

Corso di Onde non lineari 2

Paolo Maria Santini

Programma del corso (under construction)

1) Equazioni lineari e quasi-lineari del prim'ordine in $N+1$ dimensioni e relazioni con la teoria dei sistemi dinamici [1, 2, 3]. Campi vettoriali, Hamiltoniani e non [3]. Il metodo delle caratteristiche [1, 2, 3, 4]. Esempi concreti. Aspetti geometrici [4, 5] ed analitici [3, 6] dello sviluppo di singolarità del tipo "gradient catastrophe" (o "wave breaking") in onde non lineari unidimensionali che evolvono attraverso l'equazione di Hopf

$$u_t + uu_x = 0. \quad (1)$$

Regolarizzazione e onde d'urto. [4, 5]

2) Simmetrie di sistemi dinamici e commutazione di campi vettoriali [3]. Equazioni quasi lineari integrabili in 2+1 e 3+1 dimensioni connesse alla commutazione di famiglie ad un parametro (spettrale λ) di campi vettoriali in piu' dimensioni [9, 10, 11]. Esempi significativi corrispondenti a campi vettoriali Hamiltoniani: a) l'equazione di Kadomtsev - Petviashvili senza dispersione (dKP)

$$\begin{aligned} [\hat{u}_1, \hat{u}_2] &= (u_t + uu_x)_x + u_{yy} = 0, \\ \hat{u}_1 &= \partial_y + \{H_1, \cdot\}_{p,x}, \quad \hat{u}_2 = \partial_t + \{H_2, \cdot\}_{p,x}, \\ H_1 &= \frac{\lambda^2}{2} + u, \quad H_2 = \frac{\lambda^3}{3} + \lambda u - \partial_x^{-1} u_y, \end{aligned} \quad (2)$$

che descrive l'evoluzione di onde lunghe, quasi unidimensionali, vicino alla riva [8], e b) l'equazione heavenly di Plebanski [7]

$$\begin{aligned} [\hat{u}_1, \hat{u}_2] &= \theta_{tx} - \theta_{zy} + \theta_{xx}\theta_{yy} - \theta_{xy}^2 = 0, \\ \hat{u}_1 &= \partial_z + \{H_1, \cdot\}_{y,x}, \quad \hat{u}_2 = \partial_t + \{H_2, \cdot\}_{y,x}, \\ H_1 &= \lambda y + \theta_x, \quad H_2 = -\lambda x + \theta_y, \end{aligned} \quad (3)$$

riduzione auto-duale esatta delle equazioni di Einstein. Problema spettrale diretto ed inverso per famiglie ad un parametro di campi vettoriali e la soluzione del problema di Cauchy per le equazioni heavenly e dKP. [9, 10, 11]

3) Uso della teoria sviluppata nelle parti 1) e 2), per la costruzione di soluzioni particolari delle equazioni (2), (3) e per lo studio degli aspetti geometrici ed analitici universali dello sviluppo di singolarità del tipo "gradient catastrophe" o "wave breaking" di onde non lineari bidimensionali localizzate, che evolvono secondo la dKP, con applicazioni, ad esempio, alla Fluidodinamica. [12]

References

- [1] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*; Vol. II: *Partial Differential equations*, by R. Courant, Interscience Publishers, J. Wiley and sons, New York, 1962.
- [2] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*; Prentice-Hall, NJ, 1976.
- [3] P. M. Santini: “Alcuni appunti del corso”
<http://www.roma1.infn.it/people/santini/Didattica2/appunti.pdf>
- [4] J. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, NY, 1974.
- [5] Appunti, a cura di G. Angilella, del corso di Dottorato: “Onde non lineari; metodi perturbativi ed esatti”, tenuto da P.M.Santini a Catania, nell’AA 95-96 (pagine 1-9) <http://www.ct.infn.it/angilell/corsidott.pdf>
- [6] P.M.Santini: “On the analytic and universal aspects of wave breaking of 1+1 dimensional waves”; third part of the course “The transition from regular to irregular motion as travel on Riemann surfaces” at the NEEDS 2007-School, L’Ametlla de Mar, June 15-24, 2007. <http://www.roma1.infn.it/people/santini/Didattica2/break.pdf>
- [7] J. F. Plebanski, “Some solutions of complex Einstein equations”, *J. Math. Phys.* **16**, 2395-2402 (1975).
- [8] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and Inverse Scattering*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [9] S. V. Manakov and P. M. Santini: “The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation”; *JETP Letters*, **83**, No 10, 462-466 (2006). <http://arXiv:nlin.SI/0604016>.
- [10] S. V. Manakov and P. M. Santini: “Inverse scattering problem for vector fields and the Cauchy problem for the heavenly equation”; *Phys. Lett. A* **359**, 613-619 (2006). <http://arXiv:nlin.SI/0604017>.
- [11] S. V. Manakov and P. M. Santini: “A hierarchy of integrable PDEs in 2 + 1 dimensions associated with 1 - dimensional vector fields”; *Theor. Math. Phys.* **152**: 1004-1011 (2007). <http://arXiv:nlin.SI/0611047>

- [12] S. V. Manakov and P. M. Santini: “On the solutions of the dKP equation: nonlinear Riemann Hilbert problem, longtime behaviour, implicit solutions and wave breaking”, *J.Phys.A: Math.Theor.* **41** (2008) 055204. (arXiv:0707.1802 (2007))