RELATIVITÀ GENERALE - PROVA del 7-12-2018

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -t^2 dt^2 + 2dtdx + t^2 dx^2 + dy^2 + (t^2 + z^2)dz^2.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tt} &= \frac{t^3}{A}, \quad \Gamma^t_{tx} = \frac{t}{A}, \qquad \Gamma^t_{xx} = \Gamma^t_{zz} = \frac{t^3}{A}, \\
\Gamma^x_{tt} &= -\frac{t}{A}, \quad \Gamma^x_{tx} = \frac{t^3}{A}, \qquad \Gamma^x_{xx} = \Gamma^x_{zz} = -\frac{t}{A}, \\
\Gamma^z_{tz} &\neq 0, \quad \Gamma^z_{zz} = \frac{z}{t^2 + z^2},
\end{aligned}$$

dove $A = 1 + t^4$.

1. Calcolare la metrica inversa $g^{\mu\nu}$
2. Calcolare Γ^z_{tz}.
3. Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ T, le cui componenti nel riferimento O sono
$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ associato a T, $T_{\mu\nu}$.
4. Calcolare la componente $T^t{}_{y;t}$ della derivata covariante di T.
5. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (u, v, r, f)$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu)$ con $u > 0$
$$\begin{aligned}
u &= t \\
v &= 2x \\
r &= ty \\
f &= z\,.
\end{aligned}$$
Calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'}{}_{\nu'}$ nel riferimento O'.

RELATIVITÀ GENERALE - PROVA del 7-12-2018
SOLUZIONE

Data la metrica

$$ds^2 = -t^2dt^2 + 2dtdx + t^2dx^2 + dy^2 + (t^2+z^2)dz^2.$$

1. La metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} \quad = \quad \begin{pmatrix} -t^2/A & 1/A & 0 & 0 \\ 1/A & t^2/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(t^2+z^2) \end{pmatrix}.$$

dove abbiamo posto

$$A = 1 + t^4.$$

2.

$$\Gamma^z_{tz} = \frac{1}{2} g^{zk} \left(g_{kt,z} + g_{kz,t} - g_{tz,k} \right) = \frac{1}{2} g^{zz} g_{zz,t} = \frac{t}{t^2+z^2}.$$

3.

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} \quad &= \quad g_{\alpha\mu} T^{\mu}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} -t^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (t^2+z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} -t^3 & 0 & z & -t^2 y \\ t & 0 & t^2 z & y \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (t^2+z^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.

$$T^{t}{}_{y;t} = T^{t}{}_{y,t} + \Gamma^{t}_{kt} T^{k}{}_{y} - \Gamma^{k}_{yt} T^{t}{}_{k} = \Gamma^{t}_{tx} T^{x}{}_{y} = \frac{tz}{A}.$$

5. Detta

$$\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ y & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda^{\alpha}{}_{\mu'}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -r/u^2 & 0 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le componenti del tensore nel nuovo riferimento sono

$$T^{\alpha'}{}_{\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\mu} T^{\mu}{}_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'}$$

ovvero, definendo le matrici $T = (T^{\mu}{}_{\nu})$ e $T' = (T^{\alpha\prime}{}_{\beta\prime})$, si ha

$$T' = \Lambda \; T \; \Lambda^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
T' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ y & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & z & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -r/u^2 & 0 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2z & 0 \\ 2ty & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -r/u^2 & 0 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & y \\ -(2rz)/u^2 & 0 & 2z/u & 0 \\ 2ty & 0 & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & r/u \\ -(2rf)/u^2 & 0 & 2f/u & 0 \\ 2r & 0 & 0 & r^2/u^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$