

# 1 ONDE NON LINEARI E SOLITONI

*Prof. Paolo Maria Santini*

Corso da 6 CFU della Laurea Magistrale; II Semestre, AA 2018-19

*Prerequisiti.* Sono sufficienti i contenuti dei corsi fondamentali della laurea triennale

*Obiettivi formativi.* Lo scopo del corso è quello di introdurre gli studenti alla fisica della propagazione ondosa non lineare, principalmente in fluidodinamica e ottica, alla costruzione di modelli matematici con tecniche perturbative e all'analisi spettrale dei modelli integrabili, di tipo solitonico e di tipo non dispersivo (la cui dinamica porta spesso al frangersi delle onde). Si intende arrivare ad introdurre temi di ricerca attuale i) nella teoria dei solitoni e ii) nella teoria delle onde anomale .

*Programma di massima.*

1. Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali che descrivono la propagazione di onde lineari, iperboliche e dispersive, alla rappresentazione di Fourier delle soluzioni, e allo studio del comportamento asintotico di tali onde.
2. Equazioni non lineari iperboliche. Rottura di onde e regolarizzazione; onde d'urto dissipative e dispersive, ed i modelli di Burgers e Korteweg - de Vries.
3. Trattamento perturbativo degli effetti debolmente non lineari e le equazioni modello integrabili della propagazione ondosa non lineare. i) Onde unidimensionali debolmente dissipative e l'equazione di Burgers; ii) onde unidimensionali e quasi unidimensionali debolmente dispersive e le equazioni di Korteweg - de Vries (KdV) e Kadomtsev - Petviashvili (KP); ii) la modulazione dell'ampiezza di onde quasi monocromatiche unidimensionali e l'equazione di Schrödinger non lineare (NLS).
4. Equazioni non lineari integrabili e la teoria dei solitoni e delle onde anomale. i) Il metodo della trasformata spettrale per l'equazione di KdV e la teoria dei solitoni. Leggi di conservazione e collisione di solitoni. ii) Le trasformazioni di Darboux - Bäcklund e la costruzione di soluzioni esatte di tipo solitoni e onde anomale. iii) L'equazione NLS e la teoria analitica delle onde anomale.

## 2 PROGRAMMA (PROVVISORIO) DEL CORSO. AA 2018-19

### 2.1 Propagazione ondosa lineare e non lineare (~ 20 ore)

#### 2.1.1 Onde dispersive lineari

Equazioni alle derivate parziali dispersive e lineari; definizione ed esempi: le equazioni di Schrödinger per una particella libera  $iu_t + u_{xx} = 0$ , di Klein - Gordon  $u_{tt} - c^2 u_{xx} + \nu^2 u = 0$ , e di Korteweg - de Vries (KdV) linearizzata  $u_t + u_{xxx} = 0$ . Uso della Trasformata di Fourier per risolverne il problema di Cauchy [4, 1, 9]. Panoramica sui metodi dell'integrazione per parti, della fase stazionaria, di Laplace, del punto di sella [6, 18] con applicazioni alla 1) derivazione della formula di Stirling, 2) allo studio del comportamento asintotico della funzione di Airy  $Ai(x)$ , e 3) allo studio del comportamento delle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni di Schrödinger per una particella libera, e di Korteweg - de Vries (KdV) linearizzata. Treni d'onda lentamente variabili, onda portante e onda d'involuppo. Numero d'onda, frequenza, velocità di fase e di gruppo come funzioni lentamente variabili. Rilevanza asintotica delle soluzioni di similarità [1].

#### 2.1.2 Onde iperboliche e la catastrofe del gradiente [20, 12, 8, 23, 9]

Equazione di continuità ed equazioni iperboliche lineari e quasi lineari. L'equazione di Riemann  $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$  ed il metodo delle caratteristiche Individuazione del punto di rottura (breaking) e la catastrofe del gradiente (wave breaking) [23, 20]. Curve caratteristiche e relazione tra le soluzioni delle equazioni iperboliche e le soluzioni del sistema di ODEs che descrive la dinamica sulle curve caratteristiche [20, 12]. Esempi.

L'equazione di Hopf  $\rho_t + \rho\rho_x = 0$ : proprietà analitiche della soluzione nelle vicinanze del punto di rottura; studio della varietà singolare e rilevanza della cubica di Cardano [20].

Sistemi di equazioni iperboliche e loro forma caratteristica; invarianti di Riemann ed esempi. "Simple waves" ed il problema del pistone [23].

#### 2.1.3 Il problema della regolarizzazione

a) Regolarizzazione della soluzione: onde d'urto discontinue e loro costruzione geometrica. b) Regolarizzazione dissipativa dell'equazione: l'equazione di Burgers  $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Regolarizzazione dell'onda d'urto;

spessore e forza d'urto. Risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Burgers attraverso la trasformazione di Hopf-Cole e studio del regime di dissipazione debole. [23].

## **2.2 La propagazione ondosa non lineare in Natura, il metodo perturbativo multiscala e le equazioni modello integrabili [4, 9, 1, 3, 19] (~ 8 ore)**

Onde non lineari in Natura: equazioni di Navier - Stokes; onde sonore in un gas, onde d'acqua di superficie. Teoria delle perturbazioni; risonanze e sviluppi multiscala; esempi di equazioni differenziali ordinarie: il pendolo semplice in approssimazione cubica, l'oscillatore smorzato e l'oscillatore di Van der Pol. Derivazione di equazioni alle derivate parziali modello della Fisica - Matematica non lineare come condizione di cancellazione di forzanti risonanti: i) non linearità debole in modelli iperbolici e l'equazione di Hopf. ii) Non linearità debole + dissipazione debole e l'equazione di Burgers. iii) Non linearità debole + dispersione debole e l'equazione di Korteweg - de Vries (KdV). iv) Non linearità debole + dispersione forte + modulazione d'ampiezza di onde quasi - monocromatiche e l'equazione di Schrödinger non lineare (NLS). v) Generalizzazioni a più di  $(1 + 1)$  dimensioni nell'ipotesi di quasi - unidimensionalità: l'equazione di Kadomtsev - Petviashvili con o senza dispersione (cenni). Perché le equazioni modello sono speciali anche dal punto di vista matematico? Universalità, applicabilità e integrabilità.

## **2.3 La teoria dei solitoni [3, 4, 9, 5] (~ 10 ore) e delle onde anomale [10, 21] (~ 6 ore)**

Equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo solitonico e loro coppia di Lax; esempi: le equazioni di KdV, NLS e KP. Il metodo della Trasformata Spettrale (Inversa) (IST) per risolverne il problema di Cauchy. Esempio: l'equazione di KdV e l'operatore spettrale di Schrödinger stazionario. Problema spettrale diretto come problema di scattering spaziale; problema spettrale inverso come problema di Riemann - Hilbert lineare. Evoluzione dei dati spettrali. Potenziali piccoli e trasformata di Fourier. Potenziali senza riflessione e soluzioni solitoniche. Interazione tra solitoni e phase shift. Comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy (cenni). Gerarchia di equazioni integrabili associate all'operatore di Schrödinger. Infinite simmetrie e costanti del moto. Le equazioni NLS e KP, la loro coppia di Lax e le soluzioni solitoniche. Trasformazioni di Darboux - Bäcklund e costruzione algebrica di soluzioni

esatte; soluzioni di tipo solitonico e di tipo onda anomala per la NLS [21].  
Le onde anomale come risultato della instabilità della modulazione dell'ampiezza di onde quasi monocromatiche in Natura. Studio analitico delle onde anomale attraverso la risoluzione di opportuni problemi di Cauchy per la NLS[10].

## References

- [1] M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves, Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (No. 47), 2011.
- [2] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and Inverse Scattering*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [3] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM Philadelphia, 1981.
- [4] Appunti del Corso di Dottorato “Onde non lineari. Metodi perturbativi ed esatti” tenuto da P. M. Santini, a cura di G. Angilella. Università di Catania, AA 1995-96. <http://www.angilella.it/teaching/nlw/corsidott.pdf>
- [5] F. Baccari: “L'equazione di Schrödinger non lineare e la sua rilevanza in Fisica e Matematica”, dissertazione della Laurea Triennale in Fisica, AA 2011-12.
- [6] C. Bernardini, O. Ragnisco, P. M. Santini, *Metodi Matematici della Fisica*, Carocci Editore, Roma, 2002.
- [7] F. Calogero and A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons I*, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [8] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*; Vol. II: *Partial Differential equations*, by R. Courant, Interscience Publishers, J. Wiley and sons, New York, 1962.
- [9] Dispense del Corso di “Onde non lineari e Solitoni” tenuto da A. Degasperis, a cura di G. Ferrari e D. Dell'Arciprete. Università di Roma “La Sapienza”, AA 2006-07.
- [10] P. G. Grinevich and P. M. Santini, “The exact rogue wave recurrence in the NLS periodic setting via matched asymptotic expansions, for 1 and 2 unstable modes”, *Phys. Lett. A* 382 (2018) 973-979. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2018.02.014>, arXiv:1708.04535.

- [11] M. A. Hoefler, M. J. Ablowitz, I. Coddington, E. A. Cirmell, P. Engels, and V. Schweikhard, “Dispersive and classical shock waves in Bose-Einstein condensates and in gas dynamics”, *Phys. Rev. A* **74**, 023623 (2006).
- [12] F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*; Prentice-Hall, NJ, 1976.
- [13] S. V. Manakov and P. M. Santini: “The Cauchy problem on the plane for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation”; *JETP Letters*, **83**, No 10, 462-466 (2006). <http://arXiv:nlin.SI/0604016>.
- [14] S. V. Manakov and P. M. Santini: “On the solutions of the dKP equation: nonlinear Riemann Hilbert problem, longtime behaviour, implicit solutions and wave breaking”, *J.Phys.A: Math.Theor.* **41** (2008) 055204. (arXiv:0707.1802 (2007))
- [15] S. V. Manakov and P. M. Santini: “Solvable vector nonlinear Riemann problems, exact implicit solutions of dispersionless PDEs and wave breaking”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 345203 (19pp), doi:10.1088/1751-8113/44/34/345203. arXiv:1011.2619.
- [16] S. V. Manakov and P. M. Santini: “On the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation in n+1 dimensions: exact solutions, the Cauchy problem for small initial data and wave breaking”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 405203 (15pp). (arXiv:1001.2134).
- [17] A. I. Markusevich, *Elementi di teoria delle funzioni analitiche*, Edizioni Mir (Mosca) - Editori Riuniti (Roma), 1988.
- [18] P. D. Miller *Applied Asymptotic Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 75, AMS Publications, Providence, 2006
- [19] F. Santucci: “Onde debolmente non lineari e quasi - unidimensionali in Natura; la rottura di tali onde ed il problema della loro regolarizzazione”, Tesi della Laurea Specialistica, AA 2011-12.
- [20] P.M.Santini: “appunti 1” (alcuni appunti di lezioni del corso).
- [21] P. M. Santini. Appunti su “Trasformazioni di Darboux per NLS e onde anomale” sul mio sito.
- [22] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*, J. Wiley and sons.

[23] J. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, NY, 1974.