RELATIVITÀ GENERALE - PROVA del 6-12-2018

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -(1 + x^2)dt^2 + 2dtdx + x^2dx^2 + y^2dy^2 + dz^2.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{array}{lll} \Gamma^t_{tt} = \dfrac{x}{A}, & \Gamma^t_{tx} = \dfrac{x^3}{A}, & \Gamma^t_{xx} = \dfrac{x}{A}, \\ \Gamma^x_{tt} = \dfrac{x(x^2+1)}{A}, & \Gamma^x_{tx} \neq 0, & \Gamma^x_{xx} = \dfrac{x(x^2+1)}{A}, \\ \Gamma^y_{yy} = \dfrac{1}{y}, & & \end{array}$$

dove $A = 1 + x^2 + x^4$.

1. Calcolare la metrica inversa $g^{\mu\nu}$
2. Calcolare Γ^x_{tx}.
3. Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ T, le cui componenti nel riferimento O sono

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associato a T, $T_\mu{}^\nu$.

4. Calcolare la componente $T^{xt}{}_{;t}$ della derivata covariante di T.
5. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (u, v, r, f)$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu)$

$$\begin{aligned} u &= t \\ v &= 2x \\ r &= y \\ f &= tz\,, \end{aligned}$$

   con $u > 0$. Calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

RELATIVITÀ GENERALE - PROVA del 6-12-2018
SOLUZIONE

Data la metrica

$$ds^2 = -(1+x^2)dt^2 + 2dtdx + x^2dx^2 + y^2dy^2 + dz^2,$$

1. La metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -x^2/A & 1/A & 0 & 0 \\ 1/A & (1+x^2)/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dove abbiamo posto

$$A = 1 + x^2 + x^4.$$

2.

$$\Gamma^x_{tx} = \frac{1}{2}g^{xk}\left(g_{kt,x} + g_{kx,t} - g_{tx,k}\right) = \frac{1}{2}g^{xt}g_{tt,x} = -\frac{x}{A}.$$

3.

$$\begin{aligned} T_\alpha{}^\beta &= g_{\alpha\mu}T^{\mu\beta} = \begin{pmatrix} -(1+x^2) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -t(1+x^2) & 0 & z & -y(1+x^2) \\ t & 0 & zx^2 & y \\ y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.

$$T^{xt}{}_{;t} = T^{xt}{}_{,t} + \Gamma^x_{kt}T^{kt} + \Gamma^t_{kt}T^{xk} = \Gamma^x_{tt}T^{tt} = \frac{tx(1+x^2)}{A}.$$

5. Detta

$$\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}{}_\mu) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^\mu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Le componenti del tensore nel nuovo riferimento sono

$$T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}_{\nu}$$

ovvero, definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$ e $T' = (T^{\alpha\prime\beta\prime})$, e la matrice trasposta di Λ, Λ^T, si ha

$$T' = \Lambda \; T \; \Lambda^T$$

$$
\begin{aligned}
T' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ tz & 0 & 0 & t+yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & t(z+y) \\ 0 & 0 & 2z & 0 \\ y & 0 & 0 & yz \\ tz & 0 & 0 & t^2+z^2t+tyz \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & f+ru \\ 0 & 0 & 2f/u & 0 \\ r & 0 & 0 & rf/u \\ f & 0 & 0 & u^2+f^2/u+fr \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$