FISICA TEORICA: SISTEMI EVOLUTIVI NON LINEARI

Prof. Paolo Maria Santini

Corso della Laurea Specialistica; III Semestre, AA 2009-10

Finalità del corso. Lo scopo del corso è quello di studiare sistemi evolutivi non lineari (sistemi di equazioni alle derivate ordinarie (ODEs) nella prima parte del corso, e alle derivate parziali (PDEs) nella seconda) attraverso alcune tecniche analitiche moderne, mostrando, in particolare, il ruolo cruciale giocato dai punti di diramazione mobili per le ODEs, e da varietà singolari mobili per le PDEs, nella ricchezza della dinamica. Nel caso di ODEs, i punti di diramazione mobili che si addensano nel piano complesso tempo determinano dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali; nel caso di PDEs, varietà singolari mobili accessibili alla dinamica reale danno luogo, ad esempio, a fenomeni universali di rottura di onde. Queste tematiche vengono affrontate avendo in mente diversi "toy models" matematici, per introdurre nel modo più semplice i concetti e la tecniche di base, ma anche diverse equazioni modello della Fisica Matematica, come i sistemi di Calogero-Moser e di Toda per le ODEs, e come le equazioni di Riemann-Hopf, di Burgers e di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione, nel caso di PDEs in 1+1 e 2+1 dimensioni.
Prerequisiti. L'aver frequentato con profitto i corsi di Meccanica Analitica (Razionale) e di Metodi e Modelli Matematici della Fisica. Non ci sono relazioni di propedeuticità tra questo corso ed altri corsi della laurea specialistica.
Affinità. Due corsi "affini" della Laurea Specialistica sono: i) per la prima parte, il corso di "Fisica dei sistemi dinamici" del Prof. A. Vulpiani, nel quale vengono studiati sistemi dinamici caotici; ii) per la seconda parte, il corso di "Fisica teorica: onde non lineari e solitoni" del Prof. A. Degasperis, nel quale vengono studiate equazioni non lineari alle derivate parziali integrabili della Fisica Matematica. Si consiglia quindi di seguirli..

PROGRAMMA (provvisorio) DEL CORSO, CON ESERCIZI

Prima parte: Teoria analitica delle equazioni differenziali e sistemi dinamici integrabili

1) Singolarità, funzioni polidrome e superfici di Riemann [1, 2]
Le singolarità di funzioni analitiche: singolarità isolate (poli e singolarità essenziali); punti di diramazione, punti d'accumulazione e barriere essenziali di singolarità.
Esempi significativi di funzioni elementari e loro inverse: $w = z^2$, $w =$

e^z, $w = \sin z$, $w = (z-z_1)^{1/2}$, $w = ((z-z_1)(z-z_2))^{1/2}$, $w = ((z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4))^{1/2}$, $w = \ln(z-z_0)$, $w = \sin^{-1} z$. Punti di diramazione di tipo razionale, irrazionale e logaritmico; funzioni polidrome e superfici di Riemann. La sfera di Riemann, il toro a una e più maniglie; genere della superficie e formula di Hurwitz (cenni).

Esercizi
1. Mostrare che la funzione $w(z) = z^{1/2}$ i) trasforma il piano complesso z nel semipiano (superiore o inferiore) del piano complesso w ii) il fascio ortogonale cartesiano del piano z (costituito dalle rette parallele all'asse x e all'asse y) nel fascio ortogonale di iperboli nel semipiano del piano w.
2. Costruire le superfici di Riemann delle funzioni elementari

$$w = \left(\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)\right)^{1/2}, \quad 1 \le n \le 5, \quad z_j \in \mathbb{C}$$

e determinarne il genere. Confrontare il risultato con la formula di Hurwitz.
3. Mostrare che la funzione $w(z) = e^z$ i) trasforma il fascio ortogonale cartesiano del piano z (costituito dalle rette parallele all'asse x e all'asse y) nel fascio ortogonale di raggi e di cerchi concentrici del piano w. ii) Tale trasformazione è monodroma (e quindi biunivoca) scegliendo, come dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, una striscia orizzontale del piano z di spessore $h \le 2\pi$. L'immagine di tale striscia è l'angolo h del piano w, con vertice $w = 0$. iii) Dedurre che la funzione inversa $w = \ln z$ trasforma il piano complesso z, tagliato da 0 all'∞, nella striscia orizzontale $0 < Im\ w < 2\pi$ del piano w.
4. Mostrare che la funzione $w(z) = \sin z$ i) trasforma il fascio ortogonale cartesiano del piano z (costituito dalle rette parallele all'asse x e all'asse y) nel fascio ortogonale di ellissi ed iperboli del piano w, con fuochi ± 1. ii) Tale trasformazione è monodroma (e quindi biunivoca) scegliendo, ad esempio, come dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, una striscia verticale di spessore $h \le \pi$. iii) Dedurre che la funzione inversa $w = \sin^{-1} z$ trasforma il piano complesso z, tagliato da 1 a ∞ e da -1 a $-\infty$, nella striscia verticale $-\pi/2 < Re\ w < \pi/2$ del piano w.

2) Singolarità fisse e mobili di ODEs e analisi locale
Teorema di Cauchy (di esistenza e unicità della soluzione) per l'ODE analitica $dw/dz = w' = f(w, z)$ [3, 4]. Generalizzazione al caso di sistemi di ODEs $d\vec{w}/dz = \vec{w}' = f(\vec{w}, z$ (solo enunciato; esercizio per gli studenti). Nel caso lineare: $f(w, z) = a(z)w + b(z)$, il disco di analiticità della soluzione coincide con quello di $a(z)$ e $b(z)$. Stima del raggio di convergenza nel caso in cui il sistema è autonomo. Singolarità fisse e mobili delle soluzioni di

sistemi di ODEs nel piano complesso z. Nel caso di ODEs lineari, tali singolarità coincidono con le singolarità dei coefficienti e sono fisse. Nel caso non lineare appaiono invece sia singolarità fisse che mobili. Esempi elementari di ODEs con singolarità polari, essenziali e punti di diramazione mobili. Il ruolo giocato dalle singolarità nella dinamica: distribuzione regolare di poli nel piano complesso tempo e moti oscillatori; i punti di diramazione mobili come causa di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Proprietà di Painlevé.
Analisi perturbativa locale di ODEs generiche, lineari e non lineari, per l'individuazione del tipo di singolarità delle loro soluzioni e per la costruzione della soluzione espressa o mediante serie di Laurent, o attraverso ψ - serie di tipo logaritmico, razionale e irrazionale [5]. Esempi di equazioni studiate in classe con tale tecnica:

$$w'' = 6w^2 + aw, \; a \in \mathbb{C}, \qquad w'' + bw' - aw - 2w^3 = 0. \tag{1}$$

Cenni al caso del modello di Lorenz (vedere esercizio). Cenni sull'importanza dell'analisi perturbativa locale per individuare i valori dei parametri delle ODEs per i quali tali ODEs sono integrabili (mediante funzioni analitiche opportune) [5].

Esercizi
1. Generalizzare il teorema di Cauchy, presentato in classe nel caso scalare, al caso di sistemi di ODEs.
2. Analisi perturbativa per l'equazione $w'' = z^m w + 2w^3, \;\; m \in \mathbb{Z}$, (mostrare che l'equazione soddisfa alla proprietà di Painlevé per $m = 0, 1$ (per $m = 0$ la soluzione è una funzione ellittica, per $m = 1$ si ottiene l'equazione di Painlevé II (PII), la cui integrabilità è nota [4]); altrimenti la serie contiene logaritmi).
3. Analisi perturbativa per i seguenti sistemi di equazioni (pagg 336-346 del [5]):

$$\begin{array}{ll} x'' + Ax + 2Dxy = 0, \;\; y'' + By + Dx^2 - Cy^2 = 0 & \text{di Hénon-Heiles} \\ x' = \sigma(y - x), \;\; y' = -xz + Rx - y, \;\; z' = xy - Bz & \text{di Lorenz} \end{array} \tag{2}$$

ottenendo i seguenti risultati. Il sistema di Hénon gode della proprietà di Painlevé nei seguenti casi:... Il sistema di Lorenz gode della proprietà di Painlevé nei seguenti casi: i) $\sigma = 1/2, \; B = 1, \; R = 0$; ii) $\sigma = 1, \; B = 2, \; R = 1/9$; iii) $\sigma = 1/3, \; B = 0, \; R$ arbitrario.
4. Analisi perturbativa per le equazioni del corpo rigido con un punto fisso

e soggetto alla forza peso [3]:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{\mu}} &= \vec{\mu} \wedge \vec{\omega} + mg\ \vec{c} \wedge \vec{\gamma}, \\
\dot{\vec{\gamma}} &= \vec{\gamma} \wedge \vec{\omega},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

dove $\vec{\mu}$ e $\vec{\omega}$ sono rispettivamente il momento angolare e la velocità angolare, legati dalla relazione $\vec{\mu} = A\vec{\omega}$, con A =diag(A_1, A_2, A_3) matrice degli autovalori (costanti) del momento d'inerzia; $\vec{g} = mg\vec{\gamma}$ è la forza peso rispetto al sistema di riferimento mobile e $\vec{\gamma}$ è versore unitario; $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ è il vettore (costante) del centro di massa. Quindi le 6 variabili dipendenti sono le componenti dei vettori $\vec{\omega}, \vec{\gamma}$, il tempo è la variabile indipendente e i 6 parametri liberi sono gli autovalori del momento d'inerzia e le componenti del centro di massa.
Individuare i seguenti valori dei 6 parametri per i quali la proprietà di Painlevé è soddisfatta (ed il sistema è integrabile):
$c_1 = c_2 = c_3 = 0$, la trottola di Euler - Poinsot;
$A_1 = A_2$ e $c_1 = c_2 = 0$ la trottola di Lagrange - Poisson (simmetria assiale);
$A_1 = A_2 = A_3$ (simmetria sferica);
$A_1 = A_2 = 2A_3$ e $c_3 = 0$ la trottola di Kowalevskaya.

3) L'inversione della quadratura nel piano complesso [1]
ODEs riconducibili a quadrature. Esempio: l'equazione newtoniana unidimensionale $\ddot{x} = -dV(x)/dx$ e la sua quadratura $t - t_0 = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{2(E-V(y))}}$.
L'inversione, nel complesso, delle quadrature associate alle superfici di Riemann: i) $\mu^2 = 1 - x^2$ (oscillatore armonico), ii) $\mu^2 = (1 - x^2)(1 - \kappa x^2)$ (pendolo semplice) [1] e, più in generale, iii) $\mu^2 = 1 - x^n,\ n \in \mathbb{Z}$ (oscillatore anarmonico) [13, 12, 14]. Polidromia di $t(x)$ e multiperiodicità di $x(t)$. Il problema dell'inversione dell'integrale ellittico ed iperellittico: le funzioni ellittiche e iperellittiche. Principio di riflessione di Riemann - Schwarz attraverso un segmento [1].

Esercizi
1. Se il potenziale $V(x)$ è un polinomio di grado N, mostrare che la soluzione $x(t)$ ottenuta invertendo la quadratura ammette simgolarità mobili del tipo $x(t) \sim d(t-t_0)^{-\frac{2}{N-2}},\ N > 2$. Dedurre quindi che, al variare di N, si avranno sia singolarità polari mobili (per $N = 3, 4$) che punti di diramazione mobili di tipo razionale (per $N > 4$). Mostrare inoltre che la multiperiodicità di $x(t)$ dipende da N. Per quali valori di N le singolarità mobili si addensano nel piano complesso?
2. Introdurre la funzione $x = \sin t,\ t, x \in \mathbb{C}$ dall'inversione dell'integrale

$t = \int\limits_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}}$, dedurre che $x = \sin t$ è una funzione intera che gode delle seguenti proprietà:

$$\overline{\sin(\bar{t})} = \sin t, \ \overline{\sin(\pi - \bar{t})} = \sin t, \ \sin(t + 2\pi n) = \sin t, \ n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

3. Introdurre la funzione $x = sn(t, \kappa)$ (funzione ellittica di Jacobi) dall'inversione dell'integrale ellittico

$$t = \int\limits_0^x \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-\kappa x'^2)}}, \quad 0 < \kappa < 1. \quad (5)$$

Dedurre che tale funzione gode delle seguenti proprietà: i) essa mappa in modo biunivoco il rettangolo $[K, K+iK', -K+iK', -K]$ del piano complesso t nel semipiano superiore del piano complesso x, dove

$$K \equiv \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa x^2)}}, \quad K' \equiv \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa' x^2)}}, \quad \kappa' \equiv \sqrt{1-\kappa^2}. \quad (6)$$

ii) Sono soddisfatte le condizioni

$$\overline{sn(2K - \bar{t}, \kappa)} = sn(t, \kappa), \quad \overline{sn(\bar{t} - 2iK', \kappa)} = sn(t, \kappa), \quad (7)$$

che implicano la "doppia periodicità":

$$sn(t + 4m_1 K + 2im_2 K', \kappa) = sn(t, \kappa), \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

iii) È meromorfa, con uno zero semplice per $t = 0$ e un polo semplice per $t = iK'$. Usando la doppia periodicità, disegnare tutti i suoi poli e zeri.
4. Avendo definito come funzione ellittica un funzione $f(z)$ complessa di variabile complessa z doppiamente periodica, con periodi $2\omega_1, 2\omega_2 \in \mathbb{C}$:

$$f(z + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2) = f(z), \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

sia Π_{00} il parallelogramma (fondamentale) generato dai due periodi. Dimostrare che: i) se $f(z)$ è intera, allora è costante. ii) Definito come "ordine" di $f(z)$ la somma delle molteplicità dei suoi poli all'interno di Π_{00}, mostrare che l'ordine è ≥ 2. iii) Dimostrare che l'ordine di $f(z)$ è pari al numero di radici di $(f(z) - A)$, con $A \in \mathbb{C}$ (quindi l'ordine di una funzione ellittica è come il grado di un polinomio). iv) Verificare queste proprietà per la funzione $sn(z, \kappa)$ definita nell'esercizio precedente.
5. Il pendolo matematico.

i) Mostrare che la soluzione generale dell'equazione del pendolo matematico $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$ è

$$\theta(t) = 2\sin^{-1}\left(sn\left(\sqrt{\frac{g}{L}}(t - t_0), \kappa\right)\right) \tag{10}$$

ed il periodo dell'oscillazione è dato da

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}K, \tag{11}$$

dove $sn(z, \kappa)$ è la funzione ellittica di Jacobi, il parametro κ è legato ai dati del problema dalla $\kappa = \sqrt{\frac{1+EL/g}{2}}$, K è definito nell'esercizio 3 e $E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{L}\cos\theta$ è l'energia (costante) del sistema.
ii) Mostrare che, se $\bar{\theta}$ è l'angolo di inversione, allora:

$$\begin{array}{l} \cos\bar{\theta} = -\frac{EL}{g}, \\ \theta(t) \sim \bar{\theta} - \kappa\sqrt{1-\kappa^2}\frac{g}{L}(t - \frac{T}{4})^2, \quad t \sim \frac{T}{4}. \end{array} \tag{12}$$

4) Sistemi integrabili Hamiltoniani e teorema di Liouville [7, 8, 9, 6]
Sistemi dinamici e campi vettoriali. Sistemi Hamiltoniani e campi vettoriali Hamiltoniani. Algebra di Lie di campi vettoriali. Simmetrie di ODEs e commutazione dei corrispondenti campi vettoriali; se tali campi vettoriali sono Hamiltoniani, si ha l'involutività delle corrispondenti Hamiltoniane. Campi vettoriali a divergenza nulla e conservazione del volume dello spazio delle fasi; conservazione della densità di probabilità: $\partial\rho/\partial t + \{\rho, H\} = 0$ per un sistema Hamiltoniano. Sistemi Hamiltoniani con N integrali primi in involuzione (integrabilità alla Liouville); il teorema di Liouville. N- tori e variabili azione-angolo. Moti periodici e quasi periodici; teorema della media; traiettorie ovunque dense e dinamiche ergodiche.

Esercizi
1. Mostrare che i campi vettoriali Hamiltoniani sono a divergenza nulla, e che quindi le dinamiche associate preservano il volume nello spazio delle fasi.
2. Mostrare che il viceversa non è vero: campi vettoriali a divergenza nulla non sono necessariamente Hamiltoniani.
3. Avendo definito come i) forma differenziale esatta la k-forma ω per la quale esiste la primitiva, la $(k-1)$-forma η tale che $d\eta = \omega$, dove $d\eta$ è la derivata esterna di ω, e ii) forma differenziale chiusa la forma ω tale che $d\omega = 0$, mostrare che una forma differenziale esatta è anche chiusa, mentre

una forma chiusa puo' non essere esatta (trovare un esempio in cui lo è e uno in cui non lo è).
4. Mostrare che il teorema di Stokes per forme differenziali:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \tag{13}$$

contiene, come casi particolari, i teoremi di Stokes e Gauss in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.
5. Ad un sistema Hamiltoniano vengono associate due strutture: la 2-forma simplettica $\Omega = \sum\limits_{i<j} \omega_{ij}(\underline{x}) dx^i \wedge dx^j = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$ e la parentesi di Poisson di due coordinate generiche: $h^{ij}(\underline{x}) = \{x^i, x^j\}_{q,p}$. i) Mostrare che $h^{ij}(\underline{x})$ si trasforma come un tensore $(2,0)$, mentre $\omega_{ij}(\underline{x})$ si trasforma come un tensore $(0,2)$, deducendo che $\sum\limits_{i,j} h^{ij}\omega_{ij}$ è invariante per trasformazioni di coordinate; ii) mostrare che, se $\underline{x} = (\underline{q}, \underline{p})$, allora

$$(h^{ij}) = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}, \tag{14}$$

e quindi che le due strutture sono l'una l'inversa dell'altra: $\sum_k h^{ik}\omega_{kj} = \sum_k \omega_{ik}h^{kj} = \delta^i_j$ in ogni sistema di coordinate.
6. Mostrare che

$$\{F(\underline{x}), G(\underline{x})\}_{(q,p)} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j}\{x^i, x^j\}_{(q,p)}. \tag{15}$$

7. Se un sistema dinamico Hamiltoniano possiede n costanti del moto $H_i(q,p) = h_i$ indipendenti ed in involuzione, allora, i) mostrare che, rispetto alle variabili canoniche $(\underline{q}, \underline{h})$:

$$(h^{ij}(\underline{q}, \underline{h})) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

con

$$B_{ij} = \{H_i, q^j\}_{(q,p)}, \quad C_{ij} = \{q^i, H_j\}_{(q,p)}; \tag{17}$$

ii) dedurre che la forma simplettica Ω dell'esercizio 5 è nulla sulla varietà n-dimensionale definita dalle condizioni $H_i(q,p) = h_i,\ i = 1, .., n$.
8. Costruire le variabili azione - angolo nei seguenti casi [5]:
a) $H = p^2/2 + \omega^2 q^2/2$ (oscillatore armonico); b) $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2)$ (oscillatore armonico bidimensionale); c) $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$ (particella libera nel rettangolo $0 < x < a,\ 0 < y < b$); d) $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r)$ (moto piano

centrale).

5) Sistemi dinamici integrabili e non
Coppia di Lax $(L(q,p),\ M(q,p))$ di matrici quadrate $N \times N$. Il sistema dinamico $\dot{L} = [L, M]$ possiede, come integrali primi, gli N autovalori di L. Due esempi.
a) Coppia di Lax, equazione funzionale e sistema di Calogero - Moser [10]

$$\ddot{q}_n = -a^2 \sum_{k=1, k\neq n}^{N} (q_n - q_k)^{-3}, \quad n = 1, .., N, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Soluzione di Olshanetski-Perelomov [10]. Numero finito di punti di diramazione mobili nel piano complesso (proprietà di Painlevé debole) e superficie di Riemann associata al modello di Calogero - Moser. La dinamica delle N particelle $\forall t \in \mathbb{R}$ e la descrizione dei loro quasi urti attraverso il moto sulla superficie di Riemann.
b) Il reticolo di Toda [8],[11]

$$\ddot{q}_n = a e^{q_n - q_{n+1}} - a e^{q_{n-1} - q_n}, \quad n = 1, .., N, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Coppia di Lax e integrali primi. Involutività nel caso del problema periodico $q_{N+1} = q_1,\ p_{N+1} = p_1$. Singolarità mobili di tipo polare (proprietà di Painlevé forte).

c) Sistemi newtoniani nel piano, ottenuti complessificando il moto unidimensionale di una particella newtoniana in un potenziale monomiale (oscillatore anarmonico) [12, 13, 14], associati alla quadratura

$$\tau(t) = \int_0^w \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}, \quad n > 4. \tag{18}$$

Superficie di Riemann come unione di due poligoni regolari di lato n, i cui vertici sono punti di diramazione mobili ovunque densi nel piano complesso t; dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Due casi significativi: i) traiettorie temporali rettilinee: $\tau = \alpha t,\ t \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{C}$. Integrabilità alla Liouville, ma solo locale. Mappa di Poincaré come "mappa di scambio degli intervalli"; moti ergodici non integrabili e coefficiente di Lyapunov algebrico (cenni).

Esercizi
1. Per il modello di Calogero-Moser, i) mostrare che le costanti del moto

sono indipendenti (verificarlo per $a = 0$ ed estendere il risultato al caso generale) ed in involuzione. ii) Verificare che la superficie di Riemann (λ, t) tale che $\det(L(t) - \lambda I) = 0$ possiede N fogli, $N(N-1)$ punti di diramazione di tipo radice quadrata (mobili per il sistema) ed il suo genere è $g = (N-1)(N-2)/2$. iii) Nel caso di 5 particelle debolmente interagenti, ordinate in modo tale che, per $t \sim -\infty$: $p_n > p_{n+1}$, descrivere la successione di quasi urti di ciascuna particella utilizzando la corrispondente dinamica sulla superficie di Riemann.
2. Per il modello di Toda, i) mostrare che le costanti del moto sono indipendenti (verificarlo per $a = 0$ ed estendere il risultato al caso generale) ed in involuzione (farlo nel caso di reticolo periodico [11]).

Seconda parte: PDEs non lineari trattabili con tecniche esatte: varietà singolari e rottura di onde in Natura

1) PDEs quasi lineari vs ODEs [6, 15, 16, 17]
PDEs lineari e quasi lineari del 1^0 ordine in Fisica. Curve caratteristiche e risoluzione di alcuni esempi semplici col metodo delle caratteristiche; rottura di onde nel caso non lineare. Teoria generale: relazione tra le soluzioni di PDEs quasi lineari in un numero arbitrario di variabili indipendenti e le soluzioni del sistema di ODEs che descrive la dinamica sulle curve caratteristiche. Esempi. Equazioni lineari $\psi_t + \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{x}} \psi = 0$ per campi vettoriali N-dimensionali. Proprietà dello spazio delle soluzioni: spazio come anello; esistenza di N soluzioni indipendenti; spazio come algebra di Lie, se il campo vettoriale è Hamiltoniano.

Esercizi
1. Risolvere, col metodo delle caratteristiche, le seguenti PDEs lineari:

$$\begin{array}{l} \psi_t + t^2\psi_x + x\psi = 0; \qquad y\psi_x + x\psi_y = \psi - 1; \\ x\psi_x + y\psi_y = \psi; \quad x\psi_x + y\psi_y = 0; \quad x\psi_x + y\psi_y + z\psi_z = 0; \\ g_y\psi_x - g_x\psi_y = 0, \quad g(x,y) \text{ assegnata.} \end{array} \tag{19}$$

2. Risolvere, col metodo delle caratteristiche, le seguenti PDEs quasi-lineari:

$$\rho_t + u(\rho)\rho_x = 1, \quad u(\rho) = \rho,\ \rho^2. \tag{20}$$

3. Trovare la soluzione generale della seguente equazione in $n+1$ dimensioni

$$\rho_t + \vec{u}(\rho) \cdot \nabla_{\vec{x}} \rho = 0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

2) La dinamica secondo l'equazione $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$ [6, 17, 18]
L'equazione $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$. La sua soluzione implicita; la condizione

di intersezione delle caratteristiche e l'individuazione del punto di rottura (breaking); la catastrofe del gradiente. Esempi di evoluzione esplicita [17, 18]. L'equazione di Riemann-Hopf $\rho_t + \rho\rho_x = 0$: proprietà analitiche della soluzione nelle vicinanze del punto di rottura; studio della varietà singolare e rilevanza della cubica di Cardano [6].

Esercizi
1. Si consideri l'equazione di Riemann-Hopf con condizione iniziale $\rho(x,0) = e^{-x^2}$; determinare il parametro η_b della caratteristica che realizza la prima intersezione ed il corrispondente punto (t_b, x_b) di rottura.
2. Si consideri l'equazione di Riemann-Hopf con condizione iniziale

$$\rho(x,0) = H(-1-x)a_2 + H(1-x^2)\left(\frac{a_1+a_2}{2} - \frac{a_2-a_1}{2}x\right) + H(x-1)a_1, \quad (22)$$

nei due seguenti casi: $a)$ $a_2 < a_1$, $b)$ $a_2 > a_1$, dove a_1, a_2 sono costanti reali e $H(\cdot)$ è la funzione gradino di Heaviside. i) Disegnare il fascio di curve caratteristiche del piano (t,x) nei due casi. ii) Indicare in quale dei due casi si verifica la rottura del profilo iniziale e, in quest'ultimo caso, determinare il punto di prima rottura (t_b, x_b). iii) Trovare la soluzione esplicita nei due casi.
3. Scrivere l'equazione della varietà singolare dell'equazione di Riemann-Hopf nell'intorno del punto di rottura e mostrare come tale varietà dipenda dalla condizione iniziale.
4. Scrivere la forma analitica del profilo dell'onda nell'intorno del punto di rottura.

2) Il problema della regolarizzazione [6, 17, 18]
a) Regolarizzazione della soluzione: onde d'urto e loro costruzione geometrica attraverso il taglio di lobi di ugual area con rette verticali (nel caso dell'equazione di Riemann-Hopf, tale costruzione è effettuabile direttamente sulla condizione iniziale). Costruzione analitica dell'onda d'urto. Esempio di evoluzione esplicita.
b) Regolarizzazione dell'equazione: l'equazione di Burgers $\rho_t + \rho\rho_x = \nu\rho_{xx}$. Regolarizzazione dell'onda d'urto; spessore e forza d'urto. Risoluzione dell'equazione di Burgers attraverso la trasformazione di Hopf-Cole, che la trasforma nell'equazione del calore $\varphi_t = \nu\varphi_{xx}$. Se $0 < \nu << 1$, la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Burgers tende alla soluzione dello stesso problema di Cauchy per l'equazione di Riemann-Hopf che sviluppa onde d'urto dopo la rottura [17].

Esercizi

1. Nel problema descritto nell'esercizio 2, con $a_2 > a_1$, raccordare la soluzione analitica per $t < t_b$ con la soluzione di shock (da calcolarsi esplicitamente), valida per $t > t_b$.
2. Si consideri l'equazione di Riemann-Hopf con la condizione iniziale

$$\rho(x,0) = H(-x)a_2 + H(x)a_1, \quad a_2 > a_1. \tag{23}$$

Cercando la soluzione come onda d'urto, sostituire la formula

$$\rho(x,t) = H(s(t)-x)a_2 + H(x-s(t))a_1, \tag{24}$$

nell'equazione e trovare la legge oraria $s(t)$ del fronte d'onda.
3. Regolarizzazione dell'onda d'urto. Data l'equazione di Burgers, cercarne una soluzione nella forma di onda viaggiante con velocità costante v:

$$\rho(x,t) = F(X), \quad X \equiv x - vt \tag{25}$$

ottenendo la seguente soluzione:

$$\rho(x,t) = \frac{a_2 + a_1 e^{\frac{a_2-a_1}{2\nu}X}}{1 + e^{\frac{a_2-a_1}{2\nu}X}}, \quad v = \frac{a_2+a_1}{2}. \tag{26}$$

avente forza d'urto $(a_2 - a_1)/a_2$ e spessore d'urto $2\nu/(a_2 - a_1)$. A cosa tende tale soluzione nel limite $\nu \to 0$?
4. Determinare la soluzione dell'equazione del calore $\varphi_t = \nu\varphi_{xx}$ tale che $\varphi \to a_2$ per $x \to -\infty$ e $\varphi \to a_1$ per $x \to \infty$. Sugg: cercare la soluzione nella forma $\varphi(x,t) = f(xt^\beta)$ di soluzione di similarità. Ha senso parlare di onda d'urto per questa soluzione?

4) Commutazione di campi vettoriali e PDEs non lineari integrabili
La commutazione $[\hat{u}_1(\lambda), \hat{u}_2(\lambda)] = 0$ di campi vettoriali (hamiltoniani e non) dipendenti da un parametro spettrale λ, la corrispondente coppia di Lax per tali campi vettoriali: $\hat{u}_1(\lambda)\psi(\lambda) = 0$, $\hat{u}_2(\lambda)\psi(\lambda) = 0$, ed equazioni alle derivate parziali non lineari integrabili in un numero arbitrario di dimensioni. Esempi significativi corrispondenti a campi vettoriali Hamiltoniani:
a) l'equazione di Kadomtsev - Petviashvili senza dispersione (dKP)

$$\begin{array}{l} [\hat{u}_1, \hat{u}_2] = (u_t + uu_x)_x + u_{yy} = 0, \\ \hat{u}_1 = \partial_y + \{H_1, \cdot\}_{p,x}, \quad \hat{u}_2 = \partial_t + \{H_2, \cdot\}_{p,x}, \\ H_1 = \frac{\lambda^2}{2} + u, \quad H_2 = \frac{\lambda^3}{3} + \lambda u - \partial_x^{-1} u_y, \end{array} \tag{27}$$

che descrive l'evoluzione di onde lunghe, quasi unidimensionali, vicino alla riva [21], e b) l'equazione "heavenly" di Plebanski [20]

$$\begin{array}{l} [\hat{u}_1, \hat{u}_2] = \theta_{tx} - \theta_{zy} + \theta_{xx}\theta_{yy} - \theta_{xy}^2 = 0, \\ \hat{u}_1 = \partial_z + \{H_1, \cdot\}_{y,x}, \quad \hat{u}_2 = \partial_t + \{H_2, \cdot\}_{y,x}, \\ H_1 = \lambda y + \theta_x, \quad H_2 = -\lambda x + \theta_y, \end{array} \tag{28}$$

riduzione auto-duale esatta delle equazioni di Einstein.
Problema spettrale diretto ed inverso per la coppia di Lax

$$\begin{aligned} &\hat{u}_1\psi = 0, \quad \hat{u}_2\psi = 0, \\ &\hat{u}_1 = \partial_y + \{H_1, \cdot\}_{p,x}, \quad \hat{u}_2 = \partial_t + \{H_2, \cdot\}_{p,x}, \end{aligned} \tag{29}$$

come generalizzazione non lineare della trasformata diretta ed inversa di Radon, e la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione dKP [22]. Descrizione analitica della rottura di onde d'acqua bidimensionali vicino alla riva (cenni) [23].

Modalità d'esame. Lo studente può portare all'esame uno degli argomenti trattati nel corso, concordato con il docente. L'esame consisterà nella stesura di una tesina e nella sua esposizione.

References

[1] A. I. Markusevich, *Elementi di Teoria delle Funzioni Analitiche*, Editori Riuniti, 1988

[2] C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, *Metodi Matematici della Fisica*, Carocci Editore, Roma, 2002.

[3] B. Dubrovin, note del corso: *Topics in analytic theory of differential equations. http : //people.sissa.it/ ∼ dubrovin/fismat_web.pdf*

[4] E. Hille, *Ordinary differential equations in the Complex Domain*, Dover Publications, N. Y. (1997).

[5] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, J. Wiley and sons.

[6] P.M.Santini: "appunti 1" (alcuni appunti di lezioni del corso).

[7] V.I.Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, 1979.

[8] B. Dubrovin, note del corso: *Appunti sulla Meccanica Analitica*, *http : //people.sissa.it/ ∼ dubrovin/meccanica.pdf*

[9] M. V. Berry “Regular and irregular motion” AIP Conference Proceedings **46**, 16-120 (1978). Pubblicato anche in *Hamiltonian dynamical systems*, a reprint selection compiled and introduced by R.S.MacKey and J.D.Maiss.

[10] F. Calogero, *Classical many-body problems amenable to exact treatments*, Springer - verlag, Berlin Heidelberg, 2001.

[11] S. V. Manakov, Sov. Phys. JETP, **40**, 269 (1975).

[12] P. G. Grinevich and P. M. Santini: “Newtonian dynamics in the plane corresponding to straight and cyclic motions on the hyperelliptic curve $\mu^2 = \nu^n - 1,\ n \in \mathbb{Z}$: ergodicity, isochrony, periodicity and fractals”; Physica D **232** (2007) 22-32. http://arXiv:nlin.CD/0607031.

[13] P. M. Santini: “appunti 2” (alcuni appunti di lezioni del corso) http://www.roma1.infn.it/people/santini/Didattica2/appunti.pdf

[14] P. M. Santini: “The transition from regular to irregular motion as travel on Riemann surfaces”, NEEDS 07 - School, L’Ametlla de Mar, Barcelona, 16-17 Giugno 2007. Parte seconda del corso. http://www.needs-conferences.net/2007/school.php (Username: needs Passwd: soliton2007).

[15] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*; Prentice-Hall, NJ, 1976.

[16] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*; Vol. II: *Partial Differential equations*, by R. Courant, Interscience Publishers, J. Wiley and sons, New York, 1962.

[17] J. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, NY, 1974.

[18] Appunti, a cura di G. Angilella, del corso di Dottorato: “Onde non lineari; metodi perturbativi ed esatti”, tenuto da P.M.Santini a Catania, nell’AA 95-96 (pagine 1-9) http://www.ct.infn.it/ angilell/corsidott.pdf

[19] P.M.Santini: “The anharmonic oscillator”; Terza parte del corso: “The transition from regular to irregular motion as travel on Riemann surfaces”, NEEDS 2007-School, L’Ametlla de Mar, June 16-17, 2007. http://www.roma1.infn.it/people/santini/Didattica2/break.pdf (Username: needs Passwd: soliton2007)

[20] J. F. Plebanski, “Some solutions of complex Einstein equations”, J. Math. Phys. **16**, 2395-2402 (1975).

[21] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and Inverse Scattering*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[22] S. V. Manakov and P. M. Santini: “The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation”; JETP Letters, **83**, No 10, 462-466 (2006). http://arXiv:nlin.SI/0604016.

[23] S. V. Manakov and P. M. Santini: “On the solutions of the dKP equation: nonlinear Riemann Hilbert problem, longtime behaviour, implicit solutions and wave breaking”, J.Phys.A: Math.Theor. **41** (2008) 055204. (arXiv:0707.1802 (2007))