

TRASPORTO PARALLELO

Lungo una curva di parametro λ , di vettore tangente

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (1)$$

il vettore V^μ è trasportato parallelamente se soddisfa le **equazioni del trasporto parallelo**

$$U^\nu V_{;\nu}^\mu = U^\nu [V_{,\nu}^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\alpha] = 0 \quad (2)$$

ovvero

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu V^\alpha = 0 \quad (3)$$

dove si è usato il fatto che

$$U^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{dV^\mu}{d\lambda}. \quad (4)$$

Quando il cammino è la *linea coordinata* α , ovvero quando tutte le coordinate tranne x^α sono costanti lungo il percorso, possiamo scegliere la stessa x^α come parametro della curva. In tal caso il vettore tangente è il vettore di base $\vec{e}_{(\alpha)}$:

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu. \quad (5)$$

In questo caso, l'equazione del trasporto parallelo assume una forma particolarmente semplice:

$$U^\nu V_{;\nu}^\mu = \delta_\alpha^\nu V_{;\alpha}^\mu = V_{;\alpha}^\mu = 0 \quad (6)$$

ovvero

$$V_{,\alpha}^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu V^\nu = 0. \quad (7)$$

Sfera

Si consideri la sfera S^2 di raggio unitario, in coordinate polari:

$$\{x^\mu\} = (\theta, \phi) \quad (8)$$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (9)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Calcoliamo i simboli di Christoffel. La sola derivata della metrica non nulla è

$$g_{\phi\phi,\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta. \quad (11)$$

I simboli di Christoffel con indici bassi $\Gamma_{\mu\nu\rho}$, definiti dalla

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}), \quad (12)$$

non nulli, saranno:

$$\Gamma_{\theta\phi\phi} = \Gamma_{\phi\theta\phi} = \frac{1}{2}(g_{\theta\phi,\phi} + g_{\phi\phi,\theta} - g_{\phi\phi,\phi}) = \frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = \sin\theta \cos\theta \quad (13)$$

$$\Gamma_{\phi\phi\theta} = \frac{1}{2}(g_{\phi\theta,\phi} + g_{\phi\theta,\phi} - g_{\phi\phi,\theta}) = -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,\theta} = -\sin\theta \cos\theta. \quad (14)$$

I simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ non nulli, essendo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu\sigma} \quad (15)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

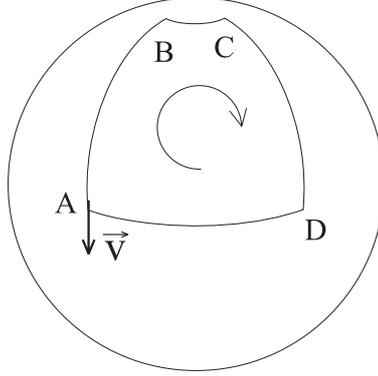
saranno:

$$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = g^{\phi\sigma}\Gamma_{\phi\theta\sigma} = g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\theta\phi} = g^{\phi\phi}\Gamma_{\theta\phi\phi} = \frac{\sin\theta \cos\theta}{\sin^2\theta} = \cot\theta \quad (17)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = g^{\theta\sigma}\Gamma_{\phi\phi\sigma} = g^{\theta\theta}\Gamma_{\phi\phi\theta} = \Gamma_{\phi\phi\theta} = -\sin\theta \cos\theta.$$

Trasporto parallelo sulla sfera

Studiamo il trasporto parallelo sulla sfera lungo il cammino in figura (notare che tale cammino è definito in maniera tale da evitare il polo nord, dove la mappa polare non è definita).



Come dimostreremo, trasportando lungo tale cammino il vettore \vec{V} , da A in A, esso viene ruotato di 90° . Dimostriamolo. I quattro punti in figura hanno coordinate $x^\mu = (\theta, \phi)$:

$$A = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad (18)$$

$$B = (\varepsilon, 0) \quad (19)$$

$$C = \left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right) \quad (20)$$

$$D = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (21)$$

dove ε è un parametro che assumiamo piccolo, e che alla fine della dimostrazione faremo tendere a zero.

Trasportiamo parallelamente lungo il cammino in figura il vettore inizialmente in A con componenti

$$V^\mu = (V^\theta, V^\phi) = (1, 0) . \quad (22)$$

Le equazioni del trasporto parallelo sono

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha V^\gamma U^\beta = 0 \quad (23)$$

con

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (24)$$

vettore tangente alla curva $\lambda \rightarrow x^\mu(\lambda)$; sostituendo i simboli di Christoffel dati in (17),

$$\begin{aligned} \frac{dV^\theta}{d\lambda} &= U^\phi V^\phi \sin \theta \cos \theta \\ \frac{dV^\phi}{d\lambda} &= - (U^\theta V^\phi + V^\theta U^\phi) \cot \theta . \end{aligned} \quad (25)$$

Osserviamo che i cammini AB , BC , CD , DA sono linee coordinate; le equazioni del trasporto parallelo possono quindi essere espresse in forma più semplice:

- per le linee coordinate θ ,

$$V_{;\theta}^\mu = V_{,\theta}^\mu + \Gamma_{\theta\nu}^\mu V^\nu = 0 \quad (26)$$

ovvero

$$\begin{aligned} V_{,\theta}^\theta &= 0 \\ V_{,\theta}^\phi &= -\cot \theta V^\phi ; \end{aligned} \quad (27)$$

- per le linee coordinate ϕ ,

$$V_{;\phi}^\mu = V_{,\phi}^\mu + \Gamma_{\phi\nu}^\mu V^\nu = 0 \quad (28)$$

ovvero

$$\begin{aligned} V_{,\phi}^\theta &= \sin \theta \cos \theta V^\phi \\ V_{,\phi}^\phi &= -\cot \theta V^\theta . \end{aligned} \quad (29)$$

1. Il tratto da $A = (\pi/2, 0)$ a $B = (\varepsilon, 0)$ è una linea coordinata θ , quindi valgono le (27). La prima delle (27) ci dice che V^θ è costante, quindi $V^\theta(\theta) = V^\theta(\pi/2) = 1$.

L'equazione per V^ϕ è della forma

$$\begin{aligned}\frac{dV^\phi}{d\theta} &= -\cot\theta V^\phi \\ V^\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0.\end{aligned}\tag{30}$$

Questo è un problema di Cauchy (una equazione differenziale del primo ordine e un dato iniziale), quindi ammette un'unica soluzione. $V^\phi(\theta) \equiv 0$ è soluzione, quindi è l'unica soluzione.

Questo risultato vale anche in casi piu' generali: se la derivata di una grandezza (in questo caso V^ϕ) è proporzionale alla grandezza stessa, e nel punto iniziale (in questo caso $\theta = \pi/2$) la grandezza vale 0, essa continua a valere 0 anche successivamente.

Possiamo concludere che $V^\mu(\theta)$ è costante nel tratto AB , e in B si ha ancora:

$$V^\mu = (1, 0).\tag{31}$$

2. Il tratto da $B = (\varepsilon, 0)$ a $C = (\varepsilon, \pi/2)$ è una linea coordinata ϕ con $\theta = \varepsilon$, quindi valgono le (29), che per $\varepsilon \ll 1$ diventano

$$\frac{dV^\theta}{d\phi} = \sin\varepsilon \cos\varepsilon V^\phi = \varepsilon V^\phi + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\tag{32}$$

$$\frac{dV^\phi}{d\phi} = -\cot\varepsilon V^\theta = -\frac{1}{\varepsilon}V^\theta + \mathcal{O}(\varepsilon).\tag{33}$$

Come si vede, non si può prendere $\varepsilon \rightarrow 0$, ovvero arrivare al polo nord, perchè le equazioni vi divergono. Dalla (33) si trova che

$$V^\phi = \frac{1}{\varepsilon}V_{,\phi}^\theta + \mathcal{O}(\varepsilon),\tag{34}$$

mentre derivando la (32) rispetto a ϕ si ha

$$\frac{d^2V^\theta}{d\phi^2} = -V^\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\tag{35}$$

La soluzione generale di questa equazione è

$$V^\theta = C_1 \cos\phi + C_2 \sin\phi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\tag{36}$$

e dalla (34)

$$V^\phi = -\frac{C_1}{\varepsilon} \sin\phi + \frac{C_2}{\varepsilon} \cos\phi + \mathcal{O}(\varepsilon).\tag{37}$$

con C_1, C_2 costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali in $\phi = 0$, dove

$$\begin{aligned}V^\theta &= C_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 1 \\ V^\phi &= -\frac{C_2}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) = 0\end{aligned}\tag{38}$$

per cui $C_1 = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $C_2 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ e

$$\begin{aligned} V^\theta &= \cos \phi + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ V^\phi &= -\frac{1}{\varepsilon} \sin \phi + \mathcal{O}(\varepsilon) . \end{aligned} \quad (39)$$

Ponendo $\phi = \pi/2$ si trova V^μ nel punto C :

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}(\varepsilon^2), -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) . \quad (40)$$

3. Il tratto da $C = (\varepsilon, \pi/2)$ a $D = (\pi/2, \pi/2)$ è una linea coordinata θ , quindi valgono le (27). Quindi V^θ è costante,

$$V^\theta(\theta) \equiv \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (41)$$

mentre V^ϕ soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{dV^\phi}{d\theta} &= -\cot \theta V^\phi \\ V^\phi(\theta = \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) . \end{aligned} \quad (42)$$

La soluzione di questo sistema è

$$V^\phi = -\frac{1}{\sin \theta} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (43)$$

quindi in D , ove $\theta = \pi/2$,

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}(\varepsilon^2), -1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) . \quad (44)$$

4. Il tratto da $D = (\pi/2, \pi/2)$ a $A = (\pi/2, 0)$ è una linea coordinata ϕ , quindi valgono le (29),

$$\frac{dV^\theta}{d\phi} = \sin \theta \cos \theta V^\phi \quad (45)$$

$$\frac{dV^\phi}{d\phi} = -\cot \theta V^\theta . \quad (46)$$

In entrambe le equazioni il secondo membro si annulla, perchè sul percorso da D ad A si ha sempre $\theta = \frac{\pi}{2}$. Quindi in A il vettore è

$$V^\mu = \left(\mathcal{O}(\varepsilon^2), -1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) . \quad (47)$$

Nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$V^\mu = (0, -1) \quad (48)$$

mentre in A alla partenza era:

$$V^\mu = (1, 0) : \quad (49)$$

il trasporto parallelo lungo questo cammino chiuso ha ruotato il vettore di 90° in senso orario.