1 ONDE NON LINEARI E SOLITONI

Prof. Paolo Maria Santini

Corso da 6 CFU della Laurea Magistrale; II Semestre, AA 2012-13

Prerequisiti. Sono sufficienti i contenuti dei corsi fondamentali della laurea triennale

Obiettivi formativi. Lo scopo del corso è quello di introdurre gli studenti alla fisica della propagazione ondosa non lineare, principalmente in fluidodinamica e ottica, alla costruzione di modelli matematici con tecniche perturbative e all'analisi spettrale dei modelli integrabili, di tipo solitonico e di tipo non dispersivo (la cui dinamica porta spesso al frangersi delle onde). Si intende arrivare ad introdurre temi di ricerca attuale nella teoria dei solitoni ed in quella della rottura di onde non lineari in più di 1+1 dimensioni (spazio + tempo).

Programma di massima. Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali di propagazione di onde lineari, iperboliche e dispersive, e alla rappresentazione di Fourier delle soluzioni. Equazioni di propagazione non lineari, con esempi in fluidodinamica e ottica. Effetti non lineari e dispersivi. Rottura di onde non lineari e regolarizzazione, onde d'urto ed il modello di Burgers. Trattamento perturbativo degli effetti non lineari. Le equazioni modello della propagazione nel caso i) di onde quasi unidimensionali debolmente dispersive, ii) di modulazione d'ampiezza di onde quasi monocromatiche. Equazioni non lineari integrabili; i) il metodo della trasformata spettrale e la teoria dei solitoni. Leggi di conservazione e collisione di solitoni. ii) La trasformata spettrale per campi vettoriali e la teoria delle equazioni non dispersive di tipo idrodinamico. La rottura di onde multidimensionali in Natura.

2 PROGRAMMA DEL CORSO. AA 2012-13

2.1 Propagazione ondosa lineare e non lineare (~ 20 ore)

2.1.1 Onde dispersive lineari

Equazioni alle derivate parziali dispersive e lineari; definizione ed esempi: le equazioni di Schrödinger per una particella libera $iu_t + u_{xx} = 0$, di Klein - Gordon $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \nu^2 u = 0$, e di Korteweg - de Vries (KdV) linearizzata

$u_t + u_{xxx} = 0$. Uso della Trasformata di Fourier per risolverne il problema di Cauchy [4, 1, 9]. Panoramica sui metodi della fase stazionaria, di Laplace, del punto di sella, e comportamento delle soluzioni a tempi lunghi [6]. Treni d'onda lentamente variabili, onda portante e onda d'inviluppo. Numero d'onda, frequenza, velocità di fase e di gruppo come funzioni lentamente variabili. Esempi: il comportamento a tempi lunghi delle soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger di una particella libera e per l'equazione di KdV linearizzata. Rilevanza asintotica delle soluzioni di similarità [1].

2.1.2 Onde iperboliche e la catastrofe del gradiente[16, 10, 8, 18, 9]

Equazione di continuità ed equazioni iperboliche lineari e quasi lineari.
L'equazione di Riemann $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$ ed il metodo delle caratteristiche Individuazione del punto di rottura (breaking) e la catastrofe del gradiente (wave breaking) [18, 16]. Curve caratteristiche e relazione tra le soluzioni delle equazioni iperboliche e le soluzioni del sistema di ODEs che descrive la dinamica sulle curve caratteristiche [16, 10]. Esempi.
L'equazione di Hopf $\rho_t + \rho\rho_x = 0$: proprietà analitiche della soluzione nelle vicinanze del punto di rottura; studio della varietà singolare e rilevanza della cubica di Cardano [16].
Sistemi di equazioni iperboliche e loro forma caratteristica; invarianti di Riemann ed esempi. "Simple waves" ed il problema del pistone [18].

2.1.3 Il problema della regolarizzazione

a) Regolarizzazione della soluzione: onde d'urto e loro costruzione geometrica. b) Regolarizzazione dissipativa dell'equazione: l'equazione di Burgers $\rho_t + \rho\rho_x = \nu\rho_{xx}$. Regolarizzazione dell'onda d'urto; spessore e forza d'urto. Risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Burgers attraverso la trasformazione di Hopf-Cole e studio del regime di dissipazione debole. [18].

2.2 La propagazione ondosa in Natura, il metodo multiscala e le equazioni modello [4, 9, 1, 3, 15] ($\sim$ 8 ore)

Onde non lineari in Natura: equazioni di Navier - Stokes; onde sonore in un gas, onde d'acqua di superficie. Teoria delle perturbazioni; risonanze e sviluppi multiscala; esempio di equazione differenziale ordinaria: il pendolo semplice in approssimazione cubica. Derivazione di equazioni modello della Fisica - Matematica non lineare come condizione di cancellazione di forzanti

risonanti: i) non linea-
rità debole in modelli iperbolici e l'equazione di Hopf. ii) Non linearità debole + dissipazione debole e l'equazione di Burgers. iii) Non linearità debole + dispersione debole e l'equazione di Korteweg - de Vries (KdV). iv) Non linearità debole + dispersione forte + modulazione d'ampiezza di onde monocromatiche e l'equazione di Schrödinger non lineare (NLS). v) Generalizzazioni a più di $(1+1)$ dimensioni nell'ipotesi di quasi - unidimensionalità: l'equazione di Kadomtsev - Petviashvili con o senza dispersione (cenni). Onde debolmente non lineari e quasi unidimensionali in Natura e l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili senza dispersione (dKP) in un numero arbitrario di dimensioni e con non linearità polinomiale arbitraria [14] dKP(n,m): $(u_t + u^m u_x)_x + \sum_{j=1}^{n-1} u_{y_j y_j} = 0$. Perchè le equazioni modello sono speciali anche dal punto di vista matematico? Universalità, applicabilità e integrabilità.

2.3 La teoria dei solitoni ($\sim$ 10 ore)[3, 4, 9, 5]

Premesse sul problema linearizzato: uso della coppia di Lax di equazioni alle derivate parziali lineari per risolverne il problema di Cauchy. Esempio: l'equazione di KdV linearizzata. Problema diretto come problema di scattering spaziale; problema inverso come problema di Riemann - Hilbert (RH) lineare. Il problema di RH con poli; proiettori di analiticità. Equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo solitonico e loro coppia di Lax; esempi: le equazioni di KdV, NLS e KP. Il metodo della Trasformata Spettrale (Inversa) (IST) per risolverne il problema di Cauchy. Esempio: l'equazione di KdV e l'operatore spettrale di Schrödinger stazionario. Problema spettrale diretto come problema di scattering spaziale; problema spettrale inverso come problema di Riemann - Hilbert lineare. Evoluzione dei dati spettrali. Potenziali piccoli e trasformata di Fourier. Potenziali senza riflessione e soluzioni solitoniche. Interazione tra solitoni e phase shift. Comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy (cenni). Gerarchia di equazioni integrabili associate all'operatore di Schrödinger. Infinite simmetrie e costanti del moto. Le equazioni NLS e KP, la loro coppia di Lax e le soluzioni solitoniche.

2.4 Equazioni non lineari integrabili di tipo idrodinamico e la rottura di onde multidimensionali ($\sim$ 10 ore)

2.4.1 Campi vettoriali commutanti ed equazioni integrabili di tipo idrodinamico

Limite semiclassico della coppia di Lax per l'equazione di KP in $(2 + 1)$ dimensioni e la coppia di Lax di dKP(2,1) del tipo "Hamilton - Jacobi". Equivalenza con il sistema dinamico corrispondente e con la formulazione in termini di equazioni di tipo "Liouville". Gli operatori della coppia di Lax come campi vettoriali dipendenti da un parametro spettrale. Rilevanza dei campi vettoriali in Fisica - Matematica. Campi vettoriali hamiltoniani e non. La commutazione di campi vettoriali (hamiltoniani e non) dipendenti da un parametro spettrale ed equazioni alle derivate parziali non lineari integrabili in un numero arbitrario di dimensioni [16].

2.4.2 Trasformata spettrale per campi vettoriali

Trasformata Spettrale per i campi vettoriali dell'equazione dKP in $2 + 1$ dimensioni e soluzione del problema di Cauchy. Cenni sul problema diretto; problema inverso come problema di Riemann - Hilbert non lineare; vincolo simplettico sui dati spettrali e comportamento a grandi tempi delle soluzioni [12]. Costruzione di soluzioni esatte ma implicite [13]: i) la soluzione, costante sulla parabola $x + y^2/(4t) = \xi$, che si rompe in tutti i punti, simultaneamente; ii) la soluzione generale dell'equazione di similarità della dKP.

2.4.3 Come si rompono onde quasi - unidimensionali in Natura

La soluzione costante sul paraboloide dell'equazione dKP(n, m), che si rompe in tutti i punti del paraboloide, simultaneamente, e la descrizione analitica della rottura di onde localizzate di piccola ampiezza in $(2 + 1)$ e $(3 + 1)$ dimensioni (cenni) [14].

References

[1] M. J. Ablowitz, Nonlinear Dispersive Waves, Asymptotic Analysis and Solitons, Cambridge Texts in Applied Mathematics (No. 47), 2011.

[2] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and Inverse Scattering*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[3] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Philadelphia, 1981.

[4] Appunti del Corso di Dottorato "Onde non lineari. Metodi perturbativi ed esatti" tenuto da P. M. Santini, a cura di G. Angilella. Università di Catania, AA 1995-96. http://www.angilella.it/teaching/nlw/corsidott.pdf

[5] F. Baccari: "L'equazione di Schrödinger non lineare e la sua rilevanza in Fisica e Matematica", dissertazione della Laurea Triennale in Fisica, AA 2011-12.

[6] C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, *Metodi Matematici della Fisica*, Carocci Editore, Roma, 2002.

[7] F. Calogero and A. Degasperis, Spectral Transform and Solitons I, North-Holland Publishing Company, 1982.

[8] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*; Vol. II: *Partial Differential equations*, by R. Courant, Interscience Publishers, J. Wiley and sons, New York, 1962.

[9] Dispense del Corso di "Onde non lineari e Solitoni" tenuto da A. Degasperis, a cura di G. Ferrari e D. Dell'Arciprete. Università di Roma "La Sapienza", AA 2006-07.

[10] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*; Prentice-Hall, NJ, 1976.

[11] S. V. Manakov and P. M. Santini: "The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation"; JETP Letters, **83**, No 10, 462-466 (2006). http://arXiv:nlin.SI/0604016.

[12] S. V. Manakov and P. M. Santini: "On the solutions of the dKP equation: nonlinear Riemann Hilbert problem, longtime behaviour, implicit solutions and wave breaking", J.Phys.A: Math.Theor. **41** (2008) 055204. (arXiv:0707.1802 (2007))

[13] S. V. Manakov and P. M. Santini: "Solvable vector nonlinear Riemann problems, exact implicit solutions of dispersionless PDEs and

wave breaking", J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 345203 (19pp), doi:10.1088/1751-8113/44/34/345203. arXiv:1011.2619.

[14] S. V. Manakov and P. M. Santini: "On the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation in n+1 dimensions: exact solutions, the Cauchy problem for small initial data and wave breaking", J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 405203 (15pp). (arXiv:1001.2134).

[15] F. Santucci: "Onde debolmente non lineari e quasi - unidimensionali in Natura; la rottura di tali onde ed il problema della loro regolarizzazione", Tesi della Laurea Specialistica, AA 2011-12.

[16] P.M.Santini: "appunti 1" (alcuni appunti di lezioni del corso).

[17] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, J. Wiley and sons.

[18] J. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, NY, 1974.