Lunghezze di cammini

Data una varietà differenziabile $\mathcal{M}$, sia dato un cammino $\mathcal{C}$, ovvero una serie connessa di punti sulla varietà, e una sua parametrizzazione, ovvero la curva

$$\lambda \in [0,1] \to \{x^\mu(\lambda)\} \,. \tag{1}$$

L'elemento di lunghezza sulla varietà è

$$ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{2}$$

per cui lungo la curva

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \tag{3}$$

e la lunghezza finita del cammino è

$$\Delta s = \int_0^1 d\lambda \frac{ds}{d\lambda} = \int_0^1 d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \,. \tag{4}$$

Anche se è necessario parametrizzare il cammino per calcolarne la lunghezza, il valore della lunghezza non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Consideriamo la varietà differenziabile S^2 data dall'insieme dei punti che costituiscono la sfera di raggio R; descriviamo questa varietà con le coordinate polari $\{x^\mu\} = (\theta, \phi)$ definite nell'aperto

$$\begin{aligned} 0 < \theta < \pi \\ 0 < \phi < 2\pi \end{aligned} \tag{5}$$

e sia

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{6}$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

la metrica in essa definita. Per questa varietà la (4) diventa

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2} \,. \tag{8}$$

Applichiamo la formula (8) ad alcuni casi concreti.

1. Si consideri il cammino in figura 1. Esso va da $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Scegliamo la parametrizzazione $\lambda \in [0,1] \to (\theta(\lambda), \phi(\lambda))$:

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = \left(\frac{\pi}{2}\lambda, \frac{\pi}{4}\right) \,. \tag{9}$$

Indicando con "$\cdot$" la derivata rispetto a λ, si ha che il vettore tangente è:

$$\left(\dot\theta, \dot\phi\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \,. \tag{10}$$

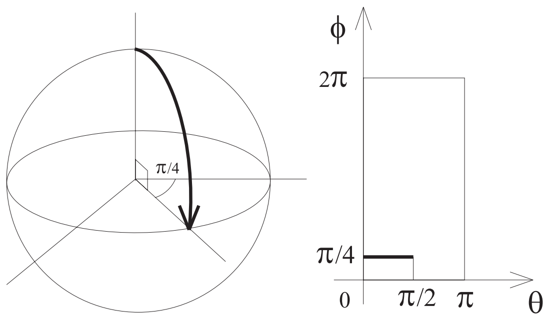

Figure 1: A sinistra rappresentiamo il cammino scelto sulla sfera S^2, a destra la sua rappresentazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cioè nel piano (θ, ϕ).

La lunghezza del cammino è quindi:

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2} R \,. \tag{11}$$

2. Si consideri il cammino in figura 2. Esso va da $(\theta_0, 0)$ a $(\theta_0, 2\pi)$.

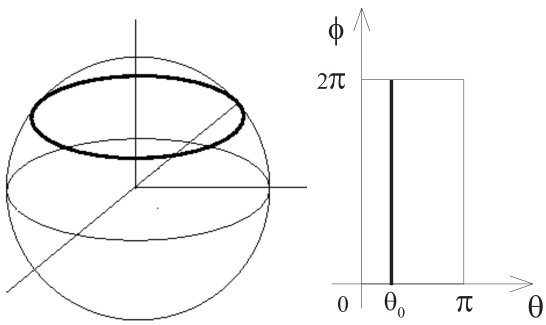

Figure 2: A sinistra rappresentiamo il cammino scelto sulla sfera S^2, a destra la sua rappresentazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cioè nel piano (θ, ϕ).

Scegliamo la parametrizzazione $\lambda \in [0, 1]$

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = (\theta_0, 2\pi\lambda) \,. \tag{12}$$

Il vettore tangente è:

$$\left(\dot{\theta}, \dot{\phi}\right) = (0, 2\pi) \tag{13}$$

quindi la lunghezza del cammino è:

$$\Delta s = R \int_0^1 d\lambda \sqrt{\sin^2\theta_0 \,(2\pi)^2} = 2\pi R \sin\theta_0 \,. \tag{14}$$

Se cambiamo la parametrizzazione, ad esempio con $\lambda \in [0,1]$

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = \left(\theta_0, 2\pi\lambda^2\right) . \tag{15}$$

il vettore tangente diventa

$$\left(\dot{\theta}, \dot{\phi}\right) = (0, 4\pi\lambda) \tag{16}$$

e la lunghezza del cammino è

$$\Delta s = R\int_0^1 d\lambda\sqrt{\sin^2\theta_0 \,(4\pi)^2\,\lambda^2} = R\sin\theta_0 4\pi\int_0^1 \lambda d\lambda = 2\pi R\sin\theta_0 \,. \tag{17}$$

Come si vede, la lunghezza non dipende dalla parametrizzazione.

3. Si consideri il cammino in figura 3. Esso va da $(0,0)$ a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Scegliamo

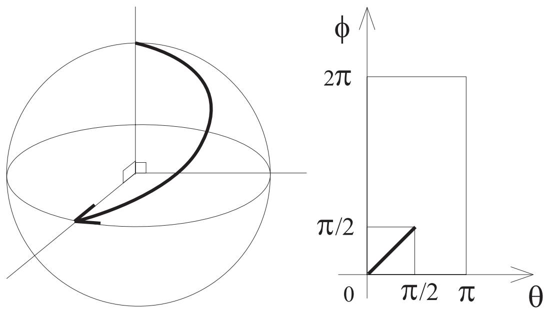

Figure 3: A sinistra rappresentiamo il cammino scelto sulla sfera S^2, a destra la sua rappresentazione in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cioè nel piano (θ, ϕ).

la parametrizzazione $\lambda \in [0,1]$

$$(\theta(\lambda), \phi(\lambda)) = \left(\frac{\pi}{2}\lambda, \frac{\pi}{2}\lambda\right) . \tag{18}$$

Il vettore tangente è:

$$\left(\dot{\theta}, \dot{\phi}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{19}$$

quindi la lunghezza del cammino è:

$$\Delta s = R\int_0^1 d\lambda\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha} \,. \tag{20}$$

Questo integrale è piuttosto difficile da risolvere. In generale, a meno di scegliere percorsi semplici, si ottengono facilmente integrali non banali.

Laplaciano in coordinate polari

Consideriamo la metrica euclidea tridimensionale, nelle coordinate cartesiane $\{x^\mu\} = (x^1, x^2, x^3)$,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{21}$$

con $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$. La metrica inversa sarà anch'essa $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$. La stessa metrica può essere espressa nelle coordinate polari $\{x^{\alpha\prime}\} = (r, \theta, \phi)$, definite dalla trasformazione di coordinate $x^\mu = x^\mu(x^{\alpha\prime})$:

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin\theta \sin\phi \\ x^2 &= r \sin\theta \cos\phi \\ x^3 &= r \cos\theta\,. \end{aligned} \tag{22}$$

La metrica nelle nuove coordinate è

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 = g_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha\prime} dx^{\beta\prime} \tag{23}$$

ovvero $g_{\alpha'\beta'} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$ mentre $g^{\alpha'\beta'} = \mathrm{diag}(1, r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2}\theta)$.

L'operatore laplaciano in coordinate cartesiane ha la forma

$$\nabla^2 f \equiv g^{\mu\nu} f_{,\mu\nu} = \frac{\partial f}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial f}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial f}{\partial(x^3)^2}\,. \tag{24}$$

Se vogliamo scriverlo in un sistema di coordinate qualsiasi, dobbiamo prima di tutto scriverlo in forma tensoriale, ovvero con derivate covarianti invece che derivate ordinarie. Osserviamo che nello spazio euclideo in coordinate cartesiane $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$, quindi $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$ e la derivata covariante coincide con quella ordinaria, per cui possiamo scrivere

$$\nabla^2 f \equiv g^{\mu\nu} f_{;\mu\nu}. \tag{25}$$

Questa espressione, a differenza della precedente, è tensoriale e vale quindi in tutti i sistemi di coordinate. Possiamo quindi calcolare l'operatore laplaciano in coordinate polari

$$\nabla^2 f = g^{\alpha\prime\beta\prime} f_{;\alpha'\beta'} = g^{\alpha\prime\beta\prime} (f_{,\alpha'})_{;\beta'} \tag{26}$$

dove nella parentesi abbiamo messo la derivata ordinaria perche' la derivata covariante di una grandezza scalare (come la funzione f) coincide con la sua derivata ordinaria; in altre parole, il gradiente di uno scalare è un oggetto tensoriale, e precisamente è una uno-forma. Invece, fuori della parentesi c'è la derivata covariante perchè la derivata ordinaria e covariante di una uno-forma non coincidono.

Abbiamo quindi

$$\nabla^2 f = g^{\alpha\prime\beta\prime} \left[f_{,\alpha'\beta'} - \Gamma^{\sigma\prime}_{\alpha'\beta'} f_{,\sigma'} \right]\,. \tag{27}$$

I simboli di Christoffel non nulli si calcolano facilmente, osservando che la metrica è diagonale e che le derivate non nulle della metrica sono

$$g_{\theta\theta,r} = 2r\,, \qquad g_{\phi\phi,r} = 2r\sin^2\theta\,, \qquad g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2\sin\theta\cos\theta \tag{28}$$

quindi i simboli di Christoffel non nulli con indici bassi sono

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\theta\theta\,r} = -\frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = -r\,, \qquad \Gamma_{\theta r\,\theta} = \Gamma_{r\theta\,\theta} = \frac{1}{2}g_{\theta\theta,r} = r \\
&\Gamma_{\phi\phi\,r} = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = -r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma_{\phi r\,\phi} = \Gamma_{r\phi\,\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = r\sin^2\theta \\
&\Gamma_{\phi\phi\,\theta} = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = -r^2\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma_{\phi\theta\,\phi} = \Gamma_{\theta\phi\,\phi} = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = r^2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{29}$$

e i simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\,r}_{\theta\theta} = -r\,, \qquad \Gamma^{\,\theta}_{\theta r} = \Gamma^{\,\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r} \\
&\Gamma^{\,r}_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta\,, \qquad \Gamma^{\,\phi}_{\phi r} = \Gamma^{\,\phi}_{r\phi} = \frac{1}{r} \\
&\Gamma^{\,\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta\,, \qquad \Gamma^{\,\phi}_{\phi\theta} = \Gamma^{\,\phi}_{\theta\phi} = \cot\theta\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

Sostituendo in (27) troviamo la forma del laplaciano di una funzione f in coordinate polari

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= f_{,rr} + \frac{1}{r^2}f_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}f_{,\phi\phi} + \\
&\quad - \left[\Gamma^{\,r}_{\theta\theta}g^{\theta\theta} + \Gamma^{\,r}_{\phi\phi}g^{\phi\phi}\right] f_{,r} - \Gamma^{\,\theta}_{\phi\phi}g^{\phi\phi}f_{,\theta} \\
&= f_{,rr} + \frac{2}{r}f_{,r} + \frac{1}{r^2}\left(f_{,\theta\theta} + \cot\theta f_{,\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}f_{,\phi\phi}\right)\,.
\end{aligned} \tag{31}$$

Esercizio

Consideriamo lo spazio-tempo descritto, nel riferimento O, dalle coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, r)$, con metrica

$$ds^2 = -r^4 dt^2 + r^4 dx^2 + r^4 dy^2 + \frac{dr^2}{r^2} \,. \tag{32}$$

Sia dato il tensore T di componenti

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & r \\ -x & 0 & r & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{33}$$

1. Calcolare simboli di Christoffel non nulli, che sono

$$\Gamma^{\,r}_{tt} \,, \Gamma^{\,t}_{tr} \,, \Gamma^{\,r}_{xx} \,, \Gamma^{\,x}_{xr} \,, \Gamma^{\,r}_{yy} \,, \Gamma^{\,y}_{yr} \,, \Gamma^{\,r}_{rr} \,. \tag{34}$$

2. Calcolare le componenti dei tensori $T^\mu{}_\nu$ e $T_\mu{}^\nu$.

3. Calcolare le seguenti componenti della derivata covariante del tensore T:

$$T_{tx;x} \,, \qquad T_{ty;y} \,, \qquad T_{rr;t} \,. \tag{35}$$

Soluzione

La metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-r^{-4}, r^{-4}, r^{-4}, r^2)\,. \tag{36}$$

1. Utilizziamo la formula

$$\Gamma^{\ \mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu;\beta} + g_{\beta\nu;\alpha} - g_{\alpha\beta;\nu})\,. \tag{37}$$

Si ha

$$\Gamma^{\ r}_{tt} = \frac{1}{2} g^{r\nu}(g_{t\nu,t} + g_{\nu t,t} - g_{tt,\nu}) = -\frac{1}{2} g^{rr} g_{tt,r} = 2r^5 \tag{38}$$

e allo stesso modo si trova

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\ t}_{tr} = \frac{2}{r}\,, \qquad \Gamma^{\ r}_{xx} = -2r^5\,, \qquad \Gamma^{\ x}_{xr} = \frac{2}{r} \\ &\Gamma^{\ r}_{yy} = -2r^5\,, \qquad \Gamma^{\ y}_{yr} = \frac{2}{r}\,, \qquad \Gamma^{\ r}_{rr} = -\frac{1}{r}\,. \end{aligned} \tag{39}$$

2.

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\nu} &= g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{x}{r^4} & 0 & -\frac{1}{r^3} \\ -\frac{x}{r^4} & 0 & \frac{1}{r^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^3} & 0 & 0 \\ r^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T_{\mu}{}^{\nu} &= T_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x}{r^4} & 0 & r^3 \\ \frac{x}{r^4} & 0 & \frac{1}{r^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r^3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{40}$$

3.

$$\begin{aligned} T_{tx;x} &= T_{tx,x} - \Gamma^{\ \alpha}_{tx} T_{\alpha x} - \Gamma^{\ \alpha}_{xx} T_{t\alpha} = T_{tx,x} - \Gamma^{\ r}_{xx} T_{tr} = 1 + 2r^6 \\ T_{ty;y} &= T_{ty,y} - \Gamma^{\ \alpha}_{ty} T_{\alpha y} - \Gamma^{\ \alpha}_{yy} T_{t\alpha} = -\Gamma^{\ r}_{yy} T_{tr} = 1 + 2r^6 \\ T_{rr;t} &= T_{rr,t} - \Gamma^{\ \alpha}_{rt} T_{\alpha r} - \Gamma^{\ \alpha}_{rt} T_{r\alpha} = -\Gamma^{\ t}_{rt}(T_{tr} + T_{rt}) = -4\,. \end{aligned} \tag{41}$$