

MATERIALE DEL CORSO DI  
**MODELLI E METODI MATEMATICI  
DELLA FISICA**

**Analisi Funzionale**

a cura di Paolo Maria Santini

*<http://www.roma1.infn.it/people/santini/>*

---

*Docente del corso: Paolo Maria Santini*

email: [paolo.santini@roma1.infn.it](mailto:paolo.santini@roma1.infn.it)

ufficio 109, primo piano, ed. Marconi - tel. 0649914239

---

September 24, 2015

PROGRAMMA DEL CORSO; AA 2011-12

TESTI CONSIGLIATI

ESEMPI DI ESONERI E SCRITTI GIÀ PROPOSTI

# 1 Programma del corso di Analisi Funzionale; AA 2011-12

GLI ARGOMENTI TRA DOPPIE PARENTESI QUADRE [[ ]] NON RIGUARDANO IL CORSO DA 10 CREDITI

## 1.1 Richiami di algebra lineare.

Matrici quadrate e rettangolari. Determinante di una matrice quadrata. Minori di una matrice, ordine dei suoi minori e rango della matrice come il massimo ordine dei suoi minori. Sistemi di equazioni lineari sotto-determinati, determinati e sovra-determinati. Sistemi omogenei. Forma matriciale  $A\underline{x} = \underline{b}$  del sistema lineare e del sistema omogeneo  $A\underline{x} = \underline{0}$  associato, con  $A$  matrice rettangolare  $m \times n$ ,  $\underline{x}$  vettore  $n$  - dimensionale e  $\underline{b}$  vettore  $m$  - dimensionale. Regola di Cramer, teorema di Rouché - Capelli ed esistenza e unicità della soluzione  $\underline{x}$  del sistema, in relazione con il rango della matrice rettangolare  $A$  e della sua aumentata  $[A, \underline{b}]$ . Calcolo di autovalori e autovettori di una matrice  $A$ .

## 1.2 Spazi vettoriali

· **Definizione di spazio vettoriale**  $V$  sul campo  $\mathbb{F}$  (in generale, il campo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) come insieme di oggetti (vettori)  $\underline{v} \in V$  su cui sono definite due operazioni; un'operazione interna, la *somma*, che gode della proprietà associativa e commutativa, e un'operazione esterna, il *prodotto per uno scalare*  $\alpha \in \mathbb{F}$ , che gode della proprietà associativa e distributiva (rispetto alla somma di scalari e di vettori). Esistenza del vettore nullo  $\underline{0}$  e del vettore opposto  $-\underline{v}$ .

· **Esempi significativi di spazi vettoriali.** Spazi finito - dimensionali: lo spazio dei vettori ordinari in  $\mathbb{R}^3$  e quello dei quadrivettori in  $\mathbb{M}^4$ ; lo spazio  $\mathbb{R}$  dei reali; lo spazio  $\mathbb{R}^n$  delle  $n$ -ple di numeri reali; lo spazio  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi; lo spazio  $\mathbb{C}^n$  delle  $n$ -ple di numeri complessi; lo spazio  $Mat(n, \mathbb{R})$  ( $Mat(n, \mathbb{C})$ ) delle matrici  $n \times n$  di elementi reali (complessi); lo spazio  $Mat(m, n, \mathbb{R})$  ( $Mat(m, n, \mathbb{C})$ ) delle matrici  $m \times n$  di elementi reali (complessi); lo spazio  $\mathcal{P}_n$  dei polinomi di grado  $n - 1$  a coefficienti reali (complessi). Spazi infinito - dimensionali: lo spazio  $\mathbb{R}^\infty$  ( $\mathbb{C}^\infty$ ) delle successioni  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di numeri reali (complessi); lo spazio delle successioni finite, convergenti a zero, limitate di numeri reali (complessi); gli spazi di succes-

sioni  $l_p$ ,  $p > 0$ ; lo spazio  $C[a, b]$  delle funzioni continue sull'intervallo reale  $[a, b]$ ; lo spazio delle funzioni analitiche in un dominio  $\mathcal{D}$ ; gli spazi di funzioni  $L_p[a, b]$ ,  $p > 0$ . Lo spazio degli stati  $|\psi\rangle$  (kets) di un sistema fisico in Meccanica Quantistica (esso può essere finito o infinito dimensionale).

- **Dipendenza ed indipendenza lineare** di un insieme di vettori  $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^m \subset V$ . Dipendenza ed indipendenza lineare di un insieme di vettori  $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}^n$ , con  $\underline{v}^{(j)} = (v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_n^{(j)})^T$ ; relazione con il rango della matrice di Gram  $(v_i^{(j)})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Esempi.

- **Dimensione di uno spazio vettoriale**  $V$ . Esempi:  $\dim \mathbb{C}^n = \dim \mathcal{P}_n = n$ .  $\dim \mathbb{C}^\infty = \infty$ .  $\dim C[a, b] = \infty$

- **Base** (caso finito-dimensionale)  $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$  in  $V$ . Se  $\dim V = n < \infty$ , è un qualunque insieme di  $n$  vettori indipendenti. Sviluppo di un generico vettore  $\underline{v} \in V_n$  nella base:

$$\underline{v} \in V \Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{e}^{(i)}, \quad v_i \in \mathbb{R} \quad (v_i \in \mathbb{C}).$$

Coordinate (componenti)  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  del vettore  $\underline{v}$  rispetto alla base  $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$ . Se la dimensione è infinita, la definizione richiede l'introduzione delle proprietà metriche dello spazio e sarà data più avanti.

- Illustrazione dei concetti di dipendenza e indipendenza lineare, di dimensione e di base attraverso esempi significativi.

- **Isomorfismo tra spazi vettoriali**; esempio:  $\mathcal{P}_n$  è isomorfo a  $\mathbb{C}^n$ . Isomorfismo tra tutti gli spazi vettoriali reali (complessi) di dimensione finita  $n$ ; ruolo speciale giocato dallo spazio  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ).

- **Sottospazi vettoriali**. Definizione; esempi banali:  $V$  e  $\{0\}$ . Esempio non banale: l'involuppo (span) lineare di un insieme di vettori, come l'insieme dei vettori esprimibili come combinazione lineare finita dei vettori dell'insieme di partenza. Esempi significativi in  $\mathbb{R}^n$  e in  $\mathcal{P}_n$ . Sottospazi aventi intersezione nulla e loro somma diretta  $\oplus$ .  $\dim (V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ . Sottospazi complementari rispetto a  $V$ . Esempi significativi in  $\mathbb{R}^3$  e in  $\mathcal{P}_n$ .

- Coordinate di un vettore in diverse basi di  $V$ . **Trasformazioni di coordinate** (riassunto di risultati già noti).

### 1.3 Spazi normati

- **Spazi normati** Definizione di norma (lunghezza)  $\|\cdot\|$  di un vettore e di spazio normato. Esempi finito-dimensionali:

$\mathbb{C}_\infty^n := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ;  $\mathbb{C}_p^n := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ .  $1 \leq p < \infty$ , con

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad \|\underline{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \underline{x} \in \mathbb{C}^n$$

Diguaglianze di Young, Holder e Minkowski e dimostrazione che  $\|\cdot\|_p$  sono norme. Significato geometrico delle palle  $\|\underline{x}\|_{1,2,\infty} < 1$ , per  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ . Disuguaglianze tra norme finito-dimensionali  $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\underline{x}\|_\infty$ ,  $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$  e loro equivalenza.

Esempi di spazi normati infinito-dimensionali:

$(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ;  $(l_p, \|\cdot\|_p)$ .  $1 \leq p < \infty$ , con

$$\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad \|\underline{x}\|_p = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$C_\infty[a, b] = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ ,  $C_p[a, b] := (C_{[a,b]}, \|\cdot\|_p)$ , con

$$\|f(t)\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|, \quad \|f(t)\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Gli spazi di successioni  $l_p, p \geq 1, l_0, l_\infty, \mathbb{C}^\infty$ ; le inclusioni

$$l_f \subset l_1 \subset l_2 \subset \dots \subset l_0 \subset l_\infty \subset \mathbb{C}^\infty$$

e le disuguaglianze  $\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_p$ . Non equivalenza tra norme  $\infty$ -dimensionali.

Gli spazi funzionali  $L_p[a, b]$  delle funzioni tali che  $\|f(t)\|_p < \infty$ , e  $L_\infty$  delle funzioni limitate (tali che  $\|f\|_\infty < \infty$ ).

La disuguaglianza  $\|f\|_p \leq \sqrt[p]{b-a} \|f\|_\infty$ : la convergenza uniforme implica non solo la convergenza puntuale ma anche quella in media (in norma  $\|\cdot\|_p$ ).

## 1.4 Spazi metrici

· Definizione di distanza e spazi metrici normati e non. Spazi normati sono spazi metrici dotati della distanza  $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$ . Topologia indotta dalla metrica: sfera (palla) aperta e chiusa; insiemi aperti e chiusi. Punti di aderenza e chiusura di un insieme; punti di accumulazione. Esempi: i)  $l_p$  non è chiuso in  $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ; ii)  $l_0$  è chiuso in  $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ . Insiemi limitati e totalmente limitati (per i quali esiste un ricoprimento finito). Un insieme

totalmente limitato è limitato. Impossibilità di costruire successioni  $\{\underline{y}^{(n)}\}$  in insieme totalmente limitato tali che  $d(\underline{y}^{(n)}, \underline{y}^{(m)}) \geq \varepsilon, \forall \varepsilon$ . La palla unitaria in  $(l_p, \|\cdot\|_p)$  è limitata ma non totalmente limitata.

Successioni di Cauchy e spazi completi; spazi di Banach (spazi normati completi). Relazioni tra completezza e chiusura (senza dimostrazione). Spazi compatti e loro caratterizzazione come spazi completi e totalmente limitati (senza dimostrazione). Uso della completezza di  $\mathbb{C}$  per dimostrare la completezza di  $(l_2, \|\cdot\|_2)$ . Completezza dello spazio  $C_\infty[a, b] = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ , ma non degli spazi  $C_p[a, b] = (C[a, b], \|\cdot\|_p)$ .

Insiemi densi. Esempi:  $l_f$  è denso in  $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$  e in  $(l_p, \|\cdot\|_p)$ , ma non in  $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ . Lo spazio dei polinomi è denso in  $C[a, b]$  (primo th. di Weierstrass, senza dimostrazione) e lo spazio dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio delle funzioni continue con condizioni periodiche al bordo (secondo Th. di Weierstrass, senza dimostrazione), entrambi nella norma uniforme (e quindi nelle norme  $p$ ).

· **Insieme completo di vettori e base.**

Involuppo lineare (span) di un insieme di vettori. Esempi:  $\text{span}\{\underline{e}^{(n)}\}_1^N = \mathbb{C}^N, \underline{e}^{(n)} \in \mathbb{C}^N$ ;  $\text{span}\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} = l_f, \underline{e}^{(n)} \in \mathbb{C}^\infty$ ;  $\text{span}\{t^n\}_{n \in \mathbb{N}} =$  insieme dei polinomi;  $\text{span}\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}} =$  insieme dei polinomi trigonometrici. Insieme completo di vettori e base nel caso infinito-dimensionale. Esempi: l'insieme  $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}, e_j^{(n)} = \delta_{nj}$  è una base in  $(l_p, \|\cdot\|_p)$  e in  $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$ ; l'insieme  $\{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una base in  $(C_{[a,b]}, \|\cdot\|_\infty)$ , in  $C_p[a, b]$  e in  $L_p[a, b]$ . L'insieme dei monomi trigonometrici  $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una base (la base di Fourier) nello spazio  $V \equiv \{f \in C_2[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)\}$  rispetto alla norma uniforme (e quindi rispetto alla norma  $p$ ). Poiché  $V$  è denso in  $C_2[-\pi, \pi]$ , che è denso in  $L_2[-\pi, \pi]$  in norma 2, l'insieme dei monomi trigonometrici è una base in  $(L_2[-\pi, \pi], \|\cdot\|_2)$ .

Lo spazio  $(L_2[a, b], \|\cdot\|_2)$  come completamento di  $(C_2[a, b], \|\cdot\|_2)$  (usando il fatto che  $C_2[a, b]$  è denso nello spazio delle funzioni a gradini in  $[a, b]$  e che quest'ultimo è denso in  $L_2[a, b]$  (quest'ultima proprietà solo giustificata)).

Spazi separabili. Esempi significativi di insiemi densi numerabili e dei corrispondenti spazi separabili:  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}^n$  è denso in  $\mathbb{R}^n$ ; l'insieme delle successioni finite a coefficienti razionali è denso in  $l_p$ ; l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è denso in  $C_\infty[a, b], C_p[a, b], L_p[a, b]$ ; l'insieme dei polinomi trigonometrici a coefficienti razionali è denso in  $C_{inf}[-\pi, \pi], C_p[-\pi, \pi], L_p[-\pi, \pi]$ , con  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

## 1.5 Spazi euclidei

· **Spazio euclideo** come spazio vettoriale complesso (reale) dotato di *prodotto scalare*. Proprietà assiomatiche del prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz. Definizioni indotte di *norma (lunghezza)* di un vettore, di *distanza* tra due vettori e di *angolo* tra due vettori.

· Esempi di spazi euclidei: gli spazi finito-dimensionali:

$$\mathbb{R}_2^n, \mathbb{C}_2^n, \text{ con } (\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k;$$

$$\text{Mat}(n, \mathbb{C}), \text{ con } (A, B) := \text{tr}(A^\dagger, B);$$

$$\mathcal{P}_n \text{ con } (f, g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Esempi di spazi infinito-dimensionali separabili:

$$l_2, \text{ con } (\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\xi}_k \eta_k;$$

$$C_2[a, b], L_2[a, b] \text{ con } (f, g) = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

· Ortogonalità di due vettori. Indipendenza di un insieme di vettori ortogonali e osservazione che  $n$  vettori ortogonali costituiscono una base dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale  $E$ . Spazi euclidei separabili, esistenza di basi ortonormali e loro costruzione da un insieme numerabile e denso di vettori attraverso il procedimento di ortogonalizzazione di Gram - Schmidt. Minimi quadrati e proiezione ortogonale; coefficienti di Fourier e disuguaglianza di Bessel. Relazione di Parseval e base ortonormale. Spazi di Hilbert (euclidei e completi). Spazi di Hilbert separabili ed isomorfismo lineare ed euclideo tra lo spazio di Hilbert e  $l_2$  (lo spazio delle successioni dei coefficienti di Fourier).

## 1.6 Funzionali lineari e distribuzioni

· Definizione di funzionale lineare su uno spazio vettoriale  $V$ . Il funzionale “componente  $j$ -esima” di un vettore come esempio significativo. Lo spazio dei funzionali lineari è esso stesso uno spazio vettoriale  $V^*$ , detto il duale di  $V$ . Base duale. Espressione generale di un funzionale lineare  $f$  sul generico vettore  $\underline{v} \in V$  nel caso discreto e continuo:

$$f(\underline{v}) = \sum_k f_k v_k, \quad F(\varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx.$$

Funzionali regolari e singolari; il funzionale “delta di Dirac”  $\delta_{x_0}$ , definito dalla  $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$ .

· Continuità, limitatezza e norma di un funzionale lineare; esempi significativi:

$$\begin{aligned}
 f(\underline{x}) = \sum_k f_k x_k, & \Rightarrow \begin{cases} \|f\| = \|f\|_1 & \text{se } \underline{x} \in l_\infty, \\ \|f\| = \|f\|_\infty & \text{se } \underline{x} \in l_1, \\ \|f\| = \|f\|_q & \text{se } \underline{x} \in l_p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \end{cases} \\
 F(\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx, & \Rightarrow \begin{cases} \|F\| = \|f\|_1 & \text{se } \varphi \in L_\infty[a, b], \\ \|F\| = \|f\|_\infty & \text{se } \varphi \in L_1[a, b], \\ \|F\| = \|f\|_q & \text{se } \varphi \in L_p[a, b], \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \end{cases} \\
 \|\delta_{x_0}\| = 1, \text{ se } \varphi \in C_\infty[a, b]; & \quad \delta_{x_0} \text{ non limitato se } \varphi \in C_2[a, b]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Convergenza forte (in norma) e debole di un funzionale lineare. Il lemma di Riemann-Lebesgue e la dimostrazione che i funzionali  $C_n, S_n$ :

$$C_n(\varphi) = \int_a^b \cos(nx)\varphi(x)dx, \quad S_n(\varphi) = \int_a^b \sin(nx)\varphi(x)dx$$

convergono a 0 in senso debole, ma non forte. Formalizzazione dei concetti di punto materiale, carica puntiforme e forza impulsiva attraverso la funzione  $\delta(x)$  di Dirac. Successioni di funzionali  $\delta_{x_0}^{(n)}$ :

$$\delta_{x_0}^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} np(n(x - x_0))\varphi(x)dx, \quad p(x) = p(-x), \quad \int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$$

che convergono al funzionale  $\delta_{x_0}$  in senso debole, ma non in senso forte. Esempi: la lorenziana  $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , la gaussiana  $p(x) = e^{-x^2}/\pi$  e la funzione  $p(x) = \frac{\sin(x)}{\pi x}$  (in quest'ultimo caso la funzione di prova deve soddisfare alla condizione di Dini).

La derivata di una distribuzione e la funzione gradino  $H(x)$  di Heaviside. Derivata di funzione discontinua.

## 1.7 Serie e Trasformata di Fourier

La serie di Fourier troncata come proiezione ortogonale di un elemento di  $L_2$  su un sottospazio finito dimensionale; la base di Fourier come sistema ortonormale e completo in  $L_2$ . Disuguaglianza di Bessel e relazione di Parseval e convergenza in media quadratica. Proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier: nucleo di Dirichlet e condizione di Dini. Convergenza della serie in un punto di discontinuità semplice. Sviluppo in

serie di Fourier di funzioni elementari. [[Regolarità della funzione e convergenza a zero dei coefficienti della serie]].

Trasformata di Fourier (TF) come limite continuo della serie di Fourier. Proprietà di convergenza puntuale ed uniforme dell'antitrasformata di Fourier e condizione di Dini. Convergenza dell'antitrasformata in un punto di discontinuità semplice. Trasformata di Fourier di funzioni elementari e di distribuzioni. Relazione di Parseval-Plancherel. Significato fisico della trasformata di Fourier. Proprietà della trasformata di Fourier: [[uniforme limitatezza, convergenza a zero per  $|k| \rightarrow \infty$  e continuità, se  $f \in L_1(\mathbb{R})$ ]]; traslazione e derivazione nello spazio di Fourier. Prodotto di convoluzione, suo significato fisico e teorema di convoluzione. [[Uso della TF per risolvere equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti. Esempi: l'equazione di Schrödinger per la particella libera e l'equazione del calore]].

## 1.8 Operatori lineari

· Il problema della risoluzione dell'equazione  $\hat{A}\underline{x} = \underline{y}$ , dove  $\hat{A}$  è un operatore assegnato e  $\underline{y}$  è un vettore assegnato di un certo spazio vettoriale.

· *Operatori su spazi di dimensione finita  $n$  (riepilogo di fatti noti)*. Rappresentazione, rispetto ad una base di  $X$ , dell'operatore  $\hat{A} : X \rightarrow Y$  ( $\dim X = m$ ,  $\dim Y = n$ ) come matrice rettangolare ( $n \times m$ ) (quadrata se  $X = Y$ ). Isomorfismo tra lo spazio degli operatori  $\hat{A} : X \rightarrow X$  e le matrici ( $n \times n$ ); isomorfismo tra lo spazio degli operatori  $\hat{A} : X \rightarrow Y$  e le matrici ( $n \times m$ ). Prodotto di operatori come prodotto di matrici; trasformazione di un vettore come prodotto di una matrice per un vettore colonna.  $\dim \mathcal{R}(\hat{A}) + \dim \mathcal{N}(\hat{A}) = \dim X = n$ . Rango dell'operatore  $\hat{A}$  (e della matrice  $A$  che lo rappresenta) come dimensione di  $\mathcal{R}(\hat{A})$ . Cambiamento di base. Rappresentazioni di operatori lineari in diverse basi di  $X$ . Due matrici  $A'$  e  $A$  sono le rappresentazioni in basi diverse dello stesso operatore  $\hat{A}$  se e solo se sono legate dalla trasformazione di similitudine  $A' = T^{-1}AT$ , dove  $T$  è la matrice di trasformazione delle corrispondenti basi:  $\underline{e}'^{(j)} = \sum_{k=1}^n T_{kj} \underline{e}^{(k)}$ .

*Operatori lineari  $\hat{A}$  tra gli spazi vettoriali normati  $X$  e  $Y$ :  $\hat{A} : X \rightarrow Y$ .* L'insieme degli operatori lineari è uno spazio vettoriale, con  $(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\underline{x} = \alpha(\hat{A}\underline{x}) + \beta(\hat{B}\underline{x})$ ,  $\forall \underline{x} \in X$ .

· Dominio  $\mathcal{D}(\hat{A})$ , range (codominio, immagine)  $\mathcal{R}(\hat{A})$  e nucleo (Ker)  $\mathcal{N}(\hat{A})$  (Ker ( $\hat{A}$ )) dell'operatore  $\hat{A}$ . Inverso di un operatore; esempi: gli operatori



$\hat{E}^\pm$ .

· Esempi importanti di operatori lineari: le matrici  $Mat(n, \mathbb{C})$  su  $\mathbb{C}^n$ ; i funzionali lineari; le traslazioni  $\hat{E}^\pm$  su  $l_2$ , la moltiplicazione per una funzione, la derivazione, l'integrazione, la traslazione e gli operatori integrali di Fredholm e Volterra su  $C_\infty[a, b]$  e su  $L_2[a, b]$ .

Rappresentazione matriciale, rispetto ad opportune basi, di operatori finito e infinito dimensionali; esempi:  $\hat{E}^\pm$ , la derivazione, l'integrazione e la traslazione.

· Equivalenza tra le nozioni di continuità in  $\underline{0}$ , in  $X$  e limitatezza di un operatore lineare. Norma di un operatore lineare. Esempi di operatori limitati: le matrici su  $\mathbb{C}^n$ , le traslazioni su  $l_2$ , la moltiplicazione per  $x$  in  $C_\infty[a, b]$  e in  $L_2[a, b]$ , gli operatori di Fredholm in  $C_\infty[a, b]$  e in  $L_2[a, b]$  e calcolo delle loro norme. Esempi di operatori non limitati: la moltiplicazione per  $x$  in  $C_\infty(\mathbb{R})$  ( $L_2(\mathbb{R})$ ) e gli operatori di derivazione.

· Somma e prodotto di operatori lineari; se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sono operatori lineari limitati, la loro somma e prodotto sono operatori lineari limitati. Completezza dello spazio degli operatori  $\hat{A} : X \rightarrow Y$ , se  $Y$  è completo. Funzione di operatore  $f(\hat{A})$  con esempi. Funzione di matrice  $f(A)$ . Calcolo di  $f(A)$  attraverso lo sviluppo in serie e, se  $A$  è diagonalizzabile, attraverso la formula  $f(A) = T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) T^{-1}$ .

· Esempio importante di funzione di operatore:  $f(\hat{A}) = (\hat{1} - \hat{A})^{-1}$  e la soluzione  $\underline{x} \in X$  dell'equazione lineare  $(\hat{1} - \hat{A})\underline{x} = \underline{y}$ , con  $\underline{y} \in X$  termine noto e  $X$  spazio di Banach. Applicazione alla soluzione di equazioni integrali di Fredholm; serie di Neumann e sua interpretazione perturbativa. Esempi.

· *L'aggiunto di un operatore*. Definizione di aggiunto (hermitiano coniugato)  $\hat{A}^\dagger$  dell'operatore  $\hat{A}$ ; sua unicità. Involutività dell'operazione di coniugazione hermitiana. La rappresentazione  $A^\dagger$  dell'operatore  $\hat{A}^\dagger$  in una base ortonormale è la matrice hermitiana coniugata della matrice  $A$  che rappresenta  $\hat{A}$  nella stessa base:  $(A^\dagger)_{ij} = \bar{A}_{ji}$ . L'aggiunto di una combinazione lineare di operatori, del prodotto di operatori e dell'inverso di un operatore.

· *Operatore autoaggiunto* (hermitiano), come operatore invariante rispetto all'operazione di coniugazione hermitiana:  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$  e sua rappresentazione, rispetto a basi ortonormali, in termini di matrici hermitiane (cioè tali che:  $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ ). CNES affinché un operatore sia hermitiano è che la sua forma quadratica  $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})$  (detta, in questo caso, forma hermitiana) sia reale  $\forall \underline{x} \in E$ . Esempi di operatori differenziali auto-aggiunti in  $L_2[a, b]$  con condizioni periodiche al bordo, e in  $L_2(\mathbb{R})$ : gli operatori quantità di moto, energia cinetica e Schrödinger.

· *Operatori unitari*  $\hat{U}$ , come operatori invertibili tali che  $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ . La rappresentazione matriciale  $U$  di  $\hat{U}$  è data da matrici unitarie:  $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ ,

$U^\dagger = U^{-1}$  (matrici ortogonali, nel caso reale). Proprietà di operatori unitari: 1) un operatore  $\hat{U}$  è unitario se e solo se: i) lascia invariato il prodotto scalare tra due generici vettori (e quindi lascia invariati la norma di un vettore e l'angolo tra due vettori); ii) trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. Nel caso finito-dimensionale, la matrice che lo rappresenta è tale che le sue colonne (e le sue righe) definiscono una base di vettori ortonormali. Se  $\hat{A}$  è autoaggiunto, allora  $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger$  è autoaggiunto. Esempi notevoli di operatori unitari: le rotazioni in  $\mathbb{E}^3$ , la traslazione in  $C(\mathbb{R})$ ,  $\hat{E}^\pm$  e la trasformata di Fourier.

· *Operatori di proiezione e proiettori ortogonali* Proiettore di un generico vettore sul sottospazio  $M \subset X$  lungo lo spazio complementare  $N$ . Idempotenza. Proiettori ortogonali

$$\hat{P} = \sum_{k=1}^N \underline{e}^{(k)} \underline{e}^{(k)\dagger} = \sum_{k=1}^N |e^{(k)}\rangle \langle e^{(k)}| \quad (2)$$

con  $\{(\underline{e}^{(j)}, \underline{e}^{(k)}) = \delta_{jk}\}$ , sul sottospazio  $S = \text{span}\{(\underline{e}^{(j)})_1^N\}$ , finito o infinito dimensionale. Il proiettore ortogonale, oltre a essere idempotente:  $\hat{P}^2 = \hat{P}$ , è anche hermitiano positivo.

· *Operatori di rango finito.* Operatore di rango finito (diadico):

$$\hat{A}_m = \sum_{k=1}^m \underline{a}_k \underline{b}_k^\dagger = \sum_{k=1}^m |a_k\rangle \langle b_k|, \quad \underline{a}_k, \underline{b}_k \in E$$

su uno spazio euclideo  $E$  finito o infinito-dimensionale. Dominio, nucleo e immagine; rango finito di tale operatore.

· L'equazione  $(\hat{1} - \hat{K}_n)x = y$ , con  $\hat{K}_n$  operatore di rango finito (diadico), è equivalente ad un sistema lineare di equazioni algebriche. Quindi, per essa vale, come nel caso finito-dimensionale, il teorema dell'alternativa: *L'equazione  $(\hat{1} - \hat{K}_n)x = y$  ammette soluzioni se e solo se  $y$  è ortogonale ad ogni soluzione  $\phi$  di  $\hat{K}_n^\dagger \phi = \phi$ :  $(\phi, y) = 0$ .*

· *Operatori compatti.* Operatore compatto come limite, in norma, di successioni di operatori di rango finito. Esempi includenti l'operatore integrale di Fredholm. Se  $\hat{K}$  è compatto, allora l'equazione  $(\hat{1} - \hat{K})x = y$  è riconducibile ad un'equazione del tipo  $(\hat{1} - \hat{H}_n)x = \tilde{y}$ , dove  $\hat{H}_n$  è un operatore di rango finito; quindi, per l'equazione  $(\hat{1} - \hat{K})x = y$  vale, come nel caso finito-dimensionale, il teorema dell'alternativa: *L'equazione  $(\hat{1} - \hat{K})x = y$  ammette soluzioni se e solo se  $y$  è ortogonale ad ogni soluzione  $\phi$  di  $\hat{K}^\dagger \phi = \phi$ :  $(\phi, y) = 0$ .*

### 1.8.1 Teoria spettrale degli operatori lineari

Riepilogo della teoria spettrale di operatori finito-dimensionali ed esistenza del solo spettro discreto.

Operatori infinito-dimensionali. Operatore risolvente e insieme risolvente. Lo spettro come unione di spettro discreto, continuo e residuo. Proprietà dell'insieme risolvente e dello spettro di operatori limitati. Lo spettro di operatori autoaggiunti e di operatori compatti (cenni). Esempi significativi: lo spettro dell'operatore quantità di moto ed energia cinetica, in  $L_2[a, b]$  (con condizioni al bordo opportune) e in  $L_2(\mathbb{R})$ . Lo spettro degli operatori di traslazione  $\hat{E}^\pm$  in  $l_2$ . Lo spettro degli operatori di rango finito. Lo spettro dell'operatore trasformata di Fourier.

### 1.8.2 Funzione di Green

Definizione di *funzione di Green*  $G(x, x')$  di un operatore e suo significato fisico. La *funzione di Green*  $G(x, x')$  dell'equazione  $(\hat{L} - \lambda \hat{1})G(x, x') = \delta(x - x')$  come nucleo dell'operatore integrale risolvente  $R_\lambda(\hat{L})$ .

Uso della funzione di Green sia per trovare la rappresentazione integrale della soluzione di problemi al contorno per equazioni differenziali del primo e secondo ordine, sia per convertirle in equazioni integrali, più semplici da studiare dal punto di vista matematico. Calcolo della funzione di Green per operatori differenziali del prim'ordine. Uso della Trasformata di Fourier per costruire la *funzione di Green fondamentale*  $G(x - x')$  di operatori differenziali a coefficienti costanti. Funzioni di Green avanzata, ritardata e di Feynmann. Uso della funzione di Green avanzata per studiare esistenza ed unicità delle autofunzioni dello spettro continuo per l'equazione di Schrödinger stazionaria (cenni).

## 2 TESTI CONSIGLIATI

Gli argomenti svolti in questo corso sono un sottoinsieme di quelli contenuti nel libro (attenzione agli errori di stampa!):

1) C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, "Metodi Matematici della Fisica", Carocci Editore, Roma, 2002.

Si consiglia anche:

2) F. Calogero, "Metodi Matematici della Fisica", Dispense Istituto di Fisica, Universita' di Roma, 1975. Materiale reperibile su rete all'indirizzo:  
[http://www.phys.uniroma1.it/web\\_disp/d1/index.html](http://www.phys.uniroma1.it/web_disp/d1/index.html)

Inoltre, per ulteriori approfondimenti:

3) S. Fomin, A. Kolmogorov, "Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale", MIR 1980

4) F. Cesi, "Rudimenti di analisi infinito dimensionale", dispense disponibili su rete all'indirizzo:  
<http://zephyrus.roma1.infn.it/cesi/modelli-08/outline-s.pdf>

5) B. Friedman, "Principles and techniques of applied mathematics", Dover Publications, New York 1990.

6) I. M. Gel'fand, "Lectures on Linear Algebra", Dover Publications, NY, 1989.

7) G. Fano, "Metodi matematici della Meccanica Quantistica", Zanichelli, Bologna, 1967.

8) V. Smirnov, "Corso di Matematica Superiore", Volume II, Editori Riuniti, 1977.

9) I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, "Generalized functions", Vol.1, Academic Press, 1964.

10) P. Dennerly, A. Krzewicki, "Mathematics for Physicists", Harper and Row, 1967.

### 3 COMPITI D'ESONERO E SCRITTI PROPOSTI

#### 3.1 3<sup>o</sup> Esonero del 26/05/08; AA 07-08

1) ([1]+[4]) i) Determinare per quale valore del parametro  $a$  i tre polinomi di secondo grado  $\{a - x, x(1 - x), 1 - x^2\}$  sono dipendenti.

ii) Mostrare che  $\{1, x, x^2\}$  è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo  $(0, 1)$  e ortogonalizzarla.

R. i)  $a = 1$ . ii)  $e_1 = 1, e_2 = x - 1/2, e_3 = x^2 - x + 1/6$ .

2) [1]+[3]+[2] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato)

Dimostrare che lo spazio  $l_2$  è uno spazio i) euclideo, ii) completo e iii) separabile. (Per il punto ii), si faccia uso della completezza di  $\mathbb{C}$ )

3) ([1]+[3]) i) Dare la definizione di insieme  $A$  denso nell'insieme  $B$ . ii) Mostrare che lo spazio delle successioni che consistono in un numero finito di elementi è denso nello spazio  $l_2$ .

4) ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = H(4 - x^2)$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie nell'intervallo  $[-2\pi, 2\pi]$ . iii) Utilizzare la relazione

di Parseval per trovare il valore della somma  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2n}{2n}\right)^2$ .

R. i)  $H(4 - x^2) = \frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{2n} \cos nx\right)$ ; iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2n}{2n}\right)^2 = \frac{\pi-2}{4}$ .

5) [6] Studiare la convergenza debole e forte delle successioni di funzionali  $\{f^{(n)}\}_1^{\infty}$  tali che:

$$f^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n^j e^{-n|x|} \varphi(x) dx$$

nei tre casi  $j = 0, 1, 2$  (scegliere a piacere lo spazio delle funzioni di prova).

R. Conv debole:  $j = 0 : 0, j = 1 : 2\delta_0, j = 2 : \infty$

6) ([3]+[3]) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  le seguenti funzioni appartengono a  $L_1$  e  $L_2$  negli intervalli indicati.

$$f(x) = \frac{e^{-x} \sinh \alpha x}{|x^2 - 9|^\alpha}, [0, \infty); \quad g(x) = \frac{1}{|x^2 - 4|^\alpha |x - \alpha + 1/3|^{1/2}}, [0, \infty).$$

R.  $f(x) \in L_1 : -1 < \alpha < 1, f(x) \in L_2 : -1 < \alpha < 1/2; g(x) \in L_1 : 1/4 < \alpha < 1, g(x) \in L_2 : 0 < \alpha < 1/3$

7) ([4]) Calcolare

$$\int_{-n-1/2}^{n+1/2} \delta(\sin \pi x) e^{3ix} dx$$

facendo anche uso della somma  $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ .

$$\text{R. } \frac{1}{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{3ik} = \frac{\sin 3(n+1/2)}{\pi \sin(3/2)}$$

### 3.2 4<sup>0</sup> Esonero del 20/06/08; AA 07-08

1) [5] Sia  $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$  una base ortonormale di  $\mathbb{C}^3$ , se l'operatore  $\hat{A}$  agisce sulla base nel seguente modo:  $\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}$ ,  $\hat{A}\underline{e}^{(2)} = \underline{e}^{(2)}$ ,  $\hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}$ , i) mostrare che  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ ; ii) trovare autovalori, autovettori e diagonalizzare l'operatore attraverso una trasformazione unitaria. (autovalori:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ ; autovettori:  $\underline{v}^{(1)} = (1/\sqrt{2})(1, 0, -1)^T$ ,  $\underline{v}^{(2)} = (0, 1, 0)^T$ ,  $\underline{v}^{(3)} = (1/\sqrt{2})(1, 0, 1)^T$ ,  $U = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$ ).

2) [5] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato) Sia  $\hat{A} : H \rightarrow H$  un operatore limitato. Mostrare che l'insieme risolvente  $\rho(\hat{A})$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$ , mentre lo spettro  $\sigma(\hat{A})$  è un insieme chiuso contenuto nel disco  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|\hat{A}\|\}$ .

3) ([5]) Un oscillatore armonico smorzato, inizialmente a riposo, è soggetto ad un impulso  $I$  che agisce all'istante  $t'$ . Determinare l'evoluzione dell'oscillatore per  $t > t'$ . Si ricordi che un oscillatore armonico smorzato, non soggetto ad altre forze, è caratterizzato dall'equazione  $(d^2/dt^2 + 2\gamma d/dt + \omega_0^2)x(t) = 0$ ,  $\gamma, \omega_0 > 0$ .

$$\omega_0 > \gamma : x(t) = G(t, t') = I \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} H(t-t')$$

$$\omega_0 < \gamma : x(t) = G(t, t') = -\frac{I}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}(t-t') e^{-\gamma(t-t')} H(t-t')$$

4) ([3]+[3]) Dato l'operatore  $\hat{A} = -id/dx + x$ , agente sulla varietà lineare, densa in  $L_2[-\pi, \pi]$ , delle funzioni  $f$  tali che  $\hat{A}f \in L_2[-\pi, \pi]$ , con  $f(-\pi) = f(\pi)$ , i) mostrare che è autoaggiunto in tale spazio e determinarne autovalori e autofunzioni (sempre in tale spazio). ii) Mostrare che è autoaggiunto anche in  $L_2(\mathbb{R})$  e determinarne lo spettro in  $L_2(\mathbb{R})$ . (R. i) spettro discreto:  $\lambda_n = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\psi_n(x) = e^{i\lambda_n x - ix^2/2}$ ; ii) spettro continuo  $\lambda \in \mathbb{R}$  con autofunzioni limitate  $\psi(x, \lambda) = e^{i\lambda x - ix^2/2}$ ).

5) ([2]+[5]) L'operatore  $\hat{A} : l_2 \rightarrow l_2$  è definito da  $(\hat{A}x)_n = x_{n+1} + x_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ ,  $x_0 = 0$ . Mostrare che: i)  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ ; ii)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \{-2 \leq \lambda \leq 2\}$  (sugg.: cercare la soluzione dell'equazione agli autovalori nella forma  $x_n = z^n$  ed esprimere  $z$  in funzione di  $\lambda$ ; infine ricordare che  $x_0 = 0$ ).

(R.  $x_n = z^n \Rightarrow z = z_\pm = \frac{\lambda \pm i\sqrt{4-\lambda^2}}{2} = e^{\pm i\theta(\lambda)}$ ,  $|z_\pm| = 1$ ,  $\bar{z}_- = z_+$ , se  $-2 \leq \lambda \leq 2$ . Allora  $x_n = \alpha z_+^n + \beta z_-^n$ ;  $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = \alpha(z_+^n - z_-^n) = C \sin \theta(\lambda)$ ,  $-2 \leq \lambda \leq 2$ )

6) ([3]) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

caratterizzare  $\text{Ker}(A)$ ,  $\mathcal{R}(A)$  e determinare la dimensione e vettori di base di tali spazi.

(R.  $\text{Ker}(A) = \text{span}(\{(-i, 1, i - 2)\})$ ,  $\dim \text{Ker} = 1$ ;  $\text{Im}(A) = \{\underline{y} \in \mathbb{C}^3; y_3 = iy_1\}$   
 $= \text{span}(\{(1, 0, i), (0, 1, 0)\})$ ;  $\dim \text{Im} = 2$ )

7) ([2]+[3]) Dato l'operatore di Fredholm

$$\hat{K}f(t) := \int_{-1}^1 (t-s)f(s)ds,$$

i) determinare autovalori e autofunzioni di  $\hat{K}$ . iii) Determinare le condizioni sul parametro  $\mu \in \mathbb{C}$  sotto le quali l'equazione di Fredholm  $x(t) - \mu\hat{K}x(t) = y(t)$  ammette un'unica soluzione  $x(t)$ , per ogni termine noto  $y(t) \in L_2[-1, 1]$ , e ottenere tale soluzione.

(R. i)  $\lambda_{\pm} = \pm 2i/\sqrt{3}$ ,  $\psi_{\pm}(t) = \mp i\sqrt{3}t + 1$ . ii) se  $\mu = 1/\lambda \neq 1/\lambda_{\pm}$ , esiste unica la soluzione  $x(t) = \frac{\lambda y_1 - 2y_2}{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)} - \frac{\lambda y_2 - 2y_1/3}{(\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)} + y(t)$ , con  $y_1 = \int_{-1}^1 y(t)dt$ ,  $y_2 = \int_{-1}^1 ty(t)dt$ ).

### 3.3 Scritto (seconda parte) del 30/06/08; AA 07-08

1) ([1]+[3]) i) Determinare per quale valore del parametro  $a$  i tre polinomi di secondo grado  $\{a - x, x(1 - x), 1 + x^2\}$  sono dipendenti.

ii) Mostrare che  $\{1, x, x^2\}$  è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo  $[-1, 1]$  e ortonormalizzarla.

R. i)  $a = 1$ ; ii)  $e_1(x) = 1/\sqrt{2}$ ,  $e_2(x) = \sqrt{3/2}x$ ,  $e_3(x) = 3/2\sqrt{5/2}(x^2 - 1/3)$

2) [5] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato) Dimostrare il seguente teorema (delle contrazioni). Sia  $M$  uno spazio metrico completo e  $F : S \rightarrow S$  una contrazione ; allora i) esiste unico il punto fisso  $\bar{x}$  di  $M$ ; ii) se  $\{x_n\}_0^{\infty}$  e la successione di  $M$  definita da  $x_n := F(x_{n-1})$ ,  $x_0 \in M$ , allora  $x_n \rightarrow \bar{x}$ , per  $n \rightarrow \infty$ .

3) ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = \text{sgn}(x)$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval

per trovare il valore della somma  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

R. vedere esercizio materiale corso.

4) ([4]) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la seguente funzione  $f$  appartiene a  $L_1[0, \infty)$  e  $L_2[0, \infty)$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \alpha + 1/4||x^2 - 3|^\alpha}}.$$

R.  $L_1[0, \infty)$ :  $1/4 < \alpha < 1$ ;  $L_2[0, \infty)$ :  $0 < \alpha < 1/4$

5) ([5]) Calcolare

$$I_1 = \int_{-1}^1 \delta(\cos \pi x)(x^2 + 1)dx, \quad I_2 = \int_{-1}^1 \delta'(\cos \pi x)(x^2 + 1)dx.$$

R.  $I_1 = 5/(2\pi)$ ,  $I_2 = 0$

6) ([1]+[3]) Sia  $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$  una base ortonormale di  $\mathbb{C}^3$ , se l'operatore  $\hat{A}$  agisce sulla base nel seguente modo:  $\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{0}$ ,  $\hat{A}\underline{e}^{(2)} = (1+i)\underline{e}^{(3)}$ ,  $\hat{A}\underline{e}^{(3)} = (1-i)\underline{e}^{(2)}$ , i) mostrare che  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ ; ii) trovare autovalori, autovettori e diagonalizzare l'operatore attraverso una trasformazione unitaria.

R.  $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = \sqrt{2}$ ,  $\underline{v}^{(1)} = (1/\sqrt{5})(0, 1-i, -\sqrt{2})^T$ ,  $\underline{v}^{(2)} = (1, 0, 0)^T$ ,  $\underline{v}^{(3)} = (1/\sqrt{5})(0, 1-i, \sqrt{2})^T$ ,  $U = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$

7) ([3]+[3]) Dato l'operatore  $\hat{A} = -d^2/dx^2$ , agente sulla varietà lineare, densa in  $L_2[a, b]$ , delle funzioni  $f$  tali che  $\hat{A}f \in L_2[a, b]$ , con  $f(a) = f(b) = 0$ , i) determinarne autovalori e autofunzioni in tale spazio. ii) Determinarne lo spettro anche in  $L_2(\mathbb{R})$ .

R. i)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p = \{\lambda_n = \pi^2 n^2 (b-a)^{-2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\psi_n(x) = \sin(\lambda_n(x-a))$ ; ii)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}^+$ ,  $\psi(x, \lambda) = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$ .

### 3.4 Scritto (seconda parte) del 15/09/08; AA 07-08

1) ([1.5]+[2.5]) i) Dare la definizione di dipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e determinare per quale valore del parametro  $\alpha$  i tre polinomi di secondo grado  $\{\alpha - 2x, x(1-x), 1+x^2\}$  sono dipendenti. ii) Mostrare che  $\{1, x, x^2\}$  è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo  $[-1, 1]$  e ortonormalizzarla.

2) [6] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato)

Dimostrare che: 1) se  $\hat{A}$  è un operatore autoaggiunto, i) i suoi autovalori sono reali; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali. 2) Se  $\hat{U}$  è un operatore unitario, i) i suoi autovalori hanno modulo 1; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali.



**3)** ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = e^{2x}$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$ .

**4)** ([2]+[2.5]) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la seguente funzione  $f$  appartiene a  $L_1[0, \infty)$  e  $L_2[0, \infty)$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \alpha + \frac{1}{3}| |x + 2|^\alpha}}.$$

**5)** ([2.5]+[2.5]) i) Calcolare

$$I_1 = \int_{-2}^2 \delta(\cos \pi x)(x^2 + 1)^{-1} dx.$$

ii) Dimostrare che, nel senso delle distribuzioni

$$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x). \quad (4)$$

**6)** ([2]+[2]) i) Determinare sotto quale condizione sui numeri complessi  $a$  e  $b$  la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (5)$$

è unitaria e, sotto questa condizione, ii) calcolarne autovalori e autovettori.

**7)** ([2.5]+[3.5]) Dato l'operatore di traslazione  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ :

$$\hat{E}^+(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2, \quad (6)$$

i) calcolare  $(\hat{E}^+)^{\dagger}$ ; ii) determinare lo spettro di  $\hat{E}^+$ .

### 3.5 3<sup>0</sup> Esonero del 04/06/09; AA 08-09

**1)** ([1]+[3]) Dati i vettori  $\underline{v}^{(1)} = (0, 0, 1)$ ,  $\underline{v}^{(2)} = (1, i, 1)$ ,  $\underline{v}^{(3)} = (1, -i, 1)$ , a) mostrare che sono indipendenti e b) ortonormalizzarli.

R: i)  $\det(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)}) = -2i \neq 0$ , ii)  $\underline{e}^{(1)} = (0, 0, 1)$ ,  $\underline{e}^{(2)} = (1/\sqrt{2})(1, i, 0)$ ,  $\underline{e}^{(3)} = (1/\sqrt{2})(1, -i, 0)$

**2)** ([1]+[4]) i) Dare la definizione di insieme  $A$  denso in  $B$ . ii) Dopo aver definito gli spazi  $l_f, l_0, l_\infty$ , mostrare che  $l_f$  è denso in  $\{l_0, \|\cdot\|_\infty\}$ , ma non è denso in  $\{l_\infty, \|\cdot\|_\infty\}$ .

**3)** ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = |x|$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .

R: i)  $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$ , iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4$

**4)** ([4]) Dopo aver definito lo spazio  $L_1(\mathbb{R})$ , determinare i valori di  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f(x) = \frac{1}{|x^2-1|^a \sqrt{|1+x|}}$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$ .

R:  $1/4 < a < 1/2$

**5)** ([1.5]+[2.5]+[2]) Si consideri la successione di funzioni  $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . i) A cosa converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ ? ii) A cosa converge debolmente in  $\mathbb{R}$ ? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma  $\|\cdot\|_1$  (o, a scelta, nella norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ ) in  $\mathbb{R}$ , e quindi non converge fortemente in tale norma.

R:  $f_n(x) \rightarrow 0$ ,  $x \neq 0$ ;  $f_n(x) \rightarrow \infty$ ,  $x = 0$  puntualmente.  $f_n(x) \rightarrow \delta(x)$  in senso debole.  $\|f_n(x) - f_m(x)\|_{\infty} = |n - m|/2 \rightarrow \infty$  (se, ad es.,  $m = n/2$ );  $\|f_n(x) - f_m(x)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |e^{-y^2} - e^{-y^2/4}| dy = O(1)$ , (se, ad es.,  $m = n/2$ ). Quindi non sono successioni di Cauchy e quindi non convergono.

**6)** ([4]) Calcolare l'integrale  $I = \int_1^{\infty} \delta(\sin(\pi x)) 3^{-x} dx$ .

R:  $I = (3\pi)^{-1}$

**7)** ([6], **esercizio obbligatorio** ([-3] se non affrontato)) Sia  $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$  un insieme finito di vettori ortonormali dello spazio euclideo  $E$  e sia  $S_N = \text{span}(\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N)$ . Se  $\underline{x} \in E$  è il generico vettore di  $E$ , i) caratterizzare il vettore  $\underline{x}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \xi_i e^{(i)}$  di  $S_N$  che meglio approssima  $\underline{x}$ ; ii) mostrare che tale vettore  $\underline{x}^{(N)}$  è la "proiezione ortogonale" di  $\underline{x}$  su  $S_N$ , iii) mostrare che vale la disuguaglianza di Bessel:  $(\underline{x}, \underline{x}) \geq \sum_{i=1}^N |\xi_i|^2$ .

### 3.6 <sup>40</sup> Esonero del 02/07/09; AA 08-09

**1)** ([5]) Dato l'operatore  $\hat{E}^- : l_2 \rightarrow l_2$ , definito dalla  $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ , determinare i)  $\text{Ker}(\hat{E}^-)$ ,  $\mathcal{R}(\hat{E}^-)$ ; ii) il suo aggiunto  $(\hat{E}^-)^{\dagger}$ ; iii) sotto quali condizioni  $\hat{E}^-$  è invertibile, calcolandone l'inverso.

R.  $\text{Ker}(\hat{E}^-) = \{0\}$ ,  $\mathcal{R}(\hat{E}^-) = \{y \in l_2 : y_1 = 0\}$ ,  $(\hat{E}^-)^{\dagger} = \hat{E}^+$ , invertibile se  $\hat{E}^- : l_2 \rightarrow \mathcal{R}(\hat{E}^-)$ ,  $(\hat{E}^-)^{-1} = \hat{E}^+$ .

**2)** ([2]+[1]+[2]) i) Mostrare che, se  $\hat{A} : H \rightarrow H$  è autoaggiunto, allora

$(\underline{x}, \hat{A}\underline{x}) \in \mathbb{R}, \forall \underline{x} \in H$ . ii) Sia  $\hat{B} : H \rightarrow H$ ; mostrare che l'operatore  $\hat{B}^\dagger \hat{B}$  è autoaggiunto e che  $(\underline{x}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{x}) \geq 0, \forall \underline{x} \in H$ . iii) Mostrare che, se  $\lambda$  è autovalore di  $\hat{B}^\dagger \hat{B}$ , allora  $\lambda \geq 0$ .

R. ii)  $(\underline{x}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{x}) = (\hat{B}\underline{x}, \hat{B}\underline{x}) \geq 0$ ; iii) Se  $\hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{v} = \lambda \underline{v} \Rightarrow \lambda(\underline{v}, \underline{v}) = (\underline{v}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{v}) = (\hat{B}\underline{v}, \hat{B}\underline{v})$ . Quindi  $\lambda = (\hat{B}\underline{v}, \hat{B}\underline{v})/(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$

**3)** ([4]) La risposta  $R(x)$  di un sistema lineare ad una forza impulsiva è data dal seguente integrale di convoluzione  $R(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x-x')I(x')dx'$ , nel quale le funzioni  $G(x)$  e  $I(x)$  hanno trasformate di Fourier  $\hat{G}(k) = e^{-|k|}$  e  $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}, x_0 \in \mathbb{R}$ . Calcolare  $R(x)$  usando il teorema di convoluzione.

R.  $R(x) = \int_{\mathbb{R}} (dk/2\pi)\hat{G}(k)\hat{I}(k) = (\pi(1+(x-x_0)^2)^{-1}$

**4)** ([4]) Calcolare  $\sin A$ , dove  $A$  è la matrice autoaggiunta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ \pi/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sin A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

**5)** ([1]+[4]) Dato l'operatore integrale di rango finito  $\hat{K}$  definito da  $\hat{K}f(t) = \int_{-1}^1 (t+s)f(s)ds$ , dove  $f \in L_2[-1, 1]$ , i) mostrare che  $\hat{K}$  è autoaggiunto; ii)

calcolare lo spettro di  $\hat{K}$  (che tipo di spettro è?) e le relative autofunzioni in  $L_2[-1, 1]$ .

R.  $\sigma(\hat{K}) = \sigma_p(\hat{K}) = \{\lambda_{\pm} = \pm 2/\sqrt{3}\}$ ,  $\psi_{\pm}(t) = c_{\pm}(\pm\sqrt{3}t + 1)$

**6)** ([2.5]+[3.5]) Dato l'operatore  $\hat{A} = -id/dx + x$ , agente sulla varietà lineare (densa in  $L_2$ ) delle funzioni  $f(x)$  tali che  $\hat{A}f \in L_2$ , i) trovare autovalori e autofunzioni di  $\hat{A}$  in  $L_2[-\pi, \pi]$ , con condizioni al bordo periodiche:  $f(-\pi) = f(\pi)$ . ii) Mostrare che, nello spazio  $L_2(\mathbb{R})$ ,  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A})$  ed individuare tale spettro continuo.

R. i)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = \{n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\psi_n(x) = e^{i(nx-x^2/2)}$ ; ii)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}$ , autofunzione limitata:  $\psi(x, \lambda) = e^{i(\lambda x - x^2/2)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , autofunzione approssimata di  $L_2(\mathbb{R})$ :  $f_n(x) = (2/\pi)^{1/4} n^{-1/2} e^{-x^2/n^2} \psi(x, \lambda)$

### 3.7 Scritto del 15/07/09; AA 08-09

**1)** ([3]+[1]) i) Se  $\underline{x} \in \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$ , determinare i coefficienti  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$  per i quali valgono le disuguaglianze:  $\|\underline{x}\|_{\infty} \leq \alpha_n \|\underline{x}\|_p \leq \beta_n \|\underline{x}\|_{\infty}$ , con  $p > 1$ . ii) Se  $\underline{x} \in l_p$ , quale delle precedenti disuguaglianze sopravvive?

R. i)  $\alpha_n = 1, \beta_n = \sqrt[p]{n}$ ; ii) la disuguaglianza  $\|\underline{x}\|_{\infty} \leq \|\underline{x}\|_p$

**2)** ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = \text{sign } x$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare

la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

R. i)  $\text{sign } x \sim (4/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ ; iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

**3) ([4])** Data la funzione discontinua  $f(x) = a(x)H(x_0 - x) + b(x)H(x - x_0)$ ,  $x, x_0 \in \mathbb{R}$ , dove  $H$  è la funzione gradino di Heaviside e  $a(x), b(x)$  sono funzioni con derivate prime continue su  $\mathbb{R}$ , i) calcolare  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  con

l'ausilio di note distribuzioni; ii) calcolare  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f'(x)dx$ .

i)  $f'(x) = (b(x_0) - a(x_0))\delta(x - x_0) + a'(x)H(x_0 - x) + b'(x)H(x - x_0)$ ; ii)  $b(x_0) - a(x_0)$

**4) ([1]+[2]+[2])** Si consideri la successione di funzioni  $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . i) A cosa converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ ? ii) A cosa converge debolmente in  $\mathbb{R}$ ? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma  $\|\cdot\|_1$  (o, a scelta, nella norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ ) in  $\mathbb{R}$ , e quindi non converge fortemente in tale norma.

R. i)  $f_n(x) \rightarrow \infty$ ,  $x = 0$ ,  $\rightarrow 0$ ,  $x \neq 0$ ; ii)  $f_n(x) \rightarrow \delta(x)$

**5) ([6])** Dato l'operatore  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ , definito dalla  $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ , determinare i)  $\text{Ker}(\hat{E}^+)$ ,  $\mathcal{R}(\hat{E}^+)$ ; ii) il suo aggiunto  $(\hat{E}^+)^{\dagger}$ ; iii) sotto quali condizioni  $\hat{E}^+$  è invertibile, calcolandone l'inverso, iv) la sua norma  $\|\hat{E}^+\|$ .

R. i)  $\text{Ker}(\hat{E}^+) = \{(x_1, 0, \dots)\}$ ,  $\dim \text{Ker}(\hat{E}^+) = 1$ ,  $\text{Ran}(\hat{E}^+) = l_2$ ; iii)  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$  non è invertibile, ma  $\hat{E}^+ : \{\underline{x} \in l_2 : x_1 = 0\} \rightarrow l_2$  è invertibile con inverso  $\hat{E}^-$ ; ii)  $(\hat{E}^+)^{\dagger} = \hat{E}^-$ ; iv)  $\|\hat{E}^+\| = 1$ .

**6) ([1]+[4])** Dato l'operatore integrale di rango finito  $\hat{K}$  definito da  $\hat{K}f(t) = \int_{-1}^1 (t^2s + ts^2)f(s)ds$ , dove  $f \in L_2[-1, 1]$ , i) mostrare che  $\hat{K}$  è autoaggiunto;

ii) calcolare lo spettro di  $\hat{K}$  (che tipo di spettro è?) e le relative autofunzioni in  $L_2[-1, 1]$ .

R.  $\psi_{\pm}(t) = c_{\pm}(\sqrt{5}t^2 \pm \sqrt{3}t)$ ,  $\lambda_{\pm} \pm 2/\sqrt{15}$

**7) ([6], esercizio obbligatorio (-3] se non affrontato))** Sia  $\hat{A} : X \rightarrow X$  un operatore limitato; mostrare che: i) l'insieme risolvente  $\rho(\hat{A})$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$ ; ii) lo spettro  $\sigma(\hat{A})$  è un insieme chiuso e limitato di  $\mathbb{C}$ , contenuto nel disco  $\lambda \leq \|\hat{A}\|$ .

### 3.7.1 Scritto del 21/09/09; AA 08-09

**1) ([4])** La risposta  $R(x)$  di un sistema lineare ad una forza impulsiva è data dal seguente integrale di convoluzione  $R(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x-x')I(x')dx'$ , nel quale

le funzioni  $G(x)$  e  $I(x)$  hanno trasformate di Fourier  $\hat{G}(k) = (1 + k^2)^{-1}$  e  $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dopo aver enunciato il teorema di convoluzione, calcolare  $R(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  usando tale teorema.

R.  $R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{G}(k) \hat{I}(k) = e^{-|x-x_0|}/2$

**2)** (**[3]+[1]+[2]**) i) Sviluppare la funzione gradino di Heaviside  $H(x)$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $H(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

R.  $H(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

**3)** (**[4]**) Calcolare l'integrale  $I = \int_0^1 \delta(\cos \pi x) \sin \pi x dx$ .

R.  $I = 1/\pi$

**4)** (**[1]+[2]+[2]**) Si consideri la successione di funzioni  $f_n(x) = \frac{\sqrt{2n}}{\pi(1+n^4x^4)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Determinare i) a cosa converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  e ii) a cosa converge debolmente in  $\mathbb{R}$  (si usi la formula  $\int_{\mathbb{R}} dx(1+x^4)^{-1} = \pi/\sqrt{2}$ ); iii) mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma  $\|\cdot\|_1$  (o, a scelta, nella norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ ) in  $\mathbb{R}$ , e quindi non converge fortemente in tale norma.

R. i) a 0 se  $x \neq 0$ , a  $\infty$  se  $x = 0$ ; ii) a  $\delta(x)$

**5)** (**[6]**) Dato l'operatore  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ , definito dalla  $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ , i) calcolarne la norma e ii) determinarne lo spettro.

R. i)  $\|\hat{E}^+\| = 1$ , ii)  $\sigma_p(\hat{E}^+) = \{|\lambda| < 1\}$ ,  $\sigma_c(\hat{E}^+) = \{|\lambda| = 1\}$

**6)** (**[2]+[3]**) Calcolare  $\cos \hat{P}$  e  $\cos A$ , dove  $\hat{P}$  è un operatore di proiezione ortogonale e  $A$  è la matrice autoaggiunta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

R.  $\cos \hat{P} = \hat{1} - (1 - \cos 1)\hat{P}$ ;  $\cos A = -I$

**7)** (**[6]**, **esercizio obbligatorio** (**[-3] se non affrontato**)) Sia  $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  una successione di  $l_2$  e sia  $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  una base ortonormale dello spazio di Hilbert  $H$ . Mostrare i) che la successione  $\underline{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \underline{e}^{(i)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  di vettori di  $H$  è di Cauchy; ii) che converge, in norma euclidea, a un vettore  $\underline{x} \in H$ ; iii) che gli elementi  $\xi_i$  della successione sono i coefficienti di Fourier di  $\underline{x}$  rispetto alla base:  $\xi_i = (\underline{e}^{(i)}, \underline{x})$ .

### 3.7.2 3<sup>0</sup> Esonero dell'01/06/10, AA 09-10

1) ([1]+[3]) Mostrare che le funzioni  $f = e^{-|x|}$ ,  $g = x^2 e^{-|x|}$  sono indipendenti in  $L_2(\mathbb{R})$ , e ortogonalizzarle.

R.  $y^{(1)} = e^{-|x|}$ ,  $y^{(2)} = (x^2 - 1/2)e^{-|x|}$

2) ([1]+[5], esercizio obbligatorio [-3] se non affrontato) i) Dare le definizioni di spazio euclideo e di spazio completo. ii) Mostrare che lo spazio  $l_2$  è sia euclideo che completo (per la completezza, utilizzare il fatto che  $\mathbb{C}$  è completo).

3) ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = \text{sign } x$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

4) ([4]) Individuare, se esistono, i valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^2-1|^a}$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$  e a  $L_2(\mathbb{R})$ .

R.  $L_1$ :  $3/4 < a < 1$ ;  $L_2$ : mai.

5) ([1.5]+[2.5]+[2]) Si consideri la successione di funzioni  $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . i) A cosa converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ ? ii) A cosa converge debolmente in  $\mathbb{R}$ ? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma  $\|\cdot\|_1$  (o, a scelta, nella norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ ) in  $\mathbb{R}$ , e quindi non converge fortemente in tale norma.

R. ii)  $f_n(x) \rightarrow \delta(x)$

6) ([5]) i) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni,  $(H(x) \cosh x)' = \delta(x) + H(x) \sinh x$ . ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_{1/2}^{\infty} \delta(\cos \pi x) 2^{-x} dx$$

R.  $I = 3/(2\sqrt{2}\pi)$

7) ([1]+[4]) i) Dare la definizione di insieme  $A$  denso in  $B$ . ii) Mostrare che lo spazio delle funzioni continue in  $[a, b]$  è denso, rispetto alla norma  $\|\cdot\|_2$ , nello spazio delle funzioni continue a tratti.

### 3.7.3 4<sup>0</sup> Esonero del 23/06/10, AA 09-10

1) ([2]+[4], esercizio obbligatorio [-3] se non affrontato) Sia  $\hat{A} : H \rightarrow H$  un operatore limitato. i) Definire gli insiemi risolvente  $\rho(\hat{A})$  e spettro  $\sigma(\hat{A})$ ; ii) mostrare che  $\rho(\hat{A})$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$  e che  $\sigma(\hat{A})$  è un insieme chiuso.

**2) ([2]+[3]. La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da**

**10 crediti)** i) Dimostrare che, se  $f(x) \in L_1(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})$ , allora la sua Trasformata di Fourier  $\hat{f}(k) \in L_2(\mathbb{R})$  e vale la formula  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\hat{f}(k)|^2$ ;

ii) se  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ , allora  $\hat{f}(k)$  è uniformemente limitata e  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ , per  $k \rightarrow \pm\infty$ .

**3) ([4])** Dato l'operatore  $\hat{E}^- : l_2 \rightarrow l_2$ , definito da  $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots)$ , calcolare  $\sigma(\hat{E}^-)$ .

**4) ([2.5]+[2])** i) Trovare autovalori ed autovettori della matrice  $A = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice  $e^A$ .

R.  $\lambda_{\pm} = \pm i\pi/2$ ,  $v^{\pm} = (1/\sqrt{2})(1, \pm i)$ ,  $e^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

**5) ([2.5]+[3])** Dato l'operatore  $\hat{A} = -id/dx + x^2$ , agente sulla varietà lineare (densa in  $L_2$ ) delle funzioni  $f(x)$  tali che  $\hat{A}f \in L_2$ , i) trovare autovalori e autofunzioni di  $\hat{A}$  in  $L_2[-\pi, \pi]$ , con condizioni al bordo periodiche:  $f(-\pi) = f(\pi)$ . ii) Mostrare che, nello spazio  $L_2(\mathbb{R})$ ,  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A})$  ed individuare tale spettro continuo.

R. i)  $\psi_n(x) = e^{i(\lambda_n x - x^3/3)}$ ,  $\lambda_n = n + \pi^2/3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . ii)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}$ ,  $\psi(x, \lambda) = e^{i(\lambda x - x^3/3)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

**6) ([4])** Dato l'operatore integrale  $\hat{K}f(t) = \int_{-1}^1 (s+t)f(s)ds$  su  $L_2[-1, 1]$ , calcolare lo spettro di tale operatore e le relative autofunzioni.

R.  $\sigma(\hat{K}) = \sigma_p(\hat{K}) = \{\lambda_{\pm}\}$ ,  $\lambda_{\pm} = \pm 2/\sqrt{3}$ ,  $\psi_{\pm}(t) = \pm\sqrt{3}t + 1$

**7) ([3]+[3])** Dati l'operatore  $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}, \dots)$  ed il proiettore ortogonale  $\hat{P}$  su un sottospazio  $S$  dello spazio di Hilbert  $H$ , i) determinare i valori del parametro  $\mu \in \mathbb{C}$  per i quali è definito l'operatore  $\ln(\hat{1} - \mu\hat{P})$  e calcolare tale operatore; ii) trovare la soluzione  $\underline{x} \in l_2$  dell'equazione  $(2 - \hat{E}^+)\underline{x} = \underline{e}^{(3)}$ , dove  $\underline{e}^{(3)}$  è il terzo elemento della base canonica di  $l_2$ :  $(\underline{e}^{(3)})_k = \delta_{k3}$ .

R. i)  $\ln(\hat{1} - \mu\hat{P}) = \ln(\hat{1} - \mu)\hat{P}$ , ii)  $\underline{x} = (1/8, 1/4, 1/2, 0, 0, \dots)$

### 3.7.4 Scritto del 16/07/10, AA 09-10

**1) ([1]+[3])** i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni  $\{1, x, x^2\}$  sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste tre funzioni in  $L_2[-1, 1]$ .  
R.

**2) [0.5]+[3]+[1.5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)**

1) Dare le definizioni di operatore autoaggiunto e di operatore unitario.

2) Mostrare che, se  $\hat{A}$  è un operatore autoaggiunto, i) i suoi autovalori sono reali; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali. 3) Mostrare che, se  $\hat{U}$  è un operatore unitario, i suoi autovalori hanno modulo 1.

**3) ([3]+[1]+[2])** i) Sviluppare la funzione  $H(x)$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $H(x)$  e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

**4) ([2.5]+[2.5]. La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da 10 crediti)** i) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = |x^2 + 2\alpha x - 3\alpha|^\alpha$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$ . ii) Per quei valori di  $\alpha$ , elencare le tre proprietà della trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  di  $f(x)$  dimostrate in classe, dimostrandone una a scelta.

R.  $-3 < \alpha < -1/2$

**5) ([2]+[3])** i) Calcolare

$$I = \int_0^{3/2} \delta(\sin \pi x) \cos \pi x \, dx.$$

ii) Dimostrare che la successione di funzioni  $\{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$  i) converge a 0 in senso debole, con funzioni di prova  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ ; ii) non converge a 0 in senso forte, ad esempio in  $L_1[0, \pi]$ .

R. i)  $I = -\frac{1}{2\pi}$

**6) ([2]+[2])** i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

ii) Usare questo risultato per calcolare  $\ln A$  (usare il ramo di  $\ln z$  tale che  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ).

R. i) autoval:  $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ , autovett:  $(1, \pm i)/\sqrt{2}$ ; ii)  $\ln A = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

**7) ([2]+[4])** Dato l'operatore di traslazione  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ :

$$\hat{E}^+(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2,$$

i) calcolare  $(\hat{E}^+)^{\dagger}$ ; ii) determinare lo spettro di  $\hat{E}^+$ .

### 3.7.5 Scritto del 20/09/10, AA 09-10

**1) ([1]+[3])** i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni



$\{e^{-x}, x^2 e^{-x}\}$  sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste due funzioni in  $L_2[0, \infty)$ .

R.  $\{e^{-x}, (x^2 - 1/2)e^{-x}\}$

**2) [3]+[1.5]+[1.5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)** Sia  $S$  un sottospazio dello spazio euclideo  $E$ , e sia  $\{e^{(j)}\}_{j=1}^N$  ( $N$  finito o infinito) una base ortonormale di  $S$ . Mostrare che, i) dato il generico vettore  $\underline{x} \in E$ ,

il vettore di  $S$  che meglio approssima  $\underline{x}$  è  $\underline{x}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \xi_i e^{(i)}$ , dove  $\xi_i := (e^{(i)}, \underline{x})$

sono i cosiddetti coefficienti di Fourier di  $\underline{x}$  rispetto alla base; ii) il vettore  $\underline{x}^{(N)}$  è la “proiezione ortogonale” di  $\underline{x} \in E$  su  $S$  (cioè il vettore  $(\underline{x} - \underline{x}^{(N)})$  è ortogonale a tutti i vettori di  $S$ ); iii) vale la disuguaglianza di Bessel.

**3) ([3]+[1]+[2])** i) Sviluppare la funzione  $x^2$  in serie di Fourier nell’intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $x^2$  e della somma della serie su tutto l’asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il

valore della somma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

R. i)  $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$ , ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

**4) ([2.5]+[2.5]. La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da 10 crediti)** i) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-\alpha|}} \frac{1}{|3-x^2|^\alpha}$  appartiene a  $L_1[0, \infty)$ . ii) Per quei valori di  $\alpha$ ,

mostrare che la trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  di  $f(x)$  è uniformemente limitata e  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \pm\infty$ .

R. i)  $1/4 < \alpha < 1$

**5) ([2.5]+[2.5])** 1) Calcolare

$$I = \int_{1/2}^2 \delta(\cos \pi x) \sin \pi x \, dx.$$

2) Data la successione di funzioni  $\{\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  i) a cosa converge in senso puntuale e in senso debole? ii) Mostrare che non converge in senso forte in  $L_\infty(\mathbb{R})$  (suggerimento: si mostri che non è di Cauchy).

R. 1)  $I = -1/(2\pi)$

**6) ([3]+[2])** i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

ii) Usare questo risultato per calcolare  $e^A$ .

R. i) autoval: 0, 2, 2, autovett:  $(1, 0, -1)/\sqrt{2}$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$ ;

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^2 & 0 & -1 + e^2 \\ 0 & 2e^2 & 0 \\ -1 + e^2 & 0 & 1 + e^2 \end{pmatrix}.$$

**7) ([2]+[3])** È dato l'operatore  $\hat{A} = id/dx + x$ , agente sulla varietà lineare (densa in  $L_2[-\pi, \pi]$ ) delle funzioni  $f(x)$  tali che  $\hat{A}f \in L_2[-\pi, \pi]$ . Nello spazio delle funzioni di  $L_2[-\pi, \pi]$  con condizioni periodiche al bordo:  $f(-\pi) = f(\pi)$ : i) mostrare che  $\hat{A}$  è autoaggiunto; ii) determinare autovalori e autofunzioni di  $\hat{A}$ .

R. autoval:  $\{n\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , autof:  $e^{-inx+ix^2/2}$

### 3.7.6 3° esonero del 06/06/11, AA 10-11

**1)** Mostrare che i) le funzioni  $f_1 = 1$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = x^2$  sono indipendenti in  $L_2[0, 1]$ , e ii) ortogonalizzarle.

R. 1,  $x - 1/2$ ,  $x^2 - x + 1/6$

**2) esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)** a) Dare la definizione di spazio di Hilbert  $H$ . b) Mostrare che, se la successione  $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$  appartiene a  $l_2$  e i vettori  $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}_+}$  costituiscono una base ortonormale dello spazio di Hilbert  $H$ , allora gli scalari  $\xi_i$  sono i coefficienti di Fourier di qualche  $\underline{x}$  appartenente a  $H$ .

**3)** i) Sviluppare la funzione di Heaviside  $H(x) = 1$ ,  $x > 0$ ,  $H(x) = 0$ ,  $x < 0$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Individuare gli eventuali punti di  $[-\pi, \pi]$  in cui la serie non converge puntualmente a  $H(x)$ , e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di  $H(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

**4)** Individuare, se esistono, i valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f(x) = \frac{|x|^{a/2}}{|x^2-1|^a}$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$  e a  $L_2(\mathbb{R})$ .

R. i)  $L_1(\mathbb{R})$ :  $2/3 < a < 1$ ; ii)  $L_2(\mathbb{R})$ :  $1/3 < a < 1/2$

**5)** Si consideri la successione di funzionali lineari  $F^{(n)}$ :  $F^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$ , con  $f_n(x) \equiv \frac{n^a}{\pi(1+n^2x^2)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ . i) A cosa converge debolmente al variare di  $a > 0$ ? ii) Mostrare che  $F^{(n)}$  non è un successione di Cauchy, e quindi non converge fortemente, se  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ . iii) A cosa converge  $f_n(x)$  puntualmente in  $\mathbb{R}$  al variare di  $a$ ?

R. i)  $F^{(n)} \rightarrow 0$ ,  $0 < a < 1$ ;  $F^{(n)} \rightarrow \delta_0$ ,  $a = 1$ ;  $F^{(n)} \rightarrow \infty$ ,  $a > 1$ .

iii)  $f_n(0) \rightarrow \infty$ ;  $f_n(x) \rightarrow 0$ ,  $0 < a < 2$ ;  $f_n(x) \rightarrow 1/(\pi x^2)$ ,  $a = 2$ ;  $f_n(x) \rightarrow \infty$ ,  $a > 2$

6) i) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni,  $(H(x - \pi/2) \sin x)' = \delta(x - \pi/2) + H(x - \pi/2) \cos x$ . ii) Calcolare l'integrale  $I = \int_{1/2}^{\infty} \delta(\cos \pi x) 4^{-x} dx$

R.  $I = 5/(12\pi)$

7) Data la successione di successioni  $\underline{x}^{(n)}$ , con  $x_k^{(n)} = \frac{n}{k^{1/3} + nk^{1/6}}$ , i) qual'è lo spazio  $l_p$ ,  $p \geq 1$  più piccolo a cui appartiene? ii) Determinare la successione  $\underline{x} = \{x_k\}$  alla quale converge per componenti (puntualmente), ed individuare lo spazio  $l_q$ ,  $q \geq 1$  più piccolo a cui  $\underline{x}$  appartiene. iii) Mostrare che  $\|\underline{x}^{(n)} - \underline{x}\|_{\infty} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  e dedurre qualcosa sulle proprietà di chiusura di  $l_p$  in  $(l_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ .

R. i)  $l_4$ ; ii)  $\{k^{-1/6}\}_{k \in \mathbb{N}_+} \in l_7$ ; iii)  $\|\underline{x}^{(n)} - \underline{x}\|_{\infty} = 1/(n+1) \rightarrow 0$ ,  $l_4$  non è chiuso in  $(l_{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$

### 3.7.7 4° esonero del 23/06/11, AA 10-11

1) ([1]+[3]) Dato l'operatore  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ , definito da  $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$ , calcolare i)  $\|\hat{E}^+\|$ , ii)  $\sigma(\hat{E}^+)$ .

2) ([3]+[3]). **La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da 10 crediti** i) Definire il prodotto di convoluzione di due funzioni  $f_1(x), f_2(x) \in L_1(\mathbb{R})$  e enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione. ii) Mostrare che, se  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ , allora  $\hat{f}(k)$  è uniformemente limitata, continua e  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$ , per  $k \rightarrow \pm\infty$ .

3) ([1]+[3]+[2], **esercizio obbligatorio** [-3] se non affrontato) Sia  $\hat{A} : H \rightarrow H$  un operatore limitato. i) Definire gli insiemi risolvente  $\rho(\hat{A})$  e spettro  $\sigma(\hat{A})$ ; ii) mostrare che  $\rho(\hat{A})$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$  e che  $\sigma(\hat{A})$  è un insieme chiuso; iii) mostrare che  $\sigma(\hat{A}) \subset \{|\lambda| \leq \|\hat{A}\|\}$ .

4) ([2]+[2]) i) Trovare autovalori ed autovettori della matrice  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+e & 1-e \\ 1-e & 1+e \end{pmatrix}$ .

ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice  $\ln A$ , usando la determinazione tale che  $\ln 1 = 0$ .

R. i)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e$ ,  $\underline{v}^{(1)} = (1, 1)/\sqrt{2}$ ,  $\underline{v}^{(2)} = (1, -1)/\sqrt{2}$ . ii)  $U = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)})$ ,  $\ln A = U \text{diag}(\ln \lambda_1, \ln \lambda_2) U^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

5) ([3]+[3]) Dato l'operatore  $\hat{A} = -id/dx + x^4$ , agente sulla varietà lineare (densa in  $L_2$ ) delle funzioni  $f(x)$  tali che  $\hat{A}f \in L_2$ , i) trovare autovalori e autofunzioni di  $\hat{A}$  in  $L_2[-\pi, \pi]$ , con condizioni al bordo periodiche:  $f(-\pi) = f(\pi)$ . ii) Mostrare che, nello spazio  $L_2(\mathbb{R})$ ,  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A})$  ed indi-

viduare tale spettro continuo.

R. i)  $\sigma_p = \{n + \pi^4/5\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\psi_n(x) = e^{i(n+\pi^4/5)x - ix^5/5}$ . ii)  $\sigma_c = \mathbb{R}$ ,  $\psi(x, \lambda) = e^{i\lambda x - ix^5/5}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

**6) ([1]+[4])** Dato l'operatore integrale  $\hat{K}f(t) = \int_{-1}^1 (t^2s + s^2t)f(s)ds$  su

$L_2[-1, 1]$ , i) dire se tale operatore è auto-aggiunto e compatto (e giustificare la risposta); ii) calcolare lo spettro di tale operatore e le relative autofunzioni.

R.  $\lambda_{\pm} = \pm 2/\sqrt{15}$ ,  $\psi_{\pm}(t) = \sqrt{5}t^2 \pm \sqrt{3}t$

**7) ([5])** Dato l'operatore  $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ ,  $\hat{E}^- : l_2 \rightarrow l_2$ , i) determinare i valori del parametro  $\mu \in \mathbb{C}$  per i quali esiste unica la soluzione  $\underline{x} \in l_2$  dell'equazione  $(\hat{1} - \mu\hat{E}^-)\underline{x} = \underline{e}^{(2)}$  e calcolarla, dove  $\underline{e}^{(2)}$  è il secondo elemento della base canonica di  $l_2$ :  $(\underline{e}^{(2)})_k = \delta_{k2}$ .

R.  $\underline{x} = (0, 1, \mu, \mu^2, \mu^3, \dots) \in l_2$ ,  $|\mu| < 1$

### 3.7.8 scritto del 19/07/11, AA 10-11

**1) ([1.5]+[3] gli studenti del corso da 10 crediti non devono affrontare la seconda parte dell'esercizio)** Sia  $f(x) = (x^2 - 1)^{-a}e^{-ax^2}$ .

i) Trovare i valori di  $a \in \mathbb{R}$  per i quali  $f \in L_1(\mathbb{R})$ . ii) Mostrare che, per tali valori di  $a$ , la trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  di  $f(x)$  è uniformemente limitata, continua e  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \pm\infty$ .

R. i)  $0 < a < 1$

**2) ([3]+[1]+[2])** i) Sviluppare la funzione  $f(x) = |x|$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .

**3) ([2]+[1.5])** Data la funzione discontinua  $f(x) = a(x)H(-x) + b(x)H(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , dove  $H$  è la funzione gradino di Heaviside e  $a(x), b(x)$  sono funzioni con derivate prime continue su  $\mathbb{R}$ , i) calcolare  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  con l'ausilio di note

distribuzioni; ii) calcolare  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f'(x)dx$ .

R. i)  $f'(x) = a'(x)H(-x) + b'(x)H(x) + (b(0) - a(0))\delta(x)$ ; ii)  $b(0) - a(0)$

**4) ([1]+[2.5]+[2.5])** Si consideri la successione di funzionali lineari  $F_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$ , con  $f_n(x) = \frac{n^a}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ . i) A cosa converge  $f_n(x)$  puntualmente in  $\mathbb{R}$ , al variare del parametro  $a > 0$ ? ii) A cosa converge  $F_n(\varphi)$  debolmente in  $\mathbb{R}$ , al variare del parametro  $a > 0$ ? iii) A cosa converge  $F_n(\varphi)$  fortemente in  $\mathbb{R}$ , al variare del parametro  $a > 0$ , se  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ ?

R. i)  $f_n(x) \rightarrow \infty, x = 0; \rightarrow 0, x \neq 0, \forall a > 0$ . ii)  $F_n \rightarrow 0, 0 < a < 1; \rightarrow \delta_0, a = 1; \rightarrow \infty, a > 1$ . iii)  $\|F_n - F_m\| = \|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow \infty, a > 0, \Rightarrow$  non converge.

**5) ([1]+[2]+[2])** Dato l'operatore  $\hat{A} \equiv -id/dx + x$ , agente sulle funzioni di  $L_2$  con la loro derivata prima, i) mostrare che è auto-aggiunto sia in  $[-\pi, \pi]$ , con  $f(-\pi) = f(\pi)$ , che in  $L_2(\mathbb{R})$ . ii) Determinarne lo spettro in  $[-\pi, \pi]$ , con  $f(-\pi) = f(\pi)$ . iii) Determinarne lo spettro in  $L_2(\mathbb{R})$ .

R. i)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = n_{n \in \mathbb{Z}}, \psi_n(x) = e^{inx - ix^2/2}$  ii)  $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}$

**6) ([2]+[2])** Data la matrice  $A = \pi \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ , i) calcolarne autovalori ed autovettori. ii) Usare questo risultato per calcolare  $\cos A$ .

R. i) autoval:  $0, \pi$ ; autovett.  $\underline{v}_1 = (1, i)^T, \underline{v}_2 = (2, i)^T$ .

ii)  $\cos A = \begin{pmatrix} -3 & -4i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$

**7) ([6], esercizio obbligatorio (-3] se non affrontato))** Si dimostri che la serie di Fourier di  $f(x)$  converge puntualmente in ogni punto dell'intervallo  $(-\pi, \pi)$  in cui  $f(x)$  è continua ed è soddisfatta la condizione di Dini.

### 3.7.9 scritto del 09/09/11, AA 10-11

**1) ([2]+[2] gli studenti del corso da 10 crediti non devono affrontare la seconda parte dell'esercizio)** Sia  $f(x) = |x^2 - a^2|^{-a} e^{-ax^2}$ . i) Trovare i valori di  $a \in \mathbb{R}$  per i quali  $f \in L_1(\mathbb{R})$ . ii) Mostrare che, per tali valori di  $a$ , la trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  di  $f(x)$  è uniformemente limitata e  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \pm\infty$ .

R  $0 < a < 1, a \neq 1/2$

**2) ([3]+[1]+[2])** i) Sviluppare la funzione  $f(x) = xH(x)$ , dove  $H(x)$  è la funzione gradino ( $H(x) = 0, x < 0; H(x) = 1, x > 0$ ), in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Scrivere la relazione di Parseval e, ricordando che  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , calcolare la somma della serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ .

**3) ([1.5]+[2.5])** i) Data la funzione discontinua  $f(x) = x^2 H(-x) + \cos x H(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , dove  $H$  è la funzione gradino di Heaviside, i) calcolare  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

con l'ausilio di note distribuzioni. ii) Calcolare l'integrale  $I = \int_0^{\infty} \delta(\sin \pi x) 2^{-x} dx$

R i)  $f'(x) = 2xH(-x) - \sin x H(x) + \delta(x)$ ; ii)  $I = 3\pi/2$

**4) ([1.5]+[2.5])** Si consideri la successione di funzionali lineari  $F_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx$ , con  $f_n(x) = \frac{n^a \sin nx}{\pi x}$ ,  $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ . i) A cosa converge  $f_n(x)$  puntualmente in  $\mathbb{R}$ , al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ ? ii) A cosa con-

verge  $F_n(\varphi)$  debolmente in  $\mathbb{R}$ , al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ ?

R. ii)  $F_n \rightarrow \infty, a > 0$ ;  $F_n \rightarrow \delta_0, a = 0$ ;  $F_n \rightarrow 0, a < 0$

5) ([3]+[4]) i) Dare la definizione di operatore aggiunto  $\hat{A}^\dagger$  di un operatore  $\hat{A} : l_2 \rightarrow l_2$  e calcolare l'aggiunto di  $\hat{E}^+$ :  $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}, \dots)$ . ii) Calcolare lo spettro di  $\hat{E}^+$ .

6) ([1]+[3]) Dato l'operatore integrale  $\hat{K}f(t) = \int_0^1 (t^3s + ts^3)f(s)ds$ , i) mostrare che è autoaggiunto in  $L_2[0, 1]$ ; ii) calcolarne autovalori ed autofunzioni.

R.  $\lambda_\pm = 1/5 \pm 1/\sqrt{21}$ ,  $\psi^\pm(t) = t^3/3 \mp t/\sqrt{21}$

7) ([6], **esercizio obbligatorio** ([-3] se non affrontato)) i) Dare le definizioni di insieme risolvete e di spettro di un operatore  $\hat{A}$ ; ii) mostrare che, se  $\hat{A}$  è limitato, allora l'insieme risolvete è aperto e lo spettro è un chiuso limitato.

### 3.7.10 2° esonero del 15/06/12, AA 11-12

1) ([4]) Calcolare lo spettro dell'operatore  $\hat{E}^+(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$  in  $l_2$ .

2) ([1.5]+[4.5], **esercizio obbligatorio** ([-3] se non affrontato)) Dato un operatore limitato  $\hat{A} : H \rightarrow H$ , i) definire l'insieme risolvete  $\rho(\hat{A})$  e lo spettro  $\sigma(\hat{A})$  di  $\hat{A}$ ; ii) mostrare che  $\rho(\hat{A})$  è un aperto di  $\mathbb{C}$  e che  $\sigma(\hat{A})$  è un chiuso limitato di  $\mathbb{C}$ .

3) ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppate la funzione  $f(x) = x^2$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ , e dire se la serie converge uniformemente e assolutamente a  $x^2$  in  $[-\pi, \pi]$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ . 4) ([4]) Individuare, se esistono, i valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f(x) = \frac{x}{|x^3-1|^a}$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$  e a  $L_2(\mathbb{R})$ .

R.  $L_1(\mathbb{R}) : 2/3 < a < 1$ ;  $L_2(\mathbb{R})$ : mai

5) ([1.5]+[2.5]+[2]) Si consideri la successione di funzioni  $n^a p(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , dove  $p(x)$  è una funzione pari, regolare e tale che  $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$ . i) A cosa converge puntualmente in  $\mathbb{R}$ , per  $a > 0$ ? ii) A cosa converge debolmente il funzionale  $F_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n^a p(nx)\varphi(x)dx$ , per  $a > 0$ ? iii) Mostrare che, se  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$  e  $p(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$ ,  $F_n$  non converge fortemente.

R. ii)  $0 < a < 1$ :  $F_n \rightarrow 0$ ;  $a = 1$ :  $F_n \rightarrow \delta_0$ ;  $a > 1$ :  $F_n \rightarrow \infty$

6) ([1]+[2]+[2]) Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . i) calcolare  $\|A\|_2$ . ii)

Trovare autovalori ed autovettori di  $A$ . iii) Utilizzare quest'ultimo risultato per calcolare la matrice  $e^A$ .

R. i)  $\|A\|_2 = 2$ . ii)  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2}$ ,  $v^{\pm} = (1, \pm\sqrt{2})$ ; iii)  $e^A = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{2} & \frac{\sinh \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} & \cosh \sqrt{2} \end{pmatrix}$

7) ([3]+[2]) i) Calcolare l'integrale  $\int_0^{\infty} \delta(\sin 2x)e^{-x} dx$ . ii) Mostrare che  $(\ln |x|)' = P(1/x)$  nel senso delle distribuzioni.

R. i)  $\frac{1}{4} \frac{e^{\pi/2} + 1}{e^{\pi/2} - 1}$

### 3.7.11 scritto del 10/07/12, AA 11-12

1) ([1]+[3]) Mostrare che i) le funzioni  $f_1 = e^{-x}$ ,  $f_2(x) = xe^{-x}$  sono indipendenti in  $L_2[0, \infty)$ , e ii) ortonormalizzarle.

R.  $e_1 = \sqrt{2}e^{-x}$ ,  $\sqrt{8}(x - 1/2)e^{-x}$

2) ([2.5]+[1]+[2.5]) i) Sviluppare la funzione  $x$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Individuare gli eventuali punti di  $[-\pi, \pi]$  in cui la somma  $S(x)$  della serie non converge puntualmente a  $x$ , e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di  $x$  e di  $S(x)$  su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Calcolare tale serie in  $x = \pi/2$  ed usare la relazione di Parseval per trovare rispettivamente le seguenti somme notevoli:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$ .

3) ([4]+[2] (gli studenti da 10 crediti non devono affrontare la prima parte dell'esercizio)) i) Mostrare che, se  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ , la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  è continua, uniformemente limitata, e  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \pm\infty$ . ii) Calcolare la trasformata di Fourier di  $f(x) = (1+x^2)^{-1} \in L_1(\mathbb{R})$  e verificare le proprietà ora dimostrate.

R. ii)  $\hat{f}(k) = \pi \exp(-|k|)$

4) ([2]+[2]) i) A cosa converge debolmente, al variare di  $a > 0$ , la successione di funzionali lineari  $F^{(n)}$ :  $F^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$ , con  $f_n(x) \equiv n^a e^{-n^2 x^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ? ii) Calcolare l'integrale  $\int_0^{\infty} \delta(e^x \sin x) dx$ .

R. i)  $0 < a < 1$ :  $F^{(n)} \rightarrow 0$ ,  $a = 1$ :  $F^{(n)} \rightarrow \sqrt{\pi} \delta_0$ ,  $a > 1$ :  $F^{(n)} \rightarrow \infty$ ; ii)  $\frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$

5) ([1.5]+[4.5], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)) i) Dare la definizione di spazio di Hilbert separabile. ii) Sia  $\{\xi_n\}_1^{\infty}$  una successione di  $l_2$  e sia  $\{e^{(j)}\}_1^{\infty}$  un sistema ortonormale di vettori dello spazio di Hilbert  $H$  separabile. Mostrare che  $\xi_n$  sono i coefficienti di Fourier di qualche  $\underline{x} \in H$ :

$\xi_n = (\underline{e}^{(n)}, \underline{x})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e che  $\|\underline{x}\|^2 = \sum_{n \geq 1} |\xi_n|^2$ .

**6)** ([1]+[3]+[1]) Dato l'operatore  $\hat{p} = -id/dx$ , agente sulla varietà lineare (densa in  $L_2[a, b]$ ) delle funzioni  $f(x)$  tali che  $f, \hat{p}f \in L_2[a, b]$ , i) mostrare che  $\hat{p}$  è auto-aggiunto sullo spazio delle funzioni periodiche  $f(a) = f(b)$ ; ii) determinare autovalori e autofunzioni di  $\hat{p}$  nello spazio delle funzioni di cui sopra con condizioni periodiche  $f(a) = f(b)$ . iii) Identificare l'insieme delle autofunzioni trovate con una delle basi introdotte nel corso.

R. ii)  $\sigma = \{\lambda_n = 2\pi n/(b-a)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\psi_n(x) = \exp(i\lambda_n x)$  iii) base di Fourier nell'intervallo  $[a, b]$

**7)** ([1]+[2]+[2]) Data la matrice  $A = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ , i) riconoscerne la specificità e da questo dedurre le proprietà di autovalori e autovettori. ii) Calcolare tali autovalori ed autovettori. iii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice  $\sin A$ .

R. ii)  $\lambda_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $v^{\pm} = 1/\sqrt{2}(1, \mp i)^T$ ,  $\sin A = 2A/\pi$

### 3.7.12 scritto del 19/09/12, AA 11-12

**1)** ([1.5]+[3]) i) Dare la definizione di dipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e determinare per quale valore del parametro  $\alpha$  i tre polinomi di secondo grado  $\{\alpha - 2x, x(1-x), 1+x^2\}$  sono dipendenti. ii) Mostrare che  $\{1, x, x^2\}$  è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo  $[-1, 1]$  e ortogonalizzarla.

R.  $\alpha = -2$

**2)** [6] (**esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato**) Dimostrare che: 1) se  $\hat{A}$  è un operatore autoaggiunto, i) i suoi autovalori sono reali; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali. 2) Se  $\hat{U}$  è un operatore unitario, i) i suoi autovalori hanno modulo 1; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali.

**3)** ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = e^x$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ .

**4)** ([2]+[2.5]) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la seguente funzione  $f$  appartiene a  $L_1[0, \infty)$  e  $L_2[0, \infty)$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \alpha + \frac{1}{3}|} |x + 2|^{\alpha}}$$



R.  $L_1[0, \infty) : \alpha > 1/2; L_2[0, \infty) : 0 < \alpha < 1/3$

5) ([3]+[3]) i) Calcolare

$$I = \int_{-2}^2 \delta(\cos \pi x)(x^2 + 1)^{-1} dx.$$

ii) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni

$$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x). \quad (11)$$

R.  $I = \frac{96}{\pi 65}$

6) ([2]+[3]) i) Determinare sotto quale condizione sui numeri complessi  $a$  e  $b$  la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (12)$$

è unitaria e, sotto questa condizione, ii) calcolarne autovalori e autovettori.

R. i)  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ; ii)  $\lambda_{\pm} = \operatorname{Re} a \pm \sqrt{1 - (\operatorname{Re} a)^2}$ ;  $v^{\pm} = (\bar{b}, i(\pm\sqrt{1 - (\operatorname{Re} a)^2} - \operatorname{Im} a))^T$

7) ([4]) Determinare lo spettro di  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ :

$$\hat{E}^+(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots) \quad (13)$$

### 3.7.13 scritto “155 crediti + fuori corso” del 26/10/12, AA 11-12

1) ([1]+[3]) i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni  $\{e^{-x^2}, xe^{-x^2}\}$  sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste due funzioni in  $L_2[0, \infty)$ .

R. ii)  $\{e^{-x^2}, (x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}})e^{-x^2}\}$

2) [3]+[1.5]+[1.5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Sia  $S$  un sottospazio dello spazio euclideo  $E$ , e sia  $\{e^{(j)}\}_{j=1}^N$  ( $N$  finito o infinito) una base ortonormale di  $S$ . Mostrare che, i) dato il generico vettore  $\underline{x} \in E$ , il vettore di  $S$  che meglio approssima  $\underline{x}$  è  $\underline{x}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \xi_i e^{(i)}$ , dove  $\xi_i := (e^{(i)}, \underline{x})$

sono i cosiddetti coefficienti di Fourier di  $\underline{x}$  rispetto alla base; ii) il vettore  $\underline{x}^{(N)}$  è la “proiezione ortogonale” di  $\underline{x} \in E$  su  $S$  (cioè il vettore  $(\underline{x} - \underline{x}^{(N)})$  è ortogonale a tutti i vettori di  $S$ ); iii) vale la disuguaglianza di Bessel.

3) ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $x^2$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $x^2$  e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il

valore della somma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

**4)** ([3]) Determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = |x^2 - 2\alpha x + 3\alpha|^{-\alpha}$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$ .

R.  $1/2 < \alpha < 3$

**5)** ([3]+[2]) i) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni,  $H'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$  e calcolare  $f'(x)$ , per  $f(x) = H(x - 1) \cos \pi x$ . ii) A cosa converge, in senso debole, il funzionale  $S_n$ , tale che  $S_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin nx \varphi(x) dx$ , con funzioni di prova  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ ?

R. i)  $f'(x) = -\delta(x - 1) - \pi H(x - 1) \sin \pi x$

**6)** ([2]+[2]) i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

ii) Usare questo risultato per calcolare  $\ln A$  (usare il ramo di  $\ln z$  tale che  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ).

R. i)  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\pi/4}$ ,  $\underline{v}^{\pm} = 1/\sqrt{2}(1, \pm i)$  ii)  $\ln A = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**7)** ([4]+[3]) Dato l'operatore di traslazione  $\hat{T}$ :  $\hat{T}f(x) = f(x + 1)$ , sullo spazio delle funzioni continue, i) mostrare che è un operatore unitario in  $L_2[-\pi, \pi]$  e calcolarne la norma  $\|\cdot\|_2$ ; ii) determinare lo spettro di  $\hat{T}$  nello spazio delle funzioni continue e periodiche di  $L_2[-\pi, \pi]$ .

R. ii)  $\sigma_p = \{e^{in}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con autofunzioni  $\psi_n(x) = e^{inx}$

### 3.7.14 2° esonero del 10/06/13, AA 12-13

**1)** ([4]+[2]) i) Calcolare lo spettro dell'operatore  $\hat{E}^+(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$  in  $l_2$ ; ii) verificare che, se  $\lambda \in \rho(\hat{E}^+)$  e  $\underline{x} = (\hat{E}^+ - \lambda \hat{1})^{-1} \underline{y}$ , allora  $\underline{x} \in l_2$  se  $\underline{y} \in l_2$ .

**2)** ([5], **esercizio obbligatorio** ([3] se non affrontato)) Data una successione  $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  di  $l_2$  e un sistema ortonormale  $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  di uno spazio di Hilbert separabile, allora gli  $\xi_j$  sono i coefficienti di Fourier di qualche  $\underline{x} \in H$ , e vale la relazione di Parseval  $\|\underline{x}\|_2 = \|\underline{\xi}\|_2$ .

**3)** ([3]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $f(x) = xH(x)$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $f(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ , e dire se la serie converge uniformemente e assolutamente a  $xH(x)$  in  $[-\pi, \pi]$ . iii) Scrivere la relazione di Parseval.

**4)** ([4]) Individuare, se esistono, i valori del parametro  $a \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione  $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^2 - 1|^a}$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$  e a  $L_2(\mathbb{R})$ .

R.  $L_1(\mathbb{R}) : 3/4 < a < 1; f \notin L_2(\mathbb{R}), \forall a \in \mathbb{R}$

**5) ([2]+[2]) Gli studenti “10 crediti” non devono affrontare la parte**

**a).** a) Mostrare che, se  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ , allora la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  è i) uniformemente limitata, e ii)  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \pm\infty$ .

b) Mostrare che, se  $f^{(l)}(x) \in L_1(\mathbb{R}), l = 0, 1, \dots, n$ , allora la trasformata di Fourier di  $f(x)$  va a 0 per  $k \rightarrow \pm\infty$  più rapidamente di  $|k|^{-n}$ .

**6) ([2.5]+[2.5])** Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ . i) Trovare autovalori ed autovettori di  $A$ . ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice  $\ln A$  (si scelga il ramo di  $\ln z$  tale che  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ).

R.  $\lambda_{\pm} = \pm i, \underline{v}^{\pm} = (1, \pm 2i)^T, \ln A = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

**7) ([3]+[2])** i) Calcolare l'integrale  $I = \int_0^2 \delta(\sin 2x) \cos x dx$ . ii) Mostrare che  $(\ln|x|)' = P(1/x)$  nel senso delle distribuzioni.

R.  $I = 1/4$

### 3.7.15 Scritto del 09/07/13, AA 12-13

**1) ([1]+[3])** i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni  $\{1, x, x^2\}$  sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste tre funzioni in  $L_2[-1, 1]$ .

**2) [2]+[4] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)** Dato un operatore lineare limitato  $\hat{A}$ , mostrare che i) il suo insieme risolvente è aperto e ii) il suo spettro è un chiuso limitato contenuto nel cerchio  $\{|\lambda| \leq \|\hat{A}\|\}$ .

**3) ([4]+[1]+[1])** i) Sviluppare la funzione  $x^2 H(x)$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $x^2 H(x)$  e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Dire se la serie converge assolutamente e uniformemente in  $[-\pi, \pi]$ .

R.  $x^2 H(x) = \pi^2/6 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos nx + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$

Non c'è convergenza assoluta ed uniforme in  $[-\pi, \pi]$ .

**4) ([2.5]+[2.5])** Determinare per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = |x^2 - 2ax + a|^{-a}$  appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$  e a  $L_2(\mathbb{R})$ .

R. i)  $1/2 < a < 1$ , ii)  $1/4 < a < 1$

**5) ([2]+[2])** i) Calcolare  $I = \int_{-\pi/4}^1 \delta(\cos 2x) \sin x dx$ . ii) Mostrare che la

successione di funzionali  $\hat{C}^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \cos nx \varphi(x) dx$  converge a 0 in senso debole, con funzioni di prova  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ .

R.  $I = \sqrt{2}/8$ .

6) ([2.5]+[2.5]) i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

ii) Usare questo risultato per calcolare  $\sin(-i \ln A)$ , usando il ramo  $-\pi < \arg z \leq \pi$  della funzione  $\ln z$ .

R.  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\pi/4}$ ,  $v_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i)^T$ ,  $\sin(-i \ln A) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

7) ([2]+[1.5]+[1.5])(Gli studenti del corso da “10 crediti” non devono affrontare il punto iii) i) Mostrare che un operatore  $\hat{U} : H \rightarrow H$  è unitario se e solo se  $(\hat{U}y, \hat{U}x) = (y, x)$ ,  $\forall y, x \in H$ . ii) Determinare dominio e immagine dell’operatore  $\hat{E}^+ : \hat{E}^+(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots)$  affinché l’operatore stesso sia unitario. iii) Mostrare che l’operatore trasformata di Fourier  $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}(f)(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ , è unitario.

R.  $\hat{E}^+ : \{x \in l_2 : x_1 = 0\} \rightarrow l_2$

### 3.7.16 Scritto del 18/09/13, AA 12-13

1) ([2]+[2]) Data la funzione  $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^3-1|^\alpha}$ , determinare per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  essa appartiene a  $L_1(0, \infty)$  e a  $L_2(0, \infty)$ .

R.  $L_1(\mathbb{R}^+) : 1/2 < \alpha < 1$ .  $L_2(\mathbb{R}^+) : 1/3 < \alpha < 1/2$

2) ([2]+[1]+[2]) i) Sviluppare la funzione gradino di Heaviside  $H(x)$  in serie di Fourier nell’intervallo  $[-\pi, \pi]$ . ii) Disegnare e confrontare i grafici di  $H(x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ . iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

3) ([2]+[2]) i) Calcolare la derivata della funzione  $[x]$  (parte intera di  $x$ , con, ad esempio:  $[1/2] = 0$ ,  $[0] = 0$ ,  $[-1/2] = -1$ ). ii) Calcolare l’integrale

$$I = \int_0^{\infty} \delta(\sin x) e^{-x} dx.$$

R. i)  $[x]' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n)$ . ii)  $I = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)}$

4) ([1]+[2]+[2]) Si consideri la successione di funzionali  $F_n$ :  $F_n(\varphi) \equiv \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx$ ,  $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^4 x^4)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Determinare i) a cosa converge  $f_n(x)$  puntualmente in  $\mathbb{R}$  e ii) a cosa converge  $F_n$  debolmente (si usi la formula  $\int_{\mathbb{R}} dx (1+x^4)^{-1} = \pi/\sqrt{2}$ ); iii) mostrare che  $F_n$  non converge fortemente, se la funzione di prova appartiene a  $L_1(\mathbb{R})$ .

R. i)  $f_n(x) \rightarrow 0$ ,  $x \neq 0$ ;  $f_n(x) \rightarrow \infty$ ,  $x = 0$ . ii)  $F_n(\varphi) \rightarrow \delta_0(\varphi)/\sqrt{2}$ .

5) ([6]) Dato l’operatore  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ , definito dalla  $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) =$

$(x_2, x_3, x_4, \dots)$ , i) calcolarne la norma e ii) determinarne lo spettro.  
**6)** ([2]+[2]+[2]) i) Calcolare  $\sin \frac{\pi}{2} \hat{P}$ , dove  $\hat{P}$  è un operatore di proiezione ortogonale; ii) calcolare autovalori e autovettori della matrice  $A$ :

$$A = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

e iii) calcolare  $\sin A$ .

R. i)  $\sin \frac{\pi}{2} \hat{P} = \hat{P}$ . ii)  $\lambda_{\pm} = \pm\pi/2$ ,  $\underline{v}_{\pm} = (1, \pm 1)/\sqrt{2}$ . iii)  $\sin A = \frac{2}{\pi} A$ .

**7)** ([5], **esercizio obbligatorio** ([-3] se non affrontato)) Sia  $S$  un sottospazio dello spazio euclideo  $E$ , e sia  $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$  ( $N$  finito o infinito) una base ortonormale di  $S$ . Mostrare che, dato il generico vettore  $\underline{x} \in E$ ,

i) il vettore di  $S$  che meglio approssima  $\underline{x}$  è

$$\underline{x}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \xi_i \underline{e}^{(i)}, \quad \text{con } \xi_i := (\underline{e}^{(i)}, \underline{x}). \quad (17)$$

ii) il vettore  $\underline{x}^{(N)}$  è la “proiezione ortogonale” di  $\underline{x} \in E$  su  $S$ ;

iii) vale la disuguaglianza di Bessel:  $\|\underline{x}\|^2 \geq \sum_{i=1}^N |\xi_i|^2$ .

### 3.7.17 Scritto appello straordinario del 07/11/13, AA 12-13

**1)** ([1]+[3]) Mostrare che i) le funzioni  $f_1 = e^{-x}$ ,  $f_2(x) = x^2 e^{-x}$  sono indipendenti in  $L_2(\mathbb{R}^+)$ , e ii) ortogonalizzarle.

R.  $g_1(x) = e^{-x}$ ,  $g_2(x) = (x^2 - 1/2)e^{-x}$

**2)** ([3]+[2]) i) Sviluppare la funzione  $xH(-x)$  in serie di Fourier nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  ( $H(x)$  è la funzione gradino di Heaviside). ii) Individuare gli eventuali punti di  $[-\pi, \pi]$  in cui la serie non converge puntualmente a  $xH(-x)$ , e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di  $xH(-x)$  e della somma della serie su tutto  $\mathbb{R}$ .

R. i)  $xH(-x) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$ . ii) Non c'è convergenza puntuale in  $\pm\pi$

**3)** ([3]+[1]+[2]) Mostrare che, se  $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ , allora la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  è continua, uniformemente limitata, e  $\hat{f}(k) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ .

**4)** ([3]+[2]) i) A cosa converge debolmente, al variare di  $a > 0$ , la successione di funzionali lineari  $F^{(n)}$ :  $F^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$ , con  $f_n(x) \equiv \frac{n^a e^{-n^2 x^2}}{\pi}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ ? ii) Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \delta(\cos x) 2^{-x} dx \quad (18)$$

R.  $F^{(n)} \rightarrow 0$ ,  $0 < a < 1$ ;  $F^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}\delta_0$ ,  $a = 1$ ;  $F^{(n)} \rightarrow \infty$ ,  $a > 1$

5) ([1]+[3]+[2], **esercizio obbligatorio** ([-3] se non affrontato)) Sia  $\hat{A} : H \rightarrow H$  un operatore limitato. i) Definire gli insiemi risolvente  $\rho(\hat{A})$  e spettro  $\sigma(\hat{A})$ ; ii) mostrare che  $\rho(\hat{A})$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$  e che  $\sigma(\hat{A})$  è un insieme chiuso; iii) mostrare che  $\sigma(\hat{A}) \subset \{|\lambda| \leq \|\hat{A}\|\}$ .

6) ([1]+[4]) Dato l'operatore  $\hat{E}^+ : l_2 \rightarrow l_2$ , definito da  $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$ , i) calcolare  $\|\hat{E}^+\|$  e ii) individuare  $\sigma(\hat{E}^+)$ .

7) ([1]+[2]+[2]) Data la matrice  $A = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , i) Calcolare autovalori ed autovettori di  $A$ . ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice  $\sin A$ .

i) autovalori:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \pi/2$ , autovettori:  $\underline{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ ,  $\underline{v}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ . ii)  $\sin A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

### 3.7.18 Esonero di AF, AA 13-14, U. G. Aglietti — 12/06/2014

- [9] Dimostrare (in forma succinta) che un operatore autoaggiunto ha solamente autovalori reali.

R: Detto  $A : H \rightarrow H$  l'operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert complesso  $H$ , ed  $x$  un autovettore di  $A$  con autovalore (a priori complesso)  $\lambda$ , si ha che:

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle, \quad (19)$$

da cui  $\bar{\lambda} = \lambda$  in quanto  $x \neq 0$  per definizione (abbiamo usato la convenzione per cui il prodotto scalare (complesso) e' lineare rispetto al primo argomento ed antilineare rispetto al secondo).

- [8] Espandere nella base dei seni,  $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$ , la funzione  $f(x) \equiv 1$  per  $0 < x < \pi$ .

R: La base dei seni corrisponde ad un prolungamento dispari della funzione:

$$f(x) \equiv -1 \quad \text{per } x \in (-\pi, 0). \quad (20)$$

Si ottiene quindi:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin [(2n+1)x]. \quad (21)$$

Oss: diversi studenti hanno aggiunto un contributo costante alla serie di Fourier, che non puo' esserci data la forma della base, ed hanno

ottenuto dei coefficienti dimezzati in quanto non hanno continuato correttamente la funzione nell'intervallo  $(-\pi, 0)$ .

3. [8] Determinare il limite \*-debole (se esiste) della successione di funzionali data da  $f_n(x) \equiv -2n^3x / (\pi(1 + n^2x^2)^2)$ .

R: Si ha che

$$f_n(x) = \frac{d}{dx}g_n(x), \quad (22)$$

dove

$$g_n(x) = nh(nx) \quad e \quad h(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}. \quad (23)$$

Poiche' si puo' scambiare il limite con la derivata, da

$$g_n \rightharpoonup \delta_0, \quad (24)$$

segue che

$$f_n \rightharpoonup \delta'_0. \quad (25)$$

Alternativamente, si puo' integrare esplicitamente  $f_n(x)$  moltiplicata per una funzione generica di prova  $\varphi(x)$  su tutto  $R$ . Cambiando variabile da  $x \rightarrow y \equiv nx$ , integrando per parti in  $y$  in modo da far comparire  $\varphi'$ , e passando infine al limite per  $n \rightarrow \infty$  entro l'integrale, si riottiene lo stesso risultato.

4. [8] Determinare a quali spazi di Lebesgue  $L^p(R)$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , appartiene  $f(x) \equiv 1/(1 + x^2)^\alpha$  con  $\alpha$  reale.

R: Per  $\alpha < 0$ , la  $f$  diverge all'infinito e quindi non appartiene ad alcuno spazio  $L^p(R)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ . Per  $\alpha = 0$ , la funzione e' una costante non nulla,  $f(x) \equiv 1$ , e quindi appartiene solamente ad  $L^\infty(R)$ . Per  $\alpha > 0$ , occorre osservare che la  $f$  non ha singolarita' al finito e che

$$|f(x)|^p \sim \frac{1}{|x|^{2\alpha p}} \quad (26)$$

per  $|x| \gg 1$ . Nel range  $1 \leq p \leq \infty$ , si ha quindi che

$$f \in L^p(R) \quad se \quad p > \frac{1}{2\alpha}. \quad (27)$$

Notare che la diseguaglianza sopra implica  $p \rightarrow +\infty$  per  $\alpha \rightarrow 0^+$ , ovvero che vi e' continuita' nell'origine  $\alpha = 0$  da destra.

### 3.7.19 Scritto di AF dell'08/07/14; U. Aglietti

1. [9] Dimostrare (in forma succinta) che autovettori di un operatore autoaggiunto associati ad autovalori distinti sono ortogonali;
2. [8] Espandere nella base dei coseni,  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ , la funzione  $f(x) \equiv x$  per  $0 \leq x < \pi$ ;
3. [8] Determinare il limite \*-debole (se esiste) della successione di funzionali data da  $f_n(x) \equiv x / (x^2 + 1/n^2)$  ( $n \geq 1$ );
4. [8] Determinare a quali spazi di Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , appartiene  $f(x) \equiv (1 - \cos x)/|x|^\alpha$  con  $\alpha$  reale;

#### Soluzioni

1. Sia  $A : H \rightarrow H$  un operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert  $H$  ed  $x$  ed  $y$  siano due autofunzioni di  $A$  con autovalori (reali) distinti dati rispettivamente da  $\lambda$  e  $\mu$ . Allora:

$$0 = \langle Ax|y \rangle - \langle x|Ay \rangle = (\lambda - \mu)\langle x|y \rangle, \quad (28)$$

da cui  $\langle x|y \rangle = 0$ . Poiche'  $x, y \neq 0$ , per definizione di autofunzione, ne segue che essi sono ortogonali.

2. Prolungando per parita' la funzione  $f(x) = x$  all'intervallo  $(-\pi, 0)$ , si ottiene la funzione  $f_e(x) = |x|$  sul periodo  $(-\pi, \pi)$ . Espandendo quest'ultima nella serie di Fourier standard e restringendosi quindi all'intervallo  $(0, \pi)$ , si ottiene:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos[(2n+1)x]. \quad (29)$$

3. Il limite puntuale di  $f_n(x)$  per  $n \rightarrow \infty$  e'

$$\frac{1}{x} \quad (30)$$

per  $x \neq 0$  (il limite \*-debole non puo' quindi essere una delta di Dirac ne' la sua derivata, come scritto da svariati studenti). Considerando l'azione su di una funzione generica  $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$  a supporto compatto,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi_d(x)dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi_d(x)dx, \quad (31)$$

dove

$$\varphi_d(x) \equiv \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}. \quad (32)$$



La parte pari di  $\varphi(x)$  non compare in quanto  $f_n(x)$  e' dispari per ogni  $n$ . Notiamo inoltre che  $\varphi_d(0) = 0$ , di modo che l'integrale all'ultimo membro e' ben definito. Il valore principale di  $1/x$  e' dato da:

$$P \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{H(x^2 - \epsilon^2)}{x} \varphi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{H(x^2 - \epsilon^2)}{x} \varphi_d(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \varphi_d(x) dx, \quad (33)$$

dove  $H$  e' la funzione di Heaviside (gradino unitario). Confrontando, si ottiene quindi:

$$f_n \rightarrow P \frac{1}{x}. \quad (34)$$

4. E' un esercizio di analisi 1, una volta esplicitata la definizione degli spazi di Lebesgue. Occorre fare una casistica la variare di  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$ .

- Per  $\alpha < 0$ , la funzione  $f$  non e' limitata sulla retta, come si vede valutandola ad esempio in  $x_n = (2n + 1)\pi$ ,  $n$  intero. Inoltre  $|f|^p$  non e' integrabile sulla retta per alcun  $p \in [1, \infty)$ , come si vede ad esempio minorando l'integrale con la somma di integrali su intorni di  $x_n$ . In conclusione, la  $f$  non appartiene ad alcuno spazio  $L^p(\mathbb{R})$ ;
- Per  $\alpha = 0$ , la  $f$  e' limitata su  $\mathbb{R}$ , ma  $|f|^p$  non e' integrabile sulla retta per alcun  $p \in [1, \infty)$  (e' un funzione periodica a media non nulla), di modo che  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  solamente;
- Per  $0 < \alpha \leq 2$ , la  $f$  ha una singolarita' eliminabile in  $x = 0$  ed e' integrabile all'infinito per  $p > 1/\alpha$ . Dunque,  $f \in L^p(\mathbb{R})$  per  $p > 1/\alpha$ ,  $p = \infty$  incluso;
- Per  $\alpha > 2$ , l'origine e' una singolarita' integrabile solamente per  $p < 1/(\alpha - 2)$ . Combinando questa condizione con l'integrabilita' all'infinito (vedi sopra), si conclude che  $f \in L^p(\mathbb{R})$  per  $1/\alpha < p < 1/(\alpha - 2)$ . Notare che  $p = \infty$  e' escluso.

### 3.7.20 Scritto di AF del 17/09/14; U. Aglietti

1. [9] Enunciare e dimostrare (in forma succinta) le relazioni di inclusione degli spazi di successioni  $l^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

R:  $l^p \subseteq l^q$  per  $p \leq q$ , con  $p, q \in [1, \infty]$ ; l'inclusione e' inoltre stretta per  $p < q$ . Per la dimostrazione, si consulti un qualunque manuale di analisi funzionale;

2. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f_\sigma(x) \equiv x \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$ ,  $\sigma > 0$ , e commentare il risultato.

R: 1) usando il fatto che la gaussiana  $h(x) \equiv \exp(-x^2/2)$  e' un'autofunzione della trasformata di Fourier  $F[h](p)$  con autovalore  $\sqrt{2\pi}$ , 2) riscaldando le variabili  $x = y/\sigma$  e  $p = \sigma k$  e 3) derivando rispetto a  $k$  ai due membri dell'eguaglianza scambiando la derivata con l'integrale, si ottiene infine:

$$-i\sqrt{2\pi}\sigma^3 k \exp(-\sigma^2 k^2/2). \quad (35)$$

Oss: il parametro  $\sigma > 0$ , che figura a denominatore della funzione di partenza, finisce al numeratore nella trasformata di Fourier, di modo che funzioni "concentrate" nello spazio  $x$  hanno trasformate "estese" in  $k$  e viceversa;

3. [8] Determinare il limite \*-debole (se esiste) della successione di funzionali  $f_n(x) \equiv 1/2 + 1/\pi \arctan(nx)$ ,  $n \geq 0$  (sugg.: graficare  $f_n$  per qualche valore di  $n$ ).

R:  $\lim f_n(x) = 0$  per  $x < 0$  e  $\lim f_n(x) = 1$  per  $x > 0$ , di modo che il limite puntuale e' la funzione a gradino  $H(x)$  di Heaviside. Tale funzione e' anche il limite uniforme se si esclude un intorno arbitrario dell'origine, di modo che:

$$f_n \rightarrow H, \quad (36)$$

in senso \*-debole;

4. [8] Determinare a quali spazi di successioni  $l^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , appartiene la successione  $a_n \equiv 1/[\sqrt{n} \log(n)]$ ,  $n \geq 2$ .

R: per  $n > 2$

$$\frac{C}{n^{p/2+\varepsilon}} < |a_n|^p = \frac{1}{n^{p/2} \log^p(n)} < \frac{1}{n^{p/2}}, \quad (37)$$

dove  $C$  e' una costante positiva e  $\varepsilon$  e' un numero positivo arbitrariamente piccolo. Poiche'

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p/2}} < \infty \quad (38)$$

per  $p > 2$ , mentre diverge per  $p < 2$ , per il teorema del confronto,  $\{a_n\} \in l^p$  per  $p > 2$  e  $\{a_n\} \notin l^p$  per  $p < 2$ . Infine,  $\{a_n\} \in l^2$ , come si vede dal confronto asintotico con l'integrale improprio associato:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)} \approx \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^2(x)} = -\frac{1}{\log(x)} \Big|_2^{\infty} < \infty. \quad (39)$$

### 3.7.21 Scritto di AF del 28/01/15; U. Aglietti

- [9] Dimostrare, tramite un opportuno contro-esempio, che l'inclusione di spazi di successioni  $l^p \subseteq l^q$  valida per  $1 \leq p < q \leq \infty$ , e' stretta;

R: Per  $q < \infty$ , si consideri ad esempio la successione di componenti  $x_n = n^{-2/(p+q)}$ ,  $n \geq 1$ . Per  $q = \infty$ , basta considerare la successione costante  $x_n = 1$ ;

- [8] Determinare la somma in  $[-\pi, \pi]$  (in senso puntuale) della serie di Fourier  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \cos(nx)$ . Discutere anche la convergenza assoluta ed in norma  $L^2(-\pi, \pi)$ ;

R: Per sommare la serie di Fourier, si faccia la sostituzione  $z = \rho e^{ix}$ ,  $0 < \rho < 1$ , nella serie geometrica integrata ai due membri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z), \quad \log(1) = 0. \quad (40)$$

Prendendo la parte reale ai due membri e facendo il limite  $\rho \rightarrow 1^-$ , si ottiene infine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = -\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \quad (41)$$

in senso puntuale per  $x \neq 0$ . In base al teorema di isomorfismo tra  $L^2(-\pi, \pi)$  ed  $l^2$  (dimostrato a lezione), la serie sopra converge in norma  $L^2(-\pi, \pi)$  ad una funzione in questo stesso spazio. In quanto alla convergenza assoluta infine, si prenda  $x = 2\pi r/N$  con  $N = 1, 2, 3, \dots$  e  $0 \leq r \leq N$ . Restringendo quindi la somma ad  $n = Nl$ , con  $l = 1, 2, 3, \dots$ , si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\cos(nx)| \geq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} |\cos(2\pi rl)| = \infty. \quad (42)$$

Poiche' gli  $x$  della forma sopra sono densi in  $[0, 2\pi]$ , ne segue che la serie di Fourier e' ovunque assolutamente divergente;

- [8] Calcolare  $I = \int_a^{\infty} dx \theta(x-b) d\varphi(x)/dx$ , dove  $\theta$  e' la funzione a gradino di Heaviside,  $a$  e  $b$  costanti reali e  $\varphi(x)$  una funzione in un opportuno spazio di prova;

R: Per  $a \leq b$  si puo' estendere l'integrale a tutto l'asse reale senza alterarne il valore. Usando quindi la definizione di derivata di una distribuzione assieme a  $d/dx \theta(x-b) = \delta(x-b)$ , si ottiene

$$I = -\varphi(b). \quad (43)$$

Per  $b < a$ , la  $\theta$  vale identicamente uno in tutto il dominio di integrazione, di modo che

$$I = \int_a^\infty \frac{d\varphi(x)}{dx} dx = -\varphi(a), \quad (44)$$

in quanto le funzioni di prova sono nulle all'infinito;

4. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$ , con  $a$  costante positiva. Commentare il risultato.

R: Chiudendo il cammino di integrazione sotto (sopra) l'asse reale per  $k > 0$  ( $k < 0$ ), si ottiene tramite il teorema dei residui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikx)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|k|}. \quad (45)$$

Oss.: Il decadimento esponenziale e' controllato dalla distanza dei poli dall'asse reale. Nel limite  $a \rightarrow 0^+$ , la trasformata di Fourier diverge perche' i due poli semplici, in  $\pm ia$ , si fondono in un polo doppio sull'asse reale.

### 3.7.22 Compito d'esonero di AF dell'11/06/15; U. Aglietti

1. [9] Dimostrare che l'operatore lineare  $T : l^2 \rightarrow l^2$  definito da

$$(Tx)_n \equiv \frac{n}{n+1} (x_n - x_{n+1}) \quad (n \geq 1) \quad (46)$$

e' limitato e calcolare la sua norma.

R: usando le diseguaglianze

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1, \quad 2x_n x_{n+1} \leq x_n^2 + x_{n+1}^2, \quad (47)$$

si ricava che

$$\|T\| \leq 2. \quad (48)$$

Cio' implica che l'operatore  $T$  e' limitato. Prendendo poi l'estremo superiore su  $n = 1, 2, 3, \dots$  dei  $\|Tx^{(n)}\|/\|x^{(n)}\|$  con

$$x^{(n)} \equiv (+1, -1, +1, -1, \dots, +1, -1, 0_{2n+1}, 0_{2n+2}, \dots, 0, \dots), \quad (49)$$

si ottiene la diseguaglianza invertita

$$\|T\| \geq 2, \quad (50)$$

che combinata con la precedente da' infine

$$||T|| = 2. \quad (51)$$

2. [8] Calcolare i coefficienti della serie di Fourier della funzione  $f(x) \equiv |x|^3$ ,  $-\pi < x \leq \pi$  e commentare il risultato.

R: per parita'  $b_n = 0$  per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Rimane quindi da calcolare:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\pi x^3 e^{inx} dx \right] \quad (52)$$

per  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Per  $n = 0$  si ottiene direttamente:

$$a_0 = \frac{\pi^3}{2}. \quad (53)$$

Per  $n \neq 0$ , ponendo

$$u = x^3, \quad v = e^{\lambda x} \quad \text{con } \lambda \equiv in \quad (54)$$

( $\lambda =$  immaginario puro), ed usando la regola di Leibniz per le derivate dei prodotti,

$$uv''' = (u''v + uv'' - u'v')' - u'''v, \quad (55)$$

si ottiene:

$$a_n = 6\pi \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{12}{\pi n^4} [1 + (-1)^{n+1}]. \quad (56)$$

Come funzione periodica, la  $f$  e' continua, con derivata prima discontinua in  $x = \pm\pi$  (e con discontinuita' della derivata terza in  $x = 0$ ); di conseguenza i coefficienti di Fourier decadono asintoticamente come  $1/n^2$ ;

3. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) \equiv x \exp(-\delta x^2)$ ,  $\delta > 0$ , e commentare il risultato;

R: ponendo

$$x = \frac{y}{\sqrt{2\delta}} \quad (57)$$

si ottiene la trasformata di Fourier della derivata della distribuzione gaussiana con  $\sigma = 1$  (autofunzione della trasformata di Fourier con autovalore  $\lambda = -i\sqrt{2\pi}$ ) nella variabile coniugata

$$\frac{k}{\sqrt{2\delta}}, \quad (58)$$

ovvero:

$$F[f](k) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2\delta^{3/2}} k e^{-k^2/(4\delta)}. \quad (59)$$

Quanto piu' la  $f$  e' piccata (attorno ad  $x = 0$ ) tanto piu' la trasformata di Fourier e' "estesa" (attorno a  $k = 0$ ) e viceversa;

4. [8] Calcolare la derivata seconda  $F'' \equiv (F')'$  della distribuzione rappresentata dalla funzione  $F(x) \equiv H(x) \cos(x)$ , dove  $H(x) \equiv 1$  per  $x > 0$  e zero altrimenti e' la funzione di Heaviside.

R: per definizione

$$\langle F'', \varphi \rangle \equiv \langle F, \varphi'' \rangle = \int_0^\infty \cos(x) \varphi''(x) dx = -\varphi'(0) - \int_{-\infty}^\infty H(x) \cos(x) \varphi(x) dx, \quad (60)$$

dove si e' integrato per parti due volte per rimuovere la derivata seconda dalla funzione di prova  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$ . Essendo  $\varphi$  generica, si ricava che

$$F''(x) = \delta'(x) - H(x) \cos(x). \quad (61)$$

### 3.7.23 Scritto di AF del 16/09/15; U. Aglietti

1. [9] Si consideri l'operatore lineare  $T : X \rightarrow l^2$ , definito da  $(Tx)_n \equiv nx_n$ ,  $n \geq 1$ , dove  $X$  e' il piu' grande sottospazio vettoriale di  $l^2$  (le successioni a quadrato sommabile) sul quale  $T$  e' definito. Caratterizzare  $X$  e dimostrare che  $T$  e' non limitato.

R: I vettori  $x$  di  $l^2$  per i quali  $T$  e' definito soddisfano la condizione

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < \infty. \quad (62)$$

L'insieme  $X$  di tali vettori  $x$  forma uno spazio vettoriale in quanto:

- (a) se  $x \in X$ , allora  $\lambda x \in X$  per ogni  $\lambda$  reale (proprietà di cono), poiche' la serie a secondo membro dell'equazione sopra rimane finita se si moltiplica ogni  $x_n$  per  $\lambda$ ;
- (b) se  $x, y \in X$ , allora  $x+y \in X$ , come si vede facilmente espandendo il prodotto  $(x_n + y_n)^2$  ed usando la diseguaglianza  $2x_n y_n \leq x_n^2 + y_n^2$ .

Per dimostrare che  $T : X \rightarrow l^2$  e' non limitato, si consideri ad esempio la successione dei vettori della base canonica  $(e^{(n)})_{n=1,2,\dots}$ ,  $e_k^{(n)} = \delta_{n,k} = 1$  per  $n = k$  e zero altrimenti:

$$\|e^{(n)}\| = 1; \quad \|Te^{(n)}\| = n. \quad (63)$$

2. [8] Calcolare i coefficienti della serie di Fourier (nella base reale o complessa) della funzione  $f(x) \equiv |\sin(x)|$ ,  $-\pi < x \leq \pi$ , e commentare il risultato.

R: Poiche' la funzione  $f(x)$  e' pari, nella base trigonometrica compaiono soltanto la costante ed i coseni. Calcolando gli integrali, si ottiene per  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$a_n \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi(1-n^2)} \quad (64)$$

per  $n$  pari e zero altrimenti. Poiche' la  $f$  e' continua ma non possiede derivata prima continua in  $x = 0, \pm\pi$  (questi due ultimi punti coincidono), i coefficienti decadono asintoticamente come  $1/n^2$ .

3. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione  $f(x) \equiv x^2 \exp(-x^2/2)$  e commentare il risultato.

R: Ricordando che la funzione  $f(x) \equiv \exp(-x^2/2)$  e' un'autofunzione della trasformata di Fourier  $F$ ,

$$F[f](k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (65)$$

con autovalore  $\sqrt{2\pi}$ , derivando ai due membri due volte rispetto a  $k$ , si ottiene immediatamente:

$$F[f](k) = \sqrt{2\pi} (1 - k^2) \exp(-k^2/2). \quad (66)$$

Poiche' la  $f$  appartiene alla classe di Schwartz, anche la sua trasformata di Fourier vi appartiene.

4. [8] Calcolare la derivata seconda della distribuzione rappresentata dalla funzione  $F(x) = \text{segno}(x)x$ , dove  $\text{segno}(x) = 1$  per  $x > 0$  e zero altrimenti e' la funzione che ritorna il segno della variabile  $x$ .

R: Tenendo conto che, ad esempio,  $\text{segno}(x) = 2\theta(x) - 1$ , dove  $\theta(x) = 1$  per  $x > 0$  e zero altrimenti e' la funzione a gradino di Heaviside, ed

usando la regola di derivazione generalizzata per il prodotto di una distribuzione con una funzione infinitamente differenziabile, si ottiene immediatamente:

$$F''(x) = 2\delta(x), \quad (67)$$

dove  $\delta(x)$  e' la delta di Dirac centrata in zero.