0.1 Formulario di analisi funzionale

Norme discrete e continue.

$$||\underline{x}||_\infty = sup_k |x_k|, \quad ||\underline{x}||_p = \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty$$

$$||f||_\infty = sup_{t\in[a,b]}|f(t)|, \ \ ||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

Disuguaglianze importanti.

$$\begin{aligned}
&\sum_k |x_k y_k| \leq \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_k |y_k|^q\right)^{1/q}, \ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \ \text{ Holder (discreta)},\\
&\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{1/q}, \ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \ \text{ Holder (continua)},\\
&\left(\sum_k |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_k |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_k |y_k|^p\right)^{1/p}, \ \ \text{Minkowski (discreta)}\\
&\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p}, \ \ \text{Minkowski (continua);}\\
&|\sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^2\right), \ \ \text{Cauchy-Schwartz discreta,}\\
&|\int_a^b \overline{f(t)} g(t)dt|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right), \ \ \text{Cauchy-Schwartz cont.}
\end{aligned} \quad (1)$$

Spazi di successioni.
l_f spazio delle successioni finite.
l_0 spazio delle successioni convergenti a 0.
l_p spazio delle successioni tali che $||\cdot||_p < \infty$.
l_∞ spazio delle successioni limitate.

Spazi di funzioni: $C_\infty[a,b] = (C_{[a,b]}, ||\cdot||_\infty)$, $C_p[a,b] = (C_{[a,b]}, ||\cdot||_p)$,
$L_\infty[a,b]$= spazio delle funzioni limitate in $[a,b]$,
$L_p[a,b] = \{f(t) : \ ||f||_p < \infty|\}$.

Serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} f_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^\infty \{s_n \sin(nx) + c_n \cos(nx)\},$$

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{-inx} f(x),$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)f(x)dx, \quad s_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)f(x)dx,$$

Relazione di Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\bar{f}(x)g(x) = 2\pi\sum_{n\in\mathcal{Z}}\bar{f}_n g_n = 2\pi\bar{c}_0 c'_0 + \pi\sum_{1}^{\infty}\{\bar{c}_n c'_n + \bar{s}_n s'_n\},$$

$f(x) = g(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_n|^2 = 2\pi|c_0|^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(|c_n|^2 + |s_n|^2)$$

Trasformata di Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\hat{f}(k),$$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}f(x),$$

Relazione di Parseval-Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\bar{f}(x)g(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k)$$

$f(x) = g(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}|\hat{f}(k)|^2$$

Teorema di convoluzione:

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x-x')I(x') \quad \Leftrightarrow \quad \hat{R}(k) = \hat{G}(k)\hat{I}(k)$$