

Homework I

1. Trovare il raggio di convergenza R della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{3n^\alpha + 2}, \quad (1)$$

e studiarne le proprietà di convergenza per $|z| \leq R$ and $|z| > R$.

2. Trovare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z)$ nel dominio specificato:

(a) $f(z) = (z - 1)^{-2} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < \infty\}$,

(b) $f(z) = \frac{4+z}{z^3+3z^2} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 3\}$

(c) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(5-z)} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 2| < 3\}$

3. Studiare il tipo di singolarità delle seguenti funzioni e calcolarne l'eventuale residuo:

(a) $f(z) = \frac{(\log z)^4}{1+z^2}$;

(b) $f(z) = \frac{e^z \sinh z}{z^5}$;

(c) $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(d) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{(1+z)^4}$.

4. Calcolare i seguenti integrali sfruttando il metodo dei residui:

(a) $\int_{|z|=1} z^2 \sin(1/z) dz$;

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(\pi^2 - 4x^2)} dx$;

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx \quad (0 < a < b)$;