

## MMF 2010 - diario delle lezioni (U.G. Aglietti)

2 ore dalle 11.00 alle 13.00: lunedì, martedì, mercoledì, giovedì.

## I SETTIMANA

- (2) lunedì 8 marzo: costruzione dei numeri complessi a partire da  $\mathbb{R}^2$ , algebra dei numeri complessi, rappresentazione cartesiana e polare, complesso coniugato e modulo;
- (4) martedì 9 marzo: esercizi ed esempi, disequaglianza triangolare, proiezione stereografica e punto all'infinito;
- (6) mercoledì 10 marzo: esercitazione di Matteo Sommacal su algebra dei numeri complessi e proiezione stereografica; alcuni elementi di topologia del piano complesso;
- (8) giovedì 11 marzo: nozioni di insieme aperto nel piano, frontiera, insieme chiuso, connessione e semplice connessione, limite di una funzione di argomento complesso e continuità;

## II SETTIMANA

- (10) lunedì 15 marzo: derivabilità, condizioni di Cauchy-Riemann, analiticità, indipendenza da  $z^*$  e funzioni armoniche;
- (12) martedì 16 marzo: ricostruzione di una funzione analitica dalla sua parte reale od immaginaria,  $\exp(-1/z^2)$  come esempio di funzione derivabile nell'origine in  $\mathbb{R}$  ma non in  $\mathbb{C}$ , mappe conformi indotte da funzioni analitiche dove la derivata non si annulla;
- (14) mercoledì 17 marzo: esercitazione di Matteo sulle condizioni di Cauchy-Riemann con  $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = y/(x^2+y^2)$ ,  $\ln(x^2+y^2)$ ; discussione della polidromia di  $z^{1/2}$  e  $\ln(z)$  e costruzione delle superfici di Riemann relative;
- (16) giovedì 18 marzo: esempi di mappe non conformi indotte da funzioni non analitiche o da funzioni analitiche con derivata nulla;  $z^2$ ,  $z^n$ ,  $1/z$  ed  $1/z^n$  come esempi di applicazioni conformi del piano complesso per  $z$  non nullo, cenni alle applicazioni in meccanica dei fluidi ed in elettromagnetismo (flusso lungo un angolo ed espansione in multipoli);

## III SETTIMANA

- (18) lunedì 22 marzo: proprietà dell'esponenziale complesso, diverse definizioni possibili e loro equivalenza; singolarità isolate delle funzioni analitiche monodrome, esempio di singolarità non isolata, di singolarità eliminabili, poli e singolarità essenziali;
- (20) martedì 23 marzo: esempi di singolarità polari, teorema di Casorati-Weierstrass,  $e^{1/z}$  come esempio di singolarità essenziale nell'origine; studio delle funzioni polidrome  $(z-a)^{1/2} (z-b)^{1/2}$ ,  $(z-a)^{1/2} (z-b)^{1/2} (z-c)^{1/2}$ ,  $(z-a)^{1/2} (z-b)^{1/2} (z-c)^{1/2} (z-d)^{1/2}$ : coordinate multipolari, punti di diramazione, piano complesso tagliato.
- (22) mercoledì 24 marzo: esercitazione di Matteo, trasformazioni conformi, funzione di Zukowski  $z+1/z$
- (24) giovedì 25 marzo: integrale di linea di una funzione di argomento complesso, parametrizzazione, esempi, teorema di Cauchy per domini semplicemente connessi, teorema della primitiva, integrale di  $z^n$  per  $n$  intero su un cerchio centrato nell'origine;
- (25) giovedì 25 marzo (13-14, ora di recupero facoltativa): piano tagliato e superficie di Riemann per la funzione  $(z-a)^{1/2} (z-b)^{1/2} (z-c)^{1/2}$ , generalizzazione al caso

di una sfera con  $n$  maniglie;

#### IV SETTIMANA

- (27) mercoledì 7 aprile: teorema di Cauchy per domini multiplamente connessi (Santini, 1<sup>o</sup> ora); rappresentazione integrale di Cauchy, infinita derivabilita' delle funzioni analitiche;
- (29) giovedì 8 aprile: altre conseguenze della rappresentazione integrale di Cauchy: teorema della media, del massimo modulo, primo e secondo teorema di Liouville, teorema fondamentale dell'algebra;
- (30) giovedì 8 aprile (13-14, ora di recupero facoltativa): esercizi sull'integrazione di funzioni monodrome e polidrome e sulle singolarita' isolate;

#### V SETTIMANA

- (32) lunedì 12 aprile: 1<sup>o</sup> esonero su operazioni sui numeri complessi, condizioni di Cauchy-Riemann, funzioni polidrome, integrale di linea di funzioni analitiche;
- (34) martedì 13 aprile: teorema di Morera, riepilogo su successioni e serie numeriche e di funzioni: successioni fondamentali, convergenza assoluta, puntuale ed uniforme, proprieta' delle serie uniformemente convergenti;
- (36) mercoledì 14 aprile: ulteriori proprieta' delle serie di funzioni uniformemente convergenti, M-test di Weierstrass, teorema di Abel, criteri di convergenza di D'Alambert e di Cauchy-Hadamard;
- (38) giovedì 15 aprile: criteri di convergenza di D'Alambert e di Cauchy-Hadamard, esempi; serie di Laurent e classificazione delle singolarita' isolate in base allo sviluppo di Laurent;

#### VI SETTIMANA

- (40) lunedì 19 aprile: esercizi sul calcolo di serie di Laurent di funzioni assegnate e sul calcolo di raggi di convergenza di serie date; teorema dei residui, relazione con le serie di Laurent, calcolo del residuo per un polo semplice;
- (42) martedì 20 aprile: calcolo del residuo per poli multipli, esempi; teorema dell'indice, principio dell'argomento, teorema di Rouché e teorema fondamentale dell'algebra come corollario;
- (44) mercoledì 21 aprile (Matteo): integrale di Laplace, applicazioni del teorema dei residui: lemma di Jordan, integrazione di funzioni razionali sull'asse reale e di funzioni trigonometriche su di un periodo;
- (46) giovedì 22 aprile: zeri isolati di una funzione analitica non nulla, unicità del prolungamento analitico, prolungamento analitico attraverso una frontiera (Proposizione di Riemann), esempi e confronto con il caso reale;

#### VII SETTIMANA

- (48) lunedì 26 aprile: principio di simmetria (o di riflessione o di Schwartz), prolungamento analitico per cerchi: punti regolari e irregolari rispetto al prolungamento analitico, teorema di Pringsheim, barriere essenziali, esempi;
- (50) martedì 27 aprile: continuazione analitica per cerchi, nozione di elemento iniziale e di funzione analitica totale, esempi; sviluppi asintotici: esempi, serie divergenti;
- (52) mercoledì 28 aprile (Matteo): calcolo di integrali di funzioni monodrome e polidrome con il teorema dei residui, esercizi sulle serie di Laurent;
- (54) giovedì 29 aprile: definizione di sviluppo asintotico ed operazioni su di essi, cenno al metodo di Laplace e della fase stazionaria. Esercizi su singolarita', residui e serie di Laurent;

(55) giovedì 29 aprile (ora aggiuntiva): calcolo di raggi di convergenza di serie, esempi di punti di diramazione di ordine finito algebrici e trascendenti.

VIII SETTIMANA

(57) lunedì 3 maggio (con Matteo): II esonero in aula Amaldi al solito orario.