MATERIALE DEL CORSO DI

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

2^a parte: Analisi Funzionale

a cura di Paolo Maria Santini

http://www.roma1.infn.it/people/santini/

Docente del corso: Paolo Maria Santini

email: paolo.santini@roma1.infn.it

ufficio 109 (ex 43), primo piano, ed. Marconi - tel. 0649914239

September 23, 2009

PROGRAMMA DEL CORSO; AA 2008-09

TESTI CONSIGLIATI

ESEMPI DI ESONERI E SCRITTI GIÀ PROPOSTI

1 Programma del corso di Analisi Funzionale; AA 2008-09

1.1 Richiami di algebra lineare.

Matrici quadrate e rettangolari. Determinante di una matrice quadrata. Minori di una matrice, ordine dei suoi minori e rango della matrice come il massimo ordine dei sui minori. Sistemi di equazioni lineari sotto-determinati, determinati e sovra-determinati. Sistemi omogenei. Forma matriciale $A\underline{x} = \underline{b}$ del sistema lineare e del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ associato, con A matrice rettangolare $m \times n$, $\underline{x}$ vettore n - dimensionale e $\underline{b}$ vettore m - dimensionale. Regola di Cramer, teorema di Rouché - Capelli ed esistenza e unicità della soluzione $\underline{x}$ del sistema, in relazione con il rango della matrice rettangolare A e della sua aumentata $[A, \underline{b}]$. Calcolo di autovalori e autovettori di una matrice A.

1.2 Spazi vettoriali

· **Definizione di spazio vettoriale** V sul campo $\mathbb{F}$ (in generale, il campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) come insieme di oggetti (vettori) $\underline{v} \in V$ su cui sono definite due operazioni; un'operazione interna, la *somma*, che gode della proprietà associativa e commutativa, e un'operazione esterna, il *prodotto per uno scalare* $\alpha \in \mathbb{F}$, che gode della proprietà associativa e distributiva (rispetto alla somma di scalari e di vettori). Esistenza del vettore nullo $\underline{0}$ e del vettore opposto $-\underline{v}$.
· **Esempi significativi di spazi vettoriali**. Spazi finito - dimensionali: lo spazio dei vettori ordinari in $\mathbb{R}^3$ e quello dei quadrivettori in $\mathbb{M}^4$; lo spazio $\mathbb{R}$ dei reali; lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-ple di numeri reali; lo spazio $\mathbb{C}$ dei numeri complessi; lo spazio $\mathbb{C}^n$ delle n-ple di numeri complessi; lo spazio $Mat(n,\mathbb{R})$ ($Mat(n,\mathbb{C})$) delle matrici $m \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio $Mat(m,n,\mathbb{R})$ ($Mat(m,n,\mathbb{C})$) delle matrici $m \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio $\mathcal{P}_n$ dei polinomi di grado $n-1$ a coefficienti reali (complessi). Spazi infinito - dimensionali: lo spazio $\mathbb{R}^\infty$ ($\mathbb{C}^\infty$) delle successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali (complessi); lo spazio delle successioni finite, convergenti a zero, limitate di numeri reali (complessi); gli spazi di successioni l_p, $p > 0$; lo spazio $C_{[a,b]}$ delle funzioni reali continue sull'intervallo reale $[a, b]$; lo spazio delle funzioni analitiche in un dominio $\mathcal{D}$; gli spazi di funzioni $L_p([a, b])$, $p > 0$. Lo spazio degli stati $|\psi >$ (kets) di un sistema fisico

in Meccanica Quantistica (esso può essere finito o infinito dimensionale).
· **Dipendenza ed indipendenza lineare** di un insieme di vettori $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^{m} \subset V$. Dipendenza ed indipendenza lineare di un insieme di vettori $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^{m} \subset \mathbb{C}^n$, con $\underline{v}^{(j)} = (v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_n^{(j)})^T$; relazione con il rango della matrice di Gram $(v_i^{(j)}),\ i = 1,..,n,\ j = 1,..,m$. Esempi.
· **Dimensione di uno spazio vettoriale** V. Esempi: dim $\mathbb{C}^n$ = dim $\mathcal{P}_n$ $= n$. dim $\mathbb{C}^\infty = \infty$. dim $C_{[a,b]} = \infty$
· **Base** (caso finito-dimensionale) $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ in V. Se dim $V = n < \infty$, è un qualunque insieme di n vettori indipendenti. Sviluppo di un generico vettore $\underline{v} \in V_n$ nella base:

$$\underline{v} \in V \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_j \underline{e}^{(i)}, \quad v_i \in \mathbb{R} \ \ (v_i \in \mathbb{C}).$$

Coordinate (componenti) $v_i,\ i = 1, \dots, n$ del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^{n}$. Se la dimensione è infinita, la definizione richiede l'introduzione delle proprietà metriche dello spazio e sarà data più avanti.
· Illustrazione dei concetti di dipendenza e indipendenza lineare, di dimensione e di base attraverso esempi significativi.
· **Isomorfismo tra spazi vettoriali**; esempio: $\mathcal{P}_n$ è isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Isomorfismo tra tutti gli spazi vettoriali reali (complessi) di dimensione finita n; ruolo speciale giocato dallo spazio $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).
· **Sottospazi vettoriali**. Definizione; esempi banali: V e $\{\underline{0}\}$. Esempio non banale: l'inviluppo (span) lineare di un insieme di vettori, come combinazione lineare finita di vettori dell'insieme. Esempi significativi in $\mathbb{R}^n$ e in $\mathcal{P}_n$. Sottospazi aventi intersezione nulla e loro somma diretta $\oplus$. dim $(V_1 \oplus V_2)$=dim V_1 + dim V_2. Sottospazi complementari rispetto a V. Esempi significativi in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathcal{P}_n$.
· Coordinate di un vettore in diverse basi di V. **Trasformazioni di coordinate**.

1.3 Spazi normati e loro proprietà metriche

.
· **Spazi normati** Definizione di norma (lunghezza) $||\cdot||$ di un vettore e di spazio normato. Esempi finito-dimensionali:
$(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_\infty)$; $\mathbb{C}^n_p := (\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p)$. $1 \le p < \infty$, con

$$||\underline{x}||_\infty = max_{1 \le k \le n} |x_k|, \quad ||\underline{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty$$

Equivalenza tra le norme finito-dimensionali.
Esempi infinito-dimensionali:
$(l_\infty, ||\cdot||_\infty)$; $(l_p, ||\cdot||_p)$. $1 \leq p < \infty$, con

$$||\underline{x}||_\infty = sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|, \quad ||\underline{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty$$

$(C_{[a,b]}, ||f(t)||_\infty)$, $C_p[a,b] := (C_{[a,b]}, ||f(t)||_p)$, con

$$||f(t)||_\infty = sup_{t\in[a,b]}|f(t)|, \quad ||f(t)||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty$$

Gli spazi $L_p[a,b]$ delle funzioni tali che $||f(t)||_p < \infty$.
Diguaglianze di Holder e Minkowski e dimostrazione che $||\cdot||_p$ sono norme.
Spazi normati come spazi metrici dotati della distanza $d(\underline{x},\underline{y}) = ||\underline{x}-\underline{y}||$.
· **Proprietà metriche** Topologia indotta dalla metrica: sfera (palla) aperta e chiusa; insiemi aperti e chiusi. Punti di aderenza e chiusura di un insieme; punti di accumulazione. Insiemi limitati e totalmente limitati. Esempio di insieme limitato ma non totalmente limitato.
Insiemi densi. Esempi: l_f è denso in $(l_0, ||\cdot||_\infty)$ e in $(l_p, ||\cdot||_p)$. Lo spazio dei polinomi è denso in $C_{[a,b]}$ (primo th. di Weierstrass) e lo spazio dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio delle funzioni continue con condizioni periodiche al bordo (secondo Th. di Weierstrass), entrambi nella norma uniforme (e quindi nelle norme p).
Successioni di Cauchy e spazi completi; spazi di Banach (spazi normati completi). Uso della completezza di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ per dimostrare la completezza di $\mathbb{R}^n_2$ e $(l_p, ||\cdot||_p)$. Completezza dello spazio $C_\infty[a,b] = (C[a,b], ||\cdot||_\infty)$, ma non degli spazi $C_p[a,b] = (C[a,b], ||\cdot||_p)$. Lo spazio $L_2[a,b]$ come completamento di $C_2[a,b]$ (cenni qualitativi).
Insieme compatto e generalizzazione del teorema di Bolzano - Weierstrass ad uno spazio infinito-dimensionale.

· **Insieme completo di vettori e base**. Insieme completo di vettori e base nel caso infinito-dimensionale. Esempi: l'insieme $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $e_j^{(n)} = \delta_{nj}$ è una base in l_p e in $(l_0, ||\cdot||_\infty)$; l'insieme $\{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base in $(C_{[a,b]}, ||\cdot||_\infty)$, in $C_p[a,b]$ e in $L_p[a,b]$. L'insieme $\{1, \cos\ nt, \sin\ nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base (la base di Fourier) nello spazio $\{f \in C_{[-\pi,\pi]},\ f(-\pi) = f(\pi)\}$, nello spazio $C_{[-\pi,\pi]}$ e in $L_2[-\pi,\pi]$. Spazi separabili. Esempi significativi di insiemi densi numerabili e dei corrispondenti spazi separabili: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$;

l'insieme delle successioni finite a coefficienti razionali è denso in l_p; l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è denso in $C_\infty[a,b],\ C_p[a,b],\ L_p[a,b]$; l'insieme dei polinomi trigonometrici a coefficienti razionali è denso in $\{f \in C_{[-\pi,\pi]},\ f(-\pi)=f(\pi)\},\ C_\infty[-\pi,\pi],\ C_p[-\pi,\pi],\ L_p[-\pi,\pi]$.

1.4 Spazi euclidei

· **Spazio euclideo** come spazio vettoriale complesso (reale) dotato di *prodotto scalare*. Proprietà assiomatiche del prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz. Definizioni indotte di *norma (lunghezza)* di un vettore; di *distanza* tra due vettori e di *angolo* tra due vettori.
· Esempi di spazi euclidei: gli spazi finito-dimensionali:
$\mathbb{R}_2^n,\ \mathbb{C}_2^n$, con $(\underline{\xi},\underline{\eta}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k \eta_k$;
$Mat(n,\mathbb{C})$, con $(A,B) := tr(A^\dagger, B)$;
$\mathcal{P}_n$ con $(f,g) = \int\limits_a^b \overline{f(t)} g(t)$.
Esempi di spazi infinito-dimensionali separabili:
l_2, con $(\underline{\xi},\underline{\eta}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \bar{\xi}_k \eta_k$;
$C_2[a,b],\ L_2[a,b]$ con $(f,g) = \int\limits_a^b \overline{f(t)} g(t)$.
· Ortogonalità di due vettori. Indipendenza di un insieme di vettori ortogonali e osservazione che n vettori ortogonali costituiscono una base dello spazio euclideo n-dimensionale E. Spazi euclidei separabili, esistenza di basi ortonormali e loro costruzione da un insieme numerabile e denso di vettori attraverso il procedimento di ortogonalizzazione di Gram - Schmidt. Minimi quadrati e proiezione ortogonale; coefficienti di Fourier e disuguaglianza di Bessel. Relazione di Parseval e base ortonormale. Spazi di Hilbert (euclidei e completi). Spazi di Hilbert separabili e corrispondenza biunivoca tra lo spazio di Hilbert e l_2 (lo spazio delle successioni dei coefficienti di Fourier); isomorfismo lineare ed euclideo.

1.5 Funzionali lineari e distribuzioni

· Definizione di funzionale lineare su uno spazio vettoriale V. Il funzionale "componente j-esima" di un vettore come esempio significativo. Lo spazio dei funzionali lineari è esso stesso uno spazio vettoriale V^*, detto il duale di V. Base duale. Espressione generale di un funzionale lineare f sul generico vettore $\underline{v} \in V$ nel caso discreto e continuo:

$$f(\underline{v}) = \sum_k f_k v_k, \quad F(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

Funzionali regolari e singolari; il funzionale "delta di Dirac" δ_{x_0}, definito dalla $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$.
· Continuità, limitatezza e norma di un funzionale lineare; esempi significativi:

$$\begin{array}{l} f(\underline{x}) = \sum_k f_k x_k, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ||f|| = ||\underline{f}||_1 & \text{se } \underline{x} \in l_\infty, \\ ||f|| = ||\underline{f}||_\infty & \text{se } \underline{x} \in l_1, \\ ||f|| = ||\underline{f}||_p & \text{se } \underline{x} \in l_q, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \end{cases} \\ F(\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ||F|| = ||f||_1 & \text{se } \varphi \in C_\infty[a,b], \\ ||F|| = ||f||_\infty & \text{se } \varphi \in C_1[a,b], \\ ||F|| = ||f||_p & \text{se } \varphi \in C_q[a,b], \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \end{cases} \\ ||\delta_{x_0}|| = 1. \end{array} \tag{1}$$

Convergenza forte (in norma) e debole di un funzionale lineare. Il lemma di Riemann-Lebesque e la dimostrazione che i funzionali C_n, S_n:

$$C_n(\varphi) = \int\limits_a^b \cos(nx)\varphi(x)dx, \quad S_n(\varphi) = \int\limits_a^b \sin(nx)\varphi(x)dx$$

convergono a 0 in senso debole, ma non forte. Formalizzazione dei concetti di punto materiale, carica puntiforme e forza impulsiva attraverso la funzione $\delta(x)$ di Dirac. Successioni di funzionali $\delta_{x_0}^{(n)}$:

$$\delta_{x_0}^{(n)}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} np(n(x - x_0))\varphi(x)dx$$

che convergono al funzionale δ_{x_0} in senso debole, ma non in senso forte. Esempi: la lorenziana $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, la gaussiana $p(x) = e^{-x^2}/\pi$ e la funzione oscillante $p(x) = \frac{\sin(x)}{\pi x}$.
La derivata di una distribuzione e la funzione gradino $H(x)$ di Heaviside. La distribuzione "valor principale" $P\frac{1}{x}$ e la distribuzione $\frac{1}{x \mp i\epsilon} = P\frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x)$.

1.6 Serie e Trasformata di Fourier

La serie di Fourier troncata come proiezione ortogonale di un elemento di L_2 su un sottospazio finito dimensionale; la base di Fourier come sistema ortonormale e completo in L_2. Disuguaglianza di Bessel e relazione di Parseval. Convergenza in media quadratica, puntuale ed uniforme della serie di Fourier: nucleo di Dirichlet, condizione di Dini e teorema di Fejer. Sviluppo in serie di Fourier di funzioni elementari. Trasformata di Fourier come limite continuo della serie di Fourier. Convergenza in media quadratica, puntuale ed uniforme dell'antitrasformata di Fourier (cenni). Relazione di Parseval-Plancherel. Significato fisico della trasformata di Fourier. Trasformata di Fourier di funzioni elementari e di distribuzioni. Proprietà della trasformata di Fourier. Teorema di convoluzione.

1.7 Operatori lineari

· Il problema della risoluzione dell'equazione $\hat{A}\underline{x} = \underline{y}$, dove $\hat{A}$ è un operatore assegnato e $\underline{y}$ è un vettore assegnato di un certo spazio vettoriale.

· *Operatori su spazi di dimensione finita n (riepilogo di fatti noti).* Rappresentazione, rispetto ad una base di X, dell'operatore $\hat{A}: \ X \to Y$ ($\dim X = m$, $\dim Y = n$) come matrice rettangolare $(n \times m)$ (quadrata se $X = Y$). Isomorfismo tra lo spazio degli operatori $\hat{A}: \ X \to X$ e le matrici $(n \times n)$; isomorfismo tra lo spazio degli operatori $\hat{A}: \ X \to Y$ e le matrici $(n \times m)$. Prodotto di operatori come prodotto di matrici; trasformazione di un vettore come prodotto di una matrice per un vettore colonna. dim $\mathcal{R}(\hat{A})$+dim $\mathcal{N}(\hat{A})$=dim X=n. Rango dell'operatore $\hat{A}$ (e della matrice A che lo rappresenta) come dimensione di $\mathcal{R}(\hat{A})$. Cambiamento di base. Rappresentazioni di operatori lineari in diverse basi di X. Due matrici A' e A sono le rappresentazioni in basi diverse dello stesso operatore $\hat{A}$ se e solo se sono legate dalla trasformazione di similitudine $A' = TAT^{-1}$, dove T è la matrice di trasformazione delle corrispondenti basi: $\underline{e}'^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} T_{kj}\underline{e}^{(k)}$.

Operatori lineari $\hat{A}$ tra gli spazi vettoriali normati X e Y: $\hat{A}: \ X \ \to \ Y$. L'insieme degli operatori lineari è uno spazio vettoriale, con $(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\underline{x} = \alpha(\hat{A}\underline{x}) + \beta(\hat{B}\underline{x}), \ \forall \underline{x} \in X$.
· Esempi importanti di operatori lineari: le matrici $Mat(n, \mathbb{C})$ su $\mathbb{C}^n$; i funzionali lineari; le traslazioni $\hat{E}^{\pm}$ su l_2, la moltiplicazione per una funzione, la derivazione, l'integrazione, la traslazione e gli operatori integrali di Fredholm e Volterra su spazi funzionali.
· Dominio $\mathcal{D}(\hat{A})$, range (codominio, immagine) $\mathcal{R}(\hat{A})$ e nucleo (Ker) $\mathcal{N}(\hat{A})$ (Ker $(\hat{A})$) dell'operatore $\hat{A}$. Inverso di un operatore; esempi: gli operatori $\hat{E}^{\pm}$ e gli operatori derivata e integrale.

Rappresentazione matriciale di operatori finito e infinito dimensionali; esempi: $\hat{E}^{\pm}$, la derivazione, l'integrazione e la traslazione.
· Equivalenza tra le nozioni di continuità in $\underline{0}$, in X e limitatezza di un operatore lineare. Norma di un operatore lineare. Esempi di operatori limitati: le matrici su $\mathbb{C}^n$, le traslazioni su l_2, la moltiplicazione per x in $C_\infty[a,b]$ e in $L_2[a,b]$, gli operatori di Fredholm e Volterra in $C_\infty[a,b]$ e in $L_2[a,b]$. Esempi di operatori non limitati: la moltiplicazione per x in $C_\infty(\mathbb{R})$ ($L_2(\mathbb{R})$) e gli operatori di derivazione.
Somma e prodotto di operatori lineari; se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono operatori lineari limitati, la loro somma e prodotto sono operatori lineari limitati. Funzione di operatore.
· *Operatori di contrazione* su spazi metrici completi e teorema delle contrazioni (o del punto fisso). Metodo delle approssimazioni successive. Applicazioni di tale teorema: i) soluzione di equazioni trascendenti. ii) Ricerca di punti fissi di mappe. iii) Esistenza dell'operatore $(\hat{1}-\hat{B})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{B}^k$. Teoremi di esistenza e unicità delle soluzioni di equazioni integrali di Fredholm.
· *L'aggiunto di un operatore.* Definizione di aggiunto (hermitiano coniugato) $\hat{A}^\dagger$ dell' operatore $\hat{A}$; sua unicità. Involutività dell'operazione di coniugazione hermitiana. La rappresentazione $A^\dagger$ dell'operatore $\hat{A}^\dagger$ in una base ortonormale è la matrice hermitiana coniugata della matrice A che rappresenta $\hat{A}$ nella stessa base: $(A^\dagger)_{ij} = \bar{A}_{ji}$. L'aggiunto di una combinazione lineare di operatori, del prodotto di operatori e dell'inverso di un operatore.
· *Operatore autoaggiunto* (hermitiano), come operatore invariante rispetto all'operazione di coniugazione hermitiana: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ e sua rappresentazione, rispetto a basi ortonormali, in termini di matrici hermitiane (cioè tali che: $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$). CNES affinchè un operatore sia hermitiano è che la sua forma quadratica $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})$ (detta, in questo caso, forma hermitiana) sia reale $\forall \underline{x} \in E$.
· *Operatori unitari* $\hat{U}$, come operatori invertibili tali che $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$. La rappresentazione matriciale U di $\hat{U}$ è data da matrici unitarie: $U^\dagger U = UU^\dagger = I$, $U^\dagger = U^{-1}$ (matrici ortogonali, nel caso reale). Proprietà di operatori unitari: 1) un operatore $\hat{U}$ è unitario se e solo se: i) lascia invariato il prodotto scalare tra due generici vettori (e quindi lascia invariati la norma di un vettore e l'angolo tra due vettori); ii) trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. Nel caso finito-dimensionale, la matrice che lo rappresenta è tale che le sue colonne (e le sue righe) definiscono un sistema di vettori ortonormali. Se $\hat{A}$ è autoaggiunto, allora $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger$ è autoaggiunto. Esempi notevoli di

operatori unitari: le rotazioni, la traslazione e la trasformata di Fourier.
· *Operatori di proiezione e proiettori ortogonali* Proiettore di un generico vettore sul sottospazio $M \subset X$ lungo lo spazio complementare N. Idempotenza. Proiettori ortogonali

$$\hat{P} = \sum_{k=1}^{N} \underline{e}^{(k)} \underline{e}^{(k)\dagger} = \sum_{k=1}^{N} |e^{(k)})(e^{(k)}| \tag{2}$$

con $\{(\underline{e}^{(j)}, \underline{e}^{(k)}) = \delta_{jk}\}$, sul sottospazio $S = span\{(\underline{e}^{(j)}\}_1^N$, finito o infinito dimensionale. Il proiettore ortogonale, oltre a essere idempotente: $\hat{P}^2 = \hat{P}$, è anche hermitiano positivo.
· *Operatori di rango finito.* Operatore di rango finito (diadico):

$$\hat{A}_m = \sum_{k=1}^{m} \underline{a}_k \underline{b}_k^\dagger = \sum_{k=1}^{m} |a_k)(b_k|, \quad \underline{a}_k,\ \underline{b}_k \in E$$

su uno spazio euclideo E finito o infinito-dimensionale. Dominio, nucleo e immagine; rango finito di tale operatore.
· L'equazione $(\hat{1} - \hat{K}_n)x = y$, con $\hat{K}_n$ operatore di rango finito (diadico), è equivalente ad un sistema lineare di equazioni algebriche. Quindi, per essa vale, come nel caso finito-dimensionale, il teorema: *L'equazione* $(\hat{1} - \hat{K}_n)x = y$ *ammette soluzioni se e solo se* y *è ortogonale ad ogni soluzione* ϕ *di* $\hat{K}_n^\dagger \phi = \phi$*:* $(\phi, y) = 0$.
· *Operatori compatti.* Operatore compatto come limite, in norma, di successioni di operatori di rango finito. Esempi includenti l'operatore integrale di Fredholm. Se $\hat{K}$ è compatto, allora l'equazione $(\hat{1} - \hat{K})x = y$ è riconducibile ad un'equazione del tipo $(\hat{1} - \hat{H}_n)x = \tilde{y}$, dove $\hat{H}_n$ è un operatore di rango finito; quindi, per l'equazione $(\hat{1} - \hat{K})x = y$ vale, come nel caso finito-dimensionale, il teorema: *L'equazione* $(\hat{1} - \hat{K})x = y$ *ammette soluzioni se e solo se* y *è ortogonale ad ogni soluzione* ϕ *di* $\hat{K}^\dagger \phi = \phi$*:* $(\phi, y) = 0$.

1.7.1 Teoria spettrale degli operatori lineari

Riepilogo della teoria spettrale di operatori finito-dimensionali ed esistenza del solo spettro discreto.
Operatori infinito-dimensionali. Operatore risolvente e insieme risolvente. Lo spettro come unione di spettro discreto, continuo e residuo. Proprietà dell'insieme risolvente e dello spettro di operatori limitati. Lo spettro di operatori autoaggiunti e di operatori compatti (cenni). Esempi significativi: lo spettro dell'operatore quantità di moto ed energia cinetica, in $L_2[a, b]$

(con condizioni al bordo opportune) e in $L_2(\mathbb{R})$. Lo spettro degli operatori di traslazione $\hat{E}^{\pm}$ in l_2. Lo spettro degli operatori di rango finito. Lo spettro dell'operatore trasformata di Fourier.

1.7.2 Funzione di Green

Definizione di *funzione di Green* $G(x, x')$ *di un operatore* e suo significato fisico. *La funzione di Green* $G(x, x')$ *dell'equazione* $(\hat{L} - \lambda\hat{1})G(x, x') = \delta(x - x')$ *come nucleo dell'operatore integrale risolvente* $R_\lambda(\hat{L})$.
Costruzione della funzione di Green di operatori differenziali del primo e secondo ordine con condizioni al contorno opportune. Uso della funzione di Green sia per trovare la rappresentazione integrale della soluzione di problemi al contorno per equazioni differenziali del primo e secondo ordine, sia per convertirle in equazioni integrali, più semplici da studiare dal punto di vista matematico. Uso della Trasformata di Fourier per costruire la *funzione di Green fondamentale* $G(x - x')$ di operatori differenziali a coefficienti costanti.

2 TESTI CONSIGLIATI

Gli argomenti svolti in questo corso sono un sottoinsieme di quelli contenuti nel libro (attenzione agli errori di stampa!):

1) C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, "Metodi Matematici della Fisica", Carocci Editore, Roma, 2002.

Si consiglia anche:

2) F. Calogero, "Metodi Matematici della Fisica", Dispense Istituto di Fisica, Universita' di Roma, 1975. Materiale reperibile su rete all'indirizzo:
http://www.phys.uniroma1.it/web_disp/d1/index.html

Inoltre, per ulteriori approfondimenti:

3) S. Fomin, A. Kolmogorov, "Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale", MIR 1980

4) F. Cesi, "Rudimenti di analisi infinito dimensionale", dispense disponibili su rete all'indirizzo:
http://zephyrus.roma1.infn.it/ cesi/modelli-08/outline-s.pdf

5) B. Friedman, "Principles and techniques of applied mathematics", Dover Publications, New York 1990.

6) I. M. Gel'fand, "Lectures on Linear Algebra", Dover Publications, NY, 1989.

7) G. Fano, "Metodi matematici della Meccanica Quantistica", Zanichelli, Bologna, 1967.

8) V. Smirnov, "Corso di Matematica Superiore", Volume II, Editori Riuniti, 1977.

9) I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, "Generalized functions", Vol.1, Academic Press, 1964.

10) P. Dennery, A. Krzwicki, "Mathematics for Physicists", Harper and Row, 1967.

3 COMPITI D'ESONERO E SCRITTI PROPOSTI

3.1 1^0 Compito d'Esonero dell'11/05/05

1) (**[5/30]**) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V bidimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = (1+\frac{i}{2})\underline{e}^{(1)} + (\frac{1}{2}+i)\underline{e}^{(2)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -(\frac{1}{2}+i)\underline{e}^{(1)} + (1+\frac{i}{2})\underline{e}^{(2)}.$$

Mostrare che $\hat{A}$ è unitario e calcolarne autovalori, autovettori (verificandone l'ortogonalità) e la decomposizione spettrale.
2) (**[5/30]**) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = -3\underline{e}^{(1)} + 2i\underline{e}^{(2)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = 4i\underline{e}^{(1)} + 3\underline{e}^{(2)}.$$

Calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$.
3) (**[5/30]**) Dati i tre vettori $\underline{v}^{(1)} = (i,0,1)$, $\underline{v}^{(2)} = (2i,2,0)$, $\underline{v}^{(3)} = (2i+1, 2+i, i)$,
a) verificare che sono indipendenti; b) ortonormalizzarli.
4) **[5/30]** L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio euclideo V tridimensionale trasforma gli elementi della base ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)},\ \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -2\underline{e}^{(2)},\ \hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}.$$

Dimostrare che $\hat{A}$ è hermitiano e calcolarne autovalori, autovettori e la decomposizione spettrale.
5) (**[5/30]**) Si costruisca la matrice che ha i seguenti autovalori e autovettori.

$$\begin{gathered}\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 0, \\ \underline{v}^{(1)} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),\ \underline{v}^{(2)} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1),\ \underline{v}^{(3)} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\end{gathered} \tag{3}$$

(suggerimento: si osservi che i tre vettori sono ortonormali..)
6) (**[5/30]** (+**[3/30]** per la parte facoltativa) Data la matrice A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

si calcoli $\sin A$.
Facoltativo: è possibile calcolare $\sin A$ in modo diverso? In caso affermativo, si faccia il calcolo.
7) (**[7/30] esercizio obbligatorio**) Dopo aver definito l'operatore hermitiano $\hat{H}$, mostrare che i) la forma hermitiana $(\underline{v}, \hat{H}\underline{v})$ è reale; ii) i suoi autovalori sono reali; ii) autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.

3.2 2^0 Esonero del 06/06/05

1) ([**6/30**]) Per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x-4|^{\alpha} x^{1/3}}$$

appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e $L_2(\mathbb{R})$?

2) ([**6/30**]) i) Sviluppare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Usare la formula di Parseval per trovare la somma di un'opportuna serie numerica. iii) Confrontare, su $\mathbb{R}$, i grafici di $f(x)$ e della somma della serie.

3) ([**6/30**]) Calcolare $f(x)$ e $||f||_2$, sapendo che i coefficienti f_n dello sviluppo di Fourier $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ sono

$$f_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \geq 1, \\ 0, & n \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

4) [**5/30**] Risolvere l'integrale

$$\int_1^{\infty} \delta(\cos(\pi x)) 2^{-x} dx.$$

5) ([**8/30**]) Data l'equazione integrale di Fredholm

$$f(x) = \lambda \int_0^1 xy f(y) dy + 1 =: \hat{A} f(x),$$

i) indicare per quali valori di λ l'operatore integrale $\hat{A}$ è una contrazione. ii) Usare il metodo delle approssimazioni successive per verificare che la soluzione è $f(x) = \frac{3\lambda}{2(3-\lambda)} x + 1$. iii) Determinare i valori di λ (gli autovalori) per i quali l'equazione omogenea $h(x) = \lambda \int_0^1 xy h(y) dy$ ammette soluzioni non banali (le autofunzioni), e calcolarle.

6) ([**6/30**]) Costruire, in $\mathbb{R}^3$, il proiettore ortogonale sul piano $x - y + z = 0$.

(Suggerimento: i) verificare che il vettore $\underline{v}^{(1)} = (1,1,0)^T$ appartiene al piano; ii) costruire un vettore $\underline{v}^{(2)}$ ortogonale a $\underline{v}^{(1)}$ e appartenente al piano; iii) procedere poi in modo standard..)

7) (**[7/30] esercizio obbligatorio: [-3/30] se non svolto**) Sia M uno spazio metrico completo e su di esso un'applicazione $\hat{A}: \ M \to M$. i) Quand'è che $\hat{A}$ è una contrazione? ii) Dimostrare che se $\hat{A}$ è una contrazione, allora $\exists!$ il punto fisso $\bar{x} \in M$ della contrazione $\hat{A}$: $\bar{x} = \hat{A}\bar{x}$. iii) Discutere una delle tante applicazioni del teorema.

3.3 3^0 Esonero del 22/06/05

1) (**[7/30]**) Si consideri l'equazione integrale

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + g(x),$$

dove λ è un parametro complesso arbitrario, $K(x,y)$ è una funzione continua in $[a,b] \times [a,b]$ assegnata e $g(x)$ è una funzione continua in $[a,b]$ assegnata. Enunciare e dimostrare il teorema dell'alternativa per tale equazione.
(Suggerimento: si passi attraverso il caso di un nucleo degenere continuo.)

2) (**[12/30]**) Dato l'operatore integrale

$$\hat{K} f(x) = \int_{-1}^{1} (x + 3y) f(y) dy,$$

dopo aver costruito il sistema algebrico rilevante **[3]**, i) calcolare autovalori e autofunzioni di $\hat{K}$ **[3]**. ii) Risolvere l'equazione $(1 - \lambda\hat{K})f(x) = g(x)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{C}$, sia per λ diverso dagli autovalori **[3]**, sia per λ uguale agli autovalori **[3]**.

3) (**[5/30]**) Data la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & |x| < \frac{1}{4n}, \\ 0 & |x| > \frac{1}{4n}, \end{cases}$$

i) calcolarne la trasformata di Fourier $\hat{f}_n(k)$ **[2]**.
ii) Calcolare il limite $\hat{f}(k) = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(k)$ **[1]**.
iii) Ottenere $\hat{f}(k)$ senza passare attraverso la forma esplicita di $\hat{f}_n(k)$, riconoscendo che la successione $f_n(x)$ tende, nel senso delle distribuzioni, ad una funzione nota, $f(x)$ **[2]**.

4) ([**6/30**]) Un oscillatore armonico di pulsazione $\omega = 2$, inizialmente a riposo, è soggetto ad un impulso I che agisce all'istante $t_* = 1$ per un tempo infinitesimo. Si determini l'evoluzione dell'oscillatore per tempi $t \geq t_*$.
5) ([**6/30**])
Utilizzando il metodo della trasformata di Fourier, trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale:

$$\left(d^2/dx^2 + 2d/dx + 2\right) y(x) = x^2$$

6) ([**6/30**])
Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \dfrac{dg}{dx}$, con $g(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$.

3.4 Scritto del 07/07/05

1) ([**9/30**]) i) Calcolare autovalori e autofunzioni dell'operatore integrale $\hat{K}$ definito da:

$$\hat{K}h(x) = \int_{-1}^{1} (x + 3y)h(y)dy.$$

ii) Risolvere l'equazione $(1 - \lambda\hat{K})f(x) = 1$ per λ diverso da tali autovalori.
2) ([**6/30**]) i) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ dell'onda piana tagliata ([**4/30**]):

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t}, & |t| < t_0, \\ 0, & |t| > t_0. \end{cases}$$

ii) Fare il grafico di $\hat{f}(\omega)$ al variare di ω ([**2/30**]).
3) ([**7/30**]) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)}, \quad \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -\underline{e}^{(1)} + a\underline{e}^{(2)},$$

$\mathbb{C} \ni a \neq 1$. Calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$ [**5/30**]. Discutere il caso $a = 1$[**2/30**].
4) ([**7/30**]) Usare il metodo della funzione di Green per determinare l'evoluzione di un oscillatore armonico di pulsazione ω_0 che oscilla liberamente nel remoto passato: $u(t) \sim \sin\omega_0 t$, $t \sim -\infty$ ed è soggetto alla forza esterna $F(t) = \theta(t)\theta(1 - t)$.

5) ([**7/30**] **esercizio obbligatorio: [-3/30] se non svolto**) Dato lo spazio delle funzioni continue $C[-1,1]$ con la norma uniforme $||f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$,

i) mostrare che l'operatore integrale $\hat{K}$:

$$\hat{K}f(x) = \nu \int_{-1}^{1} (x^2y + xy^2) f(y) dy, \quad \nu \in \mathbb{C}$$

è limitato e determinare i valori di ν per i quali è una contrazione ([**5/30**]).
ii) Mostrare che l'operatore di derivazione (su $C^1[-1,1]$) non è limitato ([**2/30**]).
6) ([**6/30**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = 2x - 1$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Usare la formula di Parseval per trovare la somma di un'opportuna serie numerica. iii) Confrontare, su $\mathbb{R}$, i grafici di $f(x)$ e della somma della serie.
7) [**5/30**] Risolvere l'integrale

$$\int_{2}^{\infty} \delta(\cos(\pi x)) 3^{-x} dx.$$

3.5 Scritto di MMF e MMMF del 07/07/05

1) ([**7/30**]) Usare il metodo della funzione di Green per determinare l'evoluzione di un oscillatore armonico di pulsazione ω_0 che oscilla liberamente nel remoto passato: $u(t) \sim \cos\omega_0 t$, $t \sim -\infty$ ed è soggetto alla forza esterna $F(t) = \theta(t)\theta(1-t)$.
2) ([**6/30**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = 2x - 1$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Usare la formula di Parseval per trovare la somma di un'opportuna serie numerica. iii) Confrontare, su $\mathbb{R}$, i grafici di $f(x)$ e della somma della serie.
3) ([**6/30**]) Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

4) [**5/30**] Risolvere l'integrale

$$\int_{2}^{\infty} \delta(\cos(\pi x)) 3^{-x} dx.$$

5) ([**6/30**]) Si classifichino le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin\frac{\pi}{z-1}} \mathrm{e}^{-z^2}$$

e, ove possibile, se ne calcolino i residui corrispondenti.
6) ([**7/30**]) L'operatore lineare $\hat{A}$ sullo spazio vettoriale V bidimensionale trasforma gli elementi della base $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^2$ nel seguente modo:

$$\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)}, \quad \hat{A}\underline{e}^{(2)} = -\underline{e}^{(1)} + a\underline{e}^{(2)},$$

$\mathbb{C} \ni a \neq 1$. Calcolare gli autovalori, gli autovettori e la decomposizione spettrale di $\hat{A}$ [**5/30**].
Discutere il caso $a = 1$ [**2/30**].
7) ([**6/30**]) Si sviluppi la funzione $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ in serie di potenze centrate in $z_0 = 2i$ in tutto il piano complesso, calcolandone i raggi di convergenza.

3.6 3^0 Esonero del 26/05/08; AA 07-08

1) ([**1**]+[**4**]) i) Determinare per quale valore del parametro a i tre polinomi di secondo grado $\{a - x,\ x(1-x),\ 1 - x^2\}$ sono dipendenti.
ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $(0,1)$ e ortogonalizzarla.
R. i) $a = 1$. ii) $e_1 = 1, e_2 = x - 1/2, e_3 = x^2 - x + 1/6$.
2) [1]+[3]+[2] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato)
Dimostrare che lo spazio l_2 è uno spazio i) euclideo, ii) completo e iii) separabile. (Per il punto ii), si faccia uso della completezza di $\mathbb{C}$)
3) ([**1**]+[**3**]) i) Dare la definizione di insieme A denso nell'insieme B. ii) Mostrare che lo spazio delle successioni che consistono in un numero finito di elementi è denso nello spazio l_2.
4) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = H(4 - x^2)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2n}{2n}\right)^2$.
R. i) $H(4 - x^2) = \frac{2}{\pi}(1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{2n} \cos nx)$; iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2n}{2n}\right)^2 = \frac{\pi-2}{4}$.
5) [**6**] Studiare la convergenza debole e forte delle successioni di funzionali $\{f^{(n)}\}_1^{\infty}$ tali che:

$$f^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n^j e^{-n|x|} \varphi(x) dx$$

nei tre casi $j = 0, 1, 2$ (scegliere a piacere lo spazio delle funzioni di prova).
R. Conv debole: $j = 0 :\ 0,\ j = 1 :\ 2\delta_0,\ j = 2 :\ \infty$
6) ([**3**]+[**3**]) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni appartengono a L_1 e L_2 negli intervalli indicati.

$$f(x) = \frac{e^{-x} \sinh \alpha x}{|x^2 - 9|^\alpha},\ [0, \infty); \quad g(x) = \frac{1}{|x^2 - 4|^\alpha |x - \alpha + 1/3|^{1/2}},\ [0, \infty).$$

R. $f(x) \in L_1 :\ -1 < \alpha < 1$, $f(x) \in L_2 :\ -1 < \alpha < 1/2$; $g(x) \in L_1 :\ 1/4 < \alpha < 1$, $g(x) \in L_2 :\ 0 < \alpha < 1/3$
7) ([**4**]) Calcolare

$$\int_{-n-1/2}^{n+1/2} \delta(\sin \pi x) e^{3ix} dx$$

facendo anche uso della somma $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
R. $\frac{1}{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{3ik} = \frac{\sin 3(n+1/2)}{\pi \sin(3/2)}$

3.7 4^0 Esonero del 20/06/08; AA 07-08

1) [**5**] Sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$, se l'operatore $\hat{A}$ agisce sulla base nel seguente modo: $\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}$, $\hat{A}\underline{e}^{(2)} = \underline{e}^{(2)}$, $\hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}$, i) mostrare che $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$; ii) trovare autovalori, autovettori e diagonalizzare l'operatore attraverso una trasformazione unitaria. (autovalori: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$; autovettori: $\underline{v}^{(1)} = (1/\sqrt{2})(1, 0, -1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (0, 1, 0)^T$, $\underline{v}^{(3)} = (1/\sqrt{2})(1, 0, 1)^T$, $U = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)} \underline{v}^{(3)})$).
2) [5] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato) Sia $\hat{A} :\ H \to H$ un operatore limitato. Mostrare che l'insieme risolvente $\rho(\hat{A})$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$, mentre lo spettro $\sigma(\hat{A})$ è un insieme chiuso contenuto nel disco $\{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| \leq ||\hat{A}||\}$.
3) ([**5**]) Un oscillatore armonico smorzato, inizialmente a riposo, è soggetto ad un impulso I che agisce all'istante t'. Determinare l'evoluzione dell'oscillatore per $t > t'$. Si ricordi che un oscillatore armonico smorzato, non soggetto ad altre forze, è caratterizzato dall'equazione $(d^2/dt^2 + 2\gamma d/dt + \omega_0^2)x(t) = 0,\ \gamma,\ \omega_0 > 0$.
$\omega_0 > \gamma :\ x(t) = G(t, t') = I \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} H(t - t')$
$\omega_0 < \gamma :\ x(t) = G(t, t') = -\frac{I}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}(t - t') e^{-\gamma(t-t')} H(t - t'))$

4) ([**3**]+[**3**]) Dato l'operatore $\hat{A} = -id/dx + x$, agente sulla varietà lineare, densa in $L_2[-\pi, \pi]$, delle funzioni f tali che $\hat{A}f \in L_2[-\pi, \pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$, i) mostrare che è autoaggiunto in tale spazio e determinarne autovalori e autofunzioni (sempre in tale spazio). ii) Mostrare che è autoaggiunto anche in $L_2(\mathbb{R})$ e determinarne lo spettro in $L_2(\mathbb{R})$. (R. i) spettro discreto: $\lambda_n = n,\ n \in \mathbb{Z}$, $\psi_n(x) = e^{i\lambda_n x - ix^2/2}$; ii) spettro continuo $\lambda \in \mathbb{R}$ con autofunzioni limitate $\psi(x, \lambda) = e^{i\lambda x - ix^2/2}$).

5) ([**2**]+[**5**]) L'operatore $\hat{A} : l_2 \to l_2$ è definito da $(\hat{A}\underline{x})_n = x_{n+1} + x_{n-1},\ n \geq 1,\ x_0 = 0$. Mostrare che: i) $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$; ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \{-2 \leq \lambda \leq 2\}$ (sugg.: cercare la soluzione dell'equazione agli autovalori nella forma $x_n = z^n$ ed esprimere z in funzione di λ; infine ricordare che $x_0 = 0$).
(R. $x_n = z^n \ \Rightarrow\ z = z_\pm = \frac{\lambda \pm i\sqrt{4-\lambda^2}}{2} = e^{\pm i\theta(\lambda)}$, $|z_\pm| = 1$, $\overline{z_-} = z_+$, se $-2 \leq \lambda \leq 2$. Allora $x_n = \alpha z_+^n + \beta z_-^n$; $x_0 = 0 \ \Rightarrow\ x_n = \alpha(z_+^n - z_-^n) = C \sin\theta(\lambda),\ \ -2 \leq \lambda \leq 2$)

6) ([**3**]) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

caratterizzare Ker(A), $\mathcal{R}(A)$ e determinare la dimensione e vettori di base di tali spazi.
(R. Ker(A)=span$(\{(-i, 1, i-2)\})$, dim Ker=1; Im(A)=$\{\underline{y} \in \mathbb{C}^3;\ y_3 = iy_1\}$ = span$(\{(1, 0, i), (0, 1, 0)\})$; dim Im =2)

7) ([**2**]+[**3**]) Dato l'operatore di Fredholm

$$\hat{K}f(t) := \int_{-1}^{1} (t-s)f(s)ds,$$

i) determinare autovalori e autofunzioni di $\hat{K}$. iii) Determinare le condizioni sul parametro $\mu \in \mathbb{C}$ sotto le quali l'equazione di Fredholm $x(t) - \mu\hat{K}x(t) = y(t)$ ammette un'unica soluzione $x(t)$, per ogni termine noto $y(t) \in L_2[-1, 1]$, e ottenere tale soluzione.
(R. i) $\lambda_\pm = \pm 2i/\sqrt{3}$, $\psi_\pm(t) = \mp i\sqrt{3}t + 1$. ii) se $\mu = 1/\lambda \neq 1/\lambda_\pm$, esiste unica la solutione $x(t) = \frac{\lambda y_1 - 2y_2}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} - \frac{\lambda y_2 - 2y_1/3}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} + y(t)$, con $y_1 = \int_{-1}^{1} y(t)dt$, $y_2 = \int_{-1}^{1} ty(t)dt$).

3.8 Scritto (seconda parte) del 30/06/08; AA 07-08

1) ([**1**]+[**3**]) i) Determinare per quale valore del parametro a i tre polinomi

di secondo grado $\{a-x,\ x(1-x),\ 1+x^2\}$ sono dipendenti.
ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $[-1,1]$ e ortonormalizzarla.
R. i) $a=1$; ii) $e_1(x)=1/\sqrt{2}$, $e_2(x)=\sqrt{3/2}x$, $e_3(x)=3/2\sqrt{5/2}(x^2-1/3)$
2) [5] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato) Dimostrare il seguente teorema (delle contrazioni). Sia M uno spazio metrico completo e $F:\ S\to S$ una contrazione ; allora i) esiste unico il punto fisso $\bar{x}$ di M; ii) se $\{x_n\}_0^\infty$ e la successione di M definita da $x_n:=F(x_{n-1})$, $x_0\in M$, allora $x_n\to\bar{x}$, per $n\to\infty$.
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x)=sgn(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.
R. vedere esercizio materiale corso.
4) ([**4**]) Determinare per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ la seguente funzione f appartiene a $L_1[0,\infty)$ e $L_2[0,\infty)$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x-\alpha+1/4|}|x^2-3|^\alpha}.$$

R. $L_1[0,\infty)$: $1/4<\alpha<1$; $L_2[0,\infty)$: $0<\alpha<1/4$
5) ([**5**]) Calcolare

$$I_1=\int\limits_{-1}^{1}\delta(\cos\pi x)(x^2+1)dx,\quad I_2=\int\limits_{-1}^{1}\delta'(\cos\pi x)(x^2+1)dx.$$

R. $I_1=5/(2\pi)$, $I_2=0$
6) ([**1**]+[**3**]) Sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$, se l'operatore $\hat{A}$ agisce sulla base nel seguente modo: $\hat{A}\underline{e}^{(1)}=\underline{0}$, $\hat{A}\underline{e}^{(2)}=(1+i)\underline{e}^{(3)}$, $\hat{A}\underline{e}^{(3)}=(1-i)\underline{e}^{(2)}$, i) mostrare che $\hat{A}=\hat{A}^\dagger$; ii) trovare autovalori, autovettori e diagonalizzare l'operatore attraverso una trasformazione unitaria.
R. $\lambda_1=-\sqrt{2}$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=\sqrt{2}$, $\underline{v}^{(1)}=(1/\sqrt{5})(0,1-i,-\sqrt{2})^T$, $\underline{v}^{(2)}=(1,0,0)^T$, $\underline{v}^{(3)}=(1/\sqrt{5})(0,1-i,\sqrt{2})^T$, $U=(\underline{v}^{(1)},\underline{v}^{(2)},\underline{v}^{(3)})$
7) ([**3**]+[**3**]) Dato l'operatore $\hat{A}=-d^2/dx^2$, agente sulla varietà lineare, densa in $L_2[a,b]$, delle funzioni f tali che $\hat{A}f\in L_2[a,b]$, con $f(a)=f(b)=0$, i) determinarne autovalori e autofunzioni in tale spazio. ii) Determinarne lo spettro anche in $L_2(\mathbb{R})$.
R. i) $\sigma(\hat{A})=\sigma_p=\{\lambda_n=\pi^2n^2(b-a)^{-2}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\psi_n(x)=\sin(\lambda_n(x-a))$; ii) $\sigma(\hat{A})=\sigma_c(\hat{A})=\mathbb{R}^+$, $\psi(x,\lambda)=e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$.

3.9 Scritto (seconda parte) del 15/09/08; AA 07-08

1) ([**1.5**]+[**2.5**]) i) Dare la definizione di dipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e determinare per quale valore del parametro α i tre polinomi di secondo grado $\{\alpha - 2x,\ x(1-x),\ 1+x^2\}$ sono dipendenti. ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $[-1,1]$ e ortonormalizzarla.

2) [6] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato)
Dimostrare che: 1) se $\hat{A}$ è un operatore autoaggiunto, i) i suoi autovalori sono reali; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali. 2) Se $\hat{U}$ è un operatore unitario, i) i suoi autovalori hanno modulo 1; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali.

3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = e^{2x}$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$.

4) ([**2**]+[**2.5**]) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione f appartiene a $L_1[0,\infty)$ e $L_2[0,\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-\alpha+\frac{1}{3}||x+2|^{\alpha}}}.$$

5) ([**2.5**]+[**2.5**]) i) Calcolare

$$I_1 = \int_{-2}^{2} \delta(\cos \pi x)(x^2+1)^{-1} dx.$$

ii) Dimostrare che, nel senso delle distribuzioni

$$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x). \tag{7}$$

6) ([**2**]+[**2**]) i) Determinare sotto quale condizione sui numeri complessi a e b la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{8}$$

è unitaria e, sotto questa condizione, ii) calcolarne autovalori e autovettori.

7) ([**2.5**]+[**3.5**]) Dato l'operatore di traslazione $\hat{E}^+ :\ l_2 \to l_2$:

$$\hat{E}^+(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) = (x_2,x_3,\ldots,x_{n+1},\ldots), \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots) \in l_2, \tag{9}$$

i) calcolare $(\hat{E}^+)^\dagger$; ii) determinare lo spettro di $\hat{E}^+$.

3.10 3^0 Esonero del 04/06/09; AA 08-09

1) ([**1**]+[**3**]) Dati i vettori $\underline{v}^{(1)} = (0,0,1)$, $\underline{v}^{(2)} = (1,i,1)$, $\underline{v}^{(3)} = (1,-i,1)$, a) mostrare che sono indipendenti e b) ortonormalizzarli.
R: i) $\det(\underline{v}^{(1)},\underline{v}^{(1)},\underline{v}^{(1)}) = -2i \neq 0$, ii) $\underline{e}^{(1)} = (0,0,1), \underline{e}^{(2)} = (1/\sqrt{2})(1,i,0)$, $\underline{e}^{(3)} = (1/\sqrt{2})(1,-i,0)$
2) ([**1**]+[**4**]) i) Dare la definizione di insieme A denso in B. ii) Dopo aver definito gli spazi l_f, l_0, l_∞, mostrare che l_f è denso in $\{l_0, ||\cdot||_\infty\}$, ma non è denso in $\{l_\infty, ||\cdot||_\infty\}$.
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = |x|$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
R: i) $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$, iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2})^4$
4) ([**4**]) Dopo aver definito lo spazio $L_1(\mathbb{R})$, determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \frac{1}{|x^2-1|^a\sqrt{|1+x|}}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$.
R: $1/4 < a < 1/2$
5) ([**1.5**]+[**2.5**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$. i) A cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$? ii) A cosa converge debolmente in $\mathbb{R}$? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma $||\cdot||_1$ (o, a scelta, nella norma $||\cdot||_\infty$) in $\mathbb{R}$, e quindi non converge fortemente in tale norma.
R: $f_n(x) \to 0,\ x \neq 0; f_n(x) \to \infty,\ x = 0$ puntualmente. $f_n(x) \to \delta(x)$ in senso debole. $||f_n(x) - f_m(x)||_\infty = |n-m|/2 \to \infty$ (se, ad es., $m = n/2$); $||f_n(x) - f_m(x)||_1 = \int_{\mathbb{R}} |e^{-y^2} - e^{-y^2/4}|dy = O(1)$, (se, ad es., $m = n/2$). Quindi non sono successioni di Cauchy e quindi non convergono.
6) ([**4**]) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_1^\infty \delta(\sin(\pi x))3^{-x}dx$.
R: $I = (3\pi)^{-1}$
7) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) Sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$ un insieme finito di vettori ortonormali dello spazio euclideo E e sia $S_N = span(\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N)$. Se $\underline{x} \in E$ è il generico vettore di E, i) caratterizzare il vettore $\underline{x}^{(N)} = \sum\limits_{i=1}^N \xi_i e^{(i)}$ di S_N che meglio approssima $\underline{x}$; ii) mostrare che tale vettore $\underline{x}^{(N)}$ è la "proiezione ortogonale" di $\underline{x}$ su S_N, iii) mostrare che vale la disuguaglianza di Bessel: $(\underline{x},\underline{x}) \geq \sum\limits_{i=1}^N |\xi_i|^2$.

3.11 4^0 Esonero del 02/07/09; AA 08-09

1) ([**5**]) Dato l'operatore $\hat{E}^- : \; l_2 \to l_2$, definito dalla $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, ..) = (0, x_1, x_2, ..)$, determinare i) $\mathrm{Ker}(\hat{E}^-)$, $\mathcal{R}(\hat{E}^-)$; ii) il suo aggiunto $(\hat{E}^-)^\dagger$; iii) sotto quali condizioni $\hat{E}^-$ è invertibile, calconandone l'inverso.
R. $\mathrm{Ker}(\hat{E}^-) = \{\underline{0}\}$, $\mathcal{R}(\hat{E}^-) = \{\underline{y} \in l_2 : \; y_1 = 0\}$, $(\hat{E}^-)^\dagger = \hat{E}^+$, invertibile se $\hat{E}^- : l_2 \to \mathcal{R}(\hat{E}^-)$, $(\hat{E}^-)^{-1} = \hat{E}^+$.
2) ([**2**]+[**1**]+[**2**]) i) Mostrare che, se $\hat{A} : \; H \to H$ è autoaggiunto, allora $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x}) \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{x} \in H$. ii) Sia $\hat{B} : \; H \to H$; mostrare che l'operatore $\hat{B}^\dagger \hat{B}$ è autoaggiunto e che $(\underline{x}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{x}) \geq 0$, $\forall \underline{x} \in H$. iii) Mostrare che, se λ è autovalore di $\hat{B}^\dagger \hat{B}$, allora $\lambda \geq 0$.
R. ii) $(\underline{x}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{x}) = (\hat{B}\underline{x}, \hat{B}\underline{x}) \geq 0$; iii) Se $\hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{v} = \lambda \underline{v} \;\Rightarrow\; \lambda(\underline{v}, \underline{v}) = (\underline{v}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{v}) = (\hat{B}\underline{v}, \hat{B}\underline{v})$. Quindi $\lambda = (\hat{B}\underline{v}, \hat{B}\underline{v})/(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$
3) ([**4**]) La risposta $R(x)$ di un sistema lineare ad una forza impulsiva è data dal seguente integrale di convoluzione $R(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x - x')I(x')dx'$, nel quale le funzioni $G(x)$ e $I(x)$ hanno trasformate di Fourier $\hat{G}(k) = e^{-|k|}$ e $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Calcolare $R(x)$ usando il teorema di convoluzione.
R. $R(x) = \int_{\mathbb{R}} (dk/2\pi)\hat{G}(k)\hat{I}(k) = (\pi(1 + (x - x_0)^2)^{-1}$
4) ([**4**]) Calcolare $\sin A$, dove A è la matrice autoaggiunta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ \pi/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sin A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

5) ([**1**]+[**4**]) Dato l'operatore integrale di rango finito $\hat{K}$ definito da $\hat{K}f(t) = \int_{-1}^{1} (t + s)f(s)ds$, dove $f \in L_2[-1, 1]$, i) mostrare che $\hat{K}$ è autoaggiunto; ii) calcolare lo spettro di $\hat{K}$ (che tipo di spettro è?) e le relative autofunzioni in $L_2[-1, 1]$.
R. $\sigma(\hat{K}) = \sigma_p(\hat{K}) = \{\lambda_\pm = \pm 2/\sqrt{3}\}$, $\psi_\pm(t) = c_\pm(\pm\sqrt{3}t + 1)$
6) ([**2.5**]+[**3.5**]) Dato l'operatore $\hat{A} = -id/dx + x$, agente sulla varietà lineare (densa in L_2) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{A}f \in L_2$, i) trovare autovalori e autofunzioni di $\hat{A}$ in $L_2[-\pi, \pi]$, con condizioni al bordo periodiche: $f(-\pi) = f(\pi)$. ii) Mostrare che, nello spazio $L_2(\mathbb{R})$, $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A})$ ed individuare tale spettro continuo.
R. i) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = \{n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\psi_n(x) = e^{i(nx - x^2/2)}$; ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}$, autofunzione limitata: $\psi(x, \lambda) = e^{i(\lambda x - x^2/2)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, autofunzione approssimata di $L_2(\mathbb{R})$: $f_n(x) = (2/\pi)^{1/4} n^{-1/2} e^{-x^2/n^2} \psi(x, \lambda)$

3.12 Scritto del 15/07/09; AA 08-09

1) ([**3**]+[**1**]) i) Se $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, determinare i coefficienti $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ per i quali valgono le disuguaglianze: $||\underline{x}||_\infty \leq \alpha_n ||\underline{x}||_p \leq \beta_n ||\underline{x}||_\infty$, con $p > 1$. ii) Se $\underline{x} \in l_p$, quale delle precedenti disuguaglianze sopravvive?
R. i) $\alpha_n = 1$, $\beta_n = \sqrt[p]{n}$; ii) la disuguaglianza $||\underline{x}||_\infty \leq ||\underline{x}||_p$
2) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = sign\ x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
R. i) $sign\ x \sim (4/\pi) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
3) ([**4**]) Data la funzione discontinua $f(x) = a(x)H(x_0 - x) + b(x)H(x - x_0)$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$, dove H è la funzione gradino di Heaviside e $a(x), b(x)$ sono funzioni con derivate prime continue su $\mathbb{R}$, i) calcolare $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ con l'ausilio di note distribuzioni; ii) calcolare $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int\limits_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f'(x)dx$.
i) $f'(x) = (b(x_0) - a(x_0))\delta(x - x_0) + a'(x)H(x_0 - x) + b'(x)H(x - x_0)$; ii) $b(x_0) - a(x_0)$
4) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. i) A cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$? ii) A cosa converge debolmente in $\mathbb{R}$? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma $|| \cdot ||_1$ (o, a scelta, nella norma $|| \cdot ||_\infty$) in $\mathbb{R}$, e quindi non converge fortemente in tale norma.
R. i) $f_n(x) \to \infty$, $x = 0$, $\to 0$, $x \neq 0$; ii) $f_n(x) \to \delta(x)$
5) ([**6**]) Dato l'operatore $\hat{E}^+ : \ l_2 \to l_2$, definito dalla $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, ..) = (x_2, x_3, x_4, ..)$, determinare i) Ker$(\hat{E}^+)$, $\mathcal{R}(\hat{E}^+)$; ii) il suo aggiunto $(\hat{E}^+)^\dagger$; iii) sotto quali condizioni $\hat{E}^+$ è invertibile, calconandone l'inverso, iv) la sua norma $||\hat{E}^+||$.
R. i) Ker$(\hat{E}^+)$=$\{(x_1, 0, ..)\}$, dim Ker$(\hat{E}^+)$=1, Ran$(\hat{E}^+)$=l_2; iii) $\hat{E}^+ : \ l_2 \to l_2$ non è invertibile, ma $\hat{E}^+ : \ \{\underline{x} \in l_2 : \ x_1 = 0\} \to l_2$ è invertibile con inverso $\hat{E}^-$; ii) $(\hat{E}^+)^\dagger = \hat{E}^-$; iv) $||\hat{E}^+|| = 1$.
6) ([**1**]+[**4**]) Dato l'operatore integrale di rango finito $\hat{K}$ definito da $\hat{K}f(t) = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 s + ts^2) f(s) ds$, dove $f \in L_2[-1, 1]$, i) mostrare che $\hat{K}$ è autoaggiunto; ii) calcolare lo spettro di $\hat{K}$ (che tipo di spettro è?) e le relative autofunzioni in $L_2[-1, 1]$.
R. $\psi_\pm(t) = c_\pm(\sqrt{5}t^2 \pm \sqrt{3}t)$, $\lambda_\pm \pm 2/\sqrt{15}$

7) ([**6**], **esercizio obbligatorio** ([**-3**] **se non affrontato**)) Sia $\hat{A}: X \to X$ un operatore limitato; mostrare che: i) l'insieme risolvente $\rho(\hat{A})$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$; ii) lo spettro $\sigma(\hat{A})$ è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$, contenuto nel disco $\lambda \leq ||\hat{A}||$.

3.12.1 bf Scritto del 21/09/09; AA 08-09

1) ([**4**]) La risposta $R(x)$ di un sistema lineare ad una forza impulsiva è data dal seguente integrale di convoluzione $R(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x-x')I(x')dx'$, nel quale le funzioni $G(x)$ e $I(x)$ hanno trasformate di Fourier $\hat{G}(k) = (1+k^2)^{-1}$ e $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dopo aver enunciato il teorema di convoluzione, calcolare $R(x)$, $x \in \mathbb{R}$ usando tale teorema.
R. $R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi}\hat{G}(k)\hat{I}(k) = e^{-|x-x_0|}/2$
2) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione gradino di Heaviside $H(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $H(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
R. $H(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
3) ([**4**]) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^1 \delta(\cos\pi x)\sin\pi x dx$.
R. $I = 1/\pi$
4) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{\sqrt{2}n}{\pi(1+n^4x^4)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Determinare i) a cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e ii) a cosa converge debolmente in $\mathbb{R}$ (si usi la formula $\int_{\mathbb{R}} dx(1+x^4)^{-1} = \pi/\sqrt{2}$); iii) mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma $||\cdot||_1$ (o, a scelta, nella norma $||\cdot||_\infty$) in $\mathbb{R}$, e quindi non converge fortemente in tale norma.
R. i) a 0 se $x \neq 0$, a ∞ se $x = 0$; ii) a $\delta(x)$
5) ([**6**]) Dato l'operatore $\hat{E}^+ : l_2 \to l_2$, definito dalla $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, ..) = (x_2, x_3, x_4, ..)$, i) calcolarne la norma e ii) determinarne lo spettro.
R. i) $||\hat{E}^+|| = 1$, ii) $\sigma_p(\hat{E}^+) = \{|\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(\hat{E}^+) = \{|\lambda| = 1\}$
6) ([**2**]+[**3**]) Calcolare $\cos\hat{P}$ e $\cos A$, dove $\hat{P}$ è un operatore di proiezione ortogonale e A è la matrice autoaggiunta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

R. $\cos\hat{P} = \hat{1} - (1-\cos 1)\hat{P}; \cos A = -I$

7) ([6], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)) Sia $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ una successione di l_2 e sia $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ una base ortonormale dello spazio di Hilbert H. Mostrare i) che la successione $\underline{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \underline{e}^{(i)},\ n \in \mathbb{N}$ di vettori di H è di Cauchy; ii) che converge, in norma euclidea, a un vettore $\underline{x} \in H$; iii) che gli elementi ξ_i della successione sono i coefficienti di Fourier di $\underline{x}$ rispetto alla base: $\xi_i = (\underline{e}^{(i)}, \underline{x})$.