



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

Dissertazione di Laurea Triennale

**L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER NON LINEARE
E LA SUA RILEVANZA IN FISICA E MATEMATICA**

Candidato:

Flavio Baccari

matricola 1353412

Relatore:

Prof. Paolo Maria Santini

Anno Accademico 2011/2012

Indice

1	Introduzione	3
2	Analisi dei casi limite della NLS	5
2.1	Limite dispersivo	5
2.2	Limite di non linearità forte	10
3	Metodo della trasformata spettrale	11
3.1	Problema diretto	12
3.2	Stati legati e spettro discreto	15
3.3	Evoluzione temporale	17
3.4	Problema inverso	19
4	La NLS come equazione modello della fisica	25

Capitolo 1

Introduzione

L'obiettivo della seguente dissertazione è di studiare la rilevanza fisica e le principali proprietà matematiche dell'equazione di Schrödinger non lineare (comunemente nota come NLS, da "Non Linear Schrödinger equation") in 1+1 dimensioni (una sola coordinata spaziale più il tempo), una delle più importanti equazioni modello della fisica-matematica; tale equazione ha la seguente forma:

$$i\psi_t = \psi_{xx} \pm 2|\psi|^2\psi . \quad (1.1)$$

Come si deduce anche dal nome, essa si può interpretare come un'equazione di Schrödinger in cui il potenziale è costituito da un termine non lineare dipendente dal modulo quadro della funzione d'onda stessa. Il più o il meno davanti al termine $2|\psi|^2\psi$ distinguono invece tra due tipologie differenti di NLS: con il segno negativo si parla di equazione "focusing", mentre con il segno positivo si parla di equazione "defocusing", denominazione che deriva dall'ottica non lineare.

La grande rilevanza matematica della NLS nasce dal fatto che tale equazione fa parte del ristretto gruppo di equazioni alle derivate parziali (PDEs) non lineari di cui è possibile ricavare soluzioni esatte tramite il *Metodo della Trasformata Spettrale*; di tali soluzioni fanno inoltre parte i solitoni, particolari strutture ondose localizzate e coerenti. Alla risolubilità è poi associata un'importante proprietà, detta *integrabilità*, da cui derivano altre caratteristiche rilevanti, quali il possedere infinite simmetrie/leggi di conservazione.

A livello fisico, invece, l'equazione non lineare di Schrödinger ha notevole validità perchè è un'equazione modello, ovvero nasce dall'analisi multiscala di un'ampia classe di equazioni di PDEs non lineari, nello specifico le equazioni dispersive debolmente non lineari, e regola la modulazione di ampiezza delle soluzioni ondose a esse associate. Questo fa sì che la NLS abbia ampia applicabilità in tutti i differenti contesti fisici in cui compaiono leggi di evoluzione che rientrano nella classe di equazioni sopra detta: alcuni esempi sono l'ottica non lineare[12], la fisica dei plasmi[14], la fisica delle onde d'acqua[10], i condensati di Bose-Einstein[15].

Nel corso delle prossime sezioni ci occuperemo innanzitutto di analizzare più in dettaglio gli aspetti matematici rilevanti della NLS: inizieremo studiando i suoi casi limite per indagarne separatamente la natura dispersiva e la nonlinearità; a seguire verrà presentato il metodo della trasformata spettrale, applicandolo specificatamente all'equazione di Schrödinger, con particolare attenzione alle soluzioni di tipo solitonico e approfondendo la distinzione tra caso "focusing" e "defocusing". Per concludere presenteremo brevemente il metodo multiscala per mostrare perchè si può definire la NLS un'equazione modello della fisica-matematica.

Capitolo 2

Analisi dei casi limite della NLS

Iniziamo con il considerare i due limiti, rispettivamente dispersivo e di non linearità forte, dell'equazione di Schrodinger non lineare; in questo modo sarà possibile analizzare separatamente, nel primo caso il fenomeno di dispersione del pacchetto d'onda, nel secondo l'auto modulazione di fase, che nella forma completa della NLS concorrono tra di loro.

2.1 Limite dispersivo

Nel caso in cui il termine non lineare sia trascurabile, la NLS si riconduce alla semplice equazione di Schrödinger per particella libera

$$i\psi_t + \gamma\psi_{xx} = 0 \tag{2.1}$$

un classico esempio di equazione lineare dispersiva. Tali equazioni entrano in gioco nella descrizione di propagazioni ondose in numerosi contesti fisici in approssimazione lineare, a partire dalle onde d'acqua, fenomeni per i quali fu inizialmente sviluppata la teoria della dispersione, per proseguire con l'ottica e l'acustica. In tutte queste situazioni poi la teoria delle onde dispersive lineari fornisce una base per derivare numerose informazioni sui regimi non lineari[2]. In maniera approssimativa un'equazione differenziale alle derivate parziali lineare si dice dispersiva se ammette soluzione di onda piana della forma

$$Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{2.2}$$

con A costante e in cui è definita una precisa relazione tra k e ω , del tipo $\omega = \omega(k)$, detta relazione di dispersione: condizione importante è che $\omega(k)$ sia reale, altrimenti si avrebbero fenomeni di crescita o decrescita esponenziale dell'ampiezza; è inoltre richiesto $\omega''(k) \neq 0$, in modo da escludere i due casi non dispersivi in cui ω è una costante e in cui $\omega = ak + b$, relazione che descrive una propagazione ondosa iperbolica elementare del tipo $e^{-ibt}e^{ik(x-at)}$.

Introducendo l'usuale definizione di velocità di fase $\frac{\omega}{k}$, corrispondente alla velocità con cui si muove una cresta dell'onda, si ha che quest'ultima, data la relazione di dispersione, è sempre funzione di k . Da ciò deriva la denominazione di onde *dispersive*: difatti una generica soluzione, costituita da sovrapposizione lineare di onde piane elementari, si disperde col tempo, dato che onde con valori differenti di k si propagano con differenti velocità di fase. Nel caso specifico dell'equazione di Schrödinger, imponendo soluzione del tipo (2.2) si ricava la seguente relazione di dispersione

$$\omega = \gamma k^2 \quad (2.3)$$

Si vede perciò che è soddisfatta la condizione $\omega''(k) = 2\gamma \neq 0$; sostituendo nella (2.2) si arriva a una soluzione della forma

$$Ae^{ikx} e^{-i\gamma k^2 t} \quad (2.4)$$

in cui, sostituendo al coefficiente generale l'espressione $\gamma = \frac{\hbar}{2m}$, si riconosce l'evoluto temporale di un'autostato dell'operatore impulso nel caso di particella libera (avendo opportunamente usato la relazione $p = \hbar k$).[5]

In modo più generale un'equazione differenziale lineare in 1+1 dimensioni del tipo della (2.1) si può scrivere sotto forma di polinomio a coefficienti costanti

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0 . \quad (2.5)$$

Cercando soluzioni di onda piana si ricava che, associando alla derivazione rispetto al tempo un fattore $-i\omega$ e alla derivazione rispetto alla coordinata x un fattore ik , la relazione di dispersione è legata alla forma dell'equazione differenziale in questione e risulta essere un polinomio del tipo

$$P(-i\omega, ik) = 0 .$$

Questa è la forma più generale della relazione di dispersione associata a un'equazione dispersiva lineare; le sue radici $\omega(k)$, che in generale sono più di una, sono definite modi di propagazione.

Come in tutti i casi di equazioni differenziali lineari, la soluzione generale di un'equazione del tipo (2.5) si può poi scrivere sotto forma integrale di Fourier, che nel caso di un solo modo è

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk ; \quad (2.6)$$

avendo a disposizione la condizione iniziale $\psi(x, 0)$ del problema, si ricava la funzione $F(k)$ come sua trasformata di Fourier

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx . \quad (2.7)$$

Nel caso generale di n modi la (2.6) conterrà una sommatoria sui modi e per determinare le $F_i(k)$ saranno inoltre necessarie n condizioni iniziali.

La forma generale di soluzione appena presentata, seppur corretta, non è generalmente risolvibile sotto forma di funzioni elementari o speciali, per cui è tipicamente piuttosto difficile da analizzare. E' però interessante e rilevante anche a livello fisico analizzare il comportamento asintotico di una tale soluzione, nel caso in cui $x, t \gg 1$ ma mantenendo fisso il rapporto x/t . Nel caso stesso della meccanica quantistica, ambito nel quale compare appunto la (2.1), tale limite ha piena giustificazione fisica, dato che i sistemi di particelle descritti hanno generalmente dimensioni e tempi caratteristici di interazione molto più piccoli delle dimensioni e dei tempi dell'apparato di misura.

Definendo allora

$$\chi(k) = \omega(k) - k \frac{x}{t} , \quad (2.8)$$

si può riscrivere l'integrale nel seguente modo

$$\psi(x, t) = \int F(k) e^{-i\chi(k)t} dk ; \quad (2.9)$$

nel limite di grandi tempi e distanze il fattore di fase sotto integrale è fortemente oscillante, data la sua dipendenza lineare con t ; quindi, per il Lemma di Riemann-Lebesgue, l'integrale (2.9) è nullo tranne che negli intervalli di k in cui la fase non è fortemente variabile, ovvero nell'intorno dei punti stazionari K dove $\chi'(K) = \omega'(K) - \frac{x}{t} = 0$. Applichiamo perciò il metodo della fase stazionaria[3], considerando da qui in poi il caso in cui il punto K sia singolo, e sviluppiamo i termini dipendenti da k intorno a tale punto

$$\begin{aligned} F(k) &\simeq F(K) , \\ \chi(k) &\simeq \chi(K) + \frac{1}{2}\chi''(K)(k - K)^2 ; \end{aligned} \quad (2.10)$$

ponendo

$$\chi''(K) = \text{sign}\chi''(K) \cdot |\chi''(K)| , \quad u = \sqrt{\frac{1}{2}|\chi''(K)|} t(k - K) , \quad du = \sqrt{\frac{1}{2}|\chi''(K)|} t dk ,$$

si ricava

$$\psi \simeq F(K) e^{-i\chi(K)t} e^{-i\text{sign}\chi''(K)} \sqrt{\frac{2}{|\chi''(K)|} t} \int_{-\delta\sqrt{|\chi''(K)|}t/2}^{\delta\sqrt{|\chi''(K)|}t/2} e^{-iu^2} du , \quad (2.11)$$

in cui si è considerato che il contributo principale all'integrale sia tra $K - \delta$ e $K + \delta$. L'integrale rimanente è un integrale di Fresnel con argomento complesso e supponiamo che t sia sufficientemente grande da poter ben approssimare l'integrale con il suo valore calcolato

sull'intera retta reale; si ha quindi

$$\int_{-\delta\sqrt{|\chi''(K)|t/2}}^{\delta\sqrt{|\chi''(K)|t/2}} e^{-iu^2} du \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2} du = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi} .$$

Ripristinando le variabili fisiche si ricava che lo sviluppo asintotico della soluzione (2.6) è il seguente

$$\psi(x, t) \simeq F(K) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\omega''(K)|}} e^{-i(Kx - \omega(K)t) - i\frac{\pi}{4} \text{sign}\omega''(K)} . \quad (2.12)$$

Si può ricavare che eventuali correzioni a tale formula, ottenute considerando termini successivi nello sviluppo di $F(k)$ e $\chi(k)$ intorno a K , sono di ordine $\mathcal{O}(\frac{1}{t})$; nel limite $t \gg 1$ si suppone quindi che tali termini siano sufficientemente piccoli da essere trascurabili. Da notare inoltre che, comparando $\omega''(K)$ a denominatore nella (2.12), il procedimento sinora effettuato si basa sulla richiesta $\omega''(K) \neq 0$; se questo non fosse, considerato che varrebbe anche $\chi''(K) = 0$, sarebbe necessario considerare da subito i termini successivi dello sviluppo (2.10).

La (2.12) si può poi porre in forma di onda piana $\psi = Ae^{i\theta}$, riconoscendo

$$A = F(K) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(k)|}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sign}\chi''(K)} , \quad \theta = Kx - \omega(K)t ; \quad (2.13)$$

il punto K è funzione dello spazio e del tempo secondo la relazione

$$\omega'(K) = \frac{x}{t} \quad (2.14)$$

e si ha quindi $K(\frac{x}{t})$. Si definisce allora *velocità di gruppo* $\omega'(K)$ come la velocità con la quale si vedrebbe l'onda avere sempre lo stesso valore di K ; al contrario la velocità di fase è la velocità per cui si vede l'onda avere sempre la stessa fase. Imponendo $\theta(x, t) = \theta_0$ e derivando

$$\theta_x \frac{dx}{dt} + \theta_t = 0 \implies \frac{dx}{dt} = -\frac{\theta_t}{\theta_x} = \frac{\omega}{k} ,$$

si ottiene che tale l'espressione coincide con la definizione data in precedenza.

Consideriamo ora il caso dell'equazione di Schrödinger lineare: ricordando $\omega(k) = \gamma k^2$ si ricava dalla (2.14) che vale $\theta(x, t) = xK - \omega t = \frac{x^2}{4\gamma t}$; la (2.12) assume quindi la forma seguente

$$\psi = F\left(\frac{x}{2\gamma t}\right) \sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{x^2}{4\gamma t}} . \quad (2.15)$$

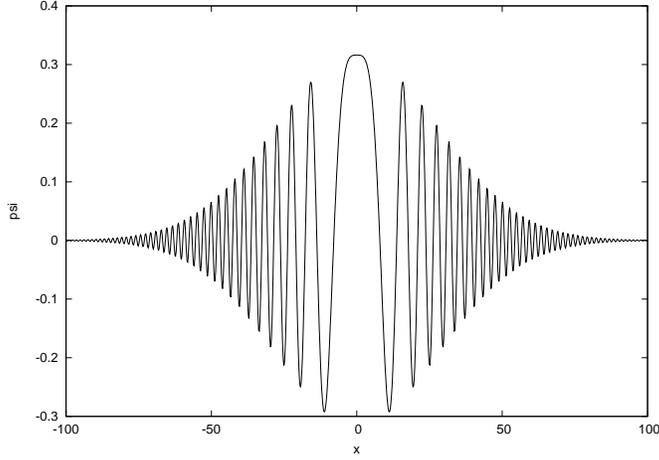


Figura 2.1: Sviluppo asintotico del pacchetto d'onda nel caso di forma d'onda iniziale gaussiana

Analizziamo ora la (2.15): si nota che la dipendenza di A da spazio e tempo, a parte un termine $t^{-1/2}$ che la fa decrescere con il tempo, rientra nel termine $F(K(\frac{x}{t}))$ che è una funzione lentamente variabile nello spazio e nel tempo; calcolando infatti $F_x = \frac{1}{2\gamma t}$ e $F_t = -\frac{x}{2\gamma t^2}$ e, ricordando $t \gg 1, x/t = \mathcal{O}(1)$, si ha $F_x, F_t \ll 1$. La fase al contrario dipende da $\frac{x^2}{t} = \mathcal{O}(x)$, che è un fattore molto grande e porta a un effetto di rapida oscillazione.

Con l'esempio particolare dell'equazione di Schrödinger si può dunque mostrare un comportamento generale della soluzione asintotica dispersiva, costituita da treni d'onda non uniformi che oscillano molto velocemente, modulati in ampiezza da una forma (associata nel caso di unico modo alla trasformata di Fourier della forma d'onda iniziale) che varia molto più lentamente. Si parla solitamente di *onda portante*, modulata da un'*onda d'involuppo* (vedi Figura 2.1).

Per concludere mostriamo il comportamento nel regime asintotico del modulo quadro dell'onda, importante perchè solitamente associato all'energia o, come nel caso dell'equazione di Schrödinger, alla densità di probabilità: definendo la quantità

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, t)|^2 dx \simeq 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{F(K)F^*(K)}{t\omega''(K)} dx \quad (2.16)$$

e cambiando variabile per passare ad un'integrale in K si ricava, ricordando la (2.14)

$$Q(t) \simeq 2\pi \int_{K_1}^{K_2} |F(K)|^2 dK \quad , \quad \text{dove} \quad K_j = K(\frac{x_j}{t}) \quad , \quad j = 1, 2 \quad (2.17)$$

espressione che porta a dire che la quantità $Q(t)$ calcolata fra due particolari valori di K , nonostante questi ultimi si propagano nel tempo con la velocità di gruppo, si conserva;

quindi se nel sistema fisico in questione una certa quantità di energia è all'inizio confinata in un determinato intervallo di numeri d'onda, tale resterà anche in seguito, anche se l'intervallo spaziale corrispondente si allargherà con il tempo secondo la legge (ottenuta dalla (2.14)) $x_2 - x_1 = (\omega'(K_2) - \omega'(K_1))t$.

Nel caso della particella libera il tutto corrisponde a dire che il pacchetto iniziale, pur disperdendosi, conserva la probabilità che la particella posseda un impulso compreso in un determinato intervallo di valori.

2.2 Limite di non linearità forte

Il caso opposto al precedente si presenta nel caso in cui sia invece trascurabile il termine dispersivo, con la NLS che assume la forma

$$i\psi_t = 2\sigma |\psi|^2 \psi ; \quad (2.18)$$

si può ricavare facilmente che la (2.18) ammette soluzioni con ampiezza costante nel tempo: difatti è sufficiente considerare l'equazione coniugata

$$-i\bar{\psi}_t = 2\sigma |\psi|^2 \bar{\psi}$$

e notare che

$$|\psi|_t^2 = \psi_t \bar{\psi} + \psi \bar{\psi}_t = -2i\sigma |\psi|^4 + 2i\sigma |\psi|^4 = 0 .$$

Cerchiamo allora soluzioni del seguente tipo

$$\psi(x, t) = A(x)e^{i\phi(x, t)} , \quad \phi(x, t) \in \mathbb{R}$$

e dall'equazione (2.18) si ricava

$$\phi_t = -2\sigma |A|^2 \implies \phi(x, t) = \phi_0(x) - 2\sigma |A|^2 t ;$$

possiamo allora scrivere la forma generale della soluzione:

$$\psi(x, t) = A(x)e^{i\phi_0(x)} e^{-2i\sigma |A(x)|^2 t} . \quad (2.19)$$

La (2.19) evolve dunque nel tempo senza alterare il profilo iniziale $A(x)e^{i\phi_0(x)}$, ma con una variazione della fase il cui segno dipende da σ (caso “focusing” o “defocusing”); tale spostamento di fase aumenta linearmente col tempo e ha una dipendenza spaziale che coincide con quella del modulo quadro dell'onda (quindi del profilo iniziale stesso). Si parla in questo caso di *auto modulazione di fase*.

Capitolo 3

Metodo della trasformata spettrale

Prendiamo ora in considerazione la forma completa dell'equazione di Schrödinger non lineare: come accennato in precedenza, uno dei motivi per cui è importante studiare tale equazione consiste nel fatto che è stato sviluppato un metodo per ricavarne soluzioni esplicite. Esso prende il nome di *Metodo della Trasformata Spettrale* e fu introdotto inizialmente per risolvere un'altra equazione modello della fisica, l'equazione di Korteweg-deVries (KdV)[17] ma fu ben presto generalizzato, grazie al lavoro di Lax [7], e la sua grande rilevanza è difatti associata alla possibilità di applicarlo a numerosi altri problemi, tra i quali appunto la risoluzione della NLS[6]. Si può considerare come la generalizzazione non lineare del metodo della trasformata di Fourier per risolvere equazioni differenziali alle derivate parziali lineari e infatti il ragionamento è analogo, basato sulla semplificazione del problema riconducendosi, note le condizioni iniziali e tramite il calcolo della trasformata, a uno spazio in cui l'evoluzione temporale è semplice, per poi ricavare le funzioni al tempo t applicando la trasformata inversa. In questa sede presenteremo il problema nella forma introdotta da Ablowitz, Kaup, Newell e Segur[8, 9] e ci ridurremo a prendere in considerazione il caso specifico della risoluzione dell'equazione non lineare di Schrödinger, presentato per la prima volta da Zakharov e Shabat.

Per introdurre il metodo definiamo un generico sistema lineare

$$\begin{cases} v_x = U(x, t, \lambda)v \\ v_t = V(x, t, \lambda)v \end{cases} \quad (3.1)$$

in cui $v(x, t) = (v_1(x, t), \dots, v_n(x, t))^+$ è un vettore di n funzioni note e U e V sono generici operatori matriciali lineari $n \times n$ dipendenti da spazio, tempo e da un parametro complesso λ indipendente da x e t . Richiedendo che il sistema soddisfi la condizione di integrabilità $v_{xt} = v_{tx}$ si ricava per gli operatori la *condizione di compatibilità*:

$$U_t - V_x - [U, V] = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Si possono a questo punto scegliere i due operatori in una forma tale che la condizione di compatibilità si riconduca proprio alla NLS (ecco il “miracolo” dell’integrabilità); in particolare è sufficiente considerare operatori 2×2 e scegliere

$$U = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(x, t) \\ r(x, t) & i\lambda \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

e

$$V = 2i\lambda^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iqr & -iq_x \\ ir_x & -iqr \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

e porre $r = -\sigma\bar{q}$ per ottenere infatti

$$iq_t = q_{xx} + 2\sigma q |q|^2 \quad (3.5)$$

in cui si riconosce appunto l’equazione non lineare di Schrödinger e il fattore $\sigma = \pm 1$ distingue nei due casi “focusing” e “defocusing”; il sistema (3.1) con la scelta di (3.3) e (3.4) si definisce *coppia di Lax* per la NLS.

3.1 Problema diretto

Analizziamo più in dettaglio la prima equazione del sistema (3.1), con l’operatore U scelto nella forma (3.3) e sostituendo l’espressione di $r(x, t)$:

$$v_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(x, t) \\ -\sigma\bar{q}(x, t) & i\lambda \end{pmatrix} v \quad (3.6)$$

Si riconosce che la (3.6) con $\lambda \in \mathbb{R}$ rappresenta un problema di scattering da potenziale per le due componenti del vettore v , in cui i potenziali in questione sono q e $-i\sigma\bar{q}$. Ipotizziamo che $q \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$ e ricaviamo i possibili comportamenti asintotici delle soluzioni del problema di scattering

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} & e & \phi^{(2)} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} & x \rightarrow -\infty \\ \psi^{(1)} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} & e & \psi^{(2)} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} & x \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si nota che, per λ reale, tali soluzioni oscillano all’infinito, per cui $\lambda \in \mathbb{R}$ costituisce lo spettro continuo del problema. Le due coppie di soluzioni $\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}\}$ e $\{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}\}$ sono inoltre linearmente indipendenti e costituiscono due basi dell’insieme di soluzioni del problema di scattering. Fra di loro saranno quindi legate da una relazione del tipo

$$\begin{aligned}\phi^{(1)} &= T^{11}(\lambda)\psi^{(1)} + T^{12}(\lambda)\psi^{(2)} \\ \phi^{(2)} &= T^{21}(\lambda)\psi^{(1)} + T^{22}(\lambda)\psi^{(2)}\end{aligned}\tag{3.8}$$

in cui i coefficienti delle combinazioni lineari costituiscono i termini di quella che si definisce *matrice di scattering*. Introducendo inoltre il Wronskiano di due vettori

$$W(u, v) = u_1 v_2 - v_2 u_1\tag{3.9}$$

si ricava facilmente che

$$\frac{d}{dx}W(u, v) = 0$$

se u e v sono soluzioni del sistema (3.6). Si ottiene poi, sfruttando le (3.7) e il fatto che il Wronskiano sia costante, che $W(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = 1$ e $W(\phi^{(i)}, \phi^{(i)}) = W(\psi^{(j)}, \psi^{(j)}) = 0$ per $i, j = 1, 2$. Si ricavano perciò le seguenti espressioni per i termini della matrice di scattering

$$\begin{aligned}T^{11}(\lambda) &= W(\phi^{(1)}, \psi^{(2)}), & T^{12}(\lambda) &= -W(\phi^{(1)}, \psi^{(1)}) \\ T^{21}(\lambda) &= W(\phi^{(2)}, \psi^{(2)}), & T^{22}(\lambda) &= -W(\phi^{(2)}, \psi^{(1)})\end{aligned}\tag{3.10}$$

A questo punto introduciamo il procedimento per dimostrare l'esistenza, unicità e analicità delle soluzioni del problema di scattering. Moltiplicando le componenti della (3.6) per $e^{i\lambda x}$ si ricava

$$\begin{aligned}v_{1x}e^{i\lambda x} + i\lambda v_1 e^{i\lambda x} &= qv_2 e^{i\lambda x} \\ v_{2x}e^{i\lambda x} + i\lambda v_2 e^{i\lambda x} &= -\sigma \bar{q}v_1 e^{i\lambda x} + 2i\lambda v_2 e^{i\lambda x}\end{aligned}\tag{3.11}$$

ponendo poi $v = \psi^{(1)}$ e definendo $\nu^- = \psi^{(1)}e^{i\lambda x}$ si può riscrivere il sistema (3.11) come

$$\begin{aligned}\nu_{1x}^- &= q\nu_2^- \\ \nu_{2x}^- &= -\sigma \bar{q}\nu_1^- + 2i\lambda \nu_2^-\end{aligned}\tag{3.12}$$

sapendo dalle (3.7) che per $x \rightarrow \infty$ si ha $\nu^- \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ottiene per le componenti del vettore ν^- un sistema di equazioni integrali di Volterra

$$\nu_1^-(\lambda) = 1 - \int_x^\infty q(y)\nu_2^-(y, \lambda)dy\tag{3.13}$$

$$\nu_2^-(\lambda) = \sigma \int_x^\infty \bar{q}(y)\nu_1^-(y, \lambda)e^{2i\lambda(x-y)}dy\tag{3.14}$$

Sostituendo l'espressione di ν_2^- nella prima equazione si ricava

$$\nu_1^- = 1 - \sigma \int_x^\infty q(y)dy \int_y^\infty \bar{q}(z)\nu_1^-(\lambda, z)e^{2i\lambda(y-z)} dz \quad (3.15)$$

equazione che si può porre nella seguente forma

$$(\hat{1} - \hat{M})\nu_1^- = 1 \quad (3.16)$$

con

$$\hat{M}\nu_1^- = -\sigma \int_x^\infty q(y)dy \int_y^\infty \bar{q}(z)\nu_1^-(\lambda, z)e^{2i\lambda(y-z)} dz . \quad (3.17)$$

Posta in questo modo si può dimostrare che, sotto la richiesta che $q(x, t) \in L_1(-\infty, \infty)$, l'equazione (3.16) può essere risolta in serie di Neumann assolutamente convergente; si ricava poi ν_2^- dalla seconda di (3.13). Calcolando sempre dal sistema (3.13) l'espressione di ν_λ^- si dimostra in maniera analoga che la soluzione $\nu^-(\lambda, x)$ è in realtà prolungabile per analiticità nel semipiano $Im\lambda \leq 0$. [10]

Il procedimento appena seguito ha permesso di trasformare il problema iniziale, costituito da un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali, con corrispondenti condizioni al contorno, in un sistema di equazioni integrali di Volterra. La semplificazione sta nel fatto che gli operatori integrali sono compatti, da cui, per il teorema dell'alternativa di Fredholm, la soluzione all'equazione (3.16) è unica e si ricava appunto in serie di Neumann. Analogamente si possono ricavare opportune equazioni integrali anche per gli altri vettori associati alle soluzioni $\phi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}$; riportiamo ad esempio anche le equazioni relative a $\nu^+ = \psi^{(2)}e^{-i\lambda x}$

$$\nu_1^+(x, \lambda) = - \int_x^\infty q(y)e^{-2i\lambda(x-y)}\nu_2^+(y, \lambda)dy , \quad (3.18)$$

$$\nu_2^+(x, \lambda) = 1 + \sigma \int_x^\infty \bar{q}(y)\nu_1^+(y, \lambda)dy . \quad (3.19)$$

In conclusione si possono ottenere in serie di Neumann le espressioni di

$$\begin{aligned} \mu^+ &= \phi^{(1)}e^{i\lambda x}, & \mu^- &= \phi^{(2)}e^{-i\lambda x} \\ \nu^+ &= \psi^{(2)}e^{-i\lambda x}, & \nu^- &= \psi^{(1)}e^{i\lambda x} \end{aligned} \quad (3.20)$$

e si ricava che i vettori con l'apice + sono prolungabili (sempre nell'ipotesi $q \in L_1(-\infty, \infty)$) per analiticità nel semipiano $Im\lambda \geq 0$, mentre i vettori con l'apice - lo sono nel semipiano $Im\lambda \leq 0$. Da queste informazioni si possono quindi ricavare i termini della matrice di scattering tramite le espressioni (3.10) e se ne ricava anche che $T^{11}(\lambda)$ è analitica in $Im\lambda \geq 0$, $T^{22}(\lambda)$ in $Im\lambda \leq 0$, mentre i termini $T^{12}(\lambda)$ e $T^{21}(\lambda)$ non sono in generale prolungabili

analiticamente al di fuori dell'asse reale. Sotto ipotesi più stringenti sui potenziali si può estendere il dominio di analicità dei vettori e, conseguentemente, dei termini $T^{ij}(\lambda)$; se infatti $q(x)$ va a zero all'infinito più rapidamente di $e^{-2\eta|x|}$, con $\eta > 0$, si può prolungare per analicità $T^{11}(\lambda)$ in $Im\lambda \geq -\eta$, $T^{22}(\lambda)$ in $Im\lambda \leq \eta$ e $T^{12}(\lambda), T^{21}(\lambda)$ nella striscia $-\eta \leq Im\lambda \leq \eta$. Se i potenziali sono a supporto compatto, quindi, tutti i vettori e i termini della matrice sono prolungabili analiticamente in tutto il piano complesso.[10]

In conclusione notiamo che dalle equazioni integrali per μ^\pm , al limite $x \rightarrow \infty$, osservando che $e^{-i\lambda x} \mu^+ = \phi^{(1)} \rightarrow \begin{pmatrix} T^{11}(\lambda)e^{-i\lambda x} \\ T^{22}(\lambda)e^{i\lambda x} \end{pmatrix}$ e ricavando una formula analoga per $e^{i\lambda x} \mu^-$, si ottiene la rappresentazione integrale per gli elementi della matrice di scattering

$$T^{11}(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} q(y)\mu_2^+(y, \lambda)dy \quad , \quad T^{12}(\lambda) = -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(y)\mu_1^+(y, \lambda)e^{2i\lambda y}dy \quad , \quad (3.21)$$

$$T^{21}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} q(y)\mu_2^-(y, \lambda)e^{2i\lambda y}dy \quad , \quad T^{22}(\lambda) = 1 - \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(y)\mu_1^-(y, \lambda)e^{2i\lambda y}dy \quad , \quad (3.22)$$

in cui si ritrovano le considerazioni fatte precedentemente riguardo l'analicità dei vari elementi.

3.2 Stati legati e spettro discreto

Nella sezione precedente abbiamo risolto il sistema (3.6) per $\lambda \in \mathbb{R}$, ovvero nel caso di spettro continuo; possiamo ora andare a ricercare l'esistenza o meno di stati legati (ad esempio di classe $L_2(-\infty, \infty)$), dato che a essi è associata la presenza di spettro discreto. Abbiamo precedentemente notato che per $\lambda \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni oscillano all'infinito, quindi lo spettro discreto, se è presente, è necessariamente complesso; considerando allora $\phi^{(1)}$, analitica per $Im\lambda \geq 0$, si ha che va a zero per $x \rightarrow -\infty$ e $Im\lambda$ strettamente positivo. Per $x \rightarrow \infty$, usando la prima delle (3.8), si ricava

$$\phi^{(1)} \sim \begin{pmatrix} T^{11}(\lambda)e^{-i\lambda x} \\ T^{12}(\lambda)e^{i\lambda x} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

da cui si nota che la seconda componente si annulla all'infinito mentre la prima diverge esponenzialmente a meno che $T^{11}(\lambda)$ non si annulli. Si ha quindi che $\phi^{(1)} \in L_2(-\infty, \infty)$ per quei valori di λ_n tali che

$$T^{11}(\lambda_n) = 0, \quad Im\lambda_n > 0$$

Analogamente si ricava che le soluzioni di tipo $\phi^{(2)}$ costituiscono stati legati per $\tilde{\lambda}_m$ tali che

$$T^{22}(\tilde{\lambda}_m) = 0, \quad Im\tilde{\lambda}_m < 0$$

Lo spettro discreto del problema (3.6) risulta quindi essere costituito da tali valori

$\{\lambda_n, \tilde{\lambda}_m; n = 1, \dots, N \text{ e } m = 1, \dots, \tilde{N}\}$ che si possono effettivamente dimostrare essere discreti e contenuti in una regione limitata del piano complesso, rispettivamente del semipiano superiore per i λ_n e di quello inferiore per i $\tilde{\lambda}_m$ (essi non possono infatti accumularsi all'infinito perchè, come si può ricavare dalle (3.21)(3.22), si ha $T^{11}(\lambda) \rightarrow 1, |\lambda| \rightarrow \infty, Im\lambda > 0$ e $T^{22}(\lambda) \rightarrow 1, |\lambda| \rightarrow \infty, Im\lambda < 0$).

In corrispondenza di questi valori si ricava, sempre dalle (3.10) che le soluzioni $\phi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$ sono linearmente dipendenti così come lo sono $\phi^{(2)}$ e $\psi^{(1)}$; in particolare possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(\lambda_n) &= b_n \psi^{(2)}(\lambda_n) & \text{con } b_n &= T^{12}(\lambda_n) \\ \phi^{(2)}(\tilde{\lambda}_m) &= \tilde{b}_m \psi^{(1)}(\tilde{\lambda}_m) & \text{con } \tilde{b}_m &= T^{21}(\tilde{\lambda}_m) \end{aligned} \quad , \quad (3.24)$$

avendo ipotizzato che i termini fuori diagonale della matrice di scattering siano prolungabili per analiticità in una striscia contenente i valori dello spettro discreto. Analizziamo a questo punto la differenza tra il caso “focusing” e il caso “defocusing”: il sistema (3.6) si può porre anche in forma di problema agli autovalori

$$\hat{L}v = \lambda v \quad (3.25)$$

in cui L costituisce l'operatore differenziale

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} i\partial_x & -iq \\ -i\sigma\bar{q} & -i\partial_x \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Si dimostra allora che nel caso “defocusing” ($\sigma = -1$) tale operatore è autoaggiunto, mostrando che vale $(v, \hat{L}u) = (\hat{L}v, u)$, con $v_i, u_j \in L_2(\mathbb{R})$ e il prodotto scalare definito da $(v, u) = \int_{\mathbb{R}} (v_1^+ u_1 + v_2^+ u_2) dx$; nel caso “focusing” ($\sigma = 1$) invece l'operatore non lo è. Poichè un operatore autoaggiunto ha sempre spettro reale quanto appena mostrato implica che nel caso “defocusing” è assente la parte di spettro discreto, associata a valori necessariamente complessi. A livello fisico questa differenza è notevole perchè, come illustreremo più avanti, i termini di spettro discreto sono associati a soluzioni di tipo solitonico della NLS. In ultimo riportiamo che la relazione $r(x, t) = -\sigma q(x, t)$ comporta delle simmetrie nelle soluzioni del problema diretto di scattering, cosa che semplifica in realtà la natura dello spettro e della matrice di scattering. Coniugando il sistema (3.6) e moltiplicando la prima equazione per $-\sigma$ si ricava infatti che, se il vettore $(v_1(\lambda), v_2(\lambda))$ è soluzione del problema, allora lo è anche il vettore

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_2(\bar{\lambda}) \\ -\sigma \bar{v}_1(\bar{\lambda}) \end{pmatrix};$$

per quanto riguarda il comportamento asintotico delle soluzioni, si mostra perciò che

$$\phi^{(2)}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\sigma\bar{\phi}_2^{(1)}(\bar{\lambda}) \\ \bar{\phi}_1^{(1)}(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}, \quad \psi^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_2^{(2)}(\bar{\lambda}) \\ -\sigma\bar{\psi}_1^{(2)}(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Da queste relazioni si ricava per i termini della matrice di scattering, ricodando le (3.8):

$$T^{22}(\lambda) = \bar{T}^{11}(\bar{\lambda}) \quad e \quad T^{21}(\lambda) = \sigma\bar{T}^{12}(\bar{\lambda}), \quad (3.28)$$

quindi si ha $N = \tilde{N}$, $\tilde{\lambda}_n = \bar{\lambda}_n$, $\tilde{b}_n = \sigma\bar{b}_n$.

Da qui in poi procederemo dunque tenendo conto delle riduzioni associate al caso $r(x, t) = -\sigma q(x, t)$.

3.3 Evoluzione temporale

A questo punto è necessario analizzare esplicitamente la dipendenza temporale dei termini della matrice di scattering: per farlo ci interessiamo alla seconda riga del sistema (3.1) e imponiamo che le soluzioni precedentemente trovate per problema di scattering siano anche soluzioni di

$$v_t = V(\lambda, x, t)v. \quad (3.29)$$

In realtà con l'operatore V scelto nella forma (3.4) questa condizione non può essere soddisfatta dalle (3.7), ma si può notare che la (3.2) rimane invariata se a V si sostituisce $V + cI$, in cui I è l'operatore identità e c è una generica funzione indipendente da x .

Richiedendo allora che $\phi^{(1)}$ sia soluzione del problema

$$v_t = \begin{pmatrix} -2i\lambda^2 - i\sigma|q|^2 + c & 2\lambda q - iq_x \\ -2\sigma\lambda\bar{q} - i\sigma\bar{q}_x & 2i\lambda^2 + i\sigma|q|^2 + c \end{pmatrix} v \quad (3.30)$$

si ricava per la prima componente

$$\phi_{1t}^{(1)} = (-c - 2i\lambda^2 - i\sigma|q|^2)\phi_1^{(1)} + (2\lambda q - iq_x)\phi_1^{(2)}$$

e, ricordando i comportamenti asintotici (3.7), (3.23) e che q va a zero per $|x| \rightarrow \infty$, si ottiene

$$e^{i\lambda x}(-2i\lambda^2 + c) \sim 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty \quad \text{ovvero} \quad c = 2i\lambda^2$$

da cui

$$T_t^{11}e^{-i\lambda x} \sim 0 \quad \text{ovvero} \quad T_t^{11}(\lambda) = 0.$$

Procedendo analogamente per la seconda componente si ricava

$$T_t^{12} - 4i\lambda^2 T^{12} = 0.$$

Imponendo anche $\phi^{(2)}$ come soluzione del sistema (3.30) si possono ricavare le leggi di evoluzione temporale anche per i termini T^{21} e T^{22} , ma date le proprietà di simmetria (3.28) nei casi di nostro interesse non è necessario considerarle.

A questo punto, analizzando le equazioni appena ricavate per le derivate temporali dei termini della matrice di scattering, si nota che $T^{11}(\lambda)$ è una costante del moto, così come i suoi zeri λ_n , per cui il problema (3.6) risulta *isospettrale*, dato che lo spettro discreto non si modifica con il tempo. Allo stesso modo $T^{12}(\lambda, t)$ risulta obbedire a una legge di evoluzione decisamente semplice da risolvere, difatti si ha

$$T^{12}(\lambda, t) = T^{12}(\lambda, 0)e^{4i\lambda^2 t} \quad (3.31)$$

ed è con queste considerazioni che si comprende l'utilità del metodo della trasformata spettrale. Definiamo a questo punto i dati spettrali

$$S(\lambda) = \{\rho_{12}(\lambda), \lambda_n, c_n, 1 \leq n \leq N\} \quad (3.32)$$

dove

$$\rho_{12}(\lambda) = \frac{T^{12}(\lambda)}{T^{11}(\lambda)}, \quad c_n = \frac{b_n}{\left. \frac{dT^{11}}{d\lambda} \right|_{\lambda_n}} ;$$

Ricordando che lo spettro discreto rimane fisso nel tempo e osservando che ρ_{12}, b_r , data la loro lineare dipendenza da T^{12} (per semplicità ipotizziamo che si possa scrivere effettivamente $b_r = T^{12}(\lambda_r)$), soddisfano una legge di evoluzione lineare del tipo (3.31), si ha

$$\begin{aligned} \rho_{12}(\lambda, t) &= \rho_{12}(\lambda, 0)e^{4i\lambda^2 t} \\ b_r(t) &= b_r(0)e^{4i\lambda^2 t} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Descriviamo allora il procedimento complessivo del Metodo della Trasformata Spettrale: il primo passaggio consiste nel risolvere il problema diretto (DST, da “Direct Scattering Transform”) per determinare, noto il potenziale al tempo iniziale $q(x, 0)$, i dati spettrali $S(\lambda, 0)$. A questo punto, date le espressioni (3.33), si possono ricavare i dati spettrali $S(\lambda, t)$ a qualunque tempo, tramite una semplice evoluzione lineare; per concludere è necessario affrontare il problema inverso (IST, da “Inverse Scattering Transform”), che descriveremo nella sezione successiva, per ricavare il potenziale $q(x, t)$.

Possiamo quindi riassumere il tutto tramite il seguente schema

$$\begin{array}{ccc} q(x, 0) & \longrightarrow & S(\lambda, 0) \\ & & \downarrow \\ & & \text{evol. lineare} \\ & & \downarrow \\ q(x, t) & \longleftarrow & S(\lambda, t) \end{array}$$

Non resta dunque che analizzare il problema di scattering inverso.

3.4 Problema inverso

Il problema inverso consiste nel determinare i potenziali, noti i dati spettrali $S(\lambda)$; il problema di scattering (3.8), tenendo conto delle definizioni (3.20) e dividendo nella prima per T^{11} e nella seconda per T^{22} , diventa

$$\begin{aligned}\frac{\mu^+}{T^{11}} &= \nu^- + e^{2i\lambda x} \rho_{12} \nu^+ \\ \frac{\mu^-}{T^{22}} &= \nu^+ + \sigma e^{-2i\lambda x} \bar{\rho}_{12} \nu^- ,\end{aligned}\tag{3.34}$$

in cui si sono utilizzate le relazioni (3.28). Consideriamo ora i domini di analiticità dei due termini di destra nella prima delle (3.34): nel caso meno stringente in cui $q \in L_1(\mathbb{R})$ si ha ν^- analitica nel semipiano inferiore, mentre, per le considerazioni fatte in precedenza riguardo T^{12} , il termine contenente ρ_{12} non è in generale analitico oltre $\lambda \in \mathbb{R}$. Per questo motivo, definendo i proiettori

$$P_\lambda^\pm(f(\lambda')) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\lambda')}{\lambda' - (\lambda \pm i\epsilon)} d\lambda' \quad \lambda \in \mathbb{R} ,\tag{3.35}$$

si dimostra[4] che se $f(\lambda)$ verifica la condizione di Hölder¹ allora $P_\lambda^\pm(f(\lambda'))$ sono funzioni analitiche nel semipiano complesso superiore/inferiore rispettivamente e nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ vale

$$P_\lambda^\pm(f(\lambda')) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\lambda')}{\lambda' - \lambda} d\lambda' \pm \frac{1}{2} f(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{formula di Plemelj} - \text{Sokowski}) ,\tag{3.36}$$

(in cui f rappresenta l'integrale al valor principale secondo Cauchy), da cui la proprietà

$$P_\lambda^+(f(\lambda')) - P_\lambda^-(f(\lambda')) = f(\lambda) \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} .$$

A questo punto si può scrivere, sotto l'ipotesi appunto che $\rho_{12} e^{2i\lambda x} \nu^+$ soddisfi la condizione di Hölder,

$$\rho_{12} e^{2i\lambda x} \nu^+ = P_\lambda^+(\rho_{12} e^{2i\lambda' x} \nu^+) - P_\lambda^-(\rho_{12} e^{2i\lambda' x} \nu^+) ,$$

separando la parte analitica nel semipiano superiore da quella analitica nel semipiano inferiore. Il termine a sinistra della prima delle (3.34), invece, è analitico per $Im\lambda \geq 0$, tranne nei punti in cui $T^{11}(\lambda)$ si annulla (corrispondenti allo spettro discreto del problema di scattering); supponendo che tali poli λ_r siano semplici, si può scrivere

$$\frac{\mu^+}{T^{11}} = g^+(\lambda) + \sum_{r=1}^N \frac{\mu^+(\lambda_r)}{\left. \frac{dT^{11}}{d\lambda} \right|_{\lambda_r}} \frac{1}{\lambda - \lambda_r} ,$$

¹Ossia che $\exists \alpha > 0$ e $\mu \in]0, 1]$ tali che: $|f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| \leq \alpha |\lambda_1 - \lambda_2|^\mu$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

con $g^+(\lambda)$ funzione analitica nel semipiano superiore e il secondo termine prolungabile per analiticità nel semipiano inferiore (dato che $Im\lambda_r \geq 0$). A questo punto si riprende la prima delle (3.34) nel suo complesso, la si riscrive separandone i termini in base al loro dominio di analiticità e si ottiene

$$g^+(\lambda) - P_\lambda^+(\rho_{12}e^{2i\lambda'x}\nu^+) = \nu^- - P_\lambda^-(\rho_{12}e^{2i\lambda'x}\nu^+) - \sum_{r=1}^N \frac{\mu^+(\lambda_r)}{\left. \frac{dT^{11}}{d\lambda} \right|_{\lambda_r}} \frac{1}{\lambda - \lambda_r} . \quad (3.37)$$

Si ha quindi che il primo membro è analitico nel semipiano superiore, il secondo nel semipiano inferiore, per cui entrambi i membri si possono prolungare per analiticità in tutti il piano complesso; per il teorema di Liouville, perciò, tali membri sono uguali a una costante, pari al valore a cui tendono per $|\lambda| \rightarrow \infty$. Per mostrare quest'ultima affermazione utilizziamo le equazioni integrali (3.13)(3.14) e notiamo che per $|\lambda| \rightarrow \infty$ e $Im\lambda < 0$, vale $\nu^- \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Noto il comportamento all'infinito, la (3.37) implica che

$$\begin{aligned} g^+(\lambda) - P_\lambda^+(\rho_{12}(\lambda')2i\lambda'x\nu^+(\lambda')) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nu^-(\lambda) - P_\lambda^-(\rho_{12}(\lambda')e^{2i\lambda'x}\nu^+(\lambda')) - \sum_{r=1}^N \frac{c_r}{\lambda - \lambda_r} e^{2i\lambda_r x} \nu^+(\lambda_r) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (3.38)$$

in cui si è usata la prima di (3.24) e si è posto

$$\mu^+(\lambda_r) = b_r \nu^+(\lambda_r) e^{2i\lambda_r x} .$$

Ripetendo il ragionamento di cui sopra per la seconda delle (3.34), e sfruttando le considerazioni di simmetria per lo spettro discreto e i termini della matrice di scattering, si ricava

$$\begin{aligned} g^-(\lambda) - P_\lambda^-(\rho_{21}e^{-2i\lambda'x}\nu^-(\lambda')) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \nu^+(\lambda) - \sum_{r=1}^N \frac{\sigma \bar{c}_r}{\lambda - \bar{\lambda}_r} e^{-2i\bar{\lambda}_r x} \nu^-(\bar{\lambda}_r) - P_\lambda^+(\sigma \bar{\rho}_{12}(\bar{\lambda}')e^{-2i\lambda'x}\nu^-(\lambda')) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (3.39)$$

con

$$\mu^-(\bar{\lambda}_r) = \sigma \bar{b}_r \nu^-(\bar{\lambda}_r) e^{-2i\bar{\lambda}_r x}$$

Alle (3.38)(3.39) si aggiungono le $2N$ equazioni spinoriali:

$$\begin{aligned}
\nu^-(\bar{\lambda}_j) - P_{\bar{\lambda}}^-(\rho_{12}(\lambda')e^{2i\lambda'x}\nu^+(\lambda')) - \sum_{r=1}^N \frac{c_r}{\lambda-\lambda_r} e^{2i\lambda_r x} \nu^+(\lambda_r) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\nu^+(\lambda_j) - \sum_{r=1}^N \frac{\sigma \bar{c}_r}{\lambda-\lambda_r} e^{-2i\bar{\lambda}_r x} \nu^-(\bar{\lambda}_r) - P_{\lambda}^+(\sigma \bar{\rho}_{12}(\bar{\lambda}')e^{-2i\lambda'x}\nu^-(\lambda')) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.40)$$

ottenute valutando le equazioni (3.38)(3.39) in λ_j e $\bar{\lambda}_j$ rispettivamente.

Le (3.38)(3.39)(3.40) permettono quindi di ricavare le $\nu^\pm(\lambda, t)$, ma l'obiettivo finale del metodo della trasformata spettrale era quello di ricavare le soluzioni dell'equazione di Schrödinger non lineare; rimane quindi da determinare l'espressione del potenziale $q(x, t)$. Per far ciò consideriamo le (3.18)(3.19) nel caso $|\lambda| \gg 1$; sostituendo il primo ordine $\nu_2^+ \sim 1$ nella prima equazione, integrando per parti e tornando a sostituire nella seconda si ricava lo sviluppo seguente

$$\begin{aligned}
\nu_1^+ &= \frac{1}{2i\lambda} q(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\
\nu_2^+ &= 1 + \frac{\sigma}{2i\lambda^2} \int_x^\infty |q(y)|^2 dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned} \quad (3.41)$$

La prima delle (3.41) ci permette di interpretare $q(x)$ come proporzionale al residuo di $\nu_1^+(x, \lambda)$; ricordando $|\lambda| \gg 1$ si ricava dalla seconda delle (3.39) per ν_1^+

$$\nu_1^+(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\sigma \sum_{r=1}^N \bar{c}_r e^{-2i\bar{\lambda}_r x} \nu_1^-(\bar{\lambda}_r) - \frac{\sigma}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty d\lambda' \bar{\rho}_{12}(\bar{\lambda}') e^{-2i\lambda' x} \nu_1^-(\lambda') \right), \quad (3.42)$$

in modo da ottenere, moltiplicando per $2i\lambda$, la rappresentazione spettrale della soluzione della NLS

$$q(x, t) = 2i\sigma \sum_{r=1}^N \bar{c}_r(t) e^{-2i\bar{\lambda}_r x} \nu_1^-(\bar{\lambda}_r, t) - \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{-\infty} d\lambda' \bar{\rho}_{12}(\bar{\lambda}', t) e^{-2i\lambda' x} \nu_1^-(\lambda', t). \quad (3.43)$$

Analizziamo quindi il risultato ottenuto: la (3.43) consta di due termini, il primo corrispondente alla presenza di spettro discreto nel problema di scattering, il secondo associato alla soluzione di spettro continuo. Quest'ultima parte assume una forma che richiama l'integrale di Fourier della (2.6) e difatti rappresenta la parte di radiazione delle soluzioni della NLS, che si comporta come nel caso dispersivo lineare.

Il primo termine della (3.43) dà luogo invece a uno o più soluzioni ondose (a seconda di quanti siano i λ_r nello spettro discreto) fortemente localizzate denominate *solitoni*: tali onde si propagano con velocità costante e mantenendo la stessa forma; quando interagiscono fra loro, inoltre, non cambiano aspetto dopo l'interazione, ma acquistano semplicemente una variazione di fase. A causa di questo loro comportamento caratteristico sono difatti spesso considerate come delle "quasi-particelle". Tali strutture coerenti nello spazio e nel

tempo sono in pratica il risultato del bilanciamento tra la dispersione e la non linearità presenti nella NLS.

Per analizzare più in dettaglio queste soluzioni, poniamo il caso $\rho_{12} = 0$ (reflectionless potentials) e $\sigma = 1$ (ricordando che corrisponde al caso “focusing”, l’unico che ammette spettro discreto nelle ipotesi da noi fatte) e riportiamo per semplicità la forma assunta dalla prima delle (3.40) e la seconda delle (3.39):

$$\nu^-(\bar{\lambda}_j, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^N \frac{c_r(t)}{\bar{\lambda}_j - \lambda_r} e^{2i\lambda_r x} \nu^+(\lambda_r, t) \quad (3.44)$$

$$\nu^+(\lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sum_{r=1}^N \frac{\bar{c}_r}{\lambda - \bar{\lambda}_r} e^{-2i\bar{\lambda}_r x} \nu^-(\bar{\lambda}_r, t) . \quad (3.45)$$

Sostituendo l’espressione di ν^+ , calcolata in λ_r , nella prima e considerando solo la prima componente (l’unica legata a $q(x, t)$) si ricava (omettendo le dipendenze dal tempo)

$$\nu^-(\bar{\lambda}_j) = 1 - \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{c_r \bar{c}_k}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_r)(\lambda_r - \bar{\lambda}_k)} e^{2i(\lambda_r - \bar{\lambda}_k)x} \nu^-(\bar{\lambda}_k) ; \quad (3.46)$$

se si definisce

$$D_{jk} = \sum_{r=1}^N \frac{c_r \bar{c}_j}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_r)(\lambda_r - \bar{\lambda}_k)} e^{2i(\lambda_r - \bar{\lambda}_j)x} \quad (3.47)$$

la (3.46), separata la sommatoria nei casi $k = j$ e $k \neq j$, diventa

$$(1 + D_{jj})\nu^-(\lambda_j, t) = 1 - \sum_{r=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{c_r \bar{c}_k}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_r)(\lambda_r - \bar{\lambda}_k)} e^{2i(\lambda_r - \bar{\lambda}_k)x} \nu^-(\bar{\lambda}_k) ; \quad (3.48)$$

a questo punto si moltiplica entrambi i membri per $2i\bar{c}_j e^{-2i\bar{\lambda}_j x}$ e ,ricordando l’espressione (3.43) nel caso $\rho_{12} = 0$, si ottiene

$$(1 + D_{jj})q_j + \sum_{k=1, k \neq j}^N D_{jk}q_k = 2i\bar{c}_j e^{-2i\bar{\lambda}_j x} , \quad (3.49)$$

in cui si è opportunamente definito

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{r=1}^N q_r \\ q_r &= 2i\bar{c}_r e^{-2i\lambda_r x} \nu_1^-(\bar{\lambda}_r) . \end{aligned} \quad (3.50)$$

La (3.49) costituisce un sistema per determinare le q_r , la cui somma rappresenta la soluzione completa della NLS nel caso reflectionless. Come esempio ricaviamo ora la soluzione a singolo solitone, corrispondente al caso $N = 1$: la (3.47) si riduce allora alla sola

$$D_{11} = -\frac{|c_1(t)|^2 e^{2i(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)x}}{(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)^2} = \frac{|c_1(t)| e^{-4\eta x}}{4\eta^2} ,$$

avendo posto

$$\lambda_1 = \xi + i\eta \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 - \bar{\lambda}_1 = 2i\eta \quad , \quad \eta > 0;$$

si suppone poi

$$c_1(0) = 2\eta e^{2\eta x_1 + i\delta_1} ,$$

da cui tramite la seconda di (3.33) ed esplicitando il calcolo di λ^2 si ha

$$c_1(t) = 2\eta e^{2\eta x_1 - 8\xi\eta t} e^{i[4(\xi^2 - \eta^2)t - \delta_1]}$$

da cui

$$D_{11} = e^{4\eta(x_1 - x) - 16\xi\eta t} .$$

A questo punto dalla (3.49) si ottiene

$$q(x, t) = q_1 = \frac{2i\bar{c}_1(t)e^{-2i\bar{\lambda}_1 x}}{1 + D_{11}} = \frac{4i\eta e^{2\eta(x_1 - x) - 8\xi\eta t} e^{-i[4(\xi^2 - \eta^2)t + 2\xi x + \delta_1]}}{1 + e^{4\eta(x_1 - x) - 16\xi\eta t}} ;$$

ovvero

$$q(x, t) = \frac{2i\eta e^{-i[4(\xi^2 - \eta^2)t - 2\xi x - \delta_1]}}{\cosh[2\eta(x - x_1) + 8\eta\xi t]} . \quad (3.51)$$

La (3.51) rappresenta un solitone: il termine a numeratore costituisce la parte oscillante che, a causa del coseno iperbolico a denominatore, è esponenzialmente localizzata sulla retta; tale localizzazione viaggia nel tempo e, considerando l'argomento di \cosh si può quindi definire come velocità di propagazione del solitone $v = 8\eta\xi/2\eta = -4\xi$. L'ampiezza dell'oscillazione è invece legata alla parte immaginaria dello spettro discreto, nello specifico a 2η (vedi Figura 3.1).

A questo punto è necessario ritornare a considerare il caso “defocusing” della NLS, al quale ricordiamo che non si possono associare soluzioni del tipo (3.51) perchè non ammette spettro discreto nell'ipotesi $q(x, t) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$; va aggiunto però che modificando tali ipotesi, ovvero andando a cercare soluzioni di altro tipo, si può dimostrare che anche il caso “defocusing” ammette soluzioni solitoniche associate a spettro discreto.

Più precisamente l'equazione Schrödinger non lineare “defocusing” possiede, ad esempio, soluzioni il cui modulo all'infinito tende a una costante non nulla; esse sono della forma

$$q(x, t) = q_0 [a \tanh a(x - vt) + i\rho] e^{-i[(\rho - \frac{v}{2})x + (3\rho^2 + 2a^2 - \rho v + \frac{v^2}{4})t]} , \quad (3.52)$$

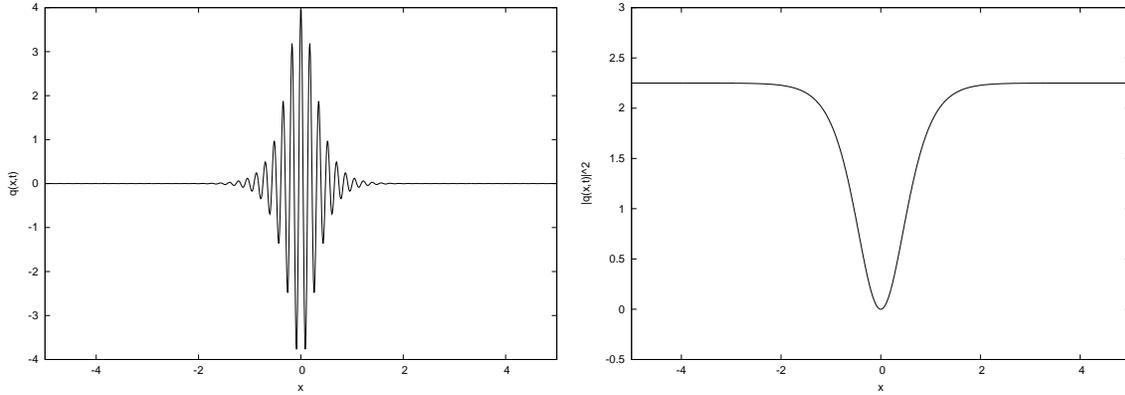


Figura 3.1: A sinistra: esempio di solitone di tipo *bright*. A destra: andamento del modulo quadro in un solitone *dark*.

con q_0, a, v, ρ parametri reali [18]. Si verifica quindi che il modulo di tale soluzione tende a $|q_0| \sqrt{a^2 + \rho^2}$ per $x \rightarrow \pm\infty$ e ha il minimo $|q_0\rho|$ per $x = vt$. Quindi questo solitone è visibile sotto forma di depressione rispetto al valore costante all'infinito, depressione che si sposta nel tempo con velocità v (vedi Figura 3.1).

In ottica non lineare si distinguono solitamente questi due tipi di soluzione denominandoli solitoni *bright* nel caso (3.51), dato che nei fenomeni ottici rappresentano dei picchi di intensità luminosa; al contrario ci si riferisce alla (3.52) come a un solitone di tipo *dark* perchè rappresenta il fenomeno opposto di locale diminuzione di energia. Infine i solitoni *dark* si dicono *black* quando $\rho = 0$ e l'intensità luminosa è nulla nel punto di minimo, mentre è *gray* quando $\rho \neq 0$ e il modulo dell'onda non arriva ad essere nullo nel minimo[12].

Capitolo 4

La NLS come equazione modello della fisica

Consideriamo un sistema fisico in 1+1 dimensioni in cui una grandezza $u(x, t) \in \mathbb{R}$ sia descritta da una legge di evoluzione del seguente tipo

$$\mathcal{L}^{(0)}u = \mathcal{N}(u, u_x) ; \quad (4.1)$$

l'operatore differenziale $\mathcal{L}^{(0)}$ è del tipo lineare dispersivo, associato a una generica relazione di dispersione espressa in serie di potenze $\omega(k) = \sum_{j=0} a_j k^j$, e può essere scritto nel seguente modo

$$\mathcal{L}^{(0)} = \partial_t + i\omega(-i\partial_x) , \quad (4.2)$$

mentre \mathcal{N} è una funzione analitica non lineare di u e u_x , che scegliamo di esprimere in serie di potenze nel seguente modo

$$\mathcal{N}(u, u_x) = (n_1 u^2 + n_2 u^3 + \dots)_x = 2n_1 u u_x + 3n_2 u^2 u_x + \dots . \quad (4.3)$$

Supponendo che la non linearità sia molto debole rispetto alla dispersione, sviluppiamo intorno alla condizione di equilibrio $u^{(0)} = \text{cost} \Rightarrow u_t = u_x = 0$ e consideriamo la non linearità come perturbazione; poniamo quindi

$$u(x, t) = \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \epsilon^3 u^{(3)} + \dots \quad (4.4)$$

con il fattore $0 < \epsilon \ll 1$ che tiene conto della “piccolezza” della non linearità e la richiesta di *asintoticità* dello sviluppo, ovvero che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{\epsilon u^{(n+1)}}{u^{(n)}} \right\| = 0 \quad \forall n ,$$

in cui $\|\cdot\|$ indica la norma uniforme in x e t . Alla luce della (4.4) il termine non lineare nella (4.1) si può perciò scrivere separando i vari ordini in ϵ :

$$\mathcal{N}(u, u_x) = \epsilon^2 2n_1 u^{(1)} u_x^{(1)} + \epsilon^3 [2n_1 (u^{(1)} u_x^{(2)} + u^{(2)} u_x^{(1)}) + 3n_2 (u^{(1)})^2 u_x^{(1)}] + \mathcal{O}(\epsilon^4) . \quad (4.5)$$

Uguagliando nella (4.1) a $\mathcal{O}(\epsilon)$ si ricava

$$\mathcal{L}^{(0)} u^{(1)} = 0 ,$$

equazione che, come già visto in precedenza, ammette la soluzione elementare di onda piana $u^{(1)}(x, t) = \psi_1 e^{i\theta} + c.c.$, $\theta = kx - \omega(k)t$, $\psi_1 = cost$; agli ordini successivi si ricava poi

$$\mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{(0)} u^{(2)} = 2n_1 u^{(1)} u_x^{(1)} , \quad (4.6)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^3) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{(0)} u^{(3)} = 2n_1 (u^{(1)} u_x^{(2)} + u^{(2)} u_x^{(1)}) + 3n_2 (u^{(1)})^2 u_x^{(1)} . \quad (4.7)$$

Nella (4.6) il termine $u^{(1)} u_x^{(1)} = ik\psi_1^2 e^{2i\theta} + c.c.$ porta alla generazione della seconda armonica; difatti la (4.6) ammette soluzione del tipo $u^{(2)}(x, t) = B e^{2i\theta} + c.c.$ con $B = cost$. Nella (4.7) basta osservare il termine $u^{(1)} u_x^{(2)} = 2ikAB e^{3i\theta} + 2ik\bar{A}B e^{i\theta} + c.c.$ per notare che, oltre a un fattore per la generazione della terza armonica, al $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ compare un termine risonante (ovvero proporzionale ad $e^{i\theta}$) che ammette soluzione con ampiezza che cresce linearmente con il tempo. A causa di tale fenomeno è sufficiente arrivare a tempi dell'ordine ϵ^{-1} perchè venga a cadere l'asintoticità dello sviluppo perturbativo. La non linearità nel sistema fisico in questione, se da un lato distribuisce l'energia iniziale nelle armoniche superiori che compaiono ai vari ordini dello sviluppo, dall'altro porta anche all'accumulo di correzioni che a tempi lunghi causano la perdita di validità dello sviluppo perturbativo; si parla in questi casi di introduzione di *termini secolari*. E' necessario quindi modificare il procedimento fin ora effettuato applicando il cosiddetto *metodo multiscale*: introduciamo dunque le variabili "lente" $x_1 = \epsilon x$, $t_1 = \epsilon t$ e $t_2 = \epsilon^2 t$; gli operatori di derivazione si modificano perciò nel seguente modo

$$\partial_x \rightarrow \partial_x + \epsilon \partial_{x_1} ,$$

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon \partial_{t_1} + \epsilon^2 \partial_{t_2} .$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \omega(-i\partial_x - i\epsilon\partial_{x_1}) &= \sum_{j=0} a_j (-i)^j (\partial_x + \epsilon\partial_{x_1})^j = \sum_{j=0} a_j (-i)^j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \epsilon^i \partial_x^j \partial_{x_1}^i = \\ &= \sum_{j=0} a_j (-i)^j \partial_x^j + \epsilon \sum_{j=1} j a_j (-i)^j \partial_x^{j-1} \partial_{x_1} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{j=2} j(j-1) a_j (-i)^j \partial_x^{j-2} \partial_{x_1}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) ; \end{aligned}$$

L'operatore dispersivo lineare si può perciò riscrivere separando i vari ordini in ϵ

$$\mathcal{L}^{(0)} \rightarrow \mathcal{L} = \partial_t + i\omega(-i\partial_x) + \epsilon[\partial_{t_1} + i\omega'(-i\partial_x)\partial_{x_1}] + \epsilon^2[\partial_{t_2} + \frac{i}{2}\omega''(-i\partial_x)\partial_{x_1}\partial_{x_1}] + \mathcal{O}(\epsilon^3) . \quad (4.8)$$

I primi ordini del termine non lineare, tenendo conto che ora $u_x \rightarrow u_x + \epsilon u_{x_1}$, si modificano invece nel seguente modo

$$\mathcal{N}(u, u_x) = \epsilon^2 2n_1 u^{(1)} u_x^{(1)} + \epsilon^3 [2n_1 (u^{(1)} u_x^{(2)} + u^{(2)} u_x^{(1)} + u^{(1)} u_{x_1}^{(1)}) + 3n_2 (u^{(1)})^2 u_x^{(1)}] + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (4.9)$$

e i primi ordini dell'equazione (4.1) assumono quindi la nuova forma

$$\mathcal{O}(\epsilon) \rightarrow \mathcal{L}^{(0)} u^{(1)} = 0 , \quad (4.10)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^2) \rightarrow \mathcal{L}^{(0)} u^{(2)} = -[u_{t_1}^{(1)} + i\omega'(-i\partial_x)u_{x_1}^{(1)}] + 2n_1 u^{(1)} u_x^{(1)} , \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon^3) \rightarrow \mathcal{L}^{(0)} u^{(3)} = & -[u_{t_1}^{(2)} + i\omega'(-i\partial_x)u_{x_1}^{(2)}] - [u_{t_2}^{(1)} + \frac{i}{2}\omega''(-i\partial_x)u_{x_1 x_1}^{(1)}] + \\ & + 2n_1 (u^{(1)} u_x^{(2)} + u^{(2)} u_x^{(1)} + u^{(1)} u_{x_1}^{(1)}) + 3n_2 (u^{(1)})^2 u_x^{(1)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si ha che al $\mathcal{O}(\epsilon)$ la soluzione è nuovamente del tipo

$$u^{(1)} = \psi_1(x_1, t_1, t_2) e^{i\theta} + c.c. \quad (4.13)$$

ma con ora l'ampiezza che è a sua volta funzione dello spazio e del tempo, seppur con una dinamica in una scala più lenta; inserendo la (4.13) nella (4.11) notiamo poi che per eliminare i termini secolari all'ordine ϵ^2 è sufficiente chiedere

$$u_{t_1}^{(1)} + i\omega'(-i\partial_x)u_{x_1}^{(1)} = 0 \Rightarrow \psi_{1t_1} + i\omega'(k)\psi_{1x_1} = 0 ,$$

equazione soddisfatta da $\psi_1 = \psi_1(x_1 - \omega'(k)t_1, t_2)$. Ciò significa che in tempi e spazi dell'ordine ϵ^{-1} l'effetto della non linearità consiste nel far viaggiare l'ampiezza dell'armonica principale con la velocità di gruppo. A questo punto la (4.11) ammette soluzione per $u^{(2)}$ della forma

$$u^{(2)} = \psi_2(x_1, t_1, t_2) e^{2i\theta} + c.c. , \quad (4.14)$$

in cui, ricordando $u^{(1)} u_x^{(1)} = ik\psi_1^2 e^{2i\theta} + c.c.$, si ha

$$\psi_2 = \frac{2kn_1}{\omega(2k) - 2\omega(k)} \psi_1^2 , \quad (4.15)$$

E' necessario ora riconoscere ed eliminare i termini risonanti nella (4.12): oltre che nei termini contenenti le derivate di $u^{(1)}$ si nota che essi sono presenti nei seguenti termini non lineari

$$\begin{aligned}
u^{(1)}u_x^{(2)} &= 2ik\psi_1\psi_2e^{3i\theta} + 2ik\psi_2\bar{\psi}_1e^{i\theta} + c.c. , \\
u^{(2)}u_x^{(1)} &= ik\psi_1\psi_2e^{3i\theta} - ik\psi_2\bar{\psi}_1e^{i\theta} + c.c. , \\
(u^{(1)})^2u_x^{(1)} &= ik\psi_1^3e^{3i\theta} + ik\psi_1|\psi_1|^2e^{i\theta} + c.c.
\end{aligned}$$

eliminare i termini secolari corrisponde quindi a chiedere

$$-\psi_{1t_2} - \frac{i}{2}\omega''\psi_{1x_1x_1} + 2ikn_1\psi_2\bar{\psi}_1 + 3ikn_2\psi_1|\psi_1|^2 = 0 . \quad (4.16)$$

Ricordando la relazione (4.15) si ricava che la (4.16) risulta essere proprio l'equazione di Schrödinger non lineare per l'ampiezza ψ_1 , nelle variabili x_1 e t_2 :

$$i\psi_{1t_2} = \frac{\omega''}{2}\psi_{1x_1x_1} - \left(\frac{4n_1^2k^2}{\omega(2k) - 2\omega(k)} - 3n_2k \right) \psi_1|\psi_1|^2 . \quad (4.17)$$

In conclusione la NLS ha ampia validità come equazione modello della fisica perchè compare in sistemi dispersivi debolmente non lineari per descrivere le modulazioni di ampiezza dell'armonica principale, in una scala di tempi e spazi più lenta rispetto alle oscillazioni di fase. Un analogo ragionamento si può inoltre estendere a una classe più ampia di equazioni, ad esempio considerando un operatore dispersivo più generale (in forma di polinomio come nella (2.5)) e non linearità \mathcal{N} che siano funzioni anche delle derivate successive della $u(x, t)$ [13].

Bibliografia

- [1] G.G.N. Angilella, Appunti del corso *Onde non lineari. Metodi perturbativi ed esatti* tenuto dal prof. P.M.Santini per il dottorato di ricerca in Fisica, nell'A.A. 1995/1996 presso l'Univesità degli studi di Catania
- [2] G.B. Witham, *Linear and Nonlinear Waves*, J. Wiley and Sons, New York 1974
- [3] H.Jeffreys and B.S. Jeffreys, *Methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, 1950
- [4] N.I.Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Springer, 1977
- [5] R.Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum Press, New York 1980
- [6] V.E.Zakharov and A.B.Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP, 34, pag. 62-69, 1972
- [7] P.D.Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math., 21, pag. 467-490, 1968
- [8] M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C. Newell and H.Segur, *Nonlinear evolution equation of physical significance*, Phys. Rev. Lett., 31, pag. 125-127, 1973
- [9] M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C. Newell and H.Segur, *The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems*, Stud. Appl. Math., 53, pag. 249-315, 1974
- [10] M. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, 1981.
- [11] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Series 149, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [12] Y.S.Kivshar and B. Luther-Davies, *Dark optical solitons: physics and applications*, Phys. Rep, 298, pag. 81 (1998)

- [13] C. Sulem and P. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer 1999
- [14] H.L. Pecseli and J.J. Rasmussen, *Nonlinear electron waves in strongly magnetized plasma*, Plasma Phys. 22, 421 (1980)
- [15] J. Denschlag et al., *Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate*, Science 287, pp. 97-101 (2000)
- [16] F. Belli, *Fenomeni non lineari nella propagazione di raggi X da Fel*, Tesi di Laurea specialistica in Fisica, A.A. 2010/2011 presso l'Università degli studi di Roma "Sapienza"
- [17] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. 19, pp. 1095-1097, (1967)
- [18] *Corso di Fisica Teorica: Onde Non Lineari e Solitoni* del Prof. A. Degasperis, a cura di G.Ferrari e D. Dell'Arciprete, 2008