

Appunti del corso di Fisica dei Sistemi non Lineari  
Fisica dei Plasmi

Prof. Flora Pempinelli

Novembre 1998

# 1 Cos'è un plasma?

La parola "plasma" apparve per la prima volta in fisica nel 1920. Si dice che il 99% della materia nell'universo sia in stato di "plasma" (interno delle stelle, nebulose gassose, spazio interstellare, fasce di Van Allen, vento solare, aurore boreali, gas in un tubo al neon etc.) ed è una stima ragionevole. Noi viviamo nel restante 1%.

Una definizione di plasma è data da: **un plasma è un gas quasi neutro di particelle cariche e neutre che presenta un comportamento collettivo.**

Un plasma è spesso chiamato il 4° stato della materia, anche se questo nome viene talvolta usato per mezzi differenti, per esempio per l'elio superfluido (e viene dal fatto che può essere ottenuto scaldando un gas). Un plasma è un gas ionizzato completamente, o quasi completamente, in quantità più grandi della cosiddetta sfera di Debye. Questa sfera corrisponde all'estensione di influenza di una carica elettrica su altre particelle cariche. Fuori di questa sfera il campo di potenziale della carica elettrica è schermato dalla nuvola di particelle cariche che sta attorno.

I fenomeni collettivi nei plasmi sono fenomeni decisamente non lineari, legati ai rumori e ad oscillazioni di ampiezza finita, le cui interazioni con le particelle agiscono sulle proprietà macroscopiche dei plasmi. Molto spesso questi rumori ed oscillazioni appaiono in maniera spontanea a causa delle diverse instabilità. Se viene eccitato un numero molto grande di gradi di libertà e le oscillazioni diventano irregolari, allora si dice che lo stato del plasma è uno stato **turbolento**.

Esiste, inoltre, un gruppo importante di fenomeni non lineari di **natura regolare**, per cui le eccitazioni collettive del sistema possono creare fenomeni molto particolari anche straordinariamente attraenti, come, per esempio, l'eco nel plasma, l'autofocalizzazione dei pacchetti d'onde, le onde non lineari con dispersione debole. Lo studio di questi fenomeni, oltre ad essere interessante di per sé, è anche utile dal punto di vista dello sviluppo dei concetti generali sulla fisica dei plasmi, queste sostanze tanto originali e particolari.

Ci occuperemo quindi dei fenomeni collettivi regolari.

Vediamo in termini di parametri dove si collocano i vari campi della fisica interessati (vedi **figura 1**).

Assumeremo il plasma **non relativistico** e **non quantistico** (elettroni non degeneri).

Consideriamo un plasma di deuterio. Usiamo il sistema di misura *cgs* – *Gauss*. Sia  $n_e$  il numero degli elettroni per  $cm^3$ ,  $n_i$  il numero degli ioni per  $cm^3$  ed  $n_n$  il numero degli atomi neutri per  $cm^3$ . Definiamo con

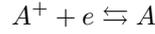
$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_n}$$

il grado di ionizzazione e assumiamo  $T_i \simeq T_e = T$  (misurata in gradi Kelvin).

Faremo una serie di considerazioni e di ipotesi semplificative.

1. La prima richiesta è che  $\alpha > \frac{1}{2}$ .

$n_e(T, \alpha = \frac{1}{2})$  è dato dalla formula di Saha. Questa formula viene ricavata con ragionamenti di meccanica statistica, considerando l'equilibrio termico tra gli stati dello spettro continuo e quelli dello spettro discreto:



( $A^+$  è l'atomo ionizzato,  $A$  è l'atomo neutro) sotto l'ipotesi che il plasma sia quasi neutro, cioè che la densità degli ioni sia circa uguale a quella degli elettroni ([4] cap 2: Statistica di gas debolmente ionizzati). La formula di Saha fornisce la seguente relazione

$$\frac{n_i}{n_n} \simeq 2.4 \times 10^{15} \frac{T^{3/2}}{n_e} e^{-\frac{u_i}{k_B T}}$$

dove  $u_i$  è l'energia di ionizzazione (cioè il numero di *erg* richiesti per estrarre un elettrone dall'atomo),  $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg } (^\circ K)^{-1}$  è la costante di Boltzmann ed il fattore numerico risulta dal peso statistico delle varie componenti.

La formula di Saha ci dà il limite a sinistra per  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Per  $T$  grandi  $n_e \simeq T^{3/2}$  per  $\alpha$  fissato. (Si noti che a temperatura ambiente  $\frac{n_i}{n_n} \simeq 10^{-122}$ ).

2. Notiamo ora che  $1 \text{ cm}^3$  è un volume ragionevole per gli esperimenti, quindi richiediamo che  $\lambda_D < 1 \text{ cm}$ , cioè vogliamo avere più di una sfera di Debye in  $1 \text{ cm}^3$ . La lunghezza di Debye è definita da

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi n_e e^2}} = \frac{V_T}{\sqrt{4\pi n_e e^2 m_e^{-1}}}, \quad (1)$$

essendo

$$m_e V_T^2 = k_B T$$

e dove con  $V_T$  abbiamo indicato la velocità termica degli elettroni. Si ha quindi

$$\lambda_D \simeq \sqrt{\frac{T}{n_e}},$$

e perciò per  $\lambda_D = 1 \text{ cm}$  si ottiene come limite inferiore

$$n_e \simeq T.$$

3. Consideriamo un **plasma non relativistico**, quindi deve essere  $V_T < 0,9 c$ , dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto. Questa condizione dipende solo dalla temperatura e quindi ci dà la linea verticale a destra in figura.

4. Richiediamo che gli **elettroni** siano **non degeneri** (trascuriamo gli effetti quantistici) e quindi assumiamo che

$$n_e < 10^{25} \text{ cm}^{-3}$$

(questo corrisponde ad 1 milione di volte la densità degli atomi nell'aria a temperatura ambiente).

Questa condizione ci dà la linea orizzontale alla sommità del diagramma.

Per gli altri atomi leggeri (idrogeno, deuterio-trizio, elio) i diagrammi sono molto simili.

In questo modo il plasma ha trovato il proprio posto nello spazio dei parametri. Vediamo ora i vari campi della fisica interessati.

(a) **Modello di Vlasov**

Si ottiene dall'equazione di Boltzmann (teoria cinetica dei gas):

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

dove  $f = f(x_i, v_i, t)$  è la funzione di distribuzione del numero di particelle con velocità  $v_x, v_y, v_z$ , e quindi  $f dv_x dv_y dv_z$  rappresenta il numero di particelle per unità di volume con componenti di velocità  $\{v_x, v_x + dv_x \text{ etc.}\}$ ,  $\vec{F}$  è la forza che agisce sulle particelle e, infine,  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$  è il time rate di cambiamento per collisione.

L'equazione di Vlasov è ottenuta per plasmi caldi, per cui le collisioni possano essere trascurate, e quando  $n_e$  (e  $n_i$ ) è grande nella sfera di Debye (almeno 50):

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q}{m} \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0.$$

Deve essere

$$n_e \geq \frac{50}{\frac{4}{3}\pi\lambda_D^3} \simeq \frac{50}{5\lambda_D^3} = \frac{10}{\lambda_D^3}.$$

Se introduciamo il cosiddetto parametro del plasma  $g$

$$g = \frac{1}{n_e \lambda_D^3},$$

deve essere dunque

$$g \leq 10^{-1},$$

e quindi si ha il limite

$$\lambda_D^3 n_e \simeq 10,$$

cioè

$$\lambda_D^6 n_e^2 \simeq 100.$$

Siccome inoltre

$$\lambda_D^2 \simeq \frac{T}{n_e},$$

questo significa che

$$n_e \simeq T^3 10^{-2}.$$

(b) **Magnetoidrodinamica (MHD)**, quando si ha un forte campo magnetico presente. Questo modello assume che il plasma sia dominato dalle collisioni. Questo implica che il libero cammino medio  $l$  tra due collisioni sia minore di  $10^{-1} \text{ cm}$  (molto rozzo)

$$l \simeq n_e \frac{\lambda_D^4}{\log \Lambda} \simeq \frac{T^2}{n_e \log \Lambda}$$

con  $\Lambda = \frac{12\pi}{g}$  e  $\log \Lambda \simeq 10$  per i valori coinvolti dei parametri. Deve essere perciò

$$l < 10^{-1} \text{ cm}$$

cioè

$$n_e \simeq T^2.$$

(c) Per fortuna dei fisici la Natura è stata tanto gentile da porre i **plasmii termonucleari (TP)**, che sono molto importanti come futura fonte di energia, nella zona di sovrapposizione dei due modelli.

(d) Inoltre sono compresi nel diagramma

SC = corona solare

SA = atmosfera solare

S = centro del sole

MT = trappole magnetiche

L = plasma prodotto nei laser.

(e) Sono invece esclusi dal diagramma i **plasmii cosmici diluiti** ( $n_i \simeq 1/\text{cm}^3$ ).

Osserviamo infine che un plasma è alquanto diverso dall'acqua, anche quando si ha a che fare con un plasma non relativistico e classico. L'acqua può esistere solo in una regione molto piccola del nostro diagramma.

Inoltre in questo schema non compaiono i plasmi con  $T_e \neq T_i$  (cioè  $T_e > T_i$ ), che considereremo in seguito.

Bisogna inoltre distinguere tra plasmi magnetizzati e plasmi non magnetizzati. Il parametro caratteristico è

$$\Omega_c = \frac{B_0}{c\sqrt{4\pi n_i m_i}} = \frac{V_A}{c}$$

dove  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{x}$  è il campo magnetico esterno normalizzato a  $\lambda_D$  e  $V_A$  è la velocità di Alfvén, che è paragonabile a  $c$  solo per plasmi molto diluiti e fortemente magnetizzati.

Quindi la quantità  $\frac{B_0}{\sqrt{n_i}}$  determina la fisica. Per  $\Omega_c \simeq 0$  (piccola), vale l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili

$$(\phi_t + \phi_{xxx} + \phi\phi_x)_x = \alpha\phi_{yy}.$$

Per  $\Omega_c \simeq 1$  (grande), vale il modello di Zakharov-Kutnetsov.

Noi considereremo **plasma non magnetizzati** :  $\Omega_c = 0$ .

Le onde elettrostatiche che si possono propagare nei plasma non magnetizzati sono le onde di Langmuir (onde del plasma elettronico) e le onde iono-acustiche (le onde sonore non sono altro che onde di pressione che si propagano da uno strato all'altro per mezzo di collisione tra molecole d'aria : in un plasma con poche collisioni c'è un fenomeno analogo e per questo vengono chiamate iono-acustiche) e anche pacchetti iono-acustici.

Le due frequenze caratteristiche in un plasma non magnetizzato sono:

- frequenza del plasma elettronico

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}} \quad (2)$$

- frequenza del plasma ionico

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{4\pi n_i e^2}{m_i}}. \quad (3)$$

## 2 I Solitoni in Fisica dei Plasma

I solitoni appaiono in molte aree della fisica del plasma. I primi tipi di solitoni osservati sperimentalmente sono stati:

1. onde iono-acustiche con debole dispersione  $\rightarrow$  equazione di *KdV*
2. pacchetti d'onda iono-acustici  $\rightarrow$  equazione *NLS*
3. onde di Langmuir (onde del plasma elettronico)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - nE &= 0 \\ \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

da cui si ricava ancora l'eq. *NLS* con soluzioni solitoniche.

Come in idrodinamica, questi solitoni risultano dal bilancio della nonlinearietà e degli effetti dispersivi.

## 2.1 Onde iono-acustiche

Gli ioni eseguono oscillazioni di bassa frequenza vicino alla frequenza del plasma ionico. Si considera un mare di elettroni di massa  $m_e$ , carica  $-e$ , densità per unità di volume  $n_e$  e ioni di massa  $m_i$ , carica  $Ze$ , densità per unità di volume  $n_i$ , quindi un plasma di elettroni e ioni. Poiché  $m_e \ll m_i$ , l'inerzia degli elettroni può essere trascurata, non così l'effetto elettrostatico della carica elettronica.

Si trattano gli elettroni come un gas e l'equazione caratteristica è l'equazione di stato dei gas perfetti

$$p_e = k_B T_e n_e,$$

in cui  $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $p_e$  è la pressione,  $T_e$  la temperatura dovuta all'energia cinetica.

Consideriamo il caso in cui  $T_i \ll T_e$ , sicché  $T_i \simeq 0$  e quindi  $p_i \simeq 0$  (quest'approssimazione è detta "cold ions and hot electrons"). Gli elettroni seguono il moto degli ioni e preservano una neutralità di carica approssimata. Le collisioni sono trascurate. Le equazioni che descrivono questi fenomeni sono:

1. legge di conservazione degli ioni

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{v}_i) = 0$$

2. equazione del moto per gli ioni

$$n_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = n_i e Z \vec{E}$$

(si noti che in questo caso si è trascurato il termine di gradiente di pressione degli ioni)

3. equazione del moto per gli elettroni

$$n_e m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -n_e e \vec{E} - \vec{\nabla} p_e$$

4. equazione di Poisson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e (Z n_i - n_e)$$

$\vec{E}$  è il campo elettrico dovuto alla non completa neutralità della carica,  $\vec{v}_i$  e  $\vec{v}_e$  sono le velocità medie degli ioni e degli elettroni e  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  è la derivata totale rispetto al tempo.

Consideriamo il solo effetto elettrostatico, trascurando l'inerzia degli elettroni. La forza dovuta al campo elettrico è controbilanciata dal gradiente di pressione e l'equazione (3) è sostituita dalla (3')

$$(3') \quad -n_e e \vec{E} = \vec{\nabla} p_e$$

o anche (compressione isoterma)

$$(3') \quad -n_e e \vec{E} = k_B T_e \vec{\nabla} n_e.$$

Mettiamoci ora nel caso unidimensionale (moto unidirezionale). Le equazioni diventano

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i) = 0 \quad (4)$$

$$m_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = e Z E \quad (5)$$

$$E + \frac{k_B T_e}{e n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e (Z n_i - n_e). \quad (7)$$

Introduciamo quantità adimensionali

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\lambda_D}, & t' &= \frac{t}{\tau}, \\ v' &= v \frac{\tau}{\lambda_D}, & E' &= \frac{e \lambda_D}{k_B T_e} E, \\ n'_i &= \frac{n_i}{n_0}, & n'_e &= \frac{n_e}{n_0} \end{aligned}$$

dove

$n_0$  = densità media degli ioni

$\lambda_D = \left( \frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e^2} \right)^{1/2}$  lunghezza di Debye per il plasma

$\omega_p = \frac{1}{\tau} = \left( \frac{4\pi n_0 e^2 Z}{m_i} \right)^{1/2}$  frequenza del plasma ionico.

Si ottengono così dalle (4)-(7) le seguenti equazioni

$$\frac{\partial n'_i}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}(n'_i v'_i) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t'} + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x'} = E' \quad (9)$$

$$E' + \frac{1}{n'_e} \frac{\partial n'_e}{\partial x'} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial x'} = Z n'_i - n'_e. \quad (11)$$

Se ci fosse neutralità esatta della carica si avrebbe

$$\begin{aligned} Zn'_i &= n'_e \\ \frac{\partial E'}{\partial x'} &= 0 \\ \frac{1}{n'_e} \frac{\partial n'_e}{\partial x'} &= \frac{1}{n'_i} \frac{\partial n'_i}{\partial x'} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial n'_i}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}(n'_i v'_i) &= 0 \\ \frac{\partial v'_i}{\partial t'} + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x'} &= -\frac{1}{n'_i} \frac{\partial n'_i}{\partial x'}. \end{aligned}$$

Questo porta alla creazione di onde d'urto. Il difetto di completa neutralità della carica introduce dispersione e fornisce così il bilancio della nonlinearietà che previene la formazione di onde d'urto e porta ad un profilo stabile.

Per ricavare la relazione di dispersione conviene esprimere tutte le altre quantità in termini del potenziale del campo elettrico  $\phi$ , definito da  $E = -\phi_x$ , ovvero, nelle nuove variabili,  $E' = -\phi'_x$ , con  $\phi' = \frac{e}{k_B T_e} \phi$ .

Bisogna innanzitutto procedere alla linearizzazione. Si richiede che per  $|x'| \rightarrow \infty$  si abbia  $n' \rightarrow 1$ ,  $v' \rightarrow 0$ ,  $\phi' \rightarrow 0$  e quindi per grandi  $|x'|$  si può scrivere, tralasciando gli apici per comodità,

$$\begin{aligned} n &\simeq 1 + \varepsilon \tilde{n} \\ v &\simeq \varepsilon \tilde{v} \\ \phi &\simeq \varepsilon \tilde{\phi}. \end{aligned}$$

Le equazioni al primo ordine in  $\varepsilon$  diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} &= \tilde{n}_i - \tilde{n}_e \end{aligned}$$

dove abbiamo anche posto  $Z = 1$ . Si ha perciò

$$\frac{\partial^4 \tilde{\phi}}{\partial x^2 \partial t^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{n}_e}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2},$$

che è la parte lineare dell'equazione di Bousinnesq. Se si richiede al potenziale  $\tilde{\phi}$  un comportamento del tipo onda piana  $e^{i(kx-\omega t)}$  si ottiene la relazione di dispersione

$$k^2\omega^2 = k^2 - \omega^2,$$

ossia

$$\omega = \frac{\pm k}{\sqrt{1+k^2}}. \quad (12)$$

Essendo  $\frac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0$  l'equazione è di tipo dispersivo.

Nel caso di neutralità della carica si ha invece

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial x} \end{aligned}$$

e quindi, derivando la prima equazione rispetto a  $x$  e la seconda rispetto a  $t$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial x \partial t} &= -\frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

ossia  $\tilde{n}_i$  e  $\tilde{v}_i$  soddisfano l'equazione delle onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

Se  $\tilde{v} \sim e^{i(kx-\omega t)}$  si ha

$$(ik)^2 - (-i\omega)^2 = 0$$

ovvero

$$\omega = \pm k,$$

il che significa che l'equazione è non dispersiva e quindi non ci può essere bilancio con la non-linearità. Dunque nel caso di perfetta neutralità della carica si ha, come accennato in precedenza, la creazione di onde d'urto (shock waves). Osserviamo che pulsazione e numero d'onda che compaiono in queste relazioni sono in realtà  $k'$  e  $\omega'$  adimensionali, precisamente  $k' = k\lambda_D$  e  $\omega' = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_p}$ .

Nell'ipotesi di dispersione debole si può fare uno sviluppo per piccoli  $k$  (onde lunghe) della relazione di dispersione (12), sicché

$$\omega = \frac{k}{(1+k^2)^{1/2}} \simeq k \left( 1 - \frac{1}{2}k^2 + \dots \right)$$

ovvero, con buona approssimazione,

$$\omega = k - \frac{1}{2}k^3$$

e quindi

$$kx - \omega t = (x - t)k + \frac{1}{2}k^3 t.$$

Se a questo punto definiamo

$$\begin{aligned}\xi &= k(x - t) \\ \eta &= k^3 t\end{aligned}$$

usando le relazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= k \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -k \frac{\partial}{\partial \xi} + k^3 \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

e ponendo  $Z = 1$ ,  $n_i = n$ ,  $v_i = u$ , otteniamo dalle (8)-(11)

$$-k \frac{\partial n}{\partial \xi} + k^3 \frac{\partial n}{\partial \eta} + k \frac{\partial(nu)}{\partial \xi} = 0 \quad (13)$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial \xi} + k^3 \frac{\partial u}{\partial \eta} + ku \frac{\partial u}{\partial \xi} = E \quad (14)$$

$$n_e E + k \frac{\partial n_e}{\partial \xi} = 0 \quad (15)$$

$$n - n_e = k \frac{\partial E}{\partial \xi}. \quad (16)$$

con le condizioni al contorno per  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $n, n_e \rightarrow 1$ ,  $u, E \rightarrow 0$ . Introduciamo  $\widehat{E} = \frac{E}{k}$ ; ricordando che  $E = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$  si ha  $\widehat{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$ . Le equazioni (13)-(16) possono essere riscritte nel modo seguente

$$-\frac{\partial n}{\partial \xi} + k^2 \frac{\partial n}{\partial \eta} + \frac{\partial(nu)}{\partial \xi} = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \xi} + k^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \widehat{E} \quad (18)$$

$$n_e \widehat{E} + \frac{\partial n_e}{\partial \xi} = 0 \quad (19)$$

$$n - n_e = k^2 \frac{\partial \widehat{E}}{\partial \xi}. \quad (20)$$

Appare quindi naturale scegliere  $k^2$  come parametro perturbativo ( $k$  è piccolo)

$$\begin{aligned} n &= 1 + k^2 n^{(1)} + k^4 n^{(2)} + \mathcal{O}(k^6) \\ n_e &= 1 + k^2 n_e^{(1)} + k^4 n_e^{(2)} + \mathcal{O}(k^6) \\ u &= u^{(0)} + k^2 u^{(1)} + k^4 u^{(2)} + \mathcal{O}(k^6) \\ \widehat{E} &= E^{(0)} + k^2 E^{(1)} + k^4 E^{(2)} + \mathcal{O}(k^6) \end{aligned}$$

dove  $n^{(j)}$ ,  $n_e^{(j)}$ ,  $u^{(j)}$ ,  $E^{(j)} \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow \infty$ .

Dalla (19) si ottiene subito che  $E^{(0)} = 0$  (coeff. di  $k^0$ ); analogamente considerando nella (18) i coefficienti dei termini in  $k^0$  si ha  $-\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} + u^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \xi} = 0$  che ammette le soluzioni  $u^{(0)} = 1$  e  $u^{(0)} = f(\eta)$  e la prima non è compatibile con le condizioni al contorno, mentre la seconda lo è pur di scegliere  $f(\eta) = 0$ . In definitiva si ha  $u^{(0)} = 0$ .

Al primo ordine ( $k^2$ ) si ha dunque

$$\begin{aligned} \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} &= -E^{(1)} \\ \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \xi} &= -E^{(1)} \\ n^{(1)} &= n_e^{(1)} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} n^{(1)} &= n_e^{(1)} \\ \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial n_e^{(1)}}{\partial \xi} = -E^{(1)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Inoltre  $u^{(1)} = n^{(1)} + g(\eta)$ . Per  $|\xi| \rightarrow \infty$ ,  $u^{(1)} \rightarrow 0$ ,  $n^{(1)} \rightarrow 0$  e quindi  $g(\eta) = 0$ . Perciò si ha

$$n^{(1)} = n_e^{(1)} = u^{(1)}. \quad (22)$$

Al secondo ordine ( $k^4$ ) si ottiene

$$-\frac{\partial n^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial (n^{(1)} u^{(1)})}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (23)$$

$$-\frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} = E^{(2)} \quad (24)$$

$$n_e^{(1)} E^{(1)} + E^{(2)} + \frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (25)$$

$$n^{(2)} - n_e^{(2)} = \frac{\partial E^{(1)}}{\partial \xi}. \quad (26)$$

Usando le relazioni precedenti per esprimere  $\frac{\partial(n^{(1)}u^{(1)})}{\partial\xi}$ , la (24) per  $\frac{\partial u^{(2)}}{\partial\xi}$  e la (26) per  $n^{(2)}$ , dalla (23) si ottiene

$$-\frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial\xi} - \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial n^{(1)}}{\partial\eta} + 2u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial\eta} + u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} - E^{(2)} = 0.$$

Dalla (25) si può ricavare  $\frac{\partial n_e^{(2)}}{\partial\xi}$  e dalla (21)  $\frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial\xi^2} = -\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial\xi^3}$ , sicché

$$n_e^{(1)}E^{(1)} + E^{(2)} + \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial n^{(1)}}{\partial\eta} + 3u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial\eta} - E^{(2)} = 0.$$

Con le ovvie semplificazioni e tenendo conto della (22), si ottiene in definitiva

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\eta} + u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial\xi^3} = 0$$

che è l'equazione di *KdV*. La più semplice soluzione stabile è il solitone della *KdV*. Si ha una conferma sperimentale (Ikezi [7]) della relazione fra velocità e ampiezza dell'impulso per valori  $n_0 \simeq 5 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_e = 2 \text{ eV}$ ,  $T_i \simeq 0.1 \text{ eV}$ .

## 2.2 Onde di Langmuir

Consideriamo oscillazioni vicine ad  $\omega_{pe}$ . Gli ioni non rispondono a queste oscillazioni ad alta frequenza perché la loro massa è troppo grande. Gli ioni sono un fluido uniforme carico positivamente (ioni perfettamente "cold").

Se la velocità di fase è più grande della velocità termica degli elettroni

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}, \quad (27)$$

si può trascurare l'effetto di risonanza onda-particella. Questa volta non trascuriamo l'inerzia degli elettroni. Le equazioni sono (approssimazione per un fluido)

1. equazione del moto degli elettroni

$$n_e m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -n_e e \vec{E} - \vec{\nabla} p_e$$

2. conservazione del numero degli elettroni

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0$$

3. equazione di Poisson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e(n_i - n_e).$$

Si osservi che  $en_i$  è la carica degli ioni ed è costante.  
È opportuno a questo punto fare alcuni richiami di termodinamica.  
L'equazione di stato dei gas perfetti è

$$p = k_B T n$$

dove  $n$  è il numero di molecole nell'unità di volume.  
Vale inoltre l'equazione della termodinamica

$$\frac{\vec{\nabla} p}{p} = \gamma \frac{\vec{\nabla} n}{n}$$

con  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  rapporto dei calori specifici.  
Per una compressione isoterma  $\gamma = 1$  e si ha

$$\vec{\nabla} p = \frac{p}{n} \vec{\nabla} n = k_B T \vec{\nabla} n.$$

Per una compressione adiabatica  $\gamma = \frac{2+N}{N}$  dove  $N$  è il numero di gradi di libertà del sistema. Per  $N = 1$  si ha  $\gamma = 3$  e quindi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 3k_B T \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Bisogna quindi usare per le onde longitudinali quest'ultima espressione.

Prendiamo il limite unidimensionale. Tenendo conto che  $\frac{\partial p}{\partial x} = 3k_B T \frac{\partial n}{\partial x}$ , otteniamo

$$n_e \left( \frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} \right) = -n_e \frac{eE}{m_e} - \frac{3k_B T_e}{m_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \quad (28)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n_i - n_e). \quad (30)$$

Per ricavare la relazione di dispersione dobbiamo anche in questo caso linearizzare le equazioni. Considerando sempre le stesse condizioni al contorno, cioè  $n_e \rightarrow n_0$ ,  $\phi \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow \infty$  (anche in questo caso  $\phi$  è il potenziale,  $\phi_x = -E$ ), per grandi  $|x|$  si ha

$$\begin{aligned} n_e &= n_0 + \varepsilon \tilde{n} \\ v_e &= \varepsilon \tilde{v} \\ \phi &= \varepsilon \tilde{\phi} \\ n_i &\sim n_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} &= \frac{e}{m_e} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} - \frac{3k_B T_e}{m_e n_0} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} &= 4\pi e \tilde{n}.\end{aligned}$$

Scriviamo l'equazione a cui soddisfa  $\tilde{n}$

$$0 = \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial t^2} + n_0 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial t^2} + \frac{n_0 e}{m_e} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} - \frac{3k_B T_e}{m_e} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2}$$

cioè

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial t^2} - \frac{3k_B T_e}{m_e} \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2} + \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \tilde{n} = 0$$

ossia

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial t^2} - 3v_{T_e}^2 \frac{\partial^2 \tilde{n}}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2 \tilde{n} = 0.$$

Se si sceglie  $\tilde{n} \sim e^{i(kx - \omega t)}$  si ottiene

$$-\omega^2 + \omega_{pe}^2 + 3v_{T_e}^2 k^2 = 0$$

ovvero

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_{pe}^2 + 3v_{T_e}^2 k^2}.$$

Come si vede  $\frac{d^2 \omega}{dk^2} \neq 0$ , il che significa che c'è dispersione. Inoltre le onde di Langmuir si possono propagare solo per  $\omega > \omega_{pe}$ .

Nota: quando  $\omega \gg \omega_{pe}$ , la velocità di fase  $\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} + 3v_{T_e}^2} \simeq v_{T_e}$ , ma in questo caso le equazioni di partenza non sono più valide perché c'è un effetto di risonanza onda-particella, il cosiddetto **damping di Landau**.

Ora si può procedere sulle tre equazioni (28)-(30) col metodo multiscala fino ad  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  e si arriva all'equazione *NLS* [5].

Si deve però notare che un plasma uniforme in realtà è instabile, quindi dobbiamo ammettere piccole variazioni dall'uniformità. La trattazione del caso tridimensionale è stata fatta da Zakharov [12]. Si arriva alle equazioni

$$\begin{aligned}i \vec{E}_t + \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= n \vec{E} \\ n_{tt} - \vec{\nabla}^2 n &= \vec{\nabla}^2 |\vec{E}|^2,\end{aligned}$$

dove  $\vec{E}$  è legato al campo elettrico  $\vec{\mathcal{E}}$  ed alla frequenza  $\omega_{pe}$  dalla relazione

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega_{pe} t}$$

ed  $n$  è la variazione di  $n_e$  da  $n_0$  ( $n_e = n_0$  corrisponde al caso di plasma uniforme). Noi seguiamo approssimativamente la trattazione semplificata di Ter Haar in [6] per il caso unidimensionale, che è la più semplice anche se non la più rigorosa (si veda anche [7] pag.168: interazione tra onde iono-acustiche e onde di plasma elettronico).

Cominciamo con l'osservare che esistono tre tipi di oscillazione nei plasmi:

1. oscillazioni longitudinali di Langmuir, la cui relazione di dispersione è

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$$

dove  $\omega_{pe}^2$ ,  $v_{Te}^2$  e  $\lambda_D^2$  sono state definite nelle (2), (27) e (1) rispettivamente.

In particolare ricordiamo che  $\lambda_D^2 = \frac{k_B T_e}{4\pi n_e e^2} = \frac{m_e v_{Te}^2}{4\pi n_e e^2} = \frac{v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}$ ;

2. oscillazioni trasversali del plasma, per le quali

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$$

dove  $c$  è la velocità della luce;

3. oscillazioni iono-acustiche

$$\Omega^2 = \frac{K^2 v_s^2}{1 + K^2 \lambda_D^2}$$

con

$$v_s^2 = \frac{T_e}{m_i} k_B \quad (31)$$

(in realtà si ha  $v_s^2 = \frac{T_e + T_i}{m_i} k_B$ , ma  $T_i \ll T_e$ ). Si noti che  $m_e$  è sempre trascurata rispetto a  $m_i$ .

Si parte dall'equazione per il campo elettrico ad alta frequenza, in cui si tiene conto delle fluttuazioni della densità del plasma che danno variazioni locali della frequenza

$$\omega_{pe}'^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{4\pi e^2}{m_e} \delta n$$

dove  $\delta n$  è la variazione di  $n_e$  dalla densità del plasma  $n_0$  ( $n_e = n_0$  corrisponde al caso di plasma uniforme). L'equazione è [Ikezi in [7]]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - 3v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2 E + \frac{4\pi e^2}{m_e} \delta n E = 0$$

(relazione di dispersione modificata applicata al campo elettrico  $\omega^2 = \omega_{pe}'^2 + 3k^2 v_{Te}^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{4\pi e^2}{m_e} \delta n + 3k^2 v_{Te}^2$ ).

Poiché il principale contributo ad  $E$  viene dalle onde di Langmuir possiamo scrivere [12]

$$E = \frac{1}{2} (\mathcal{E} e^{-i\omega_{pe}t} + \mathcal{E}^* e^{i\omega_{pe}t}) \quad (32)$$

dove  $\mathcal{E}$  è un'ampiezza che varia lentamente nel tempo.

Abbiamo così

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left[ -\omega_{pe}^2 \mathcal{E} - 2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \right] e^{-i\omega_{pe}t} + c.c. \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2} \left[ -\omega_{pe}^2 \mathcal{E} - 2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right] e^{-i\omega_{pe}t} + c.c. \end{aligned}$$

e quindi

$$2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \omega_{pe}^2 \mathcal{E} + 3v_{Te}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} - \omega_{pe}^2 \mathcal{E} - \frac{4\pi e^2}{m_e} \delta n \mathcal{E} = 0$$

ed un'equazione analoga *c.c.*. Facendo le ovvie semplificazioni si trova in definitiva

$$2i\omega_{pe} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + 3v_{Te}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} - \frac{4\pi e^2}{m_e} \delta n \mathcal{E} = 0. \quad (33)$$

In questa equazione compare  $\delta n$ . Se non ci fosse il campo elettrico presente, questa quantità soddisferebbe l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} = 0$$

con  $v_s$  velocità iono-acustica. Infatti (si veda [10] cap. VIII) le onde sonore sono il moto vibratorio a piccole ampiezze in un fluido compressibile. Le vibrazioni sono piccole,  $v$  è piccola, anche le variazioni di  $\rho$  e  $p$  sono piccole, per cui possiamo scrivere

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'$$

con  $\rho' \ll \rho_0$  e  $p' \ll p_0$ .  $\rho_0$  e  $p_0$  sono densità e pressione all'equilibrio e  $\rho' = m_i \delta n$  ( $m_i n = m_i n_0 + m_i \delta n$ ) (si noti che  $m_e$  è sempre trascurato rispetto a  $m_i$ ).

Se facciamo una trattazione unidimensionale, l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

diventa

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

e l'equazione di Euler

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p,$$

considerando  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \simeq \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ , diventa

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0. \quad (35)$$

Un'onda sonora in un fluido perfetto è adiabatica, quindi una piccola variazione della pressione è legata ad una piccola variazione della densità

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho' \equiv v_s^2 \rho'.$$

Si osservi che  $\frac{\partial p}{\partial \rho_0}$  ha le dimensioni di una velocità al quadrato. Inoltre  $p = nk_B T$ , quindi  $\left( \frac{\partial p}{\partial n_0} \right)_s \sim k_B T$  (si può supporre che la temperatura vari poco e quindi  $\gamma \sim 1$  [10]) e perciò

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s = \frac{k_B T}{m_i} = v_s^2.$$

Abbiamo perciò dalle (34) e (35)

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{v_s^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0,$$

da cui si ricava proprio

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0.$$

Occorre però notare che qui c'è anche la forza ponderomotrice dovuta alla pressione di radiazione del campo di Langmuir ad alte frequenze nel plasma e quindi l'equazione va modificata in

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 \delta n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{|\mathcal{E}|^2}{16\pi m_i} \right).$$

Infatti dall'elettrodinamica dei mezzi continui ([11] eq. 15.14) è noto che occorre fare la sostituzione

$$-\frac{\partial p'}{\partial x} \rightarrow -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{8\pi} (\varepsilon - 1) \frac{\partial (E^2)}{\partial x},$$

dove  $\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{(\omega_{pe}')^2}{\omega^2} - \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}$  è la costante dielettrica del plasma.

In questo modo l'equazione di Euler diventa

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{8\pi\rho_0} (\varepsilon - 1) \frac{\partial(E^2)}{\partial x} = 0$$

da cui

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{v_s^2}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} - \frac{1}{8\pi\rho_0} (\varepsilon - 1) \frac{\partial^2(E^2)}{\partial x^2} = 0.$$

Si ricava perciò

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = -\frac{(\varepsilon - 1)}{8\pi} \frac{\partial^2(E^2)}{\partial x^2}$$

e cioè

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} = -\frac{(\varepsilon - 1)}{8\pi m_i} \frac{\partial^2(E^2)}{\partial x^2}. \quad (36)$$

Ora  $1 - \varepsilon$  possiamo approssimarlo con il suo valore all'equilibrio

$$1 - \varepsilon \simeq \frac{\omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} = 1.$$

Inoltre dalla (32) si ha

$$E^2 = \frac{1}{4} \left( 2|\mathcal{E}|^2 + \mathcal{E}^2 e^{-2i\omega_{pe}t} + \mathcal{E}^{*2} e^{2i\omega_{pe}t} \right)$$

e siccome gli ultimi due termini hanno valor medio nullo nel tempo si ha (\*)

$$E^2 = \frac{1}{2} |\mathcal{E}|^2.$$

In definitiva dalla (36) si ricava

$$\frac{\partial^2(\delta n)}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2 |\mathcal{E}|^2}{\partial x^2}. \quad (37)$$

(\*) *Nota: per il calcolo della forza ponderomotrice si fa la media sulle oscillazioni veloci di periodo  $\tau_{pe} = \frac{2\pi}{\omega_{pe}}$  poiché si è interessati alla dinamica del sistema a tempi lunghi (si veda [9] pag. 162).*

Convieni introdurre le seguenti quantità adimensionali

$$x' = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{x}{\lambda_D} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m_e \omega_{pe}}{m_i v_{Te}}} x,$$

$$t' = \frac{2}{3} \frac{m_e}{m_i} \omega_{pe} t,$$

$$n = \frac{3}{4} \frac{m_i}{m_e} \frac{\delta n}{n_0}, \quad (38)$$

$$E' = \frac{\mathcal{E}}{8 \sqrt{\frac{\pi}{3} \frac{m_e}{m_i} n_0 T_e k_B}}. \quad (39)$$

Si ricordi che  $\lambda_D$ ,  $v_s$ ,  $v_{Te}$  sono definiti, rispettivamente, nelle (1), (31) e (27). Sostituendo nell'eq. (33) si ha

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t'} \left[ 2i\omega_{pe}^2 \frac{2}{3} \frac{m_e}{m_i} \right] + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x'^2} \left[ 3v_{Te}^2 \frac{4}{9} \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} \right] - n\mathcal{E} \left[ \underbrace{\frac{4\pi e^2}{m_e} n_0}_{\omega_{pe}^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{4}{3} \right] = 0,$$

ovvero, facendo le ovvie semplificazioni, e tenendo conto delle (38) e (39)

$$i \frac{\partial E'}{\partial t'} + \frac{\partial^2 E'}{\partial x'^2} - nE' = 0.$$

Sostituiamo ora le quantità adimensionali nell'eq. (37), sicché

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 n}{\partial t'^2} \left[ n_0 \frac{4}{3} \frac{m_e}{m_i} \frac{4}{9} \frac{m_e^2}{m_i^2} \omega_{pe}^2 \right] - \frac{\partial^2 n}{\partial x'^2} \left[ v_{Te}^2 \frac{m_e}{m_i} n_0 \frac{4}{3} \frac{m_e}{m_i} \frac{4}{9} \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} \right] = \\ & = \frac{\partial^2 |E'|^2}{\partial x'^2} \left[ \frac{4}{9} \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} \frac{64}{16\pi m_i} \frac{\pi}{3} \frac{m_e}{m_i} n_0 T_e k_B \right]. \end{aligned}$$

In definitiva, omettendo gli apici, otteniamo il seguente sistema di equazioni per le onde di Langmuir

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - nE = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2}, \quad (41)$$

che ammette come soluzioni le funzioni ellittiche di Jacobi.

Se  $n$  **varia lentamente nel tempo**, allora si ha dalla (41)

$$n \sim -|E|^2$$

e l'eq. (40) dà

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \alpha E |E|^2 = 0, \quad \alpha > 0$$

che è l'equazione *NLS* e che ammette soluzioni solitoniche. Precisamente si ha

$$n = -\frac{|E|^2}{1 - M^2}$$

con  $M$  numero di Mach, o velocità del solitone (parametro arbitrario) ed

$$E = E_0 \operatorname{sech} \frac{E_0(x - Mt)}{\sqrt{2(1 - M^2)}} e^{\frac{i}{2} Mx - \frac{i}{4} M^2 t - \frac{i E_0 t}{2(1 - M^2)}}.$$

Notiamo ancora che la corrispondente equazione di Zakharov tridimensionale non è integrabile. La sua versione unidimensionale ammette solo 3 leggi di conservazione, mentre la *NLS* ne ha infinite.

Per una rassegna sperimentale, si può vedere l'articolo di Ikezi in [7].

Notiamo infine che è stata dimostrata la possibilità di osservare i solitoni bidimensionali localizzati (dromioni), soluzioni dell'equazione di Davey-Stewartson I, nei plasmi magnetizzati.

## References

- [1] E. Infeld and G. Rowlands: Nonlinear waves, solitons and chaos - Cambridge University Press - Cambridge
- [2] F. F. Chen: Introduction to plasma physics and controlled fusion - Plenum Press - New York
- [3] B. Kadomtsev: Phénomènes collectifs dans les plasmas - Edition MIR - Moscou
- [4] B. M. Smirnov: Introduction to Plasma Physics - Mir Publishers - Moscow
- [5] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, D. J. Gibbon and H. C. Morris: Solitons and Non Linear Wave Equations - Academic Press - New York
- [6] M. Boiti, F. Pempinelli and G. Soliani: Non Linear Evolution Equations and Dynamical Systems - Lecture notes in Physics n.120 - Springer Verlag - Berlin
- [7] K. Longreen and A. Scott: Solitons in action - Academic Press - New York
- [8] R. K. Bullough and P. J. Caudrey: Solitons, Topics in Current Physics n.17 - Springer Verlag - Berlin
- [9] Liu Chen: Waves and instabilities in plasmas - World Scientific - Singapore
- [10] L. Landau et E. Lifshitz: Mécanique des fluides - Edition MIR - Moscou
- [11] L. Landau et E. Lifshitz: Electrodynamiques des milieux continues - Edition MIR - Moscou
- [12] V. E. Zakharov: Collapse of Langmuir Waves - Soviet Physics JETP - **35**, 908 (1972)