MATERIALE DEL CORSO DI

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA

Analisi Funzionale

a cura di Paolo Maria Santini

http://www.roma1.infn.it/people/santini/

Docente del corso: Paolo Maria Santini

email: paolomaria.santini@uniroma1.it paolo.santini@roma1.infn.it

ufficio 215, ed. Marconi - tel. 0649914372

June 14, 2020

PROGRAMMA DEL CORSO; AA 2019-20

TESTI CONSIGLIATI

ESEMPI DI ESONERI E SCRITTI GIÀ PROPOSTI

1 Programma del corso di Analisi Funzionale; AA 2019-20

1.1 Spazi vettoriali

· **Definizione di spazio vettoriale** V sul campo $\mathbb{F}$ (in generale, il campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) come insieme di oggetti (vettori) $\underline{v} \in V$ su cui sono definite due operazioni; un'operazione interna, la *somma*, che gode della proprietà associativa e commutativa, e un'operazione esterna, il *prodotto per uno scalare* $\alpha \in \mathbb{F}$, che gode della proprietà associativa e distributiva (rispetto alla somma di scalari e di vettori). Esistenza del vettore nullo $\underline{0}$ e del vettore opposto $-\underline{v}$.
· **Esempi significativi di spazi vettoriali**. Spazi finito - dimensionali: lo spazio dei vettori ordinari in $\mathbb{R}^3$ e quello dei quadrivettori in $\mathbb{M}^4$; lo spazio $\mathbb{R}$ dei reali; lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-ple di numeri reali; lo spazio $\mathbb{C}$ dei numeri complessi; lo spazio $\mathbb{C}^n$ delle n-ple di numeri complessi; lo spazio $Mat(n, \mathbb{R})$ ($Mat(n, \mathbb{C})$) delle matrici $n \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio $Mat(m, n, \mathbb{R})$ ($Mat(m, n, \mathbb{C})$) delle matrici $m \times n$ di elementi reali (complessi); lo spazio $\mathcal{P}_n$ dei polinomi di grado $n-1$ a coefficienti reali (complessi). Spazi infinito - dimensionali: lo spazio $\mathbb{R}^\infty$ ($\mathbb{C}^\infty$) delle successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali (complessi); gli spazi l_f delle successioni finite, l_0 delle successioni convergenti a zero, l_∞ delle successioni limitate di numeri reali (complessi); gli spazi di successioni l_p, $p \geq 1$; lo spazio $C[a, b]$ delle funzioni continue sull'intervallo reale $[a, b]$; lo spazio delle funzioni analitiche in un dominio $\mathcal{D}$; gli spazi di funzioni $L_p[a, b]$, $p \geq 1$. Lo spazio degli stati $|\psi>$ (kets) di un sistema fisico in Meccanica Quantistica (esso può essere finito o infinito dimensionale).
· **Dipendenza ed indipendenza lineare** di un insieme di vettori $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^m \subset V$. Dipendenza ed indipendenza lineare di un insieme di vettori $\{\underline{v}^{(j)}\}_{j=1}^m \subset \mathbb{C}^n$, con $\underline{v}^{(j)} = (v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_n^{(j)})^T$
· **Dimensione di uno spazio vettoriale** V. Esempi: dim $\mathbb{C}^n$ = dim $\mathcal{P}_n$ $= n$. dim $\mathbb{C}^\infty = \infty$. dim $C[a, b] = \infty$
· **Base** (caso finito-dimensionale) $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^n$ in V. Se dim $V = n < \infty$, è un qualunque insieme di n vettori indipendenti. Sviluppo di un generico vettore $\underline{v} \in V_n$ nella base:

$$\underline{v} \in V \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_j \underline{e}^{(i)}, \;\; v_i \in \mathbb{R} \;\; (v_i \in \mathbb{C}).$$

Coordinate (componenti) $v_i,\ i = 1, \ldots, n$ del vettore $\underline{v}$ rispetto alla base $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i=1}^{n}$. Se la dimensione è infinita, la definizione richiede l'introduzione delle proprietà metriche dello spazio e sarà data più avanti.
· Illustrazione dei concetti di dipendenza e indipendenza lineare, di dimensione e di base attraverso esempi significativi.
· **Isomorfismo tra spazi vettoriali**; esempio: $\mathcal{P}_n$ è isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Isomorfismo tra tutti gli spazi vettoriali reali (complessi) di dimensione finita n; ruolo speciale giocato dallo spazio $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).
· **Sottospazi vettoriali**. Definizione; esempi banali: V e $\{\underline{0}\}$. Esempio non banale: l'inviluppo (span) lineare di un insieme di vettori, come l'insieme dei vettori esprimibili come combinazione lineare finita dei vettori dell'insieme di partenza. Esempi significativi in $\mathbb{R}^n$ e in $\mathcal{P}_n$.

1.2 Spazi normati

· **Spazi normati** Definizione di norma (lunghezza) $||\cdot||$ di un vettore e di spazio normato. Esempi finito-dimensionali:
$\mathbb{C}^n_\infty := (\mathbb{C}^n, ||\cdot||_\infty);\ \mathbb{C}^n_p := (\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p)$. $1 \le p < \infty$, con

$$||\underline{x}||_\infty = max_{1\le k\le n}|x_k|, \quad ||\underline{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty,\ \underline{x} \in \mathbb{C}^n$$

Diguaglianze di Young, Holder e Minkowski e dimostrazione che $||\cdot||_p$ sono norme. Significato geometrico delle palle $||\underline{x}||_{1,2,\infty} < 1$, per $\underline{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Disuguaglianze tra norme finito-dimensionali $||\underline{x}||_\infty \le ||\underline{x}||_p \le n^{1/p}||\underline{x}||_\infty,\ \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ e loro equivalenza.
Esempi di spazi normati infinito-dimensionali:
$(l_\infty, ||\cdot||_\infty);\ (l_p, ||\cdot||_p)$. $1 \le p < \infty$, con

$$||\underline{x}||_\infty = sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|, \quad ||\underline{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty$$

$C_\infty[a,b] = (C[a,b], ||\cdot||_\infty),\ C_p[a,b] := (C_{[a,b]}, ||\cdot||_p)$, con

$$||f(t)||_\infty = sup_{t\in[a,b]}|f(t)|, \quad ||f(t)||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty$$

Gli spazi di successioni $l_p, p \ge 1, l_0, l_\infty, \mathbb{C}^\infty$; le inclusioni

$$l_f \subset l_1 \subset l_2 \subset \cdots \subset l_0 \subset l_\infty \subset \mathbb{C}^\infty$$

e le disuguaglianze $||\underline{x}||_\infty \leq ||\underline{x}||_p$. Non equivalenza tra norme ∞-dimensionali.

Gli spazi funzionali $L_p[a,b]$ delle funzioni tali che $||f(t)||_p < \infty$, e L_∞ delle funzioni limitate (tali che $||f||_\infty < \infty$).
La disuguaglianza $||f||_p \leq \sqrt[p]{b-a}||f||_\infty$: la convergenza uniforme implica non solo la convergenza puntuale ma anche quella in media (in norma $||\cdot||_p$), nel caso di intervallo finito $[a,b]$.

1.3 Spazi metrici

· Definizione di distanza e spazi metrici (M,d) normati e non. Spazi normati sono spazi metrici dotati della distanza $d(\underline{x},\underline{y}) = ||\underline{x}-\underline{y}||$. Topologia indotta dalla metrica: sfera (palla) aperta e chiusa; insiemi aperti e chiusi. Parte interna di $X \subset M$, chiusura di X, frontiera di X. Esempi. Punti di aderenza e di accumulazione. Chiusura di un insieme. Successione di Cauchy. Spazio metrico completo; spazi di Banach (spazi normati completi).. Relazione tra chiusura e completezza. Insieme denso. Uso della completezza di $\mathbb{C}$ per mostrare la completezza di l_p e di l_∞. Lo spazio delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$ è completo rispetto alla $\|\cdot\|_\infty$ ma non rispetto alla norma $\|\cdot\|_p$. Esempi: i) l_p non è chiuso in $(l_\infty, ||\cdot||_\infty)$. ii) $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$ è un chiuso contenuto in $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ completo; quindi $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$ è completo. iii) $(l_f, \|\cdot\|_\infty)$ è denso in $(l_0, \|\cdot\|_\infty)$. iv) $(l_f, \|\cdot\|_p)$ è denso in $(l_p, \|\cdot\|_p)$. Insiemi limitati e totalmente limitati (per i quali esiste un ricoprimento finito). Un insieme totalmente limitato è limitato. Impossibilità di costruire una successione $\{\underline{y}^{(n)}\}$ in insieme totalmente limitato tale che $d(\underline{y}^{(n)}, \underline{y}^{(m)}) \geq \varepsilon$, $\forall \varepsilon$. La palla unitaria in $(l_p, ||\cdot||_p)$ è un insieme limitato ma non totalmente limitato. Spazi compatti e loro caratterizzazione come spazi completi e totalmente limitati (dimistrazione solo in un senso). Lo spazio dei polinomi è denso in $C[a,b]$ (primo th. di Weierstrass, senza dimostrazione) e lo spazio dei polinomi trigonometrici è denso nello spazio delle funzioni continue con condizioni periodiche al bordo (secondo Th. di Weierstrass, senza dimostrazione), entrambi nella norma uniforme (e quindi nelle norme p).
· **Insieme completo di vettori e base**.
Inviluppo lineare (span) di un insieme di vettori. Esempi: $\text{span}\{\underline{e}^{(n)}\}_1^N = \mathbb{C}^N$, $\underline{e}^{(n)} \in \mathbb{C}^n$, $e_j^{(n)} = \delta_{nj}$; $\text{span}\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} = l_f$, $\underline{e}^{(n)} \in l_f$, $e_j^{(n)} = \delta_{nj}$; $\text{span}\{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$= insieme dei polinomi; $\text{span}\{1, \cos\ nt, \sin\ nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ = insieme dei polinomi trigonometrici.
Insieme completo di vettori e base nel caso infinito-dimensionale. Esempi: l'insieme $\{\underline{e}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $e_j^{(n)} = \delta_{nj}$ è una base in $(l_p, ||\cdot||_p)$ e in $(l_0, ||\cdot||_\infty)$; l'insieme $\{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base in $(C_{[a,b]}, ||\cdot||_\infty)$, in $C_p[a,b]$ e in $L_p[a,b]$.

L'insieme dei monomi trigonometrici $\{1, \cos\ nt, \sin\ nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base (la base di Fourier) nello spazio $V \equiv \{f \in C_2[-\pi,\pi],\ f(-\pi) = f(\pi)\}$ rispetto alla norma uniforme (e quindi rispetto alla norma p). Poiché V è denso in $C_2[-\pi,\pi]$, che è denso in $L_2[-\pi,\pi]$ in norma 2, l'insieme dei monomi trigonometrici è una base in $(L_2[-\pi,\pi], ||\cdot||_2)$.
Lo spazio $(L_2[a,b], ||\cdot||_2)$ come completamento di $(C_2[a,b], ||\cdot||_2)$ (usando il fatto cha $C_2[a,b]$ è denso nello spazio delle funzioni a gradino in $[a,b]$ e che quest'ultimo è denso in $L_2[a,b]$ (quest'ultima proprietà solo giustificata)).
Spazi separabili. Esempi significativi di insiemi densi numerabili e dei corrispondenti spazi separabili: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$; l'insieme delle successioni finite a coefficienti con parte reale e immaginaria razionali è denso in l_p; l'insieme dei polinomi a coefficienti con parte reale e immaginaria razionali è denso in $C_\infty[a,b],\ C_p[a,b],\ L_p[a,b]$; l'insieme dei polinomi trigonometrici a coefficienti con parte reale e immaginaria razionali è denso in $C_\infty[-\pi,\pi],\ C_p[-\pi,\pi],\ L_p[-\pi,\pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$.

1.4 Spazi euclidei

· **Spazio euclideo** come spazio vettoriale complesso (reale) dotato di *prodotto scalare*. Proprietà assiomatiche del prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz. Definizioni indotte di *norma (lunghezza)* di un vettore, di *distanza* tra due vettori e di *angolo* tra due vettori.
· Esempi di spazi euclidei: gli spazi finito-dimensionali:
$\mathbb{R}^n_2,\ \mathbb{C}^n_2$, con $(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k \eta_k$;
$Mat(n, \mathbb{C})$, con $(A, B) := tr(A^\dagger, B)$;
$\mathcal{P}_n$ con $(f, g) = \int\limits_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$.
Esempi di spazi infinito-dimensionali separabili:
l_2, con $(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \bar{\xi}_k \eta_k$;
$C_2[a,b],\ L_2[a,b]$ con $(f, g) = \int\limits_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$.
Spazi euclidei pesati.

· Ortogonalità di due vettori. Indipendenza di un insieme di vettori ortogonali e osservazione che n vettori ortogonali costituiscono una base dello spazio euclideo n-dimensionale E. Teorema di Pitagora. Spazi euclidei separabili, esistenza di basi ortonormali e loro costruzione da un insieme numerabile e denso di vettori indipendenti attraverso il procedimento di ortogonalizzazione di Gram - Schmidt. Minimi quadrati e proiezione ortogonale;

coefficienti di Fourier e disuguaglianza di Bessel. Relazione di Parseval e base ortonormale. Spazi di Hilbert (euclidei e completi). Spazi di Hilbert separabili ed isomorfismo lineare ed euclideo tra lo spazio di Hilbert e l_2 (lo spazio delle successioni dei coefficienti di Fourier).
Complemento ortogonale $S^\perp$ di S rispetto allo spazio euclideo E. Unicità della decomposizione di $\underline{x} \in E$ come $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$, con $\underline{y} \in S$, $\underline{z} \in S^\perp$; $S^\perp$ come sottospazio chiuso di E.
Ortogonalizzazione dei monomi. i) nell'intervallo $[-1, 1]$ con peso 1 si ottengono i polinomi di Legendre (a meno di costanti moltiplicative); ii) sulla retta con peso e^{-x^2} si ottengono, a meno di costanti moltiplicative, i polinomi di Hermite. iii) il sistema dei monomi trigonometrici è già ortogonale.

1.5 Operatori lineari. Primo esempio: funzionali lineari e distribuzioni

· *Operatori lineari* $\hat{A}$ tra gli spazi vettoriali normati X e Y: $\hat{A}: X \to Y$. L'insieme degli operatori lineari è uno spazio vettoriale, con $(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B})\underline{x} = \alpha(\hat{A}\underline{x}) + \beta(\hat{B}\underline{x})$, $\forall \underline{x} \in X$.
· Dominio $\mathcal{D}(\hat{A})$, immagine (range) $\mathcal{R}(\hat{A})$ e Ker (nucleo) $\mathrm{Ker}(\hat{A})$ dell'operatore $\hat{A}$. Equivalenza tra le nozioni di continuità in $\underline{0}$, in X e limitatezza di un operatore lineare. Norma di un operatore lineare. Primo esempio: il funzionale lineare.
· Definizione di funzionale lineare su uno spazio vettoriale V. Il funzionale "componente j-esima" di un vettore come esempio significativo. Lo spazio dei funzionali lineari è esso stesso uno spazio vettoriale V^*, detto il duale di V. Base duale. Espressione generale di un funzionale lineare f sul generico vettore $\underline{v} \in V$ nel caso discreto e continuo:

$$f(\underline{v}) = \sum_k f_k v_k, \quad F(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

Il Ker del funzionale lineare definisce un iperpiano passante per l'origine di codimensione 1.
Il prodotto scalare $f(\underline{x}) := (\underline{x}_0, \underline{x})$, $\forall \underline{x} \in E$ è un funzionale lineare di norma $\|f\| = \|\underline{x}_0\|_2$. Anche l'inverso è vero (teorema di Riesz): per ogni funzionale lineare continuo $f: E \to \mathbb{C}$ esiste unico $\underline{x}_0 \in E$ tale che i) $f(\underline{x}) = (\underline{x}_0, \underline{x})$, $\forall \underline{x} \in E$; ii) $\|f\| = \|\underline{x}_0\|_2$. Funzionali regolari e singolari; il funzionale "delta di Dirac" $\hat{\delta}_{x_0}$ definito dalla $\hat{\delta}_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$, $\forall \varphi$ in un'opportuno spazio di prova.

· Esempi di norme di funzionali lineari.

$$f(\underline{x}) = \sum_k f_k x_k, \ \Rightarrow \ \begin{cases} ||f|| = ||\underline{f}||_1 & \text{se } \underline{x} \in l_\infty, \\ ||f|| = ||\underline{f}||_\infty & \text{se } \underline{x} \in l_1, \\ ||f|| = ||\underline{f}||_q & \text{se } \underline{x} \in l_p, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \end{cases}$$
$$F(\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx, \ \Rightarrow \ \begin{cases} ||F|| = ||f||_1 & \text{se } \varphi \in L_\infty[a,b], \\ ||F|| = ||f||_\infty & \text{se } \varphi \in L_1[a,b], \\ ||F|| = ||f||_q & \text{se } \varphi \in L_p[a,b], \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \end{cases}$$
$$||\hat{\delta}_{x_0}|| = 1, \text{ se } \varphi \in (C[a,b], \|\cdot\|_\infty); \quad \hat{\delta}_{x_0} \text{ non limitato se } \varphi \in (C[a,b], \|\cdot\|_2). \tag{1}$$

Convergenza forte (in norma) e debole di un funzionale lineare. Formalizzazione dei concetti di punto materiale, carica puntiforme e forza impulsiva attraverso la funzione $\delta(x)$ di Dirac e suo collegamento col funzionale $\hat{\delta}$ di Dirac. Successioni di funzionali $\delta_{x_0}^{(n)}$:

$$\delta_{x_0}^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} np(n(x-x_0))\varphi(x)dx, \ p(x) = p(-x), \ \int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$$

che convergono al funzionale δ_{x_0} in senso debole, ma non in senso forte.
Esempi: la lorenziana $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, la gaussiana $p(x) = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ e la funzione $p(x) = \frac{\sin(x)}{\pi x}$. δ con supporto agli estremi di integrazione.
Spazi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$ delle funzioni di prova. Distribuzione come funzionale lineare continuo. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$ è un funzionale lineare continuo (distribuzione).
Proprietà varie della δ di Dirac. Derivata n-esima di una distribuzione. La derivata della funzione gradino è la δ. Derivata di funzione discontinua con discontinuità semplice. Esempi.
· La δ in $\mathbb{R}^n$; dimostrazione delle equazioni: i) $\Delta(\log \|\underline{x}\|_2) = 2\pi\delta(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$; ii) $\Delta(1/\|\underline{x}\|_2) = -4\pi\delta(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, dove Δ è l'operatore Laplaciano. Quindi $g(x) = \frac{1}{2\pi}\log\|\underline{x}\|_2$ e $g(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\underline{x}\|_2}$ sono le funzioni di Green dell'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ (si veda la sezione sulla funzione di Green).
· Il lemma di Riemann-Lebesque e la dimostrazione che i funzionali C_n, S_n:

$$C_n(\varphi) = \int_a^b \cos(nx)\varphi(x)dx, \quad S_n(\varphi) = \int_a^b \sin(nx)\varphi(x)dx$$

convergono a 0 in senso debole, ma non forte.
Condizione di Dini e dimostrazione che

$$F_n(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(n(x-x_0))}{\pi x}\varphi(x)dx \to \varphi(x_0), \quad n \to \infty \tag{2}$$

nel senso delle distribuzioni, sotto opportune ipotesi su φ. Se $\varphi(x)$ ha una discontinuità semplice in x_0, allora $F_n(\varphi) \to \frac{\varphi(x_0^+)+\varphi(x_0^-)}{2}, \quad n \to \infty$. Rappresentazione di Fourier della δ. Ortonormalità e completezza di una base con la δ.

1.6 Serie e Trasformata di Fourier; trasformata di Laplace

La serie di Fourier (SF) troncata come proiezione ortogonale di un elemento di L_2 su un sottospazio finito dimensionale; la base di Fourier come sistema ortonormale e completo in L_2. Disuguaglianza di Bessel e relazione di Parseval e convergenza in media quadratica. Proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della SF: nucleo di Dirichlet e condizione di Dini. Convergenza della SF in un punto di discontinuità semplice della funzione da sviluppare. Sviluppo in SF di funzioni elementari. Relazione tra $f'(x)$ e la derivata della serie di Fourier di $f(x)$. Regolarità della funzione e convergenza a zero dei coefficienti della SF. Esercizi sul calcolo della funzione e della sua norma euclidea dalla conoscenza dei suoi coefficienti di Fourier. Uso della somma di serie di Taylor e di Laurent notevoli per il calcolo della somma di SF di funzioni infinitamente derivabili e periodiche con tutte le loro derivate. Fenomeno di Gibbs. Sistemi trigonometrici completi nell'intervallo $[0, \pi]$; la SF dei seni e quella dei coseni. SF su un intervallo qualsiasi $[a, b]$.

Trasformata di Fourier (TF) come limite continuo della serie di Fourier. Proprietà della trasformata di Fourier: uniforme limitatezza, convergenza a zero per $|k| \to \infty$ e continuità, se $f \in L_1(\mathbb{R})$. Proprietà di convergenza puntuale dell'antitrasformata di Fourier se e $f \in L_1(\mathbb{R})$ e soddisfa alla condizione di Dini. Convergenza dell'antitrasformata in un punto di discontinuità semplice. Se $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(k) \notin L_1(\mathbb{R})$. Esempio in cui $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f \notin L_1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(k)$ è singolare in $k = 0$, ma $\hat{f}(k) \in L_2(\mathbb{R})$. Trasformata di Fourier di funzioni elementari e di distribuzioni.Altre proprietà della TF: traslazione e derivazione nello spazio di Fourier. Relazione tra regolarità della funzione e rapidità di convergenza a zero della TF. Invarianza dello spazio di Schwartz rispetto alla TF. Teorema di Plancherel dimostrato solo nello spazio di Schwartz) ed invarianza di $L_2(\mathbb{R})$ rispetto alla TF. Prodotto di convoluzione e teorema di convoluzione. Significato fisico del prodotto di convoluzione (invarianza per traslazioni, causalità). Significato fisico della trasformata di Fourier.

Dalla Trasformata di Fourier alla Trasformata di Laplace. Esempio di calcolo dell'anti Trasformata di Laplace con l'uso del teorema dei residui. Il teorema di convoluzione per la trasformata di Laplace. Uso della trasformata di Laplace per risolvere equazioni differenziali con condizioni in $t = 0$ sulla funzione e sulle sue derivate.

1.7 Operatori lineari

Operatori lineari $\hat{A}$ tra gli spazi vettoriali normati X e Y: $\hat{A}: X \rightarrow Y$. L'insieme degli operatori lineari è uno spazio vettoriale, con $(\alpha\hat{A}+\beta\hat{B})\underline{x} = \alpha(\hat{A}\underline{x})+\beta(\hat{B}\underline{x})$, $\forall \underline{x} \in X$.
· Dominio $\mathcal{D}(\hat{A})$, range (immagine) $\mathcal{R}(\hat{A})$ e Ker (nucleo) $\mathrm{Ker}(\hat{A})$; se $\hat{A}$ è continuo, il nucleo è un sottospazio chiuso di X.
· Se $\hat{A}$ è un operatore finito dimensionale, ad esempio una matrice $n \times n$: $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, allora dim $\mathcal{R}A$+dim Ker(A)=n. Esempio di calcolo di Ker e Immagine di una matrice.
· Esempi di operatori infinito-dimensionali: i funzionali lineari, le traslazioni $\hat{E}^{\pm}$ su l_2, la moltiplicazione per una funzione, la derivazione, l'integrazione, la traslazione e gli operatori integrali di Fredholm e Volterra su $C_{\infty}[a,b]$ e su $L_2[a,b]$. Rappresentazione matriciale di operatori rispetto ad una base, nel caso finito e infinito dimensionale. Le rappresentazioni matriciali degli operatori di derivazione, integrazione e traslazione rispetto alla vase dei monomi; le rappresentazioni matriciali degli operatori $\hat{E}^{\pm}$ di traslazione su l_2 rispetto alla base canonica di l_2. Inverso di un operatore; esempi: gli operatori $\hat{E}^{\pm}$.
· Equivalenza tra le nozioni di continuità in $\underline{0}$, in X e limitatezza di un operatore lineare. Norma di un operatore lineare. Calcolo della norma di alcuni esempi di operatori limitati: il caso delle matrici su $\mathbb{C}^n$, gli operatori di Fredholm in $C_{\infty}[a,b]$ e in $L_2[a,b]$; i proiettori ortogonali; le traslazioni $\hat{E}^{\pm}$ su l_2, la moltiplicazione per x in $C_{\infty}[a,b]$ e in $L_2[a,b]$. Esempi di operatori non limitati: la moltiplicazione per x in $C_{\infty}(\mathbb{R})$ $(L_2(\mathbb{R}))$ e gli operatori di derivazione.
· Somma e prodotto di operatori lineari; se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono operatori lineari limitati, la loro somma e prodotto sono operatori lineari limitati. Completezza dello spazio degli operatori $\hat{A}: X \rightarrow Y$, se Y è completo (senza dimostrazione). Funzione di operatore $f(\hat{A})$ con esempi. Funzione di matrice $f(A)$. Calcolo di $f(A)$ attraverso lo sviluppo in serie e, se A è diagonalizzabile, attraverso la formula $f(A) = T diag(\lambda_1, .., \lambda_n)T^{-1}$.
· Esempi importanti di funzioni di operatori: 1) $exp(\hat{A})$; proprietà dell'esponenziale di un operatore. La soluzione dell'equazione differenziale $d\underline{x}/dt = \hat{A}\underline{x}$, con $\hat{A}$ operatore costante è $\underline{x}(t) = \exp(\hat{A}t)\underline{x}_0$. 2) $(\hat{1}-\hat{A})^{-1}$; applicazione: risoluzione del problema lineare $(\hat{1}-\hat{A})\underline{x} = \underline{y}$, con $\underline{y} \in X$ termine noto e X spazio di Banach. Applicazione alla soluzione di equazioni integrali di Fredholm; serie di Neumann e sua interpretazione perturbativa. Esempio.

· *L'aggiunto di un operatore.* Definizione di aggiunto (hermitiano coniugato) $\hat{A}^\dagger$ dell' operatore $\hat{A}$; sua esistenza ed unicità. Involutività dell'operazione di coniugazione hermitiana. La rappresentazione matriciale $A^\dagger$ dell'operatore $\hat{A}^\dagger$ in una base ortonormale è la matrice aggiunta (hermitiana coniugata) della matrice A che rappresenta $\hat{A}$ nella stessa base: $(A^\dagger)_{ij} = \bar{A}_{ji}$. L'aggiunto di una combinazione lineare di operatori, del prodotto di operatori e dell'inverso di un operatore. $\|\hat{A}^\dagger\| = \|\hat{A}\|$. Se M è invariante rispetto ad $\hat{A}$, allora il complemento ortogonale $M^\perp$ di M è invariante rispetto a $\hat{A}^\dagger$.
· *Operatore autoaggiunto* (hermitiano), come operatore invariante rispetto all'operazione di coniugazione hermitiana: $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ e sua rappresentazione, rispetto a basi ortonormali, in termini di matrici autoaggiunte (hermitiane) (cioè tali che: $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$). CNES affinchè un operatore sia hermitiano è che la sua forma quadratica $(\underline{x}, \hat{A}\underline{x})$ (detta, in questo caso, forma hermitiana) sia reale $\forall \underline{x} \in E$. La rappresentazione cartesiana di un operatore. Esempi: l'aggiunto di un operatore di Fredholm e la condizione che rende un operatore di Fredholm auto-aggiunto. Gli operatori $\hat{E}^+$ ed $\hat{E}^-$ sono gli aggiunti l'uno dell'altro. L'aggiunto della derivata d/dx è $-d/dx$, se agisce su funzioni periodiche. Gli operatori quantità di moto, energia cinetica e di Schrödinger della Meccanica Quantistica sono auto-aggiunti in $L^2(R)$, o sull'intervallo finito con opportune condizioni al bordo. Il problema di Sturm-Liouville e le condizioni che lo rendono auto-aggiunto.
· *Proiettori.* Uno operatore e' un proiettore se e solo se è idempotente. Se, in aggiunta, è auto-aggiunto, allora è un proiettore ortogonale. Il proiettore ortogonale nella notazione usuale ed in quella di Dirac. Esempi.
· *Operatori unitari.* L'operatore $\hat{U} : H \to H$ è unitario se il dominio e l'immagine di $\hat{U}$ coincidono con H e $\hat{U}$ è una isometria: $(\hat{U}\underline{x}, \hat{U}\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y})$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in H$ (lascia invariante il prodotto scalare, cioè la norma dei vettori e l'angolo compreso). Tre esempi importanti: l'operatore di traslazione $\hat{T}$: $\hat{T}f(x) = f(x + a)$, la trasformata di Fourier e le matrici ortogonali. Proprietà di operatori unitari: se $\hat{U}$ è unitario i) ha norma 1, ii) trasforma sistemi ortonormali in sistemi ortonormali; iii) esite l'inverso, anch'esso unitario, e $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1}$ $(\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1})$; iv) il prodotto di operatori unitari è unitario. Le matrici che rappresentano operatori unitari rispetto ad una base ortonormale hanno i vettori riga ortonormali e i vettori colonna pure.
· *Operatori di rango finito*, la cui immagine è uno spazio finito dimensionale. Esempio: gli operatori in forma diadica. Esempio di operatore di Fredholm in forma diadica. La risoluzione di un'equazione integrale di Fredholm per operatori di rango finito è ricondotta alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari algebriche.

· *Operatori compatti* Definizione, proprietà ed esempi di operatori compatti: operatori finito dimensionali, operatori di rango finito, limite in norma di operatori di rango finito. Esempi di operatori non compatti. Gli operatori di Fredholm sono compatti.

1.8 Teoria spettrale degli operatori lineari

Riepilogo della teoria spettrale di operatori finito-dimensionali ed esistenza del solo spettro discreto.
Operatori infinito-dimensionali. Operatore risolvente e insieme risolvente. Lo spettro come unione di spettro discreto, continuo e residuo. Proprietà dell'insieme risolvente e dello spettro di operatori limitati. Relazione tra spettro di $\hat{A}$ e di $\hat{A}^\dagger$. Se $\hat{A}$ è un operatore auto-aggiunto e limitato, lo spettro è un compatto di $\mathbb{R}$. Quindi gli autovalori, se esistono, sono reali e autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali. Se $\hat{U}$ è unitario, il suo spettro è un chiuso limitato della circonferenza unitaria. Quindi gli autovalori, se esistono, hanno modulo 1; se $\underline{x}$ è autovettore di $\hat{U}$, lo è anche di $\hat{U}^\dagger$; autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali. Gli autovalori dei proiettori sono o 0 o 1. Lo spettro di operatori di rango finito si riduce al calcolo dello spettro di una matrice; consiste quindi solo di autovalori. Lo spettro di $\hat{E}^{\pm}$. Spettro degli operatori quantita' di moto, energia cinetica ed energia in meccanica quantistica. Spettro dell'operatore posizione e dell'operatore di traslazione. Lo spettro di operatori compatti consiste di autovalori (ad eccezione, al più, di $\lambda = 0$); è numerabile, infinito, finito o nullo (senza dimostrazione). Esempi. Lo spettro di $f(\hat{A})$. Spettro del problema di Sturm-Liouville (SL). Se il problema di SL è proprio, è possibile rappresentare una funzione derivabile a tratti nella base delle autofunzioni del problema di SL (senza dimostrazione).

1.9 Sistemi dinamici intorno a posizioni di equilibrio

Sistemi dinamici non lineari e punti d'equilibrio stabili e instabili. Equazioni linearizzate intorno alla posizione d'equilibrio: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$. Equazione agli autovalori per la matrice costante A: $A\underline{v}^{(j)} = \lambda_j \underline{v}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$. Soluzione generale nella forma $\underline{x}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} \underline{v}^{(j)}$. Punto d'equilibrio asintoticamente stabile se $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, $j = 1, \ldots, n$. Punto d'equilibrio instabile se almeno uno degli autovalori ha parte reale positiva. Sorgenti, pozzi, punti di sella, centri, sorgenti e pozzi a spirale.

1.10 Soluzione di problemi al valore iniziale ed al contorno per equazioni della fisica matematica lineare

Uso del metodo della trasformata di Fourier per risolvere il problema di Cauchy sulla retta per l'equazione di Schrödinger per la particella libera e per l'equazione di Fourier (o del calore) (o della diffusione). Uso del metodo della serie di Fourier per risolvere il problema della corda vibrante bloccata agli estremi e l'equazione del calore con condizioni al contorno di tipo Neumann o Dirichlet.

1.11 Funzione di Green

Definizione di funzione di Green $G(x, x')$ di un operatore lineare $\hat{L}_x$ e suo uso per risolvere il problema non omogeneo $\hat{L}_x u = f$. La funzione di Green generale si ottiene sommando alla funzione di Green particolare il Ker$\hat{L}_x$. Caso in cui $\hat{L}_x$ é un operatore del prim'ordine. Caso di operatore del second'ordine in forma canonica $\hat{L}_x = d^2/dx^2 - V(x)$ e costruzione della funzione di Greeen generale. I casi particolari delle funzioni di Green avanzata e ritardata. Caso particolare importante: $\hat{L}_x = d^2/dx^2 + k^2$. Calcolo della risposta di un oscillatore armonico forzato con forzante impulsiva e non. Uso della funzione di Green per trasformare un'equazione differenziale + condizioni al contorno in un'equazione integrale. Esempio: studi delle autofunzioni dello spettro continuo dell'operatore di Schrödinger stazionario con potenziale localizzato. Funzione di Green del Laplaciano in 2 e 3 dimensioni (fatto nella sezione Distribuzioni).

1.12 Argomenti vari raccolti insieme

Cambiamento di base. Diagonalizzazione di una matrice. Funzione di matrice attraverso la diagonalizzazione. Decomposizione spettrale. Funzione di matrice per matrici di Jordan. Teorema spettrale per operatori autoaggiunti (caso finito dimensionale). Forme hermitiane e teorema minimax. Operatori hermitiani che commutano e base comune di autovettori ortogonali. Operatori normali. Teorema spettrale per operatori normali (caso finito dimensionale). Teorema spettrale per operatori auto-aggiunti e compatti su spazi di Hilbert separabili (solo enunciato) e soluzione dell'equazione $(\hat{1} - \mu\hat{A})x = y$. Meccanica Quantistica, i suoi postulati, ed il ruolo degli operatori hermitiani, unitari e di proiezione.

2 TESTI CONSIGLIATI

Gli argomenti svolti in questo corso sono un sottoinsieme di quelli contenuti nel libro (attenzione agli errori di stampa!):

1) C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, "Metodi Matematici della Fisica", Carocci Editore, Roma, 2002.

Si consiglia anche:

2) F. Calogero, "Metodi Matematici della Fisica", Dispense Istituto di Fisica, Universita' di Roma, 1975. Materiale reperibile su rete all'indirizzo:
http://www.phys.uniroma1.it/web_disp/d1/index.html

Inoltre, per ulteriori approfondimenti:

3) S. Fomin, A. Kolmogorov, "Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale", MIR 1980

4) F. Cesi, "Rudimenti di analisi infinito dimensionale", dispense disponibili su rete all'indirizzo:
http://zephyrus.roma1.infn.it/ cesi/modelli-08/outline-s.pdf

5) B. Friedman, "Principles and techniques of applied mathematics", Dover Publications, New York 1990.

6) I. M. Gel'fand, "Lectures on Linear Algebra", Dover Publications, NY, 1989.

7) G. Fano, "Metodi matematici della Meccanica Quantistica", Zanichelli, Bologna, 1967.

8) V. Smirnov, "Corso di Matematica Superiore", Volume II, Editori Riuniti, 1977.

9) I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, "Generalized functions", Vol.1, Academic Press, 1964.

10) P. Dennery, A. Krzwicki, "Mathematics for Physicists", Harper and Row, 1967.

3 COMPITI D'ESONERO E SCRITTI PROPOSTI

3.1 3^0 Esonero del 26/05/08; AA 07-08

1) ([**1**]+[**4**]) i) Determinare per quale valore del parametro a i tre polinomi di secondo grado $\{a - x,\ x(1-x),\ 1-x^2\}$ sono dipendenti.
ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $(0,1)$ e ortogonalizzarla.
R. i) $a = 1$. ii) $e_1 = 1, e_2 = x - 1/2, e_3 = x^2 - x + 1/6$.
2) [1]+[3]+[2] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato)
Dimostrare che lo spazio l_2 è uno spazio i) euclideo, ii) completo e iii) separabile. (Per il punto ii), si faccia uso della completezza di $\mathbb{C}$)
3) ([**1**]+[**3**]) i) Dare la definizione di insieme A denso nell'insieme B. ii) Mostrare che lo spazio delle successioni che consistono in un numero finito di elementi è denso nello spazio l_2.
4) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = H(4 - x^2)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2n}{2n}\right)^2$.
R. i) $H(4-x^2) = \frac{2}{\pi}(1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{2n} \cos nx)$; iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin 2n}{2n}\right)^2 = \frac{\pi - 2}{4}$.
5) [**6**] Studiare la convergenza debole e forte delle successioni di funzionali $\{f^{(n)}\}_1^{\infty}$ tali che:

$$f^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n^j e^{-n|x|} \varphi(x) dx$$

nei tre casi $j = 0, 1, 2$ (scegliere a piacere lo spazio delle funzioni di prova).
R. Conv debole: $j = 0:\ 0,\ j = 1:\ 2\delta_0,\ j = 2:\ \infty$
6) ([**3**]+[**3**]) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni appartengono a L_1 e L_2 negli intervalli indicati.

$$f(x) = \frac{e^{-x} \sinh \alpha x}{|x^2 - 9|^{\alpha}},\ [0, \infty); \quad g(x) = \frac{1}{|x^2 - 4|^{\alpha} |x - \alpha + 1/3|^{1/2}},\ [0, \infty).$$

R. $f(x) \in L_1:\ -1 < \alpha < 1$, $f(x) \in L_2:\ -1 < \alpha < 1/2$; $g(x) \in L_1:\ 1/4 < \alpha < 1$, $g(x) \in L_2:\ 0 < \alpha < 1/3$
7) ([**4**]) Calcolare

$$\int_{-n-1/2}^{n+1/2} \delta(\sin \pi x) e^{3ix} dx$$

facendo anche uso della somma $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

R. $\frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{3ik} = \frac{\sin 3(n+1/2)}{\pi\sin(3/2)}$

3.2 4^0 Esonero del 20/06/08; AA 07-08

1) **[5]** Sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$, se l'operatore $\hat{A}$ agisce sulla base nel seguente modo: $\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}$, $\hat{A}\underline{e}^{(2)} = \underline{e}^{(2)}$, $\hat{A}\underline{e}^{(3)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(3)}$, i) mostrare che $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$; ii) trovare autovalori, autovettori e diagonalizzare l'operatore attraverso una trasformazione unitaria. (autovalori: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$; autovettori: $\underline{v}^{(1)} = (1/\sqrt{2})(1,0,-1)^T$, $\underline{v}^{(2)} = (0,1,0)^T$, $\underline{v}^{(3)} = (1/\sqrt{2})(1,0,1)^T$, $U = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}\underline{v}^{(3)})$).
2) **[5] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato)** Sia $\hat{A}: \ H \to H$ un operatore limitato. Mostrare che l'insieme risolvente $\rho(\hat{A})$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$, mentre lo spettro $\sigma(\hat{A})$ è un insieme chiuso contenuto nel disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| \le ||\hat{A}||\}$.
3) (**[5]**) Un oscillatore armonico smorzato, inizialmente a riposo, è soggetto ad un impulso I che agisce all'istante t'. Determinare l'evoluzione dell'oscillatore per $t > t'$. Si ricordi che un oscillatore armonico smorzato, non soggetto ad altre forze, è caratterizzato dall'equazione $(d^2/dt^2 + 2\gamma d/dt + \omega_0^2)x(t) = 0, \ \gamma, \ \omega_0 > 0$.
$\omega_0 > \gamma : \ x(t) = G(t,t') = I\frac{\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma(t-t')}H(t-t')$
$\omega_0 < \gamma : \ x(t) = G(t,t') = -\frac{I}{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\sinh\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}(t-t')e^{-\gamma(t-t')}H(t-t'))$
4) (**[3]+[3]**) Dato l'operatore $\hat{A} = -id/dx + x$, agente sulla varietà lineare, densa in $L_2[-\pi,\pi]$, delle funzioni f tali che $\hat{A}f \in L_2[-\pi,\pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$, i) mostrare che è autoaggiunto in tale spazio e determinarne autovalori e autofunzioni (sempre in tale spazio). ii) Mostrare che è autoaggiunto anche in $L_2(\mathbb{R})$ e determinarne lo spettro in $L_2(\mathbb{R})$. (R. i) spettro discreto: $\lambda_n = n, \ n \in \mathbb{Z}, \ \psi_n(x) = e^{i\lambda_n x - ix^2/2}$; ii) spettro continuo $\lambda \in \mathbb{R}$ con autofunzioni limitate $\psi(x,\lambda) = e^{i\lambda x - ix^2/2}$).
5) (**[2]+[5]**) L'operatore $\hat{A} : l_2 \to l_2$ è definito da $(\hat{A}\underline{x})_n = x_{n+1} + x_{n-1}, \ n \ge 1, \ x_0 = 0$. Mostrare che: i) $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$; ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \{-2 \le \lambda \le 2\}$ (sugg.: cercare la soluzione dell'equazione agli autovalori nella forma $x_n = z^n$ ed esprimere z in funzione di λ; infine ricordare che $x_0 = 0$).
(R. $x_n = z^n \ \Rightarrow \ z = z_{\pm} = \frac{\lambda \pm i\sqrt{4-\lambda^2}}{2} = e^{\pm i\theta(\lambda)}, \ |z_{\pm}| = 1, \ \overline{z_-} = z_+$, se $-2 \le \lambda \le 2$. Allora $x_n = \alpha z_+^n + \beta z_-^n; \ x_0 = 0 \ \Rightarrow \ x_n = \alpha(z_+^n - z_-^n) = C\sin\theta(\lambda), \ -2 \le \lambda \le 2)$

6) ([**3**]) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

caratterizzare Ker(A), $\mathcal{R}(A)$ e determinare la dimensione e vettori di base di tali spazi.
(R. Ker(A)=span($\{(-i, 1, i-2)\}$), dim Ker=1; Im(A)=$\{\underline{y} \in \mathbb{C}^3;\ y_3 = iy_1\}$ = span($\{(1,0,i),(0,1,0)\}$); dim Im =2)
7) ([**2**]+[**3**]) Dato l'operatore di Fredholm

$$\hat{K}f(t) := \int_{-1}^{1} (t-s)f(s)ds,$$

i) determinare autovalori e autofunzioni di $\hat{K}$. iii) Determinare le condizioni sul parametro $\mu \in \mathbb{C}$ sotto le quali l'equazione di Fredholm $x(t) - \mu\hat{K}x(t) = y(t)$ ammette un'unica soluzione $x(t)$, per ogni termine noto $y(t) \in L_2[-1,1]$, e ottenere tale soluzione.
(R. i) $\lambda_\pm = \pm 2i/\sqrt{3}$, $\psi_\pm(t) = \mp i\sqrt{3}t + 1$. ii) se $\mu = 1/\lambda \neq 1/\lambda_\pm$, esiste unica la solutione $x(t) = \frac{\lambda y_1 - 2y_2}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} - \frac{\lambda y_2 - 2y_1/3}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} + y(t)$, con $y_1 = \int_{-1}^{1} y(t)dt$, $y_2 = \int_{-1}^{1} ty(t)dt$).

3.3 Scritto (seconda parte) del 30/06/08; AA 07-08

1) ([**1**]+[**3**]) i) Determinare per quale valore del parametro a i tre polinomi di secondo grado $\{a - x,\ x(1-x),\ 1 + x^2\}$ sono dipendenti.
ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $[-1,1]$ e ortonormalizzarla.
R. i) $a = 1$; ii) $e_1(x) = 1/\sqrt{2}$, $e_2(x) = \sqrt{3/2}x$, $e_3(x) = 3/2\sqrt{5/2}(x^2 - 1/3)$
2) [5] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato) Dimostrare il seguente teorema (delle contrazioni). Sia M uno spazio metrico completo e $F:\ S \to S$ una contrazione ; allora i) esiste unico il punto fisso $\bar{x}$ di M; ii) se $\{x_n\}_0^\infty$ e la successione di M definita da $x_n := F(x_{n-1})$, $x_0 \in M$, allora $x_n \to \bar{x}$, per $n \to \infty$.
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = sign(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval

per trovare il valore della somma $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
R. vedere esercizio materiale corso.
4) ([**4**]) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione f appartiene a $L_1[0,\infty)$ e $L_2[0,\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-\alpha+1/4|}|x^2-3|^\alpha}.$$

R. $L_1[0,\infty)$: $1/4 < \alpha < 1$; $L_2[0,\infty)$: $0 < \alpha < 1/4$
5) ([**5**]) Calcolare

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \delta(\cos \pi x)(x^2+1)dx, \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \delta'(\cos \pi x)(x^2+1)dx.$$

R. $I_1 = 5/(2\pi)$, $I_2 = 0$
6) ([**1**]+[**3**]) Sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^3$ una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$, se l'operatore $\hat{A}$ agisce sulla base nel seguente modo: $\hat{A}\underline{e}^{(1)} = \underline{0}$, $\hat{A}\underline{e}^{(2)} = (1+i)\underline{e}^{(3)}$, $\hat{A}\underline{e}^{(3)} = (1-i)\underline{e}^{(2)}$, i) mostrare che $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$; ii) trovare autovalori, autovettori e diagonalizzare l'operatore attraverso una trasformazione unitaria.
R. $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$, $\underline{v}^{(1)} = (1/\sqrt{5})(0, 1-i, -\sqrt{2})^T$, $\underline{v}^{(2)} = (1,0,0)^T$, $\underline{v}^{(3)} = (1/\sqrt{5})(0, 1-i, \sqrt{2})^T$, $U = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$
7) ([**3**]+[**3**]) Dato l'operatore $\hat{A} = -d^2/dx^2$, agente sulla varietà lineare, densa in $L_2[a,b]$, delle funzioni f tali che $\hat{A}f \in L_2[a,b]$, con $f(a) = f(b) = 0$, i) determinarne autovalori e autofunzioni in tale spazio. ii) Determinarne lo spettro anche in $L_2(\mathbb{R})$.
R. i) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p = \{\lambda_n = \pi^2 n^2 (b-a)^{-2}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\psi_n(x) = \sin(\lambda_n(x-a))$; ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}^+$, $\psi(x,\lambda) = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$.

3.4 Scritto (seconda parte) del 15/09/08; AA 07-08

1) ([**1.5**]+[**2.5**]) i) Dare la definizione di dipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e determinare per quale valore del parametro α i tre polinomi di secondo grado $\{\alpha - 2x,\ x(1-x),\ 1+x^2\}$ sono dipendenti. ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $[-1,1]$ e ortonormalizzarla.
2) [6] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato)
Dimostrare che: 1) se $\hat{A}$ è un operatore autoaggiunto, i) i suoi autovalori sono reali; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali. 2) Se $\hat{U}$ è un operatore unitario, i) i suoi autovalori hanno modulo 1; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali.

3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = e^{2x}$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$.
4) ([**2**]+[**2.5**]) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione f appartiene a $L_1[0,\infty)$ e $L_2[0,\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \alpha + \frac{1}{3}||x+2|^{\alpha}}}.$$

5) ([**2.5**]+[**2.5**]) i) Calcolare

$$I_1 = \int_{-2}^{2} \delta(\cos \pi x)(x^2+1)^{-1} dx.$$

ii) Dimostrare che, nel senso delle distribuzioni

$$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x). \tag{4}$$

6) ([**2**]+[**2**]) i) Determinare sotto quale condizione sui numeri complessi a e b la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{5}$$

è unitaria e, sotto questa condizione, ii) calcolarne autovalori e autovettori.
7) ([**2.5**]+[**3.5**]) Dato l'operatore di traslazione $\hat{E}^+ : \ l_2 \to l_2$:

$$\hat{E}^+(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2, \tag{6}$$

i) calcolare $(\hat{E}^+)^\dagger$; ii) determinare lo spettro di $\hat{E}^+$.

3.5 3^0 Esonero del 04/06/09; AA 08-09

1) ([**1**]+[**3**]) Dati i vettori $\underline{v}^{(1)} = (0,0,1)$, $\underline{v}^{(2)} = (1,i,1)$, $\underline{v}^{(3)} = (1,-i,1)$, a) mostrare che sono indipendenti e b) ortonormalizzarli.
R: i) $\det(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(1)}) = -2i \neq 0$, ii) $\underline{e}^{(1)} = (0,0,1), \underline{e}^{(2)} = (1/\sqrt{2})(1,i,0)$, $\underline{e}^{(3)} = (1/\sqrt{2})(1,-i,0)$
2) ([**1**]+[**4**]) i) Dare la definizione di insieme A denso in B. ii) Dopo aver definito gli spazi l_f, l_0, l_∞, mostrare che l_f è denso in $\{l_0, ||\cdot||_\infty\}$, ma non è denso in $\{l_\infty, ||\cdot||_\infty\}$.

3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = |x|$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

R: i) $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$, iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2})^4$

4) ([**4**]) Dopo aver definito lo spazio $L_1(\mathbb{R})$, determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \frac{1}{|x^2-1|^a \sqrt{|1+x|}}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$.

R: $1/4 < a < 1/2$

5) ([**1.5**]+[**2.5**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$. i) A cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$? ii) A cosa converge debolmente in $\mathbb{R}$? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma $||\cdot||_1$ (o, a scelta, nella norma $||\cdot||_\infty$) in $\mathbb{R}$, e quindi non converge fortemente in tale norma.

R: $f_n(x) \to 0,\ x \neq 0; f_n(x) \to \infty,\ x = 0$ puntualmente. $f_n(x) \to \delta(x)$ in senso debole. $||f_n(x) - f_m(x)||_\infty = |n - m|/2 \to \infty$ (se, ad es., $m = n/2$); $||f_n(x) - f_m(x)||_1 = \int_{\mathbb{R}} |e^{-y^2} - e^{-y^2/4}| dy = O(1)$, (se, ad es., $m = n/2$). Quindi non sono successioni di Cauchy e quindi non convergono.

6) ([**4**]) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_1^\infty \delta(\sin(\pi x)) 3^{-x} dx$.

R: $I = (3\pi)^{-1}$

7) ([**6**]**, esercizio obbligatorio** (**[-3] se non affrontato**)) Sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$ un insieme finito di vettori ortonormali dello spazio euclideo E e sia $S_N = span(\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N)$. Se $\underline{x} \in E$ è il generico vettore di E, i) caratterizzare il vettore $\underline{x}^{(N)} = \sum\limits_{i=1}^N \xi_i e^{(i)}$ di S_N che meglio approssima $\underline{x}$; ii) mostrare che tale vettore $\underline{x}^{(N)}$ è la "proiezione ortogonale" di $\underline{x}$ su S_N, iii) mostrare che vale la disuguaglianza di Bessel: $(\underline{x}, \underline{x}) \geq \sum\limits_{i=1}^N |\xi_i|^2$.

3.6 4^0 Esonero del 02/07/09; AA 08-09

1) ([**5**]) Dato l'operatore $\hat{E}^- :\ l_2 \to l_2$, definito dalla $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, ..) = (0, x_1, x_2, ..)$, determinare i) Ker$(\hat{E}^-)$, $\mathcal{R}(\hat{E}^-)$; ii) il suo aggiunto $(\hat{E}^-)^\dagger$; iii) sotto quali condizioni $\hat{E}^-$ è invertibile, calconandone l'inverso.

R. Ker$(\hat{E}^-) = \{\underline{0}\}$, $\mathcal{R}(\hat{E}^-) = \{\underline{y} \in l_2 :\ y_1 = 0\}$, $(\hat{E}^-)^\dagger = \hat{E}^+$, invertibile se $\hat{E}^- : l_2 \to \mathcal{R}(\hat{E}^-)$, $(\hat{E}^-)^{-1} = \hat{E}^+$.

2) ([**2**]+[**1**]+[**2**]) i) Mostrare che, se $\hat{A} :\ H \to H$ è autoaggiunto, allora

$(\underline{x}, \hat{A}\underline{x}) \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{x} \in H$. ii) Sia $\hat{B} : H \to H$; mostrare che l'operatore $\hat{B}^\dagger \hat{B}$ è autoaggiunto e che $(\underline{x}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{x}) \geq 0$, $\forall \underline{x} \in H$. iii) Mostrare che, se λ è autovalore di $\hat{B}^\dagger \hat{B}$, allora $\lambda \geq 0$.
R. ii) $(\underline{x}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{x}) = (\hat{B}\underline{x}, \hat{B}\underline{x}) \geq 0$; iii) Se $\hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{v} = \lambda \underline{v} \Rightarrow \lambda(\underline{v}, \underline{v}) = (\underline{v}, \hat{B}^\dagger \hat{B}\underline{v}) = (\hat{B}\underline{v}, \hat{B}\underline{v})$. Quindi $\lambda = (\hat{B}\underline{v}, \hat{B}\underline{v})/(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$
3) ([**4**]) La risposta $R(x)$ di un sistema lineare ad una forza impulsiva è data dal seguente integrale di convoluzione $R(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x - x')I(x')dx'$, nel quale le funzioni $G(x)$ e $I(x)$ hanno trasformate di Fourier $\hat{G}(k) = e^{-|k|}$ e $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Calcolare $R(x)$ usando il teorema di convoluzione.
R. $R(x) = \int_{\mathbb{R}} (dk/2\pi)\hat{G}(k)\hat{I}(k) = (\pi(1 + (x - x_0)^2)^{-1}$
4) ([**4**]) Calcolare $\sin A$, dove A è la matrice autoaggiunta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 \\ \pi/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sin A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

5) ([**1**]+[**4**]) Dato l'operatore integrale di rango finito $\hat{K}$ definito da $\hat{K}f(t) = \int_{-1}^{1} (t + s)f(s)ds$, dove $f \in L_2[-1, 1]$, i) mostrare che $\hat{K}$ è autoaggiunto; ii) calcolare lo spettro di $\hat{K}$ (che tipo di spettro è?) e le relative autofunzioni in $L_2[-1, 1]$.
R. $\sigma(\hat{K}) = \sigma_p(\hat{K}) = \{\lambda_\pm = \pm 2/\sqrt{3}\}$, $\psi_\pm(t) = c_\pm(\pm\sqrt{3}t + 1)$
6) ([**2.5**]+[**3.5**]) Dato l'operatore $\hat{A} = -id/dx + x$, agente sulla varietà lineare (densa in L_2) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{A}f \in L_2$, i) trovare autovalori e autofunzioni di $\hat{A}$ in $L_2[-\pi, \pi]$, con condizioni al bordo periodiche: $f(-\pi) = f(\pi)$. ii) Mostrare che, nello spazio $L_2(\mathbb{R})$, $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A})$ ed individuare tale spettro continuo.
R. i) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = \{n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\psi_n(x) = e^{i(nx - x^2/2)}$; ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}$, autofunzione limitata: $\psi(x, \lambda) = e^{i(\lambda x - x^2/2)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, autofunzione approssimata di $L_2(\mathbb{R})$: $f_n(x) = (2/\pi)^{1/4} n^{-1/2} e^{-x^2/n^2} \psi(x, \lambda)$

3.7 Scritto del 15/07/09; AA 08-09

1) ([**3**]+[**1**]) i) Se $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, determinare i coefficienti $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ per i quali valgono le disuguaglianze: $||\underline{x}||_\infty \leq \alpha_n ||\underline{x}||_p \leq \beta_n ||\underline{x}||_\infty$, con $p > 1$. ii) Se $\underline{x} \in l_p$, quale delle precedenti disuguaglianze sopravvive?
R. i) $\alpha_n = 1$, $\beta_n = \sqrt[p]{n}$; ii) la disuguaglianza $||\underline{x}||_\infty \leq ||\underline{x}||_p$
2) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = sign\ x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare

la somma della serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

R. i) $sign\ x \sim (4/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3) (**[4]**) Data la funzione discontinua $f(x) = a(x)H(x_0 - x) + b(x)H(x - x_0)$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$, dove H è la funzione gradino di Heaviside e $a(x), b(x)$ sono funzioni con derivate prime continue su $\mathbb{R}$, i) calcolare $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ con l'ausilio di note distribuzioni; ii) calcolare $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f'(x)dx$.

i) $f'(x) = (b(x_0) - a(x_0))\delta(x - x_0) + a'(x)H(x_0 - x) + b'(x)H(x - x_0)$; ii) $b(x_0) - a(x_0)$

4) (**[1]+[2]+[2]**) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. i) A cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$? ii) A cosa converge debolmente in $\mathbb{R}$? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma $|| \cdot ||_1$ (o, a scelta, nella norma $|| \cdot ||_\infty$) in $\mathbb{R}$, e quindi non converge fortemente in tale norma.

R. i) $f_n(x) \to \infty$, $x = 0$, $\to 0$, $x \neq 0$; ii) $f_n(x) \to \delta(x)$

5) (**[6]**) Dato l'operatore $\hat{E}^+ :\ l_2 \to l_2$, definito dalla $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, ..) = (x_2, x_3, x_4, ..)$, determinare i) Ker$(\hat{E}^+)$, $\mathcal{R}(\hat{E}^+)$; ii) il suo aggiunto $(\hat{E}^+)^\dagger$; iii) sotto quali condizioni $\hat{E}^+$ è invertibile, calconandone l'inverso, iv) la sua norma $||\hat{E}^+||$.

R. i) Ker$(\hat{E}^+)$=$\{(x_1, 0, ..)\}$, dim Ker$(\hat{E}^+)$=1, Ran$(\hat{E}^+)$=l_2; iii) $\hat{E}^+ :\ l_2 \to l_2$ non è invertibile, ma $\hat{E}^+ :\ \{\underline{x} \in l_2 :\ x_1 = 0\} \to l_2$ è invertibile con inverso $\hat{E}^-$; ii) $(\hat{E}^+)^\dagger = \hat{E}^-$; iv) $||\hat{E}^+|| = 1$.

6) (**[1]+[4]**) Dato l'operatore integrale di rango finito $\hat{K}$ definito da $\hat{K}f(t) = \int_{-1}^{1} (t^2 s + ts^2)f(s)ds$, dove $f \in L_2[-1, 1]$, i) mostrare che $\hat{K}$ è autoaggiunto; ii) calcolare lo spettro di $\hat{K}$ (che tipo di spettro è?) e le relative autofunzioni in $L_2[-1, 1]$.

R. $\psi_\pm(t) = c_\pm(\sqrt{5}t^2 \pm \sqrt{3}t)$, $\lambda_\pm \pm 2/\sqrt{15}$

7) (**[6], esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) Sia $\hat{A} :\ X \to X$ un operatore limitato; mostrare che: i) l'insieme risolvente $\rho(\hat{A})$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$; ii) lo spettro $\sigma(\hat{A})$ è un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$, contenuto nel disco $\lambda \leq ||\hat{A}||$.

3.7.1 Scritto del 21/09/09; AA 08-09

1) (**[4]**) La risposta $R(x)$ di un sistema lineare ad una forza impulsiva è data dal seguente integrale di convoluzione $R(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x-x')I(x')dx'$, nel quale

le funzioni $G(x)$ e $I(x)$ hanno trasformate di Fourier $\hat{G}(k) = (1+k^2)^{-1}$ e $\hat{I}(k) = e^{-ikx_0},\ x_0 \in \mathbb{R}$. Dopo aver enunciato il teorema di convoluzione, calcolare $R(x),\ x \in \mathbb{R}$ usando tale teorema.
R. $R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \hat{G}(k)\hat{I}(k) = e^{-|x-x_0|}/2$
2) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione gradino di Heaviside $H(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $H(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
R. $H(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
3) ([**4**]) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^1 \delta(\cos\pi x)\sin\pi x dx$.
R. $I = 1/\pi$
4) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{\sqrt{2}n}{\pi(1+n^4x^4)}$, $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$. Determinare i) a cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e ii) a cosa converge debolmente in $\mathbb{R}$ (si usi la formula $\int_{\mathbb{R}} dx(1+x^4)^{-1} = \pi/\sqrt{2}$); iii) mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma $||\cdot||_1$ (o, a scelta, nella norma $||\cdot||_\infty$) in $\mathbb{R}$, e quindi non converge fortemente in tale norma.
R. i) a 0 se $x \neq 0$, a ∞ se $x = 0$; ii) a $\delta(x)$
5) ([**6**]) Dato l'operatore $\hat{E}^+ :\ l_2 \to l_2$, definito dalla $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, ..) = (x_2, x_3, x_4, ..)$, i) calcolarne la norma e ii) determinarne lo spettro.
R. i) $||\hat{E}^+|| = 1$, ii) $\sigma_p(\hat{E}^+) = \{|\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(\hat{E}^+) = \{|\lambda| = 1\}$
6) ([**2**]+[**3**]) Calcolare $\cos\hat{P}$ e $\cos A$, dove $\hat{P}$ è un operatore di proiezione ortogonale e A è la matrice autoaggiunta

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

R. $\cos\hat{P} = \hat{1} - (1-\cos 1)\hat{P}; \cos A = -I$
7) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) Sia $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ una successione di l_2 e sia $\{\underline{e}^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ una base ortonormale dello spazio di Hilbert H. Mostrare i) che la successione $\underline{x}^{(n)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \underline{e}^{(i)},\ n \in \mathbb{N}$ di vettori di H è di Cauchy; ii) che converge, in norma euclidea, a un vettore $\underline{x} \in H$; iii) che gli elementi ξ_i della successione sono i coefficienti di Fourier di $\underline{x}$ rispetto alla base: $\xi_i = (\underline{e}^{(i)}, \underline{x})$.

3.7.2 3^0 Esonero dell'01/06/10, AA 09-10

1) ([**1**]+[**3**]) Mostrare che le funzioni $f = e^{-|x|}$, $g = x^2 e^{-|x|}$ sono indipendenti in $L_2(\mathbb{R})$, e ortogonalizzarle.
R. $\underline{y}^{(1)} = e^{-|x|}$, $\underline{y}^{(2)} = (x^2 - 1/2)e^{-|x|}$
2) ([**1**]+[**5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**) i) Dare le definizioni di spazio euclideo e di spazio completo. ii) Mostrare che lo spazio l_2 è sia euclideo che completo (per la completezza, utilizzare il fatto che $\mathbb{C}$ è completo).
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = sign\ x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
4) ([**4**]) Individuare, se esistono, i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^2-1|^a}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e a $L_2(\mathbb{R})$.
R. $L_1: \ 3/4 < a < 1$; L_2 : mai.
5) ([**1.5**]+[**2.5**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. i) A cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$? ii) A cosa converge debolmente in $\mathbb{R}$? iii) Mostrare che non è un successione di Cauchy nella norma $||\cdot||_1$ (o, a scelta, nella norma $||\cdot||_\infty$) in $\mathbb{R}$, e quindi non converge fortemente in tale norma.
R. ii) $f_n(x) \to \delta(x)$
6) ([**5**]) i) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni, $(H(x)\cosh x)' = \delta(x) + H(x)\sinh x$. ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int\limits_{1/2}^{\infty} \delta(\cos \pi x) 2^{-x} dx$$

R. $I = 3/(2\sqrt{2}\pi)$
7) ([**1**]+[**4**]) i) Dare la definizione di insieme A denso in B. ii) Mostrare che lo spazio delle funzioni continue in $[a, b]$ è denso, rispetto alla norma $||\cdot||_2$, nello spazio delle funzioni continue a tratti.

3.7.3 4^0 Esonero del 23/06/10, AA 09-10

1) ([**2**]+[**4**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) Sia $\hat{A}: \ H \to H$ un operatore limitato. i) Definire gli insiemi risolvente $\rho(\hat{A})$ e spettro $\sigma(\hat{A})$; ii) mostrare che $\rho(\hat{A})$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$ e che $\sigma(\hat{A})$ è un insieme chiuso.

2) ([**2**]+[**3**]. **La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da 10 crediti**) i) Dimostrare che, se $f(x) \in L_1(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})$, allora la sua Trasformata di Fourier $\hat{f}(k) \in L_2(\mathbb{R})$ e vale la formula $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}|\hat{f}(k)|^2$;
ii) se $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f}(k)$ è uniformemente limitata e $\hat{f}(k) \to 0$, per $k \to \pm\infty$.
3) ([**4**]) Dato l'operatore $\hat{E}^- : l_2 \to l_2$, definito da $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots)$, calcolare $\sigma(\hat{E}^-)$.
4) ([**2.5**]+[**2**]) i) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice e^A.
R. $\lambda_\pm = \pm i\pi/2,\ \underline{v}^\pm = (1/\sqrt{2})(1, \pm i),\ e^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5) ([**2.5**]+[**3**]) Dato l'operatore $\hat{A} = -id/dx + x^2$, agente sulla varietà lineare (densa in L_2) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{A}f \in L_2$, i) trovare autovalori e autofunzioni di $\hat{A}$ in $L_2[-\pi, \pi]$, con condizioni al bordo periodiche: $f(-\pi) = f(\pi)$. ii) Mostrare che, nello spazio $L_2(\mathbb{R})$, $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A})$ ed individuare tale spettro continuo.
R. i) $\psi_n(x) = e^{i(\lambda_n x - x^3/3)},\ \lambda_n = n + \pi^2/3,\ n \in \mathbb{N}$. ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R},\ \psi(x, \lambda) = e^{i(\lambda x - x^3/3)},\ \lambda \in \mathbb{R}$
6) ([**4**]) Dato l'operatore integrale $\hat{K}f(t) = \int\limits_{-1}^{1}(s + t)f(s)ds$ su $L_2[-1, 1]$, calcolare lo spettro di tale operatore e le relative autofunzioni.
R. $\sigma(\hat{K}) = \sigma_p(\hat{K}) = \{\lambda_\pm\},\ \lambda_\pm = \pm 2/\sqrt{3},\ \psi_\pm(t) = \pm\sqrt{3}t + 1$
7) ([**3**]+[**3**]) Dati l'operatore $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}, \dots)$ ed il proiettore ortogonale $\hat{P}$ su un sottospazio S dello spazio di Hilbert H, i) determinare i valori del parametro $\mu \in \mathbb{C}$ per i quali è definito l'operatore $\ln(\hat{1} - \mu\hat{P})$ e calcolare tale operatore; ii) trovare la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(2 - \hat{E}^+)\underline{x} = \underline{e}^{(3)}$, dove $\underline{e}^{(3)}$ è il terzo elemento della base canonica di l_2: $(\underline{e}^{(3)})_k = \delta_{k3}$.
R. i) $\ln(\hat{1} - \mu\hat{P}) = \ln(\hat{1} - \mu)\hat{P}$, ii) $\underline{x} = (1/8, 1/4, 1/2, 0, 0, ..)$

3.7.4 Scritto del 16/07/10, AA 09-10

1) ([**1**]+[**3**]) i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni $\{1, x, x^2\}$ sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste tre funzioni in $L_2[-1, 1]$.
R.
2) **[0.5]+[3]+[1.5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)**
1) Dare le definizioni di operatore autoaggiunto e di operatore unitario.

2) Mostrare che, se $\hat{A}$ è un operatore autoaggiunto, i) i suoi autovalori sono reali; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali. 3) Mostrare che, se $\hat{U}$ è un operatore unitario, i suoi autovalori hanno modulo 1.

3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $H(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $H(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

4) ([**2.5**]+[**2.5**]. **La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da 10 crediti**) i) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = |x^2 + 2\alpha x - 3\alpha|^\alpha$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$. ii) Per quei valori di α, elencare le tre proprietà della trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ dimostrate in classe, dimostrandone una a scelta.

R. $-3 < \alpha < -1/2$

5) ([**2**]+[**3**]) i) Calcolare

$$I = \int_0^{3/2} \delta(\sin \pi x) \cos \pi x \; dx.$$

ii) Dimostrare che la successione di funzioni $\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ i) converge a 0 in senso debole, con funzioni di prova $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$; ii) non converge a 0 in senso forte, ad esempio in $L_1[0, \pi]$.

R. i) $I = -\frac{1}{2\pi}$

6) ([**2**]+[**2**]) i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

ii) Usare questo risultato per calcolare $\ln A$ (usare il ramo di $\ln z$ tale che $-\pi < \; arg \; z \leq \pi$).

R. i) autoval: $\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$, autovett: $(1, \pm i)/\sqrt{2}$; ii) $\ln A = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

7) ([**2**]+[**4**]) Dato l'operatore di traslazione $\hat{E}^+ : \; l_2 \to l_2$:

$$\hat{E}^+(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2,$$

i) calcolare $(\hat{E}^+)^\dagger$; ii) determinare lo spettro di $\hat{E}^+$.

3.7.5 Scritto del 20/09/10, AA 09-10

1) ([**1**]+[**3**]) i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni

$\{e^{-x}, x^2 e^{-x}\}$ sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste due funzioni in $L_2[0,\infty)$.
R. $\{e^{-x}, (x^2 - 1/2)e^{-x}\}$
2) [3]+[1.5]+[1.5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Sia S un sottospazio dello spazio euclideo E, e sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$ (N finito o infinito) una base ortonormale di S. Mostrare che, i) dato il generico vettore $\underline{x} \in E$, il vettore di S che meglio approssima $\underline{x}$ è $\underline{x}^{(N)} = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i e^{(i)}$, dove $\xi_i := (\underline{e}^{(i)}, \underline{x})$ sono i cosidetti coefficienti di Fourier di $\underline{x}$ rispetto alla base; ii) il vettore $\underline{x}^{(N)}$ è la "proiezione ortogonale" di $\underline{x} \in E$ su S (cioè il vettore $(\underline{x} - \underline{x}^{(N)})$ è ortogonale a tutti i vettori di S); iii) vale la disuguaglianza di Bessel.
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione x^2 in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di x^2 e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
R. i) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n^2} \cos nx$, ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
4) ([**2.5**]+[**2.5**]. **La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da 10 crediti**) i) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-\alpha|}} \frac{1}{|3-x^2|^\alpha}$ appartiene a $L_1[0,\infty)$. ii) Per quei valori di α, mostrare che la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ è uniformemente limitata e $\hat{f}(k) \to 0$ per $k \to \pm\infty$.
R. i) $1/4 < \alpha < 1$
5) ([**2.5**]+[**2.5**]) 1) Calcolare

$$I = \int\limits_{1/2}^{2} \delta(\cos \pi x) \sin \pi x \; dx.$$

2) Data la successione di funzioni $\{\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ i) a cosa converge in senso puntuale e in senso debole? ii) Mostrare che non converge in senso forte in $L_\infty(\mathbb{R})$ (suggerimento: si mostri che non è di Cauchy).
R. 1) $I = -1/(2\pi)$
6) ([**3**]+[**2**]) i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ii) Usare questo risultato per calcolare e^A.
R. i) autoval: $0,2,2$, autovett: $(1,0,-1)/\sqrt{2},\ (0,1,0),\ (1,0,1)/\sqrt{2}$;

$$e^A = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} 1+e^2 & 0 & -1+e^2 \\ 0 & 2e^2 & 0 \\ -1+e^2 & 0 & 1+e^2 \end{array}\right).$$

7) (**[2]**+**[3]**) È dato l'operatore $\hat{A} = id/dx + x$, agente sulla varietà lineare (densa in $L_2[-\pi,\pi]$) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{A}f \in L_2[-\pi,\pi]$. Nello spazio delle funzioni di $L_2[-\pi,\pi]$ con condizioni periodiche al bordo: $f(-\pi) = f(\pi)$: i) mostrare che $\hat{A}$ è autoaggiunto; ii) determinare autovalori e autofunzioni di $\hat{A}$.
R. autoval: $\{n\},\ n \in \mathbb{Z}$, autof: $e^{-inx+ix^2/2}$

3.7.6 3^o esonero del 06/06/11, AA 10-11

1) Mostrare che i) le funzioni $f_1 = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2$ sono indipendenti in $L_2[0,1]$, e ii) ortogonalizzarle.
R. $1,\ x - 1/2,\ x^2 - x + 1/6$
2) esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato) a) Dare la definizione di spazio di Hilbert H. b) Mostrare che, se la successione $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ appartiene a l_2 e i vettori $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j\in\mathbb{N}_+}$ costituiscono una base ortonormale dello spazio di Hilbert H, allora gli scalari ξ_i sono i coefficienti di Fourier di qualche $\underline{x}$ appartenente a H.
3) i) Sviluppare la funzione di Heaviside $H(x) = 1,\ x > 0,\ H(x) = 0,\ x < 0$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Individuare gli eventuali punti di $[-\pi,\pi]$ in cui la serie non converge puntualmente a $H(x)$, e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di $H(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
4) Individuare, se esistono, i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \frac{|x|^{a/2}}{|x^2-1|^a}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e a $L_2(\mathbb{R})$.
R. i) $L_1(\mathbb{R}):\ 2/3 < a < 1$; ii) $L_2(\mathbb{R}):\ 1/3 < a < 1/2$
5) Si consideri la successione di funzionali lineari $F^{(n)}$: $F^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$, con $f_n(x) \equiv \frac{n^a}{\pi(1+n^2x^2)},\ n \in \mathbb{N},\ a > 0$. i) A cosa converge debolmente al variare di $a > 0$? ii) Mostrare che $F^{(n)}$ non è un successione di Cauchy, e quindi non converge fortemente, se $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. iii) A cosa converge $f_n(x)$ puntualmente in $\mathbb{R}$ al variare di a?
R. i) $F^{(n)} \to 0,\ 0 < a < 1;\ F^{(n)} \to \delta_0,\ a = 1;\ F^{(n)} \to \infty,\ a > 1.$

iii) $f_n(0) \to \infty;\ f_n(x) \to 0,\ 0 < a < 2;\ f_n(x) \to 1/(\pi x^2),\ a = 2;\ f_n(x) \to \infty,\ a > 2$

6) i) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni, $(H(x-\pi/2)\sin x)' = \delta(x-\pi/2)+H(x-\pi/2)\cos x$. ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{1/2}^{\infty} \delta(\cos \pi x) 4^{-x} dx$

R. $I = 5/(12\pi)$

7) Data la successione di successioni $\underline{x}^{(n)}$, con $x_k^{(n)} = \frac{n}{k^{1/3}+nk^{1/6}}$, i) qual'è lo spazio $l_p,\ p \geq 1$ più piccolo a cui appartiene? ii) Determinare la successione $\underline{x} = \{x_k\}$ alla quale converge per componenti (puntualmente), ed individuare lo spazio $l_q,\ q \geq 1$ più piccolo a cui $\underline{x}$ appartiene. iii) Mostrare che $||\underline{x}^{(n)} - \underline{x}||_\infty \to 0$ per $n \to \infty$ e dedurre qualcosa sulle proprietà di chiusura di l_p in $(l_\infty, ||\cdot||_\infty)$.

R. i) l_4; ii) $\{k^{-1/6}\}_{k\in\mathbb{N}_+} \in l_7$; iii) $||\underline{x}^{(n)} - \underline{x}||_\infty = 1/(n+1) \to 0$, l_4 non è chiuso in $(l_\infty, ||\cdot||_\infty)$

3.7.7 4^o esonero del 23/06/11, AA 10-11

1) ([**1**]+[**3**]) Dato l'operatore $\hat{E}^+ : l_2 \to l_2$, definito da $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$, calcolare i) $||\hat{E}^+||$, ii) $\sigma(\hat{E}^+)$.

2) ([**3**]+[**3**]. **La seconda parte non riguarda gli studenti del corso da 10 crediti**) i) Definire il prodotto di convoluzione di due funzioni $f_1(x), f_2(x) \in L_1(\mathbb{R})$ e enunciare e dimostrare il teorema sulla trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione. ii) Mostrare che, se $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f}(k)$ è uniformemente limitata, continua e $\hat{f}(k) \to 0$, per $k \to \pm\infty$.

3) ([**1**]+[**3**]+[**2**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) Sia $\hat{A}: H \to H$ un operatore limitato. i) Definire gli insiemi risolvente $\rho(\hat{A})$ e spettro $\sigma(\hat{A})$; ii) mostrare che $\rho(\hat{A})$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$ e che $\sigma(\hat{A})$ è un insieme chiuso; iii) mostrare che $\sigma(\hat{A}) \subset \{|\lambda| \leq ||\hat{A}||\}$.

4) ([**2**]+[**2**]) i) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e & 1-e \\ 1-e & 1+e \end{pmatrix}$.
ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice $\ln A$, usando la determinazione tale che $\ln 1 = 0$.

R. i) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e$, $\underline{v}^{(1)} = (1,1)/\sqrt{2}$, $\underline{v}^{(2)} = (1,-1)/\sqrt{2}$. ii) $U = (\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)})$, $\ln A = U diag(\ln\lambda_1, \ln\lambda_2)U^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) ([**3**]+[**3**]) Dato l'operatore $\hat{A} = -id/dx + x^4$, agente sulla varietà lineare (densa in L_2) delle funzioni $f(x)$ tali che $\hat{A}f \in L_2$, i) trovare autovalori e autofunzioni di $\hat{A}$ in $L_2[-\pi, \pi]$, con condizioni al bordo periodiche: $f(-\pi) = f(\pi)$. ii) Mostrare che, nello spazio $L_2(\mathbb{R})$, $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A})$ ed indi-

viduare tale spettro continuo.
R. i) $\sigma_p = \{n + \pi^4/5\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\psi_n(x) = e^{i(n+\pi^4/5)x-ix^5/5}$. ii) $\sigma_c = \mathbb{R}$, $\psi(x,\lambda) = e^{i\lambda x - ix^5/5}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

6) ([**1**]+[**4**]) Dato l'operatore integrale $\hat{K}f(t) = \int\limits_{-1}^{1}(t^2 s + s^2 t)f(s)ds$ su $L_2[-1,1]$, i) dire se tale operatore è auto-aggiunto e compatto (e giustificare la risposta); ii) calcolare lo spettro di tale operatore e le relative autofunzioni.
R. $\lambda_\pm = \pm 2/\sqrt{15}$, $\psi_\pm(t) = \sqrt{5}t^2 \pm \sqrt{3}t$

7) ([**5**]) Dato l'operatore $\hat{E}^-(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, $\hat{E}^- : l_2 \to l_2$, i) determinare i valori del parametro $\mu \in \mathbb{C}$ per i quali esiste unica la soluzione $\underline{x} \in l_2$ dell'equazione $(\hat{1} - \mu\hat{E}^-)\underline{x} = \underline{e}^{(2)}$ e calcolarla, dove $\underline{e}^{(2)}$ è il secondo elemento della base canonica di l_2: $(\underline{e}^{(2)})_k = \delta_{k2}$.
R. $\underline{x} = (0, 1, \mu, \mu^2, \mu^3, \dots) \in l_2$, $|\mu| < 1$

3.7.8 scritto del 19/07/11, AA 10-11

1) ([**1.5**]+[**3**] **gli studenti del corso da 10 crediti non devono affrontare la seconda parte dell'esercizio**) Sia $f(x) = (x^2-1)^{-a}e^{-ax^2}$. i) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali $f \in L_1(\mathbb{R})$. ii) Mostrare che, per tali valori di a, la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ è uniformemente limitata, continua e $\hat{f}(k) \to 0$ per $k \to \pm\infty$.
R. i) $0 < a < 1$

2) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = |x|$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

3) ([**2**]+[**1.5**]) Data la funzione discontinua $f(x) = a(x)H(-x) + b(x)H(x)$, $x \in \mathbb{R}$, dove H è la funzione gradino di Heaviside e $a(x), b(x)$ sono funzioni con derivate prime continue su $\mathbb{R}$, i) calcolare $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ con l'ausilio di note distribuzioni; ii) calcolare $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int\limits_{-\epsilon}^{\epsilon} f'(x)dx$.
R. i) $f'(x) = a'(x)H(-x) + b'(x)H(x) + (b(0) - a(0))\delta(x)$; ii) $b(0) - a(0)$

4) ([**1**]+[**2.5**]+[**2.5**]) Si consideri la successione di funzionali lineari $F_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$, con $f_n(x) = \frac{n^a}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$. i) A cosa converge $f_n(x)$ puntualmente in $\mathbb{R}$, al variare del parametro $a > 0$? ii) A cosa converge $F_n(\varphi)$ debolmente in $\mathbb{R}$, al variare del parametro $a > 0$? iii) A cosa converge $F_n(\varphi)$ fortemente in $\mathbb{R}$, al variare del parametro $a > 0$, se $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$?

R. i) $f_n(x) \to \infty,\ x = 0;\quad \to 0,\ x \neq 0,\ \forall a > 0$. ii) $F_n \to 0,\ 0 < a < 1;$ $\to \delta_0,\ a = 1; \to \infty,\ a > 1$. iii) $||F_n - F_m|| = ||f_n - f_m||_\infty \to \infty,\ a > 0,\ \Rightarrow$ non converge.

5) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Dato l'operatore $\hat{A} \equiv -id/dx + x$, agente sulle funzioni di L_2 con la loro derivata prima, i) mostrare che è auto-aggiunto sia in $[-\pi, \pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$, che in $L_2(\mathbb{R})$. ii) Determinarne lo spettro in $[-\pi, \pi]$, con $f(-\pi) = f(\pi)$. iii) Determinarne lo spettro in $L_2(\mathbb{R})$.

R. i) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = n_{n\in\mathbb{Z}},\ \psi_n(x) = e^{inx - ix^2/2}$ ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}$

6) ([**2**]+[**2**]) Data la matrice $A = \pi \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, i) calcolarne autovalori ed autovettori. ii) Usare questo risultato per calcolare $\cos A$.

R. i) autoval: $0, \pi$; autovett. $\underline{v}_1 = (1, i)^T,\ \underline{v}_1 = (2, i)^T$.

ii) $\cos A = \begin{pmatrix} -3 & -4i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$

7) ([**6**]**, esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**)) Si dimostri che la serie di Fourier di $f(x)$ converge puntualmente in ogni punto dell'intervallo $(-\pi, \pi)$ in cui $f(x)$ è continua ed è soddisfatta la condizione di Dini.

3.7.9 scritto del 09/09/11, AA 10-11

1) ([**2**]+[**2**] **gli studenti del corso da 10 crediti non devono affrontare la seconda parte dell'esercizio**) Sia $f(x) = |x^2 - a^2|^{-a} e^{-ax^2}$. i) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali $f \in L_1(\mathbb{R})$. ii) Mostrare che, per tali valori di a, la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ di $f(x)$ è uniformemente limitata e $\hat{f}(k) \to 0$ per $k \to \pm\infty$.

R $0 < a < 1, a \neq 1/2$

2) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = xH(x)$, dove $H(x)$ è la funzione gradino ($H(x) = 0,\ x < 0;\ H(x) = 1,\ x > 0$), in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Scrivere la relazione di Parseval e, ricordando che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcolare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

3) ([**1.5**]+[**2.5**]) i) Data la funzione discontinua $f(x) = x^2 H(-x) + \cos x H(x)$, $x \in \mathbb{R}$, dove H è la funzione gradino di Heaviside, i) calcolare $f'(x),\ x \in \mathbb{R}$ con l'ausilio di note distribuzioni. ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^\infty \delta(\sin \pi x) 2^{-x} dx$

R i) $f'(x) = 2xH(-x) - \sin x H(x) + \delta(x)$; ii) $I = 3\pi/2$

4) ([**1.5**]+[**2.5**]) Si consideri la successione di funzionali lineari $F_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$, con $f_n(x) = \frac{n^a \sin nx}{\pi x},\ n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$. i) A cosa converge $f_n(x)$ puntualmente in $\mathbb{R}$, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$? ii) A cosa con-

verge $F_n(\varphi)$ debolmente in $\mathbb{R}$, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$?
R. ii) $F_n \to \infty, a > 0$; $F_n \to \delta_0, a = 0$; $F_n \to 0, a < 0$
5) ([**3**]+[**4**]) i) Dare la definizione di operatore aggiunto $\hat{A}^\dagger$ di un operatore $\hat{A}: \ l_2 \to l_2$ e calcolare l'aggiunto di $\hat{E}^+$: $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}, \dots)$. ii) Calcolare lo spettro di $\hat{E}^+$.
6) ([**1**]+[**3**]) Dato l'operatore integrale $\hat{K}f(t) = \int\limits_0^1 (t^3 s + ts^3) f(s) ds$, i) mostrare che è autoaggiunto in $L_2[0,1]$; ii) calcolarne autovalori ed autofunzioni.
R. $\lambda_\pm = 1/5 \pm 1/\sqrt{21}$, $\psi^\pm(t) = t^3/3 \mp t/\sqrt{21}$
7) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**)) i) Dare le definizioni di insieme risolvente e di spettro di un operatore $\hat{A}$; ii) mostrare che, se $\hat{A}$ è limitato, allora l'insieme risolvente è aperto e lo spettro è un chiuso limitato.

3.7.10 2^o esonero del 15/06/12, AA 11-12

1) ([**4**]) Calcolare lo spettro dell'operatore $\hat{E}^+(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$ in l_2.
2) ([**1.5**]+[**4.5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**) Dato un operatore limitato $\hat{A}: H \to H$, i) definire l'insieme risolvente $\rho(\hat{A})$ e lo spettro $\sigma(\hat{A})$ di $\hat{A}$; ii) mostrare che $\rho(\hat{A})$ è un aperto di $\mathbb{C}$ e che $\sigma(\hat{A})$ è un chiuso limitato di $\mathbb{C}$.
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = x^2$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$, e dire se la serie converge uniformemente e assolutamente a x^2 in $[-\pi, \pi]$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. **4)** ([**4**]) Individuare, se esistono, i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \frac{x}{|x^3-1|^a}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e a $L_2(\mathbb{R})$.
R. $L_1(\mathbb{R}):\ 2/3 < a < 1$; $L_2(\mathbb{R})$: mai
5) ([**1.5**]+[**2.5**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzioni $n^a p(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, dove $p(x)$ è una funzione pari, regolare e tale che $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$. i) A cosa converge puntualmente in $\mathbb{R}$, per $a > 0$? ii) A cosa converge debolmente il funzionale $F_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n^a p(nx) \varphi(x) dx$, per $a > 0$? iii) Mostrare che, se $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ e $p(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$, F_n non converge fortemente.
R. ii) $0 < a < 1$: $F_n \to 0$; $a = 1$: $F_n \to \delta_0$; $a > 1$: $F_n \to \infty$

6) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. i) calcolare $||A||_2$. ii) Trovare autovalori ed autovettori di A. iii) Utilizzare quest'ultimo risultato per calcolare la matrice e^A.

R i) $||A||_2 = 2$. ii) $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$, $v^\pm = (1, \pm\sqrt{2})$; iii) $e^A = \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{2} & \frac{\sinh\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\sinh\sqrt{2} & \cosh\sqrt{2} \end{pmatrix}$

7) ([**3**]+[**2**]) i) Calcolare l'integale $\int\limits_0^\infty \delta(\sin 2x)e^{-x}dx$. ii) Mostrare che $(\ln|x|)' = P(1/x)$ nel senso delle distribuzioni.

R. i) $\frac{1}{4}\frac{e^{\pi/2}+1}{e^{\pi/2}-1}$

3.7.11 scritto del 10/07/12, AA 11-12

1) ([**1**]+[**3**]) Mostrare che i) le funzioni $f_1 = e^{-x}$, $f_2(x) = xe^{-x}$ sono indipendenti in $L_2[0,\infty)$, e ii) ortonormalizzarle.

R. $e_1 = \sqrt{2}e^{-x}$, $\sqrt{8}(x - 1/2))e^{-x}$

2) ([**2.5**]+[**1**]+[**2.5**]) i) Sviluppare la funzione x in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Individuare gli eventuali punti di $[-\pi,\pi]$ in cui la somma $S(x)$ della serie non converge puntualmente a x, e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di x e di $S(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. iii) Calcolare tale serie in $x = \pi/2$ ed usare la relazione di Parseval per trovare rispettivamente le seguenti somme notevoli: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

3) ([**4**]+[**2**] **(gli studenti da 10 crediti non devono affrontare la prima parte dell'esercizio)**) i) Mostrare che, se $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ è continua, uniformemente limitata, e $\hat{f}(k) \to 0$ per $k \to \pm\infty$. ii) Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = (1 + x^2)^{-1} \in L_1(\mathbb{R})$ e verificare le proprietà or ora dimostrate.

R. ii) $\hat{f}(k) = \pi exp(-|k|)$

4) ([**2**]+[**2**]) i) A cosa converge debolmente, al variare di $a > 0$, la successione di funzionali lineari $F^{(n)}$: $F^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$, con $f_n(x) \equiv n^a e^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$? ii) Calcolare l'integrale $\int\limits_0^\infty \delta(e^x \sin x)dx$.

R. i) $0 < a < 1:\ F^{(n)} \to 0$, $a = 1:\ F^{(n)} \to \sqrt{\pi}\delta_0$, $a > 1:\ F^{(n)} \to \infty$; ii) $\frac{e^\pi+1}{2(e^\pi-1)}$

5) ([**1.5**]+[**4.5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) i) Dare la definizione di spazio di Hilbert separabile. ii) Sia $\{\xi_n\}_1^\infty$ una successione di l_2 e sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^\infty$ un sistema ortonormale di vettori dello spazio di Hilbert H separabile. Mostrare che ξ_n sono i coefficienti di Fourier di qualche $\underline{x} \in H$:

$\xi_n = (\underline{e}^{(n)}, \underline{x}),\ n \in \mathbb{N}$, e che $||\underline{x}||^2 = \sum_{n\geq 1} |\xi_n|^2$.

6) (**[1]**+**[3]**+**[1]**) Dato l'operatore $\hat{p} = -id/dx$, agente sulla varietà lineare (densa in $L_2[a,b]$) delle funzioni $f(x)$ tali che $f,\ \hat{p}f \in L_2[a,b]$, i) mostrare che $\hat{p}$ è auto-aggiunto sullo spazio delle funzioni periodiche $f(a) = f(b)$; ii) determinare autovalori e autofunzioni di $\hat{p}$ nello spazio delle funzioni di cui sopra con condizioni periodiche $f(a) = f(b)$. iii) Identificare l'insieme delle autofunzioni trovate con una delle basi introdotte nel corso.

R. ii) $\sigma = \{\lambda_n = 2\pi n/(b-a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\psi_n(x) = exp(i\lambda_n x)$ iii) base di Fourier nell'intervallo $[a,b]$

7) (**[1]**+**[2]**+**[2]**) Data la matrice $A = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, i) riconoscerne la specificità e da questo dedurre le proprietà di autovalori e autovettori. ii) Calcolare tali autovalori ed autovettori. iii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice $\sin A$.

R. ii) $\lambda_\pm = \pm\frac{\pi}{2}$, $v^\pm = 1/\sqrt{2}(1, \mp i)^T$, $\sin A = 2A/\pi$

3.7.12 scritto del 19/09/12, AA 11-12

1) (**[1.5]**+**[3]**) i) Dare la definizione di dipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e determinare per quale valore del parametro α i tre polinomi di secondo grado $\{\alpha - 2x,\ x(1-x),\ 1+x^2\}$ sono dipendenti. ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $[-1,1]$ e ortogonalizzarla.

R. $\alpha = -2$

2) [6] (esercizio obbligatorio; [-4] se non affrontato) Dimostrare che: 1) se $\hat{A}$ è un operatore autoaggiunto, i) i suoi autovalori sono reali; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali. 2) Se $\hat{U}$ è un operatore unitario, i) i suoi autovalori hanno modulo 1; ii) ad autovalori diversi corrispondono autovettori ortogonali.

3) (**[3]**+**[1]**+**[2]**) i) Sviluppare la funzione $f(x) = e^x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

4) (**[2]**+**[2.5]**) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione f appartiene a $L_1[0,\infty)$ e $L_2[0,\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \alpha + \frac{1}{3}||x+2|^\alpha}}.$$

R. $L_1[0,\infty):\ \alpha > 1/2$; $L_2[0,\infty):\ 0 < \alpha < 1/3$
5) ([**3**]+[**3**]) i) Calcolare

$$I = \int_{-2}^{2} \delta(\cos \pi x)(x^2+1)^{-1} dx.$$

ii) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni

$$g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x). \tag{11}$$

R. $I = \frac{96}{\pi 65}$
6) ([**2**]+[**3**]) i) Determinare sotto quale condizione sui numeri complessi a e b la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{12}$$

è unitaria e, sotto questa condizione, ii) calcolarne autovalori e autovettori.
R. i) $|a|^2+|b|^2 = 1$; ii) $\lambda_\pm = Re\ a \pm \sqrt{1-(Re\ a)^2}$; $v^\pm = (\bar{b}, i(\pm\sqrt{1-(Re\ a)^2} - Im\ a))^T$
7) ([**4**]) Determinare lo spettro di $\hat{E}^+ :\ l_2 \to l_2$:

$$\hat{E}^+(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots) \tag{13}$$

3.7.13 scritto "155 crediti + fuori corso" del 26/10/12, AA 11-12

1) ([**1**]+[**3**]) i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni $\{e^{-x^2}, xe^{-x^2}\}$ sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste due funzioni in $L_2[0,\infty)$.
R. ii) $\{e^{-x^2}, (x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}})e^{-x^2}\}$
2) [3]+[1.5]+[1.5] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Sia S un sottospazio dello spazio euclideo E, e sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$ (N finito o infinito) una base ortonormale di S. Mostrare che, i) dato il generico vettore $\underline{x} \in E$, il vettore di S che meglio approssima $\underline{x}$ è $\underline{x}^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} \xi_i e^{(i)}$, dove $\xi_i := (\underline{e}^{(i)}, \underline{x})$ sono i cosidetti coefficienti di Fourier di $\underline{x}$ rispetto alla base; ii) il vettore $\underline{x}^{(N)}$ è la "proiezione ortogonale" di $\underline{x} \in E$ su S (cioè il vettore $(\underline{x} - \underline{x}^{(N)})$ è ortogonale a tutti i vettori di S); iii) vale la disuguaglianza di Bessel.
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione x^2 in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di x^2 e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il

valore della somma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

4) ([**3**]) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = |x^2 - 2\alpha x + 3\alpha|^{-\alpha}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$.

R. $1/2 < \alpha < 3$

5) ([**3**]+[**2**]) i) Mostrare che, nel senso delle distribuzioni, $H'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ e calcolare $f'(x)$, per $f(x) = H(x-1)\cos \pi x$. ii) A cosa converge, in senso debole, il funzionale S_n, tale che $S_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin nx \varphi(x) dx$, con funzioni di prova $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$?

R. i) $f'(x) = -\delta(x-1) - \pi H(x-1) \sin \pi x$

6) ([**2**]+[**2**]) i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

ii) Usare questo risultato per calcolare $\ln A$ (usare il ramo di $\ln z$ tale che $-\pi < \ arg\ z \leq \pi$).

R. i) $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\pi/4}$, $\underline{v}^{\pm} = 1/\sqrt{2}(1, \pm i)$ ii) $\ln A = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7) ([**4**]+[**3**]) Dato l'operatore di traslazione $\hat{T}$: $\hat{T} f(x) = f(x+1)$, sullo spazio delle funzioni continue, i) mostrare che è un operatore unitario in $L_2[-\pi, \pi]$ e calcolarne la norma $|| \cdot ||_2$; ii) determinare lo spettro di $\hat{T}$ nello spazio delle funzioni continue e periodiche di $L_2[-\pi, \pi]$.

R. ii) $\sigma_p = \{e^{in}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con autofunzioni $\psi_n(x) = e^{inx}$

3.7.14 2^o esonero del 10/06/13, AA 12-13

1) ([**4**]+[**2**]) i) Calcolare lo spettro dell'operatore $\hat{E}^+(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$ in l_2; ii) verificare che, se $\lambda \in \rho(\hat{E}^+)$ e $\underline{x} = (\hat{E}^+ - \lambda \hat{1})^{-1} \underline{y}$, allora $\underline{x} \in l_2$ se $\underline{y} \in l_2$.

2) ([**5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**) Data una successione $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di l_2 e un sistema ortonormale $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ di uno spazio di Hilbert separabile, allora gli ξ_j sono i coefficienti di Fourier di qualche $\underline{x} \in H$, e vale la relazione di Parseval $||\underline{x}||_2 = ||\underline{\xi}||_2$.

3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = xH(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$, e dire se la serie converge uniformemente e assolutamente a $xH(x)$ in $[-\pi, \pi]$. iii) Scrivere la relazione di Parseval.

4) ([**4**]) Individuare, se esistono, i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^2-1|^a}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e a $L_2(\mathbb{R})$.

R. $L_1(\mathbb{R}):\ 3/4 < a < 1$; $f \notin L_2(\mathbb{R}),\ \forall a \in \mathbb{R}$
5) ([**2**]+[**2**]) **Gli studenti "10 crediti" non devono affrontare la parte a).** a) Mostrare che, se $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, allora la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ è i) uniformemente limitata, e ii) $\hat{f}(k) \to 0$ per $k \to \pm\infty$.
b) Mostrare che, se $f^{(l)}(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $l = 0, 1, \ldots, n$, allora la trasformata di Fourier di $f(x)$ va a 0 per $k \to \pm\infty$ più rapidamente di $|k|^{-n}$.
6) ([**2.5**]+[**2.5**]) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. i) Trovare autovalori ed autovettori di A. ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice $\ln A$ (si scelga il ramo di $\ln z$ tale che $-\pi < arg\ z \leq \pi$).
R. $\lambda_\pm = \pm i$, $\underline{v}^\pm = (1, \pm 2i)^T$, $\ln A = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7) ([**3**]+[**2**]) i) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^2 \delta(\sin 2x) \cos x dx$. ii) Mostrare che $(\ln |x|)' = P(1/x)$ nel senso delle distribuzioni.
R. $I = 1/4$

3.7.15 Scritto del 09/07/13, AA 12-13

1) ([**1**]+[**3**]) i) Dare la definizione di dipendenza e indipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e mostrare che le funzioni $\{1, x, x^2\}$ sono indipendenti. ii) Ortogonalizzare queste tre funzioni in $L_2[-1, 1]$.
2) [2]+[4] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato) Dato un operatore lineare limitato $\hat{A}$, mostrare che i) il suo insieme risolvente è aperto e ii) il suo spettro è un chiuso limitato contenuto nel cerchio $\{|\lambda| \leq ||\hat{A}||\}$.
3) ([**4**]+[**1**]+[**1**]) i) Sviluppare la funzione $x^2 H(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $x^2 H(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Dire se la serie converge assolutamente e uniformemente in $[-\pi, \pi]$.
R. $x^2 H(x) = \pi^2/6 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos nx + \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$
Non c'è convergenza assoluta ed uniforme in $[-\pi, \pi]$.
4) ([**2.5**]+[**2.5**]) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = |x^2 - 2ax + a|^{-a}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e a $L_2(\mathbb{R})$.
R. i) $1/2 < a < 1$, ii) $1/4 < a < 1$
5) ([**2**]+[**2**]) i) Calcolare $I = \int\limits_{-\pi/4}^{1} \delta(\cos 2x) \sin x\ dx$. ii) Mostrare che la successione di funzionali $\hat{C}^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \cos nx\ \varphi(x) dx$ converge a 0 in senso debole, con funzioni di prova $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.
R. $I = \sqrt{2}/8$.

6) ([**2.5**]+[**2.5**]) i) Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

ii) Usare questo risultato per calcolare $\sin(-i \ln A)$, usando il ramo $-\pi < \arg z \leq \pi$ della funzione $\ln z$.
R. $\lambda_\pm = e^{\pm i\pi/4}$, $\underline{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i)^T$, $\sin(-i \ln A) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7) ([**2**]+[**1.5**]+[**1.5**])(**Gli studenti del corso da "10 crediti" non devono affrontare il punto iii)**) i) Mostrare che un operatore $\hat{U}: H \to H$ è unitario se e solo se $(\hat{U}\underline{y}, \hat{U}\underline{x}) = (\underline{y}, \underline{x})$, $\forall \underline{y}, \underline{x} \in H$. ii) Determinare dominio e immagine dell'operatore $\hat{E}^+$: $\hat{E}^+(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$ affinchè l'operatore stesso sia unitario. iii) Mostrare che l'operatore trasformata di Fourier $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}(f)(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$, è unitario.
R. $\hat{E}^+: \{\underline{x} \in l_2 : x_1 = 0\} \to l_2$

3.7.16 Scritto del 18/09/13, AA 12-13

1) ([**2**]+[**2**]) Data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^3-1|^\alpha}$, determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ essa appartiene a $L_1(0, \infty)$ e a $L_2(0, \infty)$.
R. $L_1(\mathbb{R}^+): 1/2 < \alpha < 1$. $L_2(\mathbb{R}^+): 1/3 < \alpha < 1/2$
2) ([**2**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione gradino di Heaviside $H(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $H(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
3) ([**2**]+[**2**]) i) Calcolare la derivata della funzione $[x]$ (parte intera di x, con, ad esempio: $[1/2] = 0$, $[0] = 0$, $[-1/2] = -1$). ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^\infty \delta(\sin x) e^{-x} dx$.
R. i) $[x]' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n)$. ii) $I = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)}$
4) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Si consideri la successione di funzionali F_n: $F_n(\varphi) \equiv \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi(x) dx$, $f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^4x^4)}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Determinare i) a cosa converge $f_n(x)$ puntualmente in $\mathbb{R}$ e ii) a cosa converge F_n debolmente (si usi la formula $\int_{\mathbb{R}} dx (1 + x^4)^{-1} = \pi/\sqrt{2}$); iii) mostrare che F_n non converge fortemente, se la funzione di prova appartiene a $L_1(\mathbb{R})$.
R. i) $f_n(x) \to 0$, $x \neq 0$; $f_n(x) \to \infty$, $x = 0$. ii) $F_n(\varphi) \to \delta_0(\varphi)/\sqrt{2}$.
5) ([**6**]) Dato l'operatore $\hat{E}^+: l_2 \to l_2$, definito dalla $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, ..) =$

$(x_2, x_3, x_4, ..)$, i) calcolarne la norma e ii) determinarne lo spettro.
6) ([**2**]+[**2**]+[**2**]) i) Calcolare $\sin\frac{\pi}{2}\hat{P}$, dove $\hat{P}$ è un operatore di proiezione ortogonale; ii) calcolare autovalori e autovettori della matrice A:

$$A = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

e iii) calcolare $\sin A$.
R. i) $\sin\frac{\pi}{2}\hat{P} = \hat{P}$. ii) $\lambda_{\pm} = \pm\pi/2$, $\underline{v}_{\pm} = (1, \pm 1)/\sqrt{2}$. iii) $\sin A = \frac{2}{\pi}A$.
7) ([**5**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) Sia S un sottospazio dello spazio euclideo E, e sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^{N}$ (N finito o infinito) una base ortonormale di S. Mostrare che, dato il generico vettore $\underline{x} \in E$,
i) il vettore di S che meglio approssima $\underline{x}$ è

$$\underline{x}^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} \xi_i e^{(i)}, \quad \text{con} \quad \xi_i := (\underline{e}^{(i)}, \underline{x}). \tag{17}$$

ii) il vettore $\underline{x}^{(N)}$ è la "proiezione ortogonale" di $\underline{x} \in E$ su S;
iii) vale la disuguaglianza di Bessel: $||\underline{x}||^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{N} |\xi_i|^2$.

3.7.17 Scritto appello straordinario del 07/11/13, AA 12-13

1) ([**1**]+[**3**]) Mostrare che i) le funzioni $f_1 = e^{-x}$, $f_2(x) = x^2 e^{-x}$ sono indipendenti in $L_2(\mathbb{R}^+)$, e ii) ortogonalizzarle.
R. $g_1(x) = e^{-x}$, $g_2(x) = (x^2 - 1/2)e^{-x}$
2) ([**3**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione $xH(-x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ($H(x)$ è la funzione gradino di Heaviside). ii) Individuare gli eventuali punti di $[-\pi, \pi]$ in cui la serie non converge puntualmente a $xH(-x)$, e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di $xH(-x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$.
R. i) $xH(-x) \sim -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$. ii) Non c'è convergenza puntuale in $\pm\pi$
3) ([**3**]+[**1**]+[**2**]) Mostrare che, se $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, allora la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ è continua, uniformemente limitata, e $\hat{f}(k) \to 0$ per $k \to \infty$.
4) ([**3**]+[**2**]) i) A cosa converge debolmente, al variare di $a > 0$, la successione di funzionali lineari $F^{(n)}$: $F^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$, con $f_n(x) \equiv \frac{n^a e^{-n^2x^2}}{\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$? ii) Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi/2}^{\infty} \delta(\cos x) 2^{-x} dx \tag{18}$$

R. $F^{(n)} \to 0,\ 0 < a < 1$; $F^{(n)} \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\delta_0,\ a = 1$; $F^{(n)} \to \infty,\ a > 1$

5) ([**1**]+[**3**]+[**2**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato)**) Sia $\hat{A}:\ H \to H$ un operatore limitato. i) Definire gli insiemi risolvente $\rho(\hat{A})$ e spettro $\sigma(\hat{A})$; ii) mostrare che $\rho(\hat{A})$ è un insieme aperto di $\mathbb{C}$ e che $\sigma(\hat{A})$ è un insieme chiuso; iii) mostrare che $\sigma(\hat{A}) \subset \{|\lambda| \leq ||\hat{A}||\}$.

6) ([**1**]+[**4**]) Dato l'operatore $\hat{E}^+ : l_2 \to l_2$, definito da $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$, i) calcolare $||\hat{E}^+||$ e ii) individuare $\sigma(\hat{E}^+)$.

7) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Data la matrice $A = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i) Calcolare autovalori ed autovettori di A. ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice $\sin A$.

i) autovalori: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \pi/2$, autovettori: $\underline{v^{(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, $\underline{v^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. ii) $\sin A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.7.18 Esonero di AF, AA 13-14, U. G. Aglietti — 12/06/2014

1. [9] Dimostrare (in forma succinta) che un operatore autoaggiunto ha solamente autovalori reali.

   R: Detto $A : H \to H$ l'operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert complesso H, ed x un autovettore di A con autovalore (a priori complesso) λ, si ha che:

   $$\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle, \tag{19}$$

   da cui $\bar{\lambda} = \lambda$ in quanto $x \neq 0$ per definizione (abbiamo usato la convenzione per cui il prodotto scalare (complesso) e' lineare rispetto al primo argomento ed antilineare rispetto al secondo).

2. [8] Espandere nella base dei seni, $\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots$, la funzione $f(x) \equiv 1$ per $0 < x < \pi$.

   R: La base dei seni corrisponde ad un prolungamento dispari della funzione:

   $$f(x) \equiv -1 \quad per \ \ x \in (-\pi, 0). \tag{20}$$

   Si ottiene quindi:

   $$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\left[(2n+1)x\right]. \tag{21}$$

   Oss: diversi studenti hanno aggiunto un contributo costante alla serie di Fourier, che non puo' esserci data la forma della base, ed hanno ottenuto dei coefficienti dimezzati in quanto non hanno continuato correttamente la funzione nell'intervallo $(-\pi, 0)$.

3. [8] Determinare il limite $*$-debole (se esiste) della successione di funzionali data da $f_n(x) \equiv -2n^3 x / \left(\pi(1+n^2x^2)^2\right)$.

   R: Si ha che
$$f_n(x) = \frac{d}{dx} g_n(x), \tag{22}$$
   dove
$$g_n(x) = n h(nx) \quad e \quad h(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{23}$$
   Poiche' si puo' scambiare il limite con la derivata, da
$$g_n \rightharpoonup \delta_0, \tag{24}$$
   segue che
$$f_n \rightharpoonup \delta_0'. \tag{25}$$
   Alternativamente, si puo' integrare esplicitamente $f_n(x)$ moltiplicata per una funzione generica di prova $\varphi(x)$ su tutto R. Cambiando variabile da $x \to y \equiv nx$, integrando per parti in y in modo da far comparire φ', e passando infine al limite per $n \to \infty$ entro l'integrale, si riottiene lo stesso risultato.

4. [8] Determinare a quali spazi di Lebesgue $L^p(R)$, con $1 \leq p \leq \infty$, appartiene $f(x) \equiv 1/(1+x^2)^\alpha$ con α reale.

   R: Per $\alpha < 0$, la f diverge all'infinito e quindi non appartiene ad alcuno spazio $L^p(R)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Per $\alpha = 0$, la funzione e' una costante non nulla, $f(x) \equiv 1$, e quindi appartiene solamente ad $L^\infty(R)$. Per $\alpha > 0$, occorre osservare che la f non ha singolarita' al finito e che
$$|f(x)|^p \sim \frac{1}{|x|^{2\alpha p}} \tag{26}$$
   per $|x| \gg 1$. Nel range $1 \leq p \leq \infty$, si ha quindi che
$$f \in L^p(R) \quad se \quad p > \frac{1}{2\alpha}. \tag{27}$$
   Notare che la diseguaglianza sopra implica $p \to +\infty$ per $\alpha \to 0^+$, ovvero che vi e' continuita' nell'origine $\alpha = 0$ da destra.

3.7.19 Scritto di AF dell'08/07/14; U. Aglietti

1. [9] Dimostrare (in forma succinta) che autovettori di un operatore autoaggiunto associati ad autovalori distinti sono ortogonali;

2. [8] Espandere nella base dei coseni, $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$, la funzione $f(x) \equiv x$ per $0 \leq x < \pi$;

3. [8] Determinare il limite $*$-debole (se esiste) della successione di funzionali data da $f_n(x) \equiv x/\left(x^2 + 1/n^2\right)$ $(n \geq 1)$;

4. [8] Determinare a quali spazi di Lebesgue $L^p(R)$, con $1 \leq p \leq \infty$, appartiene $f(x) \equiv (1 - \cos x)/|x|^\alpha$ con α reale;

Soluzioni

1. Sia $A : H \to H$ un operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert H ed x ed y siano due autofunzioni di A con autovalori (reali) distinti dati rispettivamente da λ e μ. Allora:

$$0 = \langle Ax|y\rangle - \langle x|Ay\rangle = (\lambda - \mu)\langle x|y\rangle, \tag{28}$$

da cui $\langle x|y\rangle = 0$. Poiche' $x, y \neq 0$, per definizione di autofunzione, ne segue che essi sono ortogonali.

2. Prolungando per parita' la funzione $f(x) = x$ all'intervallo $(-\pi, 0)$, si ottiene la funzione $f_e(x) = |x|$ sul periodo $(-\pi, \pi)$. Espandendo quest'ultima nella serie di Fourier standard e restringendosi quindi all'intervallo $(0, \pi)$, si ottiene:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos[(2n+1)x]. \tag{29}$$

3. Il limite puntuale di $f_n(x)$ per $n \to \infty$ e'

$$\frac{1}{x} \tag{30}$$

per $x \neq 0$ (il limite $*-$debole non puo' quindi essere una delta di Dirac ne' la sua derivata, come scritto da svariati studenti). Considerando l'azione su di una funzione generica $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi_d(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi_d(x)dx, \tag{31}$$

dove

$$\varphi_d(x) \equiv \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}. \tag{32}$$

La parte pari di $\varphi(x)$ non compare in quanto $f_n(x)$ e' dispari per ogni n. Notiamo inoltre che $\varphi_d(0) = 0$, di modo che l'integrale all'ultimo membro e' ben definito. Il valore principale di $1/x$ e' dato da:

$$P \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \equiv \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{H\left(x^2 - \varepsilon^2\right)}{x} \varphi(x) dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{H\left(x^2 - \varepsilon^2\right)}{x} \varphi_d(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} \varphi_d(x) dx, \tag{33}$$

dove H e' la funzione di Heaviside (gradino unitario). Confrontando, si ottiene quindi:

$$f_n \to P \frac{1}{x}. \tag{34}$$

4. E' un esercizio di analisi 1, una volta esplicitata la definizione degli spazi di Lebesgue. Occorre fare una casistica la variare di α in $\mathbb{R}$.

- Per $\alpha < 0$, la funzione f non e' limitata sulla retta, come si vede valutandola ad esempio in $x_n = (2n+1)\pi$, n intero. Inoltre $|f|^p$ non e' integrabile sulla retta per alcun $p \in [1, \infty)$, come si vede ad esempio minorando l'integrale con la somma di integrali su intorni di x_n. In conclusione, la f non appartiene ad alcuno spazio $L^p(\mathbb{R})$;

- Per $\alpha = 0$, la f e' limitata su $\mathbb{R}$, ma $|f|^p$ non e' integrabile sulla retta per alcun $p \in [1, \infty)$ (e' un funzione periodica a media non nulla), di modo che $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ solamente;

- Per $0 < \alpha \leq 2$, la f ha una singolarita' eliminabile in $x = 0$ ed e' integrabile all'infinito per $p > 1/\alpha$. Dunque, $f \in L^p(\mathbb{R})$ per $p > 1/\alpha$, $p = \infty$ incluso;

- Per $\alpha > 2$, l'origine e' una singolarita' integrabile solamente per $p < 1/(\alpha - 2)$. Combinando questa condizione con l'integrabilita' all'infinito (vedi sopra), si conclude che $f \in L^p(\mathbb{R})$ per $1/\alpha < p < 1/(\alpha - 2)$. Notare che $p = \infty$ e' escluso.

3.7.20 Scritto di AF del 17/09/14; U. Aglietti

1. [9] Enunciare e dimostrare (in forma succinta) le relazioni di inclusione degli spazi di successioni l^p, $1 \leq p \leq \infty$.

   R: $l^p \subseteq l^q$ per $p \leq q$, con $p, q \in [1, \infty]$; l'inclusione e' inoltre stretta per $p < q$. Per la dimostrazione, si consulti un qualunque manuale di analisi funzionale;

2. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f_\sigma(x) \equiv x \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$, $\sigma > 0$, e commentare il risultato.

   R: 1) usando il fatto che la gaussiana $h(x) \equiv \exp(-x^2/2)$ e' un'autofunzione della trasformata di Fourier $F[h](p)$ con autovalore $\sqrt{2\pi}$, 2) riscalando le variabili $x = y/\sigma$ e $p = \sigma k$ e 3) derivando rispetto a k ai due membri dell'eguaglianza scambiando la derivata con l'integrale, si ottiene infine:

   $$-i\sqrt{2\pi}\sigma^3 k \exp\left(-\sigma^2 k^2/2\right). \tag{35}$$

   Oss: il parametro $\sigma > 0$, che figura a denominatore della funzione di partenza, finisce al numeratore nella trasformata di Fourier, di modo che funzioni "concentrate" nello spazio x hanno trasformate "estese" in k e viceversa;

3. [8] Determinare il limite $*$-debole (se esiste) della successione di funzionali $f_n(x) \equiv 1/2 + 1/\pi \arctan(nx)$, $n \geq 0$ (sugg.: graficare f_n per qualche valore di n).

   R: $\lim f_n(x) = 0$ per $x < 0$ e $\lim f_n(x) = 1$ per $x > 0$, di modo che il limite puntuale e' la funzione a gradino $H(x)$ di Heaviside. Tale funzione e' anche il limite uniforme se si esclude un intorno arbitrario dell'origine, di modo che:

   $$f_n \to H, \tag{36}$$

   in senso $*-$debole;

4. [8] Determinare a quali spazi di successioni l^p, $1 \leq p \leq \infty$, appartiene la successione $a_n \equiv 1/\left[\sqrt{n}\log(n)\right]$, $n \geq 2$.

   R: per $n > 2$

   $$\frac{C}{n^{p/2+\varepsilon}} < |a_n|^p = \frac{1}{n^{p/2}\log^p(n)} < \frac{1}{n^{p/2}}, \tag{37}$$

   dove C e' una costante positiva e ε e' un numero positivo arbitrariamente piccolo. Poiche'

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p/2}} < \infty \tag{38}$$

   per $p > 2$, mentre diverge per $p < 2$, per il teorema del confronto, $\{a_n\} \in l^p$ per $p > 2$ e $\{a_n\} \notin l^p$ per $p < 2$. Infine, $\{a_n\} \in l^2$, come si vede dal confronto asintotico con l'integrale improprio associato:

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2(n)} \approx \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log^2(x)} = -\left.\frac{1}{\log(x)}\right|_2^{\infty} < \infty. \tag{39}$$

3.7.21 Scritto di AF del 28/01/15; U. Aglietti

1. [9] Dimostrare, tramite un opportuno contro-esempio, che l'inclusione di spazi di successioni $l^p \subseteq l^q$ valida per $1 \leq p < q \leq \infty$, e' stretta;

   R: Per $q < \infty$, si consideri ad esempio la successione di componenti $x_n = n^{-2/(p+q)}$, $n \geq 1$. Per $q = \infty$, basta considerare la successione costante $x_n = 1$;

2. [8] Determinare la somma in $[-\pi, \pi]$ (in senso puntuale) della serie di Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \cos(nx)$. Discutere anche la convergenza assoluta ed in norma $L^2(-\pi, \pi)$;

   R: Per sommare la serie di Fourier, si faccia la sostituzione $z = \rho e^{ix}$, $0 < \rho < 1$, nella serie geometrica integrata ai due membri

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z), \qquad \log(1) = 0. \tag{40}$$

   Prendendo la parte reale ai due membri e facendo il limite $\rho \to 1^-$, si ottiene infine

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = -\log\left|2 \sin \frac{x}{2}\right| \tag{41}$$

   in senso puntuale per $x \neq 0$. In base al teorema di isomorfismo tra $L^2(-\pi, \pi)$ ed l^2 (dimostrato a lezione), la serie sopra converge in norma $L^2(-\pi, \pi)$ ad una funzione in questo stesso spazio. In quanto alla covergenza assoluta infine, si prenda $x = 2\pi r/N$ con $N = 1, 2, 3, \cdots$ e $0 \leq r \leq N$. Restringendo quindi la somma ad $n = Nl$, con $l = 1, 2, 3, \cdots$, si ottiene:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\cos(nx)| \geq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} |\cos(2\pi r l)| = \infty. \tag{42}$$

   Poiche' gli x della forma sopra sono densi in $[0, 2\pi]$, ne segue che la serie di Fourier e' ovunque assolutamente divergente;

3. [8] Calcolare $I = \int_a^{\infty} dx\, \theta(x-b)\, d\varphi(x)/dx$, dove θ e' la funzione a gradino di Heaviside, a e b costanti reali e $\varphi(x)$ una funzione in un opportuno spazio di prova;

   R: Per $a \leq b$ si puo' estendere l'integrale a tutto l'asse reale senza alterarne il valore. Usando quindi la definizione di derivata di una distribuzione assieme a $d/dx\, \theta(x-b) = \delta(x-b)$, si ottiene

   $$I = -\varphi(b). \tag{43}$$

Per $b < a$, la θ vale identicamente uno in tutto il dominio di integrazione, di modo che

$$I = \int_a^\infty \frac{d\varphi(x)}{dx} dx = -\varphi(a), \tag{44}$$

in quanto le funzioni di prova sono nulle all'infinito;

4. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$, con a costante positiva. Commentare il risultato.

   R: Chiudendo il cammino di integrazione sotto (sopra) l'asse reale per $k > 0$ ($k < 0$), si ottiene tramite il teorema dei residui:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ikx)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|k|}. \tag{45}$$

   Oss.: Il decadimento esponenziale e' controllato dalla distanza dei poli dall'asse reale. Nel limite $a \to 0^+$, la trasformata di Fourier diverge perche' i due poli semplici, in $\pm ia$, si fondono in un polo doppio sull'asse reale.

3.7.22 Compito d'esonero di AF dell'11/06/15; U. Aglietti

1. [9] Dimostrare che l'operatore lineare $T : l^2 \to l^2$ definito da

   $$(Tx)_n \equiv \frac{n}{n+1} (x_n - x_{n+1}) \qquad (n \geq 1) \tag{46}$$

   e' limitato e calcolare la sua norma.

   R: usando le diseguaglianze

   $$\left(\frac{n}{n+1} \right)^2 < 1, \qquad 2x_n x_{n+1} \leq x_n^2 + x_{n+1}^2, \tag{47}$$

   si ricava che

   $$||T|| \leq 2. \tag{48}$$

   Cio' implica che l'operatore T e' limitato. Prendendo poi l'estremo superiore su $n = 1, 2, 3, \cdots$ dei $||Tx^{(n)}||/||x^{(n)}||$ con

   $$x^{(n)} \equiv (+1, -1, +1, -1, \cdots, +1, -1, 0_{2n+1}, 0_{2n+2}, \cdots, 0, \cdots), \tag{49}$$

   si ottiene la diseguaglianza invertita

   $$||T|| \geq 2, \tag{50}$$

   che combinata con la precedente da' infine

   $$||T|| = 2. \tag{51}$$

2. [8] Calcolare i coefficienti della serie di Fourier della funzione $f(x) \equiv |x|^3$, $-\pi < x \leq \pi$ e commentare il risultato.

   R: per parita' $b_n = 0$ per ogni $n = 1, 2, 3, \cdots$. Rimane quindi da calcolare:
$$a_n = \frac{2}{\pi} \mathrm{Re} \left[\int_0^\pi x^3 e^{inx} dx \right] \tag{52}$$
   per $n = 0, 1, 2, \cdots$. Per $n = 0$ si ottiene direttamente:
$$a_0 = \frac{\pi^3}{2}. \tag{53}$$
   Per $n \neq 0$, ponendo
$$u = x^3, \quad v = e^{\lambda x} \quad \text{con } \lambda \equiv in \tag{54}$$
   ($\lambda =$ immaginario puro), ed usando la regola di Leibniz per le derivate dei prodotti,
$$uv''' = \big(u''v + uv'' - u'v'\big)' - u'''v, \tag{55}$$
   si ottiene:
$$a_n = 6\pi \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{12}{\pi n^4} \left[1 + (-1)^{n+1} \right]. \tag{56}$$
   Come funzione periodica, la f e' continua, con derivata prima discontinua in $x = \pm\pi$ (e con discontinuita' della derivata terza in $x = 0$); di conseguenza i coefficienti di Fourier decadono asintoticamente come $1/n^2$;

3. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) \equiv x \exp\left(-\delta x^2\right)$, $\delta > 0$, e commentare il risultato;

   R: ponendo
$$x = \frac{y}{\sqrt{2\delta}} \tag{57}$$
   si ottiene la trasformata di Fourier della derivata della distribuzione gaussiana con $\sigma = 1$ (autofunzione della trasformata di Fourier con autovalore $\lambda = -i\sqrt{2\pi}$) nella variabile coniugata
$$\frac{k}{\sqrt{2\delta}}, \tag{58}$$
   ovvero:
$$F[f](k) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2\delta^{3/2}} k e^{-k^2/(4\delta)}. \tag{59}$$
   Quanto piu' la f e' piccata (attorno ad $x = 0$) tanto piu' la trasformata di Fourier e' "estesa" (attorno a $k = 0$) e viceversa;

4. [8] Calcolare la derivata seconda $F'' \equiv (F')'$ della distribuzione rappresentata dalla funzione $F(x) \equiv H(x)\cos(x)$, dove $H(x) \equiv 1$ per $x > 0$ e zero altrimenti e' la funzione di Heaviside.

   R: per definizione

$$\langle F'', \varphi\rangle \equiv \langle F, \varphi''\rangle = \int_0^{\infty} \cos(x)\varphi''(x)dx = -\varphi'(0) - \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\cos(x)\varphi(x)dx, \tag{60}$$

   dove si e' integrato per parti due volte per rimuovere la derivata seconda dalla funzione di prova $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$. Essendo φ generica, si ricava che

$$F''(x) = \delta'(x) - H(x)\cos(x). \tag{61}$$

3.7.23 Scritto di AF del 16/09/15; U. Aglietti

1. [9] Si consideri l'operatore lineare $T : X \to l^2$, definito da $(Tx)_n \equiv nx_n$, $n \geq 1$, dove X e' il piu' grande sottospazio vettoriale di l^2 (le successioni a quadrato sommabile) sul quale T e' definito. Caratterizzare X e dimostrare che T e' non limitato.

   R: I vettori x di l^2 per i quali T e' definito soddisfano la condizione

$$||Tx||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < \infty. \tag{62}$$

   L'insieme X di tali vettori x forma uno spazio vettoriale in quanto:

   (a) se $x \in X$, allora $\lambda x \in X$ per ogni λ reale (proprieta' di cono), poiche' la serie a secondo membro dell'equazione sopra rimane finita se si moltiplica ogni x_n per λ;

   (b) se $x, y \in X$, allora $x+y \in X$, come si vede facilmente espandendo il prodotto $(x_n + y_n)^2$ ed usando la diseguaglianza $2x_n y_n \leq x_n^2 + y_n^2$.

   Per dimostrare che $T : X \to l^2$ e' non limitato, si consideri ad esempio la successione dei vettori della base canonica $\left(e^{(n)}\right)_{n=1,2,\cdots}$, $e_k^{(n)} = \delta_{n,k} = 1$ per $n = k$ e zero altrimenti:

$$||e^{(n)}|| = 1; \quad ||Te^{(n)}|| = n. \tag{63}$$

2. [8] Calcolare i coefficienti della serie di Fourier (nella base reale o complessa) della funzione $f(x) \equiv |\sin(x)|$, $-\pi < x \leq \pi$, e commentare il risultato.

R: Poiche' la funzione $f(x)$ e' pari, nella base trigonometrica compaiono soltanto la costante ed i coseni. Calcolando gli integrali, si ottiene per $n = 0, 1, 2, \cdots$:

$$a_n \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi(1 - n^2)} \tag{64}$$

per n pari e zero altrimenti. Poiche' la f e' continua ma non possiede derivata prima continua in $x = 0, \pm\pi$ (questi due ultimi punti coincidono), i coefficienti decadono asintoticamente come $1/n^2$.

3. [8] Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) \equiv x^2 \exp\left(-x^2/2\right)$ e commentare il risultato.

   R: Ricordando che la funzione $f(x) \equiv \exp(-x^2/2)$ e' un'autofunzione della trasformata di Fourier F,

   $$F[f](k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \tag{65}$$

   con autovalore $\sqrt{2\pi}$, derivando ai due membri due volte rispetto a k, si ottiene immediatamente:

   $$F\,[f]\,(k) = \sqrt{2\pi}\left(1 - k^2\right) \exp\left(-k^2/2\right). \tag{66}$$

   Poiche' la f appartiene alla classe di Schwartz, anche la sua trasformta di Fourier vi appartiene.

4. [8] Calcolare la derivata seconda della distribuzione rappresentata dalla funzione $F(x)$ =segno$(x)x$, dove segno$(x) = 1$ per $x > 0$ e zero altrimenti e' la funzione che ritorna il segno della variabile x.

   R: Tenendo conto che, ad esempio, segno$(x) = 2\theta(x) - 1$, dove $\theta(x) = 1$ per $x > 0$ e zero altrimenti e' la funzione a gradino di Heaviside, ed usando la regola di derivazione generalizzata per il prodotto di una distribuzione con una funzione infinitamente differenziabile, si ottiene immediatamente:

   $$F''(x) = 2\delta(x), \tag{67}$$

   dove $\delta(x)$ e' la delta di Dirac centrata in zero.

3.7.24 Esonero del 09/06/16, AA 15-16, P.M. Santini

1) ([**6**]), **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**) Mostrare che, se $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, allora la trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ i) è uniformemente

limitata, ii) è continua, e iii) $\hat{f}(k) \to 0$ per $k \to \pm\infty$.
2) ([**3**]+[**1**]+[**3**]) i) Sviluppare la funzione $\mathrm{sign}(x)$ ($= 1,\ x > 0$ e $= -1,\ x < 0$) in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, e indicare se tale serie converge assolutamente e/o uniformemente in $[-\pi, \pi]$. ii) Individuare i punti di $[-\pi, \pi]$ in cui la somma della serie non converge puntualmente a $\mathrm{sign}(x)$ in $[-\pi, \pi]$, e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di $\mathrm{sign}(x)$ e della somma della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per trovare la somma della serie numerica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
3) ([**5**]) Individuare, se esistono, i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $f(x) = \frac{|x|^a}{|x^3-1|^a}$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$ e a $L_2(\mathbb{R})$.
R. $L_1(\mathbb{R}):\ 1/2 < a < 1;\ L_2(\mathbb{R}):\ 1/4 < a < 1/2$
4) ([**6**]) i) Calcolare, nel senso delle distribuzioni, $(|x|)''$; ii) calcolare l'integrale

$$I = \int\limits_{1/2}^{\infty} \delta(\cos \pi x) 4^{-x} dx$$

R. $(|x|)'' = 2\delta(x);\ I = 5/(12\pi)$
5) ([**1**]+[**3**]+[**2**]) Dato l'operatore $\hat{E}^+ : l_2 \to l_2$, definito da $\hat{E}^+(x_1, x_2, x_3, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots)$, calcolare i) $||\hat{E}^+||$; ii) trovare $\sigma(\hat{E}^+)$; iii) infine, se lo spettro di $\hat{E}^+$ contiene dello spettro continuo, verificare che, in corrispondenza di esso, il risolvente non è limitato.
6) ([**2**]+[**3**]) i) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
ii) Utilizzare questo risultato per calcolare la matrice $\cos A$.
R. i) autovalori: $\pm\pi$, autovett. $(1/\sqrt{2})(1, \pm 1)$; ii) $\cos A = -I$

3.7.25 Scritto del 14/07/16, AA 15-16, P.M. Santini

1) ([**2**]+[**2**]) Data la funzione $f(t) = H(l^2 - t^2) e^{i\omega_0 t},\ l, \omega_0 > 0$, i) calcolare la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ e graficarla; ii) calcolare e discutere il limite $l \to \infty$ di $\hat{f}(\omega)$.
R. $\hat{f}(\omega) = 2\frac{\sin(\omega-\omega_0)l}{\omega-\omega_0} \to 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ per $l \to \infty$
2) ([**4**]+[**1**]+[**2**]) i) Sviluppare la funzione x in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e indicare se tale serie converge assolutamente e uniformemente in $[-\pi, \pi]$. ii) Individuare gli eventuali punti di $[-\pi, \pi]$ in cui la somma $S(x)$ della serie non converge puntualmente a x, e indicare a cosa converge in tali punti; disegnare e confrontare i grafici di x e di $S(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per calcolare la somma notevole: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

R. Si veda il materiale del corso.
3) ([**3**]+[**3**]) i) A cosa converge debolmente, al variare di $c > 0$, la successione di funzionali lineari $\{F^{(n)}\}_1^\infty$: $F^{(n)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx$, con $f_n(x) \equiv n^c e^{-n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$? ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_0^\infty \delta(4^x \sin x)dx$.
R. i) Per $n \to \infty$: $F^{(n)} \to 0$ per $0 < c < 1$; $F^{(n)} \to \pi\delta_0$ per $c = 1$; $F^{(n)} \to \infty$ per $c > 1$. ii) $I = \frac{4^\pi+1}{2(4^\pi-1)}$
4) ([**1.5**]+[**4.5**]**, esercizio obbligatorio (**[**-3**] **se non affrontato)**) i) Dare la definizione di spazio di Hilbert separabile. ii) Sia $\{\xi_n\}_1^\infty$ una successione di l_2 e sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_1^\infty$ un sistema ortonormale di vettori dello spazio di Hilbert H separabile. Mostrare che ξ_n sono i coefficienti di Fourier di qualche $\underline{x} \in H$: $\xi_n = (\underline{e}^{(n)}, \underline{x}),\ n \in \mathbb{N}$, e che $||\underline{x}||^2 = \sum\limits_{n\geq 1} |\xi_n|^2$.
5) ([**1**]+[**2**]+[**2**]) Dato l'operatore $\hat{p} = -id/dx$, agente sulla varietà lineare (densa in $L_2(\mathbb{R})$) delle funzioni $f(x)$ tali che $f,\ \hat{p}f \in L_2(\mathbb{R})$, i) mostrare che $\hat{p}$ è auto-aggiunto su tale spazio di funzioni e ii) determinarne lo spettro. iii) Nel caso in cui parte dello spettro sia continuo, mostrare che per esso il risolvente non è limitato.
R. Si veda il materiale del corso.
6) ([**2**]+[**2**]+[**2**]) i) Determinare sotto quale condizione sui numeri complessi a e b la matrice

$$U = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{68}$$

è unitaria; ii) sotto questa condizione, calcolarne autovalori e autovettori; iii) verificare che gli autovalori hanno modulo uguale a 1 e gli autovettori sono ortogonali.
R. i) $|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \Rightarrow |\Re a| < 1$; ii) $\lambda_\pm = \Re a \pm i\sqrt{1-(\Re a)^2}$, $\underline{v}^+ = (\bar{b}, \lambda_+ - a)^T$, $\underline{v}^- = (\bar{a} - \lambda_-, b)^T \Rightarrow |\lambda_\pm| = 1,\ (\underline{v}^+, \underline{v}^-) = 0$

3.7.26 Scritto del 13/09/16, AA 15-16, P.M. Santini

1) ([**2**]+[**4**]) i) Dare la definizione di dipendenza lineare di elementi di uno spazio vettoriale astratto e determinare per quale valore del parametro α i tre polinomi $\{\alpha - 2x,\ x(1-x),\ 1+x^2\}$ sono dipendenti.
ii) Mostrare che $\{1,\ x,\ x^2\}$ è una base nello spazio dei polinomi di secondo grado nell'intervallo $[-1, 1]$ e ortogonalizzarla.
R. i) $\alpha = -2$; ii) $\{1,\ x,\ x^2 - 1/3\}$
2) [6] (esercizio obbligatorio; [-3] se non affrontato)
Sia S un sottospazio dello spazio euclideo E, e sia $\{\underline{e}^{(j)}\}_{j=1}^N$ (N finito o infinito) una base ortonormale di S. i) Dato il generico vettore $\underline{x} \in E$, trovare

il vettore $\underline{x}^{(N)}$ di S che meglio approssima $\underline{x}$; ii) mostrare che $\underline{x}^{(N)}$ è la "proiezione ortogonale" di $\underline{x} \in E$ su S (cioè il vettore $(\underline{x} - \underline{x}^{(N)})$ è ortogonale a tutti i vettori di S); iii) mostrare che vale la disuguaglianza di Bessel.
3) (**[3]**+**[1]**+**[2]**) i) Sviluppare la funzione $f(x) = x^2$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e indicare se tale serie converge uniformemente e assolutamente. ii) Disegnare e confrontare i grafici di $f(x)$ e della somma della serie su tutto l'asse reale. iii) Utilizzare la relazione di Parseval per trovare il valore della somma $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
4) (**[2.5]**+**[2.5]**) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione f appartiene a $L_1[0, \infty)$ e $L_2[0, \infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x - \alpha + \frac{1}{3}||x + 2|^{\alpha}}}.$$

R. $L_1[0, \infty) : \ \alpha > 1/2$; $L_2[0, \infty) : \ 0 < \alpha < 1/3$
5) (**[3]**+**[3]**) i) Calcolare

$$I = \int_{-2}^{3/2} \delta(\cos \pi x)(x^2 + 1)^{-1} dx.$$

ii) Determinare i valori delle costanti a e b tali che

$$g(x)\delta'(x) = a\delta'(x) + b\delta(x) \tag{69}$$

nel senso delle distribuzioni.
R. i) $I = \frac{134}{65\pi}$; ii) $a = g(0), \ b = -g'(0)$
6) (**[3]**+**[3]**) Dato l'operatore $\hat{A} = -d^2/dx^2$, agente sulla varietà lineare, densa in $L_2[a, b]$, delle funzioni f tali che $\hat{A}f \in L_2[0, L]$, con $f(0) = f(L) = 0$, i) mostrare che è autoaggiunto in tale spazio e determinarne autovalori e autofunzioni (sempre in tale spazio). ii) Mostrare che è autoaggiunto anche in $L_2(\mathbb{R})$ e determinarne lo spettro in $L_2(\mathbb{R})$.
R i) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}, \ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $\psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \ n \in \mathbb{N}^+$; ii) $\sigma(\hat{A}) = \sigma_c(\hat{A}) = \mathbb{R}^+$

3.7.27 Scritto del 26/09/16, AA 15-16, P.M. Santini

1) (**[3]**+**[3]** Sia $f(x) = |x^2 - a^2|^{-a} e^{-ax^2}$. Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali i) $f \in L_1(\mathbb{R})$, e ii) $f \in L_2(\mathbb{R})$.
R. i) $f \in L_1(\mathbb{R}) : \ 0 < a < 1$; ii) $f \in L_2(\mathbb{R}) : \ 0 < a < 1/2$

2) ([**3**]+[**3**]). Date le due serie di Fourier $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n2^n}$ e $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \cos nx$, con $x \in [-\pi, \pi]$, i) mostrare che le due serie convergono totalmente; ii) Calcolare, usando la formula di Parseval generalizzata, il prodotto scalare (f, g').
R. i) $|f| \leq \sum 2^{-n}/n \ < \infty$, $|g| \leq \sum 3^{-n} \ < \infty$, ii) $(f, g') = \pi/7$
3) ([**3**]+[**3**]) i) Data la funzione discontinua $f(x) = x^2 H(-x) + \cos x H(x)$, $x \in \mathbb{R}$, dove H è la funzione gradino di Heaviside, i) calcolare $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ con l'ausilio di note distribuzioni. ii) Calcolare l'integrale $I = \int_0^{\infty} \delta(\sin \pi x) 2^{-x} dx$.
R. i) $f'(x) = 2xH(-x) - \sin x H(x) + \delta(x)$; ii) $I = 3/(2\pi)$
4) ([**2.5**]+[**2.5**]) i) Se $\hat{f}(k)$ è la trasformata di Fourier di $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, esprimere la trasformata di Fourier di $f''(x)$ in funzione di $\hat{f}(k)$. ii) Usare il risultato della parte i) per calcolare la trasformata di Fourier di $f''(x)$, con $f(x) = e^{-x^2}$.
R. i) $g(x) = f''(x)$, $\hat{g}(k) = -k^2 \hat{f}(k)$; ii) $\hat{g}(k) = -k^2 e^{-k^2/4}/\pi$
5) ([**2**]+[**4**]) i) Dare la definizione di operatore aggiunto $\hat{A}^{\dagger}$ di un operatore $\hat{A}: \ l_2 \to l_2$ e calcolare l'aggiunto di $\hat{E}^{+}$: $\hat{E}^{+}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots) := (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}, \dots)$. ii) Calcolare lo spettro di $\hat{E}^{+}$.
R. $(E^{+})^{\dagger} = E^{-}$, $\sigma(E^{+}) = \sigma_p(E^{+}) + \sigma_c(E^{+})$, $\sigma_p(E^{+}) = \{|\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(E^{+}) = \{|\lambda| = 1\}$
6) ([**6**], **esercizio obbligatorio ([-3] se non affrontato**)) i) Dare le definizioni di insieme risolvente e di spettro di un operatore $\hat{A}$; ii) mostrare che, se $\hat{A}$ è limitato, allora l'insieme risolvente è aperto e lo spettro è un chiuso limitato.

3.7.28 Esonero di AF del 20/06/17; U. Aglietti

1) [4] Dato l'operatore lineare limitato $A : l^2 \to l^2$ definito da

$$(Ax)_n \equiv x_{n-1} + x_{n+1}, \quad n \geq 1, \tag{70}$$

con $x_0 \equiv 0$,

$$x \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in l^2, \tag{71}$$

e la successione di vettori definitivamente nulli

$$x^{(n)} \equiv (1_1, 1_2, \cdots, 1_n, 0_{n+1}, 0_{n+2}, \cdots), \tag{72}$$

scrivere il valore del rapporto $\|Ax^{(n)}\|/\|x^{(n)}\|$ per n generico ed ottenere da questo una maggiorazione oppure una minorazione della norma di A.
R: usando la definizione dell'operatore A, si ottiene immediatamente

$$A\,x^{(n)} \;=\; (1, 2, \cdots, 2_{n-1}, 1_n, 1_{n+1}, 0_{n+2}, 0_{n+3}, \cdots)\,, \tag{73}$$

da cui segue che

$$\frac{\|Ax^{(n)}\|}{\|x^{(n)}\|} \;=\; \frac{\sqrt{4n-5}}{\sqrt{n}}, \quad n \,\geq\, 2. \tag{74}$$

Poiche'

$$\|A\| \,\geq\, \frac{\|Ax^{(n)}\|}{\|x^{(n)}\|} \tag{75}$$

uniformemente in $n = 2, 3, \cdots$, passando al limite per $n \to +\infty$, si ottiene

$$\|A\| \,\geq\, 2. \tag{76}$$

2) [4] Data la funzione $f(x) \,\equiv\, x$ per $0 \,\leq\, x \,\leq\, \pi$, scrivere i coefficienti di Fourier, nella base reale, della funzione $f_P(x)$ ottenuta prolungando in maniera pari la funzione f nell'intervallo $(-\pi, 0)$.
R.: poiche' $f_P(x) = |x|$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e' una funzione pari, sono nulli tutti i coefficienti b_n dei seni. Dal calcolo esplicito, si trova poi che i coefficienti a_n dei coseni sono non nulli soltanto per $n = 0$ e per $n = 2k + 1$ dispari:

$$a_0 \,=\, \pi; \quad a_{2k+1} \,=\, -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}, \quad k \,=\, 0, 1, 2, \cdots. \tag{77}$$

3) [4] scrivere i coefficienti di Fourier, nella base reale, della funzione $f_D(x)$ ottenuta prolungando in maniera dispari la funzione f dell'esercizio precedente nell'intervallo $(-\pi, 0)$.
R.: poiche' $f_D(x) = x$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e' dispari, gli unici coefficienti non nulli sono

$$b_n \,=\, (-1)^{n+1}\,\frac{2}{n}, \quad n \,\geq\, 1. \tag{78}$$

4) [4] Calcolare la trasformata di Fourier (definita senza il fattore $\sqrt{2\pi}$ a denominatore) della seguente funzione

$$f(x) \,\equiv\, \cos(x)\, e^{-x^2/2}, \quad x \,\in\, \mathbb{R}. \tag{79}$$

R.: scrivendo il coseno tramite gli esponenziale oscillanti e tenendo conto che la funzione $e^{-x^2/2}$ e' autofunzione della trasformata di Fourier con autovalore $\sqrt{2\pi}$, si ricava:

$$\tilde{f}(\omega) \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-(\omega+1)^2/2} \ + \ e^{-(\omega-1)^2/2} \right]. \tag{80}$$

5) [4] calcolare l'andamento asintotico per $\omega \ \to \ 0$ della trasformata di Fourier $\tilde{f}(\omega)$ della funzione

$$f(x) \ \equiv \ \frac{1}{1+|x|}, \quad x \ \in \ \mathbb{R}. \tag{81}$$

R.: Prima di tutto, poiche' $f(x)$ e' pari in x, $\tilde{f}(\omega)$ e' pari in ω (come si vede esplicitamente con il cambio di variabile $x \to -x$), di modo che possiamo limitarci a considerare $\omega > 0$. In generale, poiche' f non e' sommabile, ma solamente a quadrato sommabile su $\mathbb{R}$, la trasformata di Fourier di f non e', in generale, limitata. L'integrale che definisce $\tilde{f}(\omega)$ e' logaritmicamente divergente, in $\omega = 0$, per $|x| \to \infty$. Poiche' $\tilde{f}(\omega)$ e' a quadrato sommabile, la divergenza aspettata per $\omega \to 0$ deve essere "piu' lenta" di

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}}. \tag{82}$$

La stima della trasformata $\tilde{f}(\omega)$ per piccole frequenze $0 < \omega \ll 1$ si ottiene nel modo seguente. Si risolve il modulo in $f(x)$ scrivendo l'integrale che definisce $\tilde{f}(\omega)$ come somma di integrali su $x \geq 0$ e $x < 0$. Nel primo integrale, si fa il cambio di variabile $x \to y \equiv x+1$ ed il secondo cambio di variabile $y \to t \equiv \omega y$, cosi' da ottenere un integrale che si decompone naturalmente nel modo seguente:

$$\int_\omega^\infty \frac{dt}{t} e^{-it} \ = \ \int_\omega^1 \frac{dt}{t} e^{-it} \ + \ \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-it}, \tag{83}$$

dove abbiamo rimosso il fattore $e^{i\omega} = 1 + \mathcal{O}(\omega)$ ai due membri. Nel primo integrale al secondo membro, si puo' espandere l'esponenziale e^{-it} attorno a $t = 0$, ottenendo per $\omega \ \to \ 0^+$ il termine dominante

$$\int_\omega^1 \frac{dt}{t} \ = \ \log\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{84}$$

Il secondo integrale al membro di destra dell'equazione sopra — quello improprio — e' costante in ω. L'integrale su $x < 0$, poi, si tratta in maniera analoga e da' un contributo dominante eguale, di modo che si ottiene infine:

$$\tilde{f}(\omega) \;=\; 2\log\left(\frac{1}{|\omega|}\right) \;+\; (\text{costante per } \omega \;\to\; 0)\,. \tag{85}$$

6) [4] Calcolare la forma esplicita della distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$T(x) \;=\; \sin(x)\,\delta'(x). \tag{86}$$

R.: usando la definizione del prodotto di una distribuzione per una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ e la definizione della derivata di una distribuzione, si ottiene

$$T(x) \;=\; -\delta(x); \tag{87}$$

7) [4] Assumendo valida la regola di derivazione composta per la δ di Dirac che vi figura, calcolare l'integrale

$$I \;\equiv\; \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'\left(1+x^2\right)\varphi(x)dx, \tag{88}$$

dove $\delta'\left(1+x^2\right)$ e' la derivata della δ di Dirac calcolata in $1+x^2$ e $\varphi(x)$ e' un funzione qualsiasi in $C_c^\infty(\mathbb{R})$.
R.: Poiche' la δ_0', come la δ_0, ha supporto solamente in zero e la funzione $g(x) \equiv 1+x^2 \geq 1$ per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, e quindi non si annulla mai, vale

$$I \;=\; 0. \tag{89}$$

Se si vuole essere piu' espliciti, si usa la regola di derivazione composta

$$\frac{d}{dx}\delta\left(1+x^2\right) \;=\; \delta'\left(1+x^2\right)\,2x, \tag{90}$$

e quindi la definizione di derivata di una distribuzione.

8) [5] Barrare tutte e sole le risposte corrette (sia essa una, piu' di una, o nessuna). Condizione sufficiente per la convergenza puntuale della serie di Fourier di una funzione f in $[-\pi,\pi]$ e':

$$\begin{aligned} &[\;\;]\; f \,\in\, C_{pe}([-\pi,\pi]); \quad [\;\;]\; f \,\in\, C^1([-\pi,\pi]); \quad [\;\;]\; f \,\in\, C^2([-\pi,\pi]); \\ &[\,\mathrm{x}\,]\; f \,\in\, C^2_{pe}([-\pi,\pi]); \quad [\;\;]\; f \,\in\, C^\infty([-\pi,\pi]); \end{aligned} \tag{91}$$

dove $C^k([-\pi,\pi])$ denota lo spazio di tutte le funzioni continue con derivate continue in $[-\pi,\pi]$ fino all'ordine k incluso, mentre $C^k_{pe}([-\pi,\pi])$ e' lo spazio delle funzioni $C^k([-\pi,\pi])$ che assumono valori eguali al bordo assieme alle loro derivate fino all'ordine k incluso.
Spiegazione: dalla teoria delle serie di Fourier, sappiamo che la continuita' di una funzione f in $[-\pi,\pi]$ non e' condizione sufficiente per la convergenza puntuale in $[-\pi,\pi]$; per quest'ultima, e' sufficiente che la f sia continua e con derivata prima continua in $[-\pi,\pi]$ come funzione periodica di periodo 2π, ossia che verifichi le condizioni

$$f(\pi) \,=\, f(-\pi), \quad f'(-\pi) \,=\, f'(\pi), \tag{92}$$

ovvero che f sia in $C^1_{pe}([-\pi,\pi]) \,\supseteq\, C^2_{pe}([-\pi,\pi])$.

3.7.29 Scritto AF del 13/09/17; U. Aglietti

1) [5] Determinare la norma $\|\cdot\|_p$ dell'operatore lineare limitato

$$T : l^p \,\to\, l^p, \tag{93}$$

$1 \le p \le \infty$, definito da

$$(Tx)_n \,\equiv\, \lambda\, x_n, \qquad n \,\ge\, 1, \tag{94}$$

dove λ e' un numero complesso qualsiasi, e riportarne il valore nel riquadro che segue

$$\|T\|_p \,=\, \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]; \tag{95}$$

R. Poiche' l'operatore T e' un multiplo dell'identita',

$$T \,=\, \lambda\, \mathrm{Id}, \tag{96}$$

e quest'ultima ha norma p eguale ad uno, $1 \le p \le \infty$, dagli assiomi della norma segue che

$$\|T\|_p \,=\, |\lambda|; \tag{97}$$

2) [5] Scrivere i coefficienti della serie di Fourier a_n e b_n della funzione

$$f(x) \,\equiv\, \frac{2-\cos x}{5-4\cos x} \tag{98}$$

nei riquadri che seguono

$$a_n = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]; \qquad b_n = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]. \tag{99}$$

Suggerimento: si consideri la funzione $1/(2-z)$;
R. Espandendo in serie di potenze di z la funzione $1/(2-z)$, ponendo $z = \exp(ix)$ e prendendo la parte reale ai due membri, si ottiene

$$a_0 = 1; \qquad a_n = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \geq 1; \qquad b_n = 0, \quad n \geq 0; \tag{100}$$

3) [5] Riportare l'espressione della trasformata di Fourier $\tilde{f}(\omega)$ della funzione

$$f(x) \equiv \sin(x)\, e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{101}$$

nello spazio predisposto seguente

$$\tilde{f}(\omega) = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]; \tag{102}$$

R. Esprimendo il seno tramite gli esponenziali oscillanti e separando l'integrale che definisce $\tilde{f}(\omega)$ nei contributi su $x \geq 0$ e su $x < 0$ al fine di risolvere il modulo di x, si ricava

$$\tilde{f}(\omega) = -\frac{4i\omega}{\omega^4 + 4}. \tag{103}$$

Osserviamo che, poiche' $f(x)$ e' dispari in x, $\tilde{f}(\omega)$ e' immaginaria pura per ω reale. Inoltre, poiche' $f(x)$ decade esponenzialmente, come $\exp(-|x|)$, per $x \to \pm\infty$, $\tilde{f}(\omega)$ e' una funzione meromorfa nel piano complesso della variabile ω, analitica in una striscia aperta infinita di altezza due, centrata sull'asse reale.

4) [5] Scrivere il valore dell'integrale

$$I \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(\sin x)\, \varphi(x)\, dx, \tag{104}$$

con φ una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto, nel riquadro che segue

$$I = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]; \tag{105}$$

R. Usando la formula per $\delta(f(x))$, si ricava

$$I = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varphi(n\pi). \tag{106}$$

Osserviamo che l'espressione sopra ha senso poiche' la serie e' finita, avendo la funzione di prova φ supporto compatto.

5) [5] Assumendo valida la regola di derivazione composta per la δ di Dirac che vi figura, riportare il valore dell'integrale

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'\left(x^2 - 1\right) \varphi(x) dx, \tag{107}$$

con $\delta'\left(x^2 - 1\right)$ la derivata della δ di Dirac valutata in $x^2 - 1$ e $\varphi(x)$ una funzione qualsiasi in $C_c^\infty(\mathbb{R})$, nello spazio seguente

$$I = \Bigg[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg]; \tag{108}$$

R. Tenendo conto che

$$\frac{d}{dx}\delta\left(x^2 - 1\right) = \delta'\left(x^2 - 1\right) 2x \tag{109}$$

ed usando la definizione di derivata di una distribuzione, si ottiene

$$I = \frac{1}{4}\left[\varphi(1) + \varphi(-1) - \varphi'(1) + \varphi'(-1)\right]; \tag{110}$$

6) [8] Barrare tutte e sole le risposte corrette (siano esse una, piu' di una, o nessuna). Dati due spazi normati X ed Y ed un operatore lineare $T : X \to Y$, la continuita' di T

- [ ] implica la limitatezza di T ;
- [ ] non implica la limitatezza di T ;
- [ ] e' implicata dalla limitatezza di T ;
- [ ] non e' implicata dalla limitatezza di T ;
- [ ] e' equivalente alla continuita' di T ;
- [ ] non e' equivalente alla continuita' di T .

R. Secondo un teorema fondamentale enunciato e dimostrato a lezione, la continuita', nell'ambito delle mappe lineari tra spazi normati, e' equivalente alla limitatezza, per cui implica ed e' implicata da quest'ultima.

3.7.30 Scritto AF del 26/06/18; P. M. Santini

1) ([**2**]+[**2**]+[**2**]) i) Mostrare che, se $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ è uniformemente limitata. Data la funzione $f(x) = \theta(L - x)\theta(x+L)e^{ik_0 x}$, $L, k_0 > 0$, ii) calcolare la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ e graficarla; iii) calcolare e discutere il limite $L \to \infty$ di $\hat{f}(k)$.
R. i) $|\hat{f}(k)| \leq \|f(x)\|_1 = cost < \infty$, $\forall k$; ii) $\hat{f}(k) = \int_{-L}^{L} e^{i(k_0-k)x}dx = 2\frac{\sin((k-k_0)L)}{k-k_0} \to 2\pi\delta(k-k_0)$ per $L \to \infty$.

2) ([**3**]+[**3**]+[**3**]) i) Sviluppare la funzione $|x|$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; ii) studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie in $[-\pi, \pi]$, e disegnare e confrontare i grafici di $|x|$ e della somma $S(x)$ della serie su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare la relazione di Parseval per calcolare la somma notevole: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
R. $|x| = \pi/2 - (4/\pi)\sum_{n\geq 0} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$; conv. assoluta e unif. in $[-\pi, \pi]$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \pi^4/96$

3) ([**3**]+[**3**]) i) Esprimere la derivata seconda della funzione $|x|$ attraverso note distribuzioni. ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_1^{\infty} \delta(\sin(\pi x))e^{-x}dx$.
R. i) $(|x|)'' = (\theta(x) - \theta(-x))' = 2\delta(x)$. ii) $I = 1/(2\pi e) + \sum_{n\geq 2} e^{-n} = \frac{e+1}{2\pi e(e-1)}$

4) ([**2**]+[**2**]+[**4**]) Dato l'operatore di innalzamento $E^+ : l^2 \to l^2$ definito da $E^+(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, i) calcolarne la norma; ii) trovare il suo hermitiano coniugato $(E^+)^\dagger$; iii) individuare il suo spettro $\sigma(E^+)$.
R. $\|E^+\|_2 = 1$, $(E^+)^\dagger = E^-$, $\sigma(E^+) = \sigma_p(E^+) \cup \sigma_c(E^+)$, $\sigma_p(E^+) = \{|\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(E^+) = \{|\lambda| = 1\}$

5) ([**3**]+[**3**]) i) Data la matrice $A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, i) calcolarne autovalori ed autovettori. ii) Calcolare e^A.
R. Autoval. $\pm a$, autovett. $(1, \pm 1)^T/\sqrt{2}$, $e^A = U\ diag(e^{-a}, e^a)\ U^\dagger = \begin{pmatrix} \cosh a & \sinh a \\ \sinh a & \cosh a \end{pmatrix}$, con $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3.7.31 Scritto AF dell'11/07/18; P. M. Santini

1) ([**3**]+[**3**]) Definita la trasformata di Fourier $\tilde{f}(k) \equiv (\mathcal{F}f)(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\exp(-ikx)dx$ della funzione $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, e ricordando che la trasformata di Fourier della gaussiana $\frac{e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ è $\frac{e^{-k^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $\sigma > 0$, i) calco-

lare la trasformata di Fourier di $f(x) = xe^{-x^2}$, e ii) trovare una soluzione $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ non banale dell'equazione agli autovalori $\mathcal{F}\psi = \lambda\psi$, per una scelta opportuna dell'autovalore λ.
R. i) $f(x) = xe^{-x^2} = -(e^{-x^2})'/2$, con $\mathcal{F}e^{-x^2} = e^{-k^2/4}/\sqrt{2}$ ($\sigma = 1/\sqrt{2}$). Quindi $\mathcal{F}(xe^{-x^2}) = -\mathcal{F}((e^{-x^2})')/2 = -ike^{-k^2/4}/(2\sqrt{2})$; oppure: $\mathcal{F}(xe^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2}\exp(-ikx)dx = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xe^{-(x+ik/2)^2}dx = -ike^{-k^2/4}/(2\sqrt{2})$.
ii) per $\sigma = 1$, $\tilde{f}(k) = f(k) = e^{-k^2/2}/\sqrt{2\pi}$; quindi: $\psi(x) = e^{-x^2/2}$ e $\lambda = 1$.
2) ([**3**]+[**3**]+[**3**]) i) Sviluppare la funzione e^{iax}, $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ (suggerimento: conviene usare la base degli esponenziali $\{e^{inx}\}$); ii) studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie in $[-\pi,\pi]$, individuare gli eventuali punti di discontinuità della somma della serie, ed il valore della somma in tali punti. iii) Usare tale serie per calcolare la somma notevole $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-a)^2}$.
R. i) $f(x) \sim S(x) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{a-n}e^{inx}$; ii) $S(\pm\pi) = \cos(\pi a)$;
iii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$.
3) ([**3**]+[**3**]) i) Studiare il limite, per $n \to \infty$, della successione di funzionali $F_n(\varphi) = n^a\int_{\mathbb{R}} e^{-n^2x^2}\varphi(x)dx$ al variare del parametro $a > 0$. ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{\pi/2}^{2\pi} x\delta(\cos x)dx$.
R. i) $F_n(\varphi) \sim \sqrt{\pi}n^{a-1}\varphi(0)$, $n \gg 1$; quindi $F_n(\varphi) \to 0$ se $0 < a < 1$, $F_n(\varphi) \to \infty$ se $a > 1$, $F_n(\varphi) \to \sqrt{\pi}\varphi(0)$ se $a = 1$ (F tende cioè al funzionale δ di Dirac moltiplicato per la costante $\sqrt{\pi}$). ii) $I = 7\pi/4$.
4) ([**1**]+[**2**]+[**5**]) Dato l'operatore di traslazione T definito da $Tf(x) = f(x+1)$, i) mostrare che può essere visto come operatore $T : L^2(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$; ii) calcolarne la norma; iii) individuare il suo spettro discreto $\sigma_p(T)$ (suggerimento: si cerchi l'autofunzione nella forma $e^{\alpha x}$).
R. ii) $\|T\| = sup(\|Tf\|/\|f\|) \leq 1$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+)$; $= 1$ se $f = 0$ per $x \in (0,1)$. Quindi $\|T\| = 1$. iii) equ. agli autovalori: $\psi(x+1,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Se $\psi(x,\lambda) = e^{\alpha x}$, allora $\lambda = e^{\alpha} \in \mathbb{C}$ ($|\lambda| = e^{\alpha_R}$, $\arg\lambda = \alpha_I$). $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow \alpha_R < 0 \Leftrightarrow 0 < |\lambda| < 1 = \sigma_p(T)$.

5) ([**3**]+[**3**]) i) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0,2\pi)$, i) calcolarne autovalori ed autovettori. ii) Calcolare $\log A$ (si scelga la determinazione tale che $\log 1 = 0$).
R. autoval.: i) $\lambda_\pm = e^{\pm i\theta}$, autovett. $\vec{v}_\pm = (1,\pm i)^T/\sqrt{2}$.
ii) $\log A = U\log A_D\, U^\dagger = \theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, con $\log A_D = \log\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} =$

$i\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

3.7.32 Scritto AF del 13/09/18; P. M. Santini

1) ([**2**]+[**2**]+[**2**]) Se la trasformata di Fourier (opportunamente normalizzata) della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$ è $\tilde{f}(k) = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}$, calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni: i) $f_1(x) = e^{-ax^2},\ a > 0$, ii) $f_2(x) = xe^{-x^2}$, iii) $f_3(x) = x^2 e^{-x^2}$.
R. i) $\tilde{f}_1(k) = \frac{e^{-k^2/(4a)}}{\sqrt{2a}}$, ii) $\tilde{f}_2(k) = -ik\frac{e^{-k^2/4}}{2\sqrt{2}}$, iii) $\tilde{f}_3(k) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-k^2/2)e^{-k^2/4}$
2) ([**3**]+[**3**]+[**3**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = \theta(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ ($\theta(x)$ è la funzione gradino: $\theta(x) = 1,\ x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ altrimenti). ii) Studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie in $[-\pi, \pi]$; individuare gli eventuali punti di discontinuità della somma della serie, ed il valore della somma in tali punti; disegnare e confrontare i grafici della somma della serie e di $f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. iii) Usare tale serie per calcolare la somma notevole $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
i) $\theta(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}$, ii) conv. punt. in $I = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, conv. unif. in compatti di I, non conv. assoluta. Discontinua in $0, \pm 1$, dove la somma è 1/2. iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \pi^2/8$
3) ([**3**]+[**3**]) i) Esprimere la derivata seconda della funzione $|\sin x|$, nell'intervallo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, attraverso note distribuzioni. ii) Calcolare l'integrale $\int\limits_0^{\infty} 2^{-x} \delta(\sin(\pi x)) dx$.
R. i) $(|\sin x|)'' = 2\delta(x) - |\sin x|$; ii) $I = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} 2^{-x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta(x-n) dx = \frac{1}{\pi}(1/2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/2)^n) = 3/(2\pi)$
4) ([**3**]+[**3**]+[**3**]) Dato l'operatore quantità di moto $\hat{A} = -id/dx$, i) calcolare il suo spettro in $L^2[a, b]$, $b > a$, con $\psi(a) = \psi(b)$. ii) Calcolare il suo spettro in $L^2(\mathbb{R})$, e iii) mostrare che, in questo caso, l'operatore risolvente non è limitato.
R. i) $\sigma = \sigma_p = \{\lambda_n = 2\pi n/(b-2),\ n \in \mathbb{Z}\}$ e $\psi_n(x) = \exp(i\lambda_n x)$; ii) $\sigma = \sigma_c = \mathbb{R}$, $\psi(x, \lambda) = \exp(i\lambda x),\ \lambda \in \mathbb{R}$
5) ([**3**]+[**3**]) Data la matrice $A = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, i) calcolarne autovalori ed

autovettori. ii) Calcolare $\exp A$.
i) $\lambda_\pm = \pm i\pi/2$, $\underline{v}_\pm = (1, \pm i)/\sqrt{2}$. ii) $\exp(A) = \frac{2}{\pi} A$

3.7.33 Scritto AF del 21/01/19; P. M. Santini

1) ([**3**]+[**3**]) Sia $\hat{f}(k) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-ikx) dx$, $k \in \mathbb{R}$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. i) Mostrare che $\hat{f}(k)$ è uniformemente limitata. ii) Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ è $\hat{f}(k) = \pi e^{-|k|}$, calcolare la trasformata di Fourier $\hat{g}(k)$ della funzione $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$.
R. i) $|\hat{f}(k)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx =: \|f\|_\infty < \infty$, $\forall k$; ii) $\hat{g}(k) = -i\pi k e^{-|k|}/2$
2) ([**3**]+[**3**]+[**3**]) i) Sviluppare la funzione $f(x) = x$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$; ii) Disegnare i grafici di $f(x)$ e della somma $S(x)$ della serie per $x \in \mathbb{R}$; studiare la convergenza puntuale, assoluta e uniforme della serie in $[-\pi, \pi]$; individuare gli eventuali punti di discontinuità della somma della serie ed il valore della somma in tali punti. iii) Usare tale serie per calcolare la somma notevole $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
R. i) $x \sim 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$; ii) non conv. assoluta, conv. uniforme in ogni chiuso di $(-\pi, \pi)$, conv. puntuale in $(-\pi, \pi)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$
3) ([**4**]+[**3**]) i) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ \sin x, & x > 0, \end{cases}$ calcolare $f'(x)$ e $f''(x)$, per $x \in \mathbb{R}$. ii) Calcolare l'integrale $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi} e^x \delta(\sin x) dx$.
R. i) $f'(x) = -\theta(-x) + \theta(x) \cos x$, $f''(x) = 2\delta(x) - \theta(x) \sin x$; ii) $I = 1 + \exp(\pi)/2$
4) ([**3**]+[**4**]) Dato l'operatore di traslazione $T : l^2 \to l^2$ definito da $T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$, i) costruire il suo aggiunto (hermitiano coniugato) $T^\dagger$; ii) Trovare lo spettro discreto di T.
R. i) $T^\dagger(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$; ii) $\sigma_p = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$
5) ([**3**]+[**4**]) i) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, i) calcolarne autovalori ed autovettori. ii) usare questo risultato per costruire la matrice $\exp(i\frac{\pi}{2} A)$.
R. i) autovalori: $\lambda_\pm = \pm 1$, autovett.: $(1, \pm i)/\sqrt{2}$. ii) $\exp(i\frac{\pi}{2} A) = iA$