1 ONDE NON LINEARI E SOLITONI

Prof. Paolo Maria Santini

Corso da 6 CFU della Laurea Magistrale; II Semestre, AA 2011-12

Prerequisiti. Sono sufficienti i contenuti dei corsi fondamentali della laurea triennale

Obiettivi formativi. Lo scopo del corso è quello di introdurre gli studenti alla fisica della propagazione ondosa non lineare, principalmente in fluidodinamica e ottica, alla costruzione di modelli matematici con tecniche perturbative e all'analisi spettrale dei modelli integrabili, di tipo solitonico e di tipo non dispersivo (la cui dinamica porta spesso al frangersi delle onde). Si intende arrivare ad introdurre temi di ricerca attuale nella teoria dei solitoni ed in quella della rottura di onde non lineari in più di 1+1 dimensioni (spazio + tempo).

Programma di massima. Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali di propagazione di onde lineari, iperboliche e dispersive, e alla rappresentazione di Fourier delle soluzioni. Equazioni di propagazione non lineari, con esempi in fluidodinamica e ottica. Effetti non lineari e dispersivi. Rottura di onde non lineari e regolarizzazione, onde d'urto ed il modello di Burgers. Trattamento perturbativo degli effetti non lineari. Le equazioni modello della propagazione nel caso i) di onde quasi unidimensionali debolmente dispersive, ii) di modulazione d'ampiezza di onde quasi monocromatiche. Equazioni non lineari integrabili; i) il metodo della trasformata spettrale e la teoria dei solitoni. Leggi di conservazione e collisione di solitoni. ii) La trasformata spettrale per campi vettoriali e la teoria delle equazioni non dispersive di tipo idrodinamico. La rottura di onde multidimensionali in Natura.

2 PROGRAMMA PRELIMINARE DEL CORSO

2.1 Propagazione ondosa lineare e non lineare (~ 16 ore)

2.1.1 Onde dispersive lineari

Equazioni alle derivate parziali dispersive e lineari; definizione ed esempi: le equazioni di Schrödinger per una particella libera $iu_t + u_{xx} = 0$, di Klein - Gordon $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \nu^2 u = 0$, e di Korteweg - de Vries (KdV) linearizzata $u_t + u_{xxx} = 0$. Uso della Trasformata di Fourier per risolverne il problema di Cauchy [3, 1, 7]. Panoramica sui metodi della fase stazionaria, di Laplace, del punto di sella, e comportamento delle soluzioni a tempi lunghi. Treni d'onda lentamente variabili, onda portante e onda d'inviluppo. Numero d'onda, frequenza, velocità di fase e di gruppo come funzioni lentamente variabili. Esempi: il comportamento a tempi lunghi delle soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger di una particella libera e per l'equazione di KdV linearizzata. Rilevanza asintotica delle soluzioni di similarità [4], [1].

Esercizi

1) Given the Fourier integral representation

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk, \tag{1}$$

show that, if $u \in \mathbb{R}$ and $\omega(k)$ is an odd function: $\omega(-k) = -\omega(k)$, then:

$$\begin{aligned} &\overline{\hat{u}_0(k)} = \hat{u}_0(-k), \quad k \in \mathbb{R} \\ &u(x,t) = \tfrac{1}{\pi} Re \int\limits_0^\infty \hat{u}_0(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk \end{aligned} \tag{2}$$

2) Given the folowing linear PDEs:

$$\begin{aligned} &iu_t + u_{xx} = 0, \quad \text{free particle Schrödinger equation,} \\ &u_t + u_{xxx} = 0, \quad \text{linearized KdV equation,} \\ &u_{tt} - c^2 u_{xx} + \nu^2 u = 0, \quad \text{Klein - Gordon equation,} \end{aligned} \tag{3}$$

i) study the longtime behavior, for $t >> 1$, $x/t = O(1)$, of the solutions of their Cauchy problem using the stationary phase, Laplace, or saddle point methods, depending on the situation, and estimate the error.

ii) Study of the relevance of exact similarity solutions of the form

$$u_{sim}(x,t) = \frac{1}{t^p} f\left(\frac{x}{t^q}\right) \tag{4}$$

in such a longtime analysis.

Solution:

i) Free particle Schrödinger equation:

$$\begin{array}{l}
u_{sim}(x,t) = \frac{c}{\sqrt{4\pi t}} e^{i(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4})}, \quad c = \text{constant}, \\
u(x,t) = u_{sim}(x,t)\left(A(\xi) + \frac{1}{t}B(\xi) + O(t^{-2})C(\xi)\right), \quad \xi = \frac{x}{2t} = O(1), \quad t >> 1 \\
A(\xi) = \hat{u}_0(\xi), \quad B(\xi) = -\frac{i}{4}A_{\xi\xi}
\end{array} \tag{5}$$

i) Linear KdV. For $x/t > 0$, the lines of constant $v(k)$ are the imaginary axis and the hyperbola ${k_R}^2 - 3{k_I}^2 + x/t = 0$. The steepest descent contour passing through the critical point $i\sqrt{\frac{x}{3t}}$ is the upper branch of the hyperbola, while the steepest descent contour passing through the critical point $-i\sqrt{\frac{x}{3t}}$ is the imaginary axis.

$$\begin{array}{l}
u(x,t) \sim \frac{\hat{u}_0(|x/3t|^{1/2})}{\sqrt{4\pi|3x/t|^{1/2}t}} e^{-i2|x/3t|^{3/2}t + i\pi/4} + \text{c.c.}, \quad \frac{x}{3t} = O(1) < 0, \quad t >> 1, \\
u(x,t) \sim \frac{\hat{u}_0(i|x/3t|^{1/2})}{\sqrt{12\pi|3x/t|^{1/2}t}} e^{-2|x/3t|^{3/2}t}, \quad \frac{x}{3t} = O(1) > 0, \quad t >> 1, \\
u(x,t) \sim \frac{\hat{u}_0(0)}{2\pi(3t)^{1/3}} Ai\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right) - \frac{i\hat{u}_0'(0)}{2\pi(3t)^{1/3}} Ai'\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right), \quad \frac{x}{(3t)^{1/3}} = O(1), \quad t >> 1, \\
u_{sim}(x,t) = \frac{1}{(3t)^{1/3}} Ai\left(\frac{x}{(3t)^{1/3}}\right), \\
u(x,t) \sim \frac{\hat{u}_0(0)}{2\pi} u_{sim}(x,t), \quad \frac{x}{(3t)^{1/3}} = O(1), \quad t >> 1.
\end{array} \tag{6}$$

3) Study the longtime behavior, for $t >> 1$, $x/t = O(1)$, of the Fourier integral

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \tag{7}$$

under the hypothesis that there exists a unique stationary phase point $k_0(x/t) \in \mathbb{R}$, and that $\omega''(k_0) = 0$, $\omega'''(k_0) \neq 0$.

4) Given the linear PDE $\mathcal{P}(\partial_t, \nabla_{\vec{x}})u(\vec{x},t) = 0$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ in $(n+1)$ dimensions, with $u \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$,

i) show that the solution of its Cauchy problem:

$$\mathcal{P}(\partial_t, \nabla_{\vec{x}})u(\vec{x},t) = 0, \quad u(\vec{x},0) = u_0(\vec{x}) \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n) \tag{8}$$

is given by the Fourier integral:

$$
\begin{aligned}
u(\vec{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^n} \\
\hat{u}_0(\vec{k}) &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ii) Show that, under the hypothesis that the vector equation for $\vec{k}$

$$
\frac{\vec{x}}{t} = \nabla_{\vec{k}} \omega(\vec{k}) \tag{10}
$$

admits a unique real solution $\vec{k}_0 = \vec{k}_0(\vec{x}/t) \in \mathbb{R}^n$, the extension of the stationary phase method for multiple integrals gives the following longtime behavior:

$$
\begin{aligned}
& u \sim \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{n/2} \left(det \left(\frac{\partial^2 \omega(\vec{k}_0)}{\partial k_i \partial k_j}\right)\right)^{-1/2} \hat{u}_0(\vec{k}_0) e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t + m\frac{\pi}{4})}, \\
& m \equiv -\sum_{j=1}^{n} sgn(\lambda_j)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

where $\lambda_j, \ j = 1, .., n$ are the (real) eigenvalues of matrix $\left(\frac{\partial^2 \omega(\vec{k}_0)}{\partial k_i \partial k_j}\right)$.

5) Let $\Gamma(z)$ be the Euler Γ function:

$$
\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Re\ z > 0. \tag{12}
$$

i) Show that it is the generalization of the factorial: $\Gamma(n) = n!, \ n \in \mathbb{N}$. ii) Use the Laplace method to construct the Stirling formula:

$$
n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O(n^{-1})\right), \quad n >> 1. \tag{13}
$$

2.1.2 Onde iperboliche e la catastrofe del gradiente[14, 8, 6, 16, 7]

Equazione di continuità ed equazioni iperboliche lineari e quasi lineari. Curve caratteristiche e relazione tra le soluzioni di tali equazioni iperboliche e le soluzioni del sistema di ODEs che descrive la dinamica sulle curve caratteristiche. Invarianti di Riemann. Equazioni lineari $\rho_t + \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla_{\vec{x}} \rho = 0$ per campi vettoriali N-dimensionali e proprietà dello spazio delle soluzioni: spazio come anello N-dimensionale, e come algebra di Lie, se il campo vettoriale è Hamiltoniano. Il metodo delle caratteristiche e l'equazione di Riemann $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$. Individuazione del punto di rottura (breaking) e la catastrofe del gradiente (wave breaking). Sistemi di equazioni iperboliche con esempi; invarianti di Riemann. L'equazione di Hopf $\rho_t + \rho\rho_x = 0$: proprietà analitiche della soluzione nelle vicinanze del punto di rottura; studio della varietà singolare e rilevanza della cubica di Cardano [14].

Esercizi

1) Show that the following linear PDE:

$$\rho_t + c(x,t)\rho_x + a(x,t)\rho = b(x,t) \tag{14}$$

is equivalent to the system of two ODEs

$$\begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + a(x,t)\rho = b(x,t), \\ \frac{dx}{dt} = c(x,t) \end{array} \tag{15}$$

on the characteristic curve $dx/dt = c(x,t)$.

2) Find the general solution of the following linear PDEs:

$$\begin{array}{l} u_t + t^2 u_x + xu = 0, \quad \left(u = F(x - t^3/3)e^{-(t^4/12 + t(x - t^3/3))}\right), \\ xu_x + yu_y = 0, \quad (u = F(y/x)), \\ xu_x + yu_y = x^2, \quad \left(u = x^2/2 + F(y/x)\right), \\ xu_x + yu_y = u, \quad (u = xF(y/x)), \\ xu_x + yu_y + zu_z = 0, \quad (u = F(y/x, z/x)), \\ g_y u_x - g_x u_y = 0, \quad g(x,y) \text{ given}, \quad (u = F(g(x,y))) \end{array} \tag{16}$$

3) Find the general solution of the following quasi-linear PDEs:

$$\begin{array}{l} i) \;\; u_t + c(u)u_x = 0, \quad u = F(x - c(u)t), \\ ii) \;\; u_t + c(u)u_x = 1, \\ c(u) = u \quad \Rightarrow \quad u = t + F(x - ut + t^2/2), \\ c(u) = u^2 \quad \Rightarrow \quad u = t + F(x - u^2 t + ut^2 - t^3/3) \end{array} \tag{17}$$

4) Given the two Cauchy problems for the Hopf equation:

$$\begin{array}{l} u_t + uu_x = 0, \quad u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \; t \geq 0, \\ i) \;\; u(x,0) = e^{-x^2}, \\ ii) \;\; u(x,0) = (x^2+1)^{-1}, \end{array} \tag{18}$$

i) draw the 1-parameter family of characteristic curves; ii) find the first characteristic parameter ζ_b and the first breaking point (x_b, t_b).

5) Compression and rarefaction waves Consider the Cauchy problem:

$$\begin{array}{l} u_t + uu_x = 0, \quad u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0, \\ u(x,0) = a_2 H(-1-x) + a_1 H(x-1) + H(1-x^2)\left(\frac{a_1+a_2}{2} - \frac{a_2-a_1}{2}x\right), \end{array} \tag{19}$$

in the two cases

$$\begin{array}{l} i) \ \ a_2 > a_1 > 0, \\ ii) \ \ a_1 > a_2 > 0. \end{array} \tag{20}$$

Solve it explicitely, draw the characteristic curves and show that they describe respectively a compression and a rarefaction wave. Indicate if there is wave breaking and, if so, find ζ_b and (x_b, t_b).

6) Consider the Cauchy problem

$$\begin{array}{l} u_t + uu_x = 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{array} \tag{21}$$

where f describes a single bump, and study the behavior of the solution near breaking.

7) Given the following system of PDEs, establish if they are hyperbolic and, if so, write them in characteristic form.

i) The wave equation $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.
ii) The Klein - Gordon equation $u_{tt} - c^2 u_{xx} + u = 0$.
iii) The system

$$\begin{array}{l} u_t + c(u,v)u_x = 0, \\ v_t + c(u,v)v_x = u \end{array} \tag{22}$$

iv) The system

$$\begin{array}{l} u_t + c(u)u_x = 0, \\ v_t + c(u)v_x + c'(u)vu_x = 0 \end{array} \tag{23}$$

v) The gas dynamics equations

$$\begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} = 0, \\ S_t + uS_x = 0, \end{array} \tag{24}$$

where $p = p(\rho, S)$.

8) Find the Riemann invariants of the wave equation $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ and of the gas dynamics equations (24) (under the constant entropy S hypothesis).

2.1.3 Il problema della regolarizzazione

a) Regolarizzazione della soluzione: onde d'urto e loro costruzione geometrica. b) Regolarizzazione dissipativa dell'equazione: l'equazione di Burgers $\rho_t + \rho\rho_x = \nu\rho_{xx}$. Regolarizzazione dell'onda d'urto; spessore e forza d'urto. Risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Burgers attraverso la trasformazione di Hopf-Cole e studio del regime di dissipazione debole. [16]. c) Regolarizzazione dispersiva dell'equazione: onde d'urto dispersive e l'equazione di KdV $\rho_t + \rho\rho_x + \mu\rho_{xxx} = 0,\ |\mu| << 1$ (cenni).

Esercizi

1) Regularize the compression wave of problem 5) of section 2.1.2

2) What happens if we look for discontinuous solutions of $u_t + uu_x = 0$ in the form $u = H(s(t) - x)u^-(x,t) + H(x - s(t))u^+(x,t)$, where $H(x)$ is the Heaviside step function and $u^\pm(x,t)$ are smooth functions?

3) Consider the Cauchy problem

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0, \\ &u(x,0) = f(x), \end{aligned} \tag{25}$$

where $f(x)$ describes a single bump, and study the behavior of the regularized (shock) solution near breaking.

4) Given the Cauchy problem

$$\begin{aligned} &u_t + c(u)u_x = 0, \quad c(u) = Q'(u), \\ &u(x,0) = f(x), \end{aligned} \tag{26}$$

where $f(x)$ describes a single bump,
i) show that the shock condition

$$\dot{s} = \frac{Q(u_2) - Q(u_1)}{u_2 - u_1} \tag{27}$$

is equivalent of placing the shock in order to cut equal area lobi of the three valued solution.
ii) Show that, if $c(u) = u,\ Q(u) = u^2/2$, the shock equations involving

$s(t), \eta_1(t), \eta_2(t)$ can be reformulated as cutting equal area lobi on the initial profile:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(\eta)d\eta = \frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2)(f(\eta_1) + f(\eta_2)) \tag{28}$$

5) Given the Burgers equation $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$, i) find its traveling wave solution satisfying the boundary conditions $u(x,t) \to u_\pm,\ x \to \pm\infty$, where $u_\pm$ are constants, and discuss the shock structure. ii) Find its similarity solutions.

2.2 La propagazione ondosa in Natura, il metodo multiscala e le equazioni modello [3, 7, 1, 13] ($\sim$ 9 ore)

Onde non lineari in Natura: equazioni di Navier - Stokes; onde sonore in un gas, onde d'acqua di superficie. Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche in mezzi non lineari. Teoria delle perturbazioni; risonanze e sviluppi multiscala. Derivazione di equazioni modello della Fisica - Matematica non lineare come condizione di cancellazione di forzanti risonanti: i) non linearità debole in modelli iperbolici e l'equazione di Hopf. ii) Non linearità debole + dissipazione debole e l'equazione di Burgers. iii) Non linearità debole + dispersione debole e l'equazione di Korteweg - de Vries (KdV). iv) Non linearità debole + dispersione forte + modulazione d'ampiezza di onde monocromatiche e l'equazione di Schrödinger non lineare (NLS). v) Generalizzazioni a più di $(1+1)$ dimensioni nell'ipotesi di quasi - unidimensionalità: l'equazione di Kadomtsev - Petviashvili con o senza dispersione (cenni). Onde debolmente non lineari e quasi unidimensionali in Natura e l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione (dKP) in un numero arbitrario di dimensioni e con non linearità polinomiale arbitraria [12]: dKP(n,m) $(u_t + u^m u_x)_x + \sum_{j=1}^{n-1} u_{y_j y_j} = 0$. Perchè le equazioni modello sono speciali anche dal punto di vista matematico? Universalità, applicabilità e integrabilità.

Esercizi

1) Derive the dKP equation from the equations of Acoustics, under the hypothesis of i) weak nonlinearity and ii) quasi one-dimensionality.

2) Derive the KdV equation in the context of surface water wave in $(1+1)$

dimensions, under the hypothesis of i) small amplitudes and ii) shallow water ($kh << 1$, where k is the wave number and h is the depth of the fluid). Derive the KP equation in the context of surface water waves in $(2+1)$ dimensions, under the hypothesis of i) small amplitudes, ii) shallow water, and iii) quasi one-dimensionality.

3) Derive the NLS equation in the context of surface water waves in $(1+1)$ dimensions, under the hypothesis of i) small amplitude ($a << \lambda$) and ii) quasi monocromatic waves in sufficiently deep water. Derive its multidimensional generalization in the context of surface water waves in $(2+1)$ dimensions, under the hypothesis of i) small amplitude ($a << \lambda$), ii) quasi monochromatic, and iii) quasi one-dimensional waves.

2.3 La teoria dei solitoni ($\sim$ 11 ore)

Premesse sul problema linearizzato: uso della coppia di Lax di equazioni alle derivate parziali lineari per risolverne il problema di Cauchy. Esempio: l'equazione di KdV linearizzata. Problema diretto come problema di scattering spaziale; problema inverso come problema di Riemann - Hilbert (RH) lineare. Il problema di RH con poli; proiettori di analiticità. Equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo solitonico e loro coppia di Lax; esempi: le equazioni di KdV, NLS e KP. Il metodo della Trasformata Spettrale (Inversa) (IST) per risolverne il problema di Cauchy. Esempio: l'equazione di KdV e l'operatore spettrale di Schrödinger stazionario. Problema spettrale diretto come problema di scattering spaziale; problema spettrale inverso come problema di Riemann - Hilbert lineare. Evoluzione dei dati spettrali. Potenziali piccoli e trasformata di Fourier. Potenziali senza riflessione e soluzioni solitoniche. Interazione tra solitoni e phase shift. Comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy (cenni). Gerarchia di equazioni integrabili associate all'operatore di Schrödinger. Infinite simmetrie e costanti del moto. Le equazioni NLS e KP, la loro coppia di Lax e le soluzioni solitoniche.

Esercizi

1) Analyticity projectors. Show that the operators

$$P^{\pm}f(\lambda) := \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\lambda')}{\lambda' - (\lambda \pm i\varepsilon)}d\lambda. \tag{29}$$

are analyticity projectors on the real line; i.e., they map a Holder function

$f(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$ decaying at ∞ sufficiently fast into functions analytic in the upper and lower halves of the complex λ plane respectively. ii) Show, in particular, that

$$(P^+)^2 = P^+,\ (P^-)^2 = P^-,\ P^+P^- = P^-P^+ = 0,\ P^+ + P^- = 1. \qquad (30)$$

2) Given an Holder function $f(\lambda)$ for $\lambda \in \mathbb{R}$ decaying at ∞ sufficiently fast, a polynomial $P(\lambda)$, a set of complex numbers $\{k_j^+,\ R_j^+,\ j = 1,\dots,N^+,$ $k_j^-,\ R_j^-,\ j = 1,\dots,N^-\}$, where Im $k_j^+ > 0$ and Im $k_j^- < 0$, show that the unique solution of the Riemann problem

$$\psi^+(\lambda) - \psi^-(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (31)$$

where $\psi^\pm(\lambda)$ are analytic in the upper and lower halves of the complex λ plane respectively, except for the simple poles $k_j^\pm$'s with residues $R_j^\pm$'s, and $\psi^\pm(\lambda) \to P(\lambda),\ |\lambda| >> 1$, is

$$\psi^\pm(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{j=1}^{N^+} \frac{R_j^+}{\lambda - k_j^+} + \sum_{j=1}^{N^-} \frac{R_j^-}{\lambda - k_j^-} \pm P^\pm f(\lambda). \qquad (32)$$

3) Let $u(x) = -A\delta(x - x_0),\ A \in \mathbb{R}$, be the potential of the Schrödinger equation $[-\partial_x^2 + u(x)]\psi = k^2\psi$. Evaluate explicitly: i) the eigenfunctions of the continuous spectrum and the coefficients $a(k), b(k), R(k), T(k)$; ii) the discrete spectrum p_j, the corresponding eigenfunctions and the norming constants b_j. Show that the existence of discrete spectrum depends on the sign of A.

4) Assume $u(x) = O(\varepsilon),\ \varepsilon << 1$, and construct the first two terms of the ε - expansion of the eigenfunctions and of the spectral data.

5) *Scattering problem.* Study the scattering problem described by the Schrödinger equation

$$-\psi''(x,k) + u(x)\psi(x,k) = k^2\psi(x,k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k > 0,$$

where $\psi(x,k)$, the eigenfunction of the continuous spectrum of the Schrödinger operator $-d^2/dx^2 + V(x)$, represents the wave function of a particle beam scattered by the localized potential $u(x)$ e $E = k^2 > 0$ is the energy of the beam (the continuous spectrum $\sigma_c = \{E > 0\}$), with the following boundary conditions:

$$\psi(x,k) \sim\ R(k)e^{-ikx} + e^{ikx},\ x \sim -\infty; \qquad \psi(x,k) \sim\ T(k)e^{ikx},\ x \sim \infty$$

describing an incoming beam of particles of wave number k and intensity 1, partially reflected and transmitted through the potential ($R(k)$ e $T(k)$ are respectively the reflection and transmission coefficients).
i) Observe that the function $\phi(x,k) = \psi(x,k)/T(k)$ satisfies a simpler scattering problem:

$$\phi''(x,k) + k^2\phi(x,k) = u(x)\phi(x,k), \quad x \in \mathbb{R},, \quad k > 0$$

$$\phi(x,k) \sim \frac{R(k)}{T(k)}e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{T(k)}, \ x \sim -\infty; \quad \phi(x,k) \sim \ e^{ikx}, \ x \sim \infty$$

and use the advanced Green function of the operator $d^2/dx^2 + k^2$ to rewrite such a problem as a Volterra integral equation [4], obtaining:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - \int_x^\infty dy \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\phi(y,k)$$

and the following integral representations for the reflection and trnsmission coefficients:

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{-iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k), \quad \frac{R(k)}{T(k)} = \int_{\mathbb{R}} dk \frac{e^{iky}}{2ik} u(y)\phi(y,k).$$

Such an integral equation, equivalent to the Schrödinger differential equation + boundary conditions, is the most convenient formulation of the problem to extract informations.
ii) Use the method of successive approximations to study the properties of ϕ in the following way.
a) Rerwrite the integral equation for the unknown $f(x,k) = \phi(x,k)e^{-ikx}$, such that $f \sim 1, \ x \to \infty$:

$$f(x,k) = 1 + \int_x^\infty \frac{e^{2ik(y-x)} - 1}{2ik} u(y) f(y,k) dy$$

and look for the solution as a Neumann series:

$$f(x,k) = \sum_{i=0}^\infty h_i(x,k), \quad h_0 = 1, \tag{33}$$

obtaining the recursion relation:

$$h_{j+1}(x,k) = \int_x^\infty \frac{e^{2ik(y-x)} - 1}{2ik} u(y) h_j(y,k) dy, \quad j \geq 0. \tag{34}$$

b) From the inequality: $|e^{2ik(y-x)} - 1|/|2ik| \leq 1$, valid for Im $k \geq 0$, $k \neq 0$, show that

$$|h_{j+1}(x,k)| \leq \tfrac{1}{|k|} \int\limits_x^\infty |u(y)||h_j(y,k)|dy, \tag{35}$$

and then that:

$$\begin{aligned} &|h_n(x,k)| \leq \tfrac{1}{n!}\left(\tfrac{A(x)}{|k|}\right)^n \leq \tfrac{1}{n!}\left(\tfrac{A(-\infty)}{|k|}\right)^n, \\ &A(x) := \int\limits_x^\infty |V(y)|dy. \end{aligned} \tag{36}$$

Therefore the Neumann series representing the solution is absolutely and uniformely convergent for Im $k \geq 0,\ k \neq 0$, if $u(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Under these conditions, the solution exists unique, and it is analytic in the upper half of the complex k plane. Analogously one can prove that $1/T(k)$ is analytic in the upper half of the complex k plane. Under more stringent conditions on u, one could show, in a similar manner, that the eigenfunction is also continuous on the real k axes, where the physics takes place.

c) Let $k_j,\ j = 1,..,N$ be the zeroes of the function $1/T(k)$ in the upper half of the complex k plane (the poles of the transmission coefficient). Then, since $\lambda_j = E_j = k_j^2 \in \mathbb{R}$, it follows that a) k_j is purely imaginary: $k_j = ip_j,\ p_j > 0,\ \ j = 1,..,N$, b) the functions $\phi(x,k_j),\ \ j = 1,..,N$ are exponentially localized:

$$\phi_j(x) := \phi(x,k_j) = O(e^{-p_j|x|}), \quad |x| \to \infty, \quad j = 1,..N$$

and then they are eigenfunctions of the Schrödinger operator in $L_2(\mathbb{R})$:

$$-\phi_j''(x) + u(x)\phi_j(x) = -p_j^2\phi_j(x), \quad x \in \mathcal{R}$$

corresponding to negative eigenvalues $\lambda_j = E_j = -p_j^2 < 0$ of the energy (the discrete spectrum: $\sigma_p = \{-p_j^2\}_1^N$). Summarizing: $\sigma = \sigma_p \cup \sigma_c = \{-p_j^2\}_1^N \cup \mathbb{R}^+$.

d) Show that the set of $\lambda_j = -p_j^2,\ j = 1,..,N$ bounded from below.

Hint. Take the scalar product of the eigenfunction ϕ_j, normalized to 1, with the Schrödinger equation, obtaining:

$$\lambda_j - (\phi_j, u\phi_j) = (\phi_j', \phi_j') \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |\lambda_j| \leq -(\phi_j, V\phi_j) \leq |(\phi_j, u\phi_j)| \leq ||u||_\infty.$$

e) Show that, if $u(x) = u_0\delta(x - x_0)$, the integral equation admits the solution

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - u_0 H(x_0 - x)\frac{\sin k(x - x_0)}{k}e^{ikx_0}.$$

Then:

$$\phi(x,k) = \frac{2ik-u_0}{2ik}e^{ikx} + \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik}e^{-ikx}, \quad x < x_0$$

$$T(k) = \frac{2ik}{2ik-u_0}, \qquad R(k) = \frac{u_0 e^{2ikx_0}}{2ik-u_0}.$$

Found $\phi(x,k)$, at last reconstruct $\psi(x,k) = \frac{2ik}{2ik-u_0}\phi(x,k)$.
f) Verify that the solution we found for $k \in \mathbb{R}$, if extended outside the real k axis, diverges always at + or - infinity, unless $k = -iu_0/2 \in i\mathbb{R}^+$. Therefore, if the potential is positive ($u_0 > 0$), no eigenfunctions exist in $L_2(\mathbb{R})$; if, instead, the potential is negative, then there exists one and only one $L_2(\mathbb{R})$ eigenfunction $\psi_1(x) := \phi(x, i|u_0|/2) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\psi_1(x) = H(x-x_0)e^{-\frac{|u_0|}{2}x} + H(x_0-x)e^{\frac{|u_0|}{2}x}$$

corresponding to the negative energy $E_1 = k_1^2 = -u_0^2/4$, and describing a bound state (a localized quantum particle): $\sigma_p = \{E_1\}$.
g) If $u(x) = \epsilon v(x), \ \epsilon << 1$, show that:

$$\phi(x,k) = e^{ikx} - \epsilon \int_x^\infty dy \frac{\sin k(x-y)}{k} v(y) e^{iky} + O(\epsilon^2),$$

$$T(k) = 1 + \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x) + O(\epsilon^2), \quad R(k) = \frac{\epsilon}{2ik}\int_{\mathcal{R}} dx v(x) e^{-2ikx} + O(\epsilon^2)$$

6) Using the above strategy, study the scattering problem

$$\phi''(x,k) + k^2\phi(x,k) = u(x)\phi(x,k), \quad x \in \mathcal{R}, \qquad \phi(x,k) \sim \ e^{-ikx}, \ x \sim -\infty$$

showing that, in this case, it is convenient to use the retarded Green function of the operator $d^2/dx^2 + k^2$.

2.4 Equazioni non lineari integrabili di tipo idrodinamico e la rottura di onde multidimensionali ($\sim$ 12 ore)

2.4.1 Campi vettoriali commutanti ed equazioni integrabili di tipo idrodinamico

Limite semiclassico della coppia di Lax per l'equazione di KP in $(2+1)$ dimensioni e la coppia di Lax di dKP(2,1) del tipo "Hamilton - Jacobi". Equivalenza con il sistema dinamico corrispondente e con la formulazione in termini di equazioni di tipo "Liouville". Gli operatori della coppia di Lax come campi vettoriali dipendenti da un parametro spettrale. Rilevanza dei campi vettoriali in Fisica - Matematica. Campi vettoriali hamiltoniani e non. La commutazione di campi vettoriali (hamiltoniani e non) dipendenti da un parametro spettrale ed equazioni alle derivate parziali non lineari integrabili in un numero arbitrario di dimensioni [14].

2.4.2 Trasformata spettrale per campi vettoriali

Trasformata Spettrale per i campi vettoriali dell'equazione dKP in $2+1$ dimensioni e soluzione del problema di Cauchy. Cenni sul problema diretto; problema inverso come problema di Riemann - Hilbert non lineare; vincolo simplettico sui dati spettrali e comportamento a grandi tempi delle soluzioni [10]. Costruzione di soluzioni esatte ma implicite [11]: i) la soluzione, costante sulla parabola $x + y^2/(4t) = \xi$, che si rompe in tutti i punti, simultaneamente; ii) la soluzione generale dell'equazione di similarità della dKP.

2.4.3 Come si rompono onde quasi - unidimensionali in Natura

La soluzione costante sul paraboloide dell'equazione dKP(n, m), che si rompe in tutti i punti del paraboloide, simultaneamente, e la descrizione analitica della rottura di onde localizzate di piccola ampiezza in $(2+1)$ e $(3+1)$ dimensioni (cenni) [12].

References

[1] M. J. Ablowitz, Nonlinear Dispersive Waves, Asymptotic Analysis and Solitons, Cambridge Texts in Applied Mathematics (No. 47), 2011.

[2] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and Inverse Scattering*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[3] Appunti del Corso di Dottorato "Onde non lineari. Metodi perturbativi ed esatti" tenuto da P. M. Santini, a cura di G. Angilella. Università di Catania, AA 1995-96. http://www.angilella.it/teaching/nlw/corsidott.pdf

[4] C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, *Metodi Matematici della Fisica*, Carocci Editore, Roma, 2002.

[5] F. Calogero and A. Degasperis, Spectral Transform and Solitons I, North-Holland Publishing Company, 1982.

[6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*; Vol. II: *Partial Differential equations*, by R. Courant, Interscience Publishers, J. Wiley and sons, New York, 1962.

[7] Dispense del Corso di “Onde non lineari e Solitoni” tenuto da A. Degasperis, a cura di G. Ferrari e D. Dell’Arciprete. Università di Roma “La Sapienza”, AA 2006-07.

[8] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*; Prentice-Hall, NJ, 1976.

[9] S. V. Manakov and P. M. Santini: “The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation”; JETP Letters, **83**, No 10, 462-466 (2006). http://arXiv:nlin.SI/0604016.

[10] S. V. Manakov and P. M. Santini: “On the solutions of the dKP equation: nonlinear Riemann Hilbert problem, longtime behaviour, implicit solutions and wave breaking”, J.Phys.A: Math.Theor. **41** (2008) 055204. (arXiv:0707.1802 (2007))

[11] S. V. Manakov and P. M. Santini: “Solvable vector nonlinear Riemann problems, exact implicit solutions of dispersionless PDEs and wave breaking”, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 345203 (19pp), doi:10.1088/1751-8113/44/34/345203. arXiv:1011.2619.

[12] S. V. Manakov and P. M. Santini: “On the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation in n+1 dimensions: exact solutions, the Cauchy problem for small initial data and wave breaking”, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 405203 (15pp). (arXiv:1001.2134).

[13] L. Pensato: “Equazioni modello della fisica non lineare: metodi perturbativi e tecniche multiscala”, dissertazione dela Laurea Triennale in Fisica, AA 2008-09.

[14] P.M.Santini: “appunti 1” (alcuni appunti di lezioni del corso).

[15] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, J. Wiley and sons.

[16] J. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, NY, 1974.