QUARTA ESERCITAZIONE

Innalzamento e abbassamento di indici

Consideriamo lo spazio di Minkowski in coordinate sferiche $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$. La sua metrica è

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{2}$$

La metrica inversa sarà la matrice inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Consideriamo il vettore $\vec{V}$ di componenti

$$V^\mu = (r^2, 0, 0, 1) \tag{4}$$

e la 1-forma $\tilde{U}$ di componenti

$$U_\mu = (0, 0, r, r\sin\theta) . \tag{5}$$

Abbassiamo l'indice del vettore $\vec{V}$, ottenendo le componenti della 1-forma ad esso associata:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu = (-r^2, 0, 0, r^2 \sin^2\theta) . \tag{6}$$

Innalziamo l'indice della 1-forma $\tilde{U}$, ottenendo le componenti del vettore ad essa associato:

$$U^\mu = g^{\mu\nu} U_\nu = (0, 0, \frac{1}{r}, \frac{1}{r\sin\theta}) . \tag{7}$$

Il prodotto scalare $\tilde{U} \cdot \vec{V}$ può essere calcolato in diversi modi:

$$\tilde{U} \cdot \vec{V} = U_\mu V^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu = g^{\mu\nu} U_\mu V_\nu = r\sin\theta . \tag{8}$$

Consideriamo ora lo spazio di Minkowski in coordinate cilindriche $\{x^\mu\} = (t, r, \phi, z)$. La sua metrica è

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{9}$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

La metrica inversa sarà la matrice inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{11}$$

Consideriamo il tensore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ di componenti

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ r\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{12}$$

Innalziamo il primo indice.

$$\begin{aligned} T^{\mu}_{\ \nu} = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} \quad &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ r\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -r & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ \frac{1}{r}\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{13}$$

Notare che nel prodotto righe per colonne abbiamo scritto a sinistra la metrica e a destra il tensore T perchè in questo modo l'indice sommato (in questo caso σ) è affiancato.

Innalziamo il secondo indice.

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\ \nu} = g^{\nu\sigma} T_{\mu\sigma} = T_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} \quad &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ r\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & 0 \\ -r\cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{14}$$

Notare che nel prodotto righe per colonne stavolta abbiamo scritto a sinistra il tensore T e a destra la metrica perchè in questo modo l'indice sommato (in questo caso σ) è affiancato. Notare inoltre che

$$T_{\mu}^{\ \nu} \neq T^{\mu}_{\ \nu} . \tag{15}$$

Calcoliamo ora la *traccia* del tensore T; essa può essere calcolata in diversi modi equivalenti:

$$\mathrm{tr}T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T^{\mu}_{\ \mu} = T_{\mu}^{\ \mu} = 1 + \sin\phi\,. \qquad (16)$$