FISICA TEORICA: SISTEMI EVOLUTIVI NON LINEARI

Prof. Paolo Maria Santini

Corso della Laurea Specialistica; III Trimestre, AA 2005-06

PROGRAMMA DI MASSIMA

Sviluppo di tecniche analitiche per lo studio di sistemi evolutivi non lineari finito e infinito dimensionali, integrabili e non integrabili. Studio, in particolare, delle relazioni tra le proprietà di analiticità delle soluzioni nel piano complesso tempo ed il grado di complessità delle dinamiche. Le applicazioni della teoria vanno dal problema a molti corpi di Calogero - Moser, rilevante in diversi contesti fisici, alle equazioni paradisiache di Plebanski della Relatività Generale, passando attraverso altri sistemi non lineari di interesse in Fisica, Matematica e, più in generale, nelle Scienze della Natura.

Non ci sono relazioni di propedeuticità tra questo corso ed altri corsi della laurea specialistica.

PROGRAMMA PIÙ DETTAGLIATO

Prima parte

1) **Funzioni polidrome** [1, 2]
Punti di diramazione, funzioni polidrome e superfici di Riemann. Esempi significativi: $w = z^{1/2},\ w = ((z - z_1)(z - z_2))^{1/2},\ w = ((z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4))^{1/2},\ w = \ln(z - z_0),\ w = \sin^{-1} z$.

2) **Singolarità fisse e mobili e analisi locale** [3]
Singolarità fisse e mobili di un sistema di ODEs. Esempi elementari di ODEs con singolarità polari e/o punti di diramazione mobili. Analisi locale delle ODEs per l'individuazione del tipo di singolarità delle loro soluzioni; soluzioni espresse mediante serie di Laurent, o attraverso ψ - serie di tipo logaritmico, razionale e irrazionale.

3) **Il problema della quadratura nel piano complesso** [1, 3]
ODEs riconducibili a quadrature. La soluzione della quadratura nel complesso. Esempio: l'equazione newtoniana unidimensionale $\ddot{x} = -dV(x)/dx$ e la sua quadratura $t - t_0 = \int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{2(E-V(y))}}$. La soluzione, nel complesso, delle quadrature associate alle superfici di Riemann: i) $\mu^2 = 1 - x^2$ (oscillatore armonico), ii) $\mu^2 = (1 - x^2)(1 - \kappa x^2)$ (pendolo semplice) e, più in generale,

iii) $\mu^2 = 1 - x^n, \ n \in \mathbb{Z}$ [4]. Il problema dell'inversione dell'integrale ellittico ed iperellittico; le funzioni ellittiche e iperellittiche [1].

4) **Sistemi integrabili e teorema di Liouville** [5, 6]
L'integrabilità dei sistemi dinamici Hamiltoniani ed il teorema di Liouville. Variabili azione-angolo sul toro. Moti quasi periodici e frequenze indipendenti. Teorema della media; traiettorie ovunque dense ed ergodiche.

5) **Esempi di sistemi Liouville integrabili e quasi integrabili**
a) Coppia di Lax e sistemi a molti corpi Hamiltoniani integrabili. Il modello di Calogero - Moser e la soluzione di Olshanetski-Perelomov [7]. Punti di diramazione mobili nel piano complesso e la superficie di Riemann associata al modello di Calogero - Moser.
b) Sistemi newtoniani nel piano, Liouville integrabili solo localmente, del tipo:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

riconducibili alla quadratura:

$$\tau(t) = \int_0^w \frac{dy}{\sqrt{1 - y^{n+1}}}. \tag{2}$$

Due casi significativi:
i) traiettorie temporali rettilinee: $\tau = \alpha t, \ t \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{C}$. Moti ergodici.
ii) Traiettorie temporali cicliche: $\tau = (e^{i\omega t} - 1)/i\omega, \ t \in \mathbb{R}, \ \omega > 0$. Moti isocroni e loro varianti.
Polidromia della variabile dipendente $\mathbf{x}(t)$, con punti di diramazione mobili ovunque densi nel piano complesso della variabile tempo t. La dipendenza sensibile dai dati iniziali come conseguenza di tali proprietà di analiticità [4].

(Per lo studio di altri esempi di sistemi dinamici integrabili attraverso quadrature nel complesso, che permettono un controllo accurato della topologia della superfice di Riemann sulla quale avviene la dinamica, si veda, ad esempio, [8]. Per lo studio di sistemi dinamici non integrabili, hamiltoniani e non, che esibiscono caos, si rimanda invece al corso specialistico del Prof. A. Vulpiani e ai seguenti testi introduttivi: [3, 9])

Seconda parte

1) **Sistemi dinamici, campi vettoriali ed equazioni alle derivate parziali lineari del prim'ordine**

Sistemi dinamici; campi vettoriali associati e loro autofunzioni [10]. Campi vettoriali a divergenza nulla e conservazione del volume dello spazio delle fasi; teorema di Liouville sulla conservazione della probabilità [5]. Relazione tra la soluzione generale di un sistema dinamico e la soluzione generale dell'equazione alle derivate parziali lineare per il corrispondente campo vettoriale. Equazioni quasi lineari ed il metodo delle caratteristiche [10].

2) **Campi vettoriali ed equazioni non lineari alle derivate parziali integrabili in un numero arbitrario di dimensioni**
Simmetrie di sistemi dinamici, commutazione dei flussi e costanti del moto in involuzione. La commutazione dei corrispondenti campi vettoriali (hamiltoniani e non). Introduzione del parametro spettrale ed equazioni alle derivate parziali non lineari integrabili in un numero arbitrario di dimensioni. [11]
Esempi fisicamente rilevanti: l'equazione "heavenly" di Plebanski (riduzione esatta delle equazioni di Einstein della Relatività Generale) e l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili priva del termine dispersivo [12].

Il problema di Cauchy per l'equazione "heavenly" di Plebanski ed il metodo della trasformata spettrale applicato al campo vettoriale

$$\partial_z + \lambda \partial_x + u(x,y,z)\partial_x + v(x,y,z)\partial_y, \tag{3}$$

come generalizzazione non lineare della trasformata diretta ed inversa di Radon [11].

Modalità d'esame. Lo studente può portare all'orale uno degli argomenti trattati nel corso, a sua scelta; si incoraggiano approfondimenti.

Possibili argomenti d'esame: 1) Analisi locale applicata al modello di Lorenz o al modello di Henon [3]. 2) Il problema della quadratura del pendolo e le funzioni ellittiche [1]. 3) La quadratura associata alla superficie di Riemann $\mu^2 = 1 - x^n$ e sistemi newtoniani nel piano corrispondenti a moti rettilinei e ciclici [4]. 4) Il teorema di Liouville sull'integrabilità dei sistemi dinamici hamiltoniani [5]. 5) Sistemi dinamici e campi vettoriali; il metodo delle caratteristiche [10]. 6) Il problema di Cauchy per l'equazione paradisiaca di Plebanski [11].

References

[1] A. I. Markusevich, *Elementi di Teoria delle Funzioni Analitiche*, Editori Riuniti, 1988

[2] C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, *Metodi Matematici della Fisica*, Carocci Editore, Roma, 2002.

[3] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, J. Wiley and sons.

[4] P.M.Santini, Appunti di lezioni del corso.

[5] V.I.Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, 1979.

[6] M. V. Berry "Regular and irregular motion" AIP Conference Proceedings **46**, 16-120 (1978). Pubblicato anche in *Hamiltonian dynamical systems*, a reprint selection compiled and introduced by R.S.MacKey and J.D.Maiss.

[7] F.Calogero, *Classical many-body problems amenable to exact treatments*, Springer - verlag, Berlin Heidelberg, 2001.

[8] F.Calogero, D.Gomez-Ullate, P.M.Santini and M.Sommacal, "The transition from regular to irregular motion as travel on Riemann surfaces"; J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005) 8873-8896. http://arXiv:nlin.SI/0507024.

[9] A. Vulpiani *Determinismo e caos*, Carocci Editore, 2005.

[10] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*; Vol. II: *Partial Differential equations*, by R. Courant, Interscience Publishers, J. Wiley and sons, New York, 1962.

[11] S. V. Manakov and P. M. Santini: "Inverse scattering for vector fields and the Cauchy problem for the heavenly equation"; arXiv:nlin.SI/0604024

[12] S. V. Manakov and P. M. Santini: "The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev - Petviashvili equation"; arXiv:nlin.SI/0604023

[13] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov and L. P. Pitaevsky, *Theory of solitons*, Plenum Press, New York, 1984.

[14] M.J.Ablowitz and P.C.Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, London Mathematical Society, Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1991.

[15] S. V. Manakov: "The inverse scattering transform for the time - dependent Schrödinger operator and the Kadomtsev - Petviashvili equation", Physica **3D**, 420-427 (1981).