x,0) = u_0(x),\ 0 < x < L$, si determini la temperatura $u(x,t)$ della sbarra al variare del tempo (si usi l'equazione del calore: $u_t - a^2 u_{xx} = 0$) e si valuti tale temperatura per $t >> 1$ (suggerimento: risolvere prima il caso $T_1 = T_2 = 0$ e poi quello generale).

Risp. $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1,$

$c_n = \frac{2}{L} \int\limits_0^L [u_0(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1] \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx$

+++ Si consideri una sbarra metallica di lunghezza L soggetta ai flussi di calore $u_x(0,t) = \phi_1$ e $u_x(L,t) = \phi_2$ costanti ai bordi $x = 0$ e $x = L$

rispettivamente. Si determini la temperatura $u(x,t)$ sapendo che $u(x,0) = u_0(x)$.

+++ Si consideri una superficie metallica di forma rettangolare (lati a e b) il cui bordo è mantenuto alla temperatura costante T_0. Si determini la temperatura $u(x,y,t)$, $0 < x < a$, $0 < y < b$ della superficie metallica al variare del tempo (usando l'equazione del calore $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$), se la temperatura iniziale è descritta dalla funzione $u(x,y,0) = u_0(x,y)$.

+++ Si consideri l'equazione di Schrödinger non stationaria $i\psi_t + \psi_{xx} + V(x)\psi = 0$ con $V(x) = 0$, $0 < x < L$; $V(x) = \infty$, $x < 0$, $x > L$. Si determini l'evoluzione della funzione d'onda $\psi(x,t)$ soggetta alla condizione iniziale $\psi(x,0) = \psi_0(x)$ assegnata.

Risp. $\psi(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$, $\quad c_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L \psi_0(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

5 COMPITI D'ESONERO E SCRITTI PROPOSTI

5.1 1^0 Compito d'Esonero dell'11/05/05

1) ([**5/30**]) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V bidimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = (1+\frac{i}{2})\underline{e}^{(1)} + (\frac{1}{2}+i)\underline{e}^{(2)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -(\frac{1}{2}+i)\underline{e}^{(1)} + (1+\frac{i}{2})\underline{e}^{(2)}.$$

Mostrare che $\hat{A}$ è unitario e calcolarne autovalori, autovettori (verificandone l'ortogonalità) e la decomposizione spettrale.
2) ([**5/30**]) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = -3\underline{e}^{(1)} + 2i\underline{e}^{(2)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = 4i\underline{e}^{(1)} + 3\underline{e}^{(2)}.$$

Calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$.
3) ([**5/30**]) Dati i tre vettori $\underline{v}^{(1)} = (i,0,1),\ \underline{v}^{(2)} = (2i,2,0),\ \underline{v}^{(3)} = (2i+1,2+i,i)$,
a) verificare che sono indipendenti; b) ortonormalizzarli.
4) [**5/30**] L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -2\underline{e}^{(2)},\ \hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}.$$

Dimostrare che $\hat{A}$ è hermitiano e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale.
5) ([**5/30**]) Si costruisca la matrice che ha i seguenti autovalori e autovettori.

$$\begin{gathered} \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0, \\ \underline{v}^{(1)} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\ \underline{v}^{(2)} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1),\ \underline{v}^{(3)} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \end{gathered} \tag{49}$$

(suggerimento: si osservi che i tre vettori sono ortonormali..)
6) ([**5/30**] (+[**3/30**] per la parte facoltativa) Data la matrice A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

si calcoli $\sin A$.
Facoltativo: è possibile calcolare $\sin A$ in modo diverso? In caso affermativo, si faccia il calcolo.
7) ([**7/30**] **esercizio obbligatorio**) Dopo aver definito l'operatore hermitiano $\hat{H}$, mostrare che i) la forma hermitiana $(\underline{v}, \hat{H}\underline{v})$ è reale; ii) i suoi autovalori sono reali; ii) autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.

5.2 2^0 Esonero del 06/06/05

1) ([**6/30**]) Per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x-4|^\alpha x^{1/3}}$$

appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e $L_2(\mathbb{R})$?

2) ([**6/30**]) i) Sviluppare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases} \tag{50}$$

in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Usare la formula di Parseval per trovare la somma di un'opportuna serie numerica. iii) Confrontare, su $\mathbb{R}$, i grafici di $f(x)$ e della somma della serie.

3) ([**6/30**]) Calcolare $f(x)$ e $||f||_2$, sapendo che i coefficienti f_n dello sviluppo di Fourier $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ sono

$$f_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \tag{51}$$

4) [**5/30**] Risolvere l'integrale

$$\int_1^\infty \delta(\cos(\pi x)) 2^{-x} dx.$$

5) ([**8/30**]) Data l'equazione integrale di Fredholm

$$f(x) = \lambda \int_0^1 xy f(y) dy + 1 =: \hat{A} f(x),$$

i) indicare per quali valori di λ l'operatore integrale $\hat{A}$ è una contrazione. ii) Usare il metodo delle approssimazioni successive per verificare che la soluzione è $f(x) = \frac{3\lambda}{2(3-\lambda)} x + 1$. iii) Determinare i valori di λ (gli autovalori) per i quali l'equazione omogenea $h(x) = \lambda \int\limits_0^1 xy h(y) dy$ ammette soluzioni non banali (le autofunzioni), e calcolarle.

6) ([**6/30**]) Costruire, in $\mathbb{R}^3$, il proiettore ortogonale sul piano $x - y + z = 0$.

(Suggerimento: i) verificare che il vettore $\underline{v}^{(1)} = (1,1,0)^T$ appartiene al piano; ii) costruire un vettore $\underline{v}^{(2)}$ ortogonale a $\underline{v}^{(1)}$ e appartenente al piano; iii) procedere poi in modo standard..)

7) (**[7/30] esercizio obbligatorio: [-3/30] se non svolto**) Sia M uno spazio metrico completo e su di esso un'applicazione $\hat{A}: \; M \to M$. i) Quand'è che $\hat{A}$ è una contrazione? ii) Dimostrare che se $\hat{A}$ è una contrazione, allora $\exists!$ il punto fisso $\bar{x} \in M$ della contrazione $\hat{A}$: $\bar{x} = \hat{A}\bar{x}$. iii) Discutere una delle tante applicazioni del teorema.

5.3 3^0 Esonero del 22/06/05

1) ([**7/30**]) Si consideri l'equazione integrale

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + g(x),$$

dove λ è un parametro complesso arbitrario, $K(x,y)$ è una funzione continua in $[a,b] \times [a,b]$ assegnata e $g(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ assegnata. Enunciare e dimostrare il teorema dell'alternativa per tale equazione. (Suggerimento: si passi attraverso il caso di un nucleo degenere continuo.)
2) ([**12/30**]) Dato l'operatore integrale

$$\hat{K} f(x) = \int_{-1}^{1} (x + 3y) f(y) dy,$$

dopo aver costruito il sistema algebrico rilevante [**3**], i) calcolare autovalori e autofunzioni di $\hat{K}$ [**3**]. ii) Risolvere l'equazione $(1 - \lambda \hat{K}) f(x) = g(x)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$, sia per λ diverso dagli autovalori [**3**], sia per λ uguale agli autovalori [**3**].
3) ([**5/30**]) Data la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & |x| < \frac{1}{4n}, \\ 0 & |x| > \frac{1}{4n}, \end{cases}$$

i) calcolarne la trasformata di Fourier $\hat{f}_n(k)$ [**2**].
ii) Calcolare il limite $\hat{f}(k) = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(k)$ [**1**].
iii) Ottenere $\hat{f}(k)$ senza passare attraverso la forma esplicita di $\hat{f}_n(k)$, riconoscendo che la successione $f_n(x)$ tende, nel senso delle distribuzioni, ad una funzione nota, $f(x)$ [**2**].
4) ([**6/30**]) Un oscillatore armonico di pulsazione $\omega = 2$, inizialmente a riposo, è soggetto ad un impulso I che agisce all'istante $t_* = 1$ per un tempo infinitesimo. Si determini l'evoluzione dell'oscillatore per tempi $t \geq t_*$.
5) ([**6/30**])
Utilizzando il metodo della trasformata di Fourier, trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale:

$$\left(d^2/dx^2 + 2d/dx + 2\right) y(x) = x^2$$

6) ([**6/30**])

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{dg}{dx}$, con $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$.

5.4 Scritto del 07/07/05

1) ([**9/30**]) i) Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore integrale $\hat{K}$ definito da:

$$\hat{K}h(x) = \int_{-1}^{1} (x+3y)h(y)dy.$$

ii) Risolvere l'equazione $(1-\lambda\hat{K})f(x) = 1$ per λ diverso da tali autovalori.
2) ([**6/30**]) i) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ dell'onda piana tagliata ([**4/30**]):

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t}, & |t| < t_0, \\ 0, & |t| > t_0. \end{cases}$$

ii) Fare il grafico di $\hat{f}(\omega)$ al variare di ω ([**2/30**]).
3) ([**7/30**]) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)}, \quad \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -\underline{e}^{(1)} + a\underline{e}^{(2)},$$

$\mathbb{C} \ni a \neq 1$. Calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$ [**5/30**]. Discutere il caso $a = 1$[**2/30**].
4) ([**7/30**]) Usare il metodo della funzione di Green per determinare l'evoluzione di un oscillatore armonico di pulsazione ω_0 che oscilla liberamente nel remoto passato: $u(t) \sim \sin\omega_0 t$, $t \sim -\infty$ ed è soggetto alla forza esterna $F(t) = \theta(t)\theta(1-t)$.
5) ([**7/30**] **esercizio obbligatorio: [-3/30] se non svolto**) Dato lo spazio delle funzioni continue $C[-1,1]$ con la norma uniforme $||f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$,
i) mostrare che l'operatore integrale $\hat{K}$:

$$\hat{K}f(x) = \nu \int_{-1}^{1} (x^2y + xy^2)f(y)dy, \quad \nu \in \mathbb{C}$$

è limitato e determinare i valori di ν per i quali è una contrazione ([**5/30**]).
ii) Mostrare che l'operatore di derivazione (su $C^1[-1,1]$) non è limitato ([**2/30**]).
6) ([**6/30**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = 2x-1$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Usare la formula di Parseval per trovare la somma di un'opportuna serie numerica. iii) Confrontare, su $\mathbb{R}$, i grafici di $f(x)$ e della somma della serie.

7) [5/30] Risolvere l'integrale

$$\int_{2}^{\infty} \delta(\cos(\pi x))3^{-x}dx.$$

5.5 Scritto doppio del 07/07/05

1) (**[7/30]**) Usare il metodo della funzione di Green per determinare l'evoluzione di un oscillatore armonico di pulsazione ω_0 che oscilla liberamente nel remoto passato: $u(t) \sim \cos\omega_0 t$, $t \sim -\infty$ ed è soggetto alla forza esterna $F(t) = \theta(t)\theta(1-t)$.

2) (**[6/30]**) i) Sviluppare la funzione $f(x) = 2x - 1$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Usare la formula di Parseval per trovare la somma di un'opportuna serie numerica. iii) Confrontare, su $\mathbb{R}$, i grafici di $f(x)$ e della somma della serie.

3) (**[6/30]**) Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

4) **[5/30]** Risolvere l'integrale

$$\int_2^\infty \delta(\cos(\pi x)) 3^{-x} dx.$$

5) (**[6/30]**) Si classifichino le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin\frac{\pi}{z-1}} \mathrm{e}^{-z^2}$$

e, ove possibile, se ne calcolino i residui corrispondenti.

6) (**[7/30]**) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)}, \quad \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -\underline{e}^{(1)} + a\underline{e}^{(2)},$$

$\mathbb{C} \ni a \neq 1$. Calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$ **[5/30]**.
Discutere il caso $a = 1$ **[2/30]**.

7) (**[6/30]**) Si sviluppi la funzione $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 2i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza.