RELATIVITÀ GENERALE - PROVA del 7-11-2017

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + 2tdtd\phi + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

definita per $t > 0, r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$. I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{t}{t^2 + \sin^2\theta}, \quad \Gamma^t_{\theta\phi} \neq 0,$$
$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \qquad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$
$$\Gamma^\phi_{tt} = \frac{1}{t^2 + \sin^2\theta}, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{t^2 + \sin^2\theta}$$

1. Calcolare la metrica inversa $g^{\mu\nu}$
2. Calcolare $\Gamma^t_{\theta\phi}$.
3. Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ T, le cui componenti nel riferimento O sono
$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associato a T, ${T^\mu}_\nu$.
4. Calcolare la componente ${T^{\phi\theta}}_{;\theta}$ della derivata covariante di T.
5. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', r', \theta', \phi')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu)$
$$\begin{aligned} t' &= t + r \\ r' &= t - r \\ \theta' &= \theta \\ \phi' &= \sqrt{\phi}. \end{aligned}$$
Calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

RELATIVITÀ GENERALE - PROVA del 7-11-2017
SOLUZIONE

Data la metrica

$$ds^2 = -dt^2 + 2tdtd\phi + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

1. La metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\sin^2\theta/A & 0 & 0 & t/A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ t/A & 0 & 0 & 1/A \end{pmatrix}.$$

dove abbiamo posto

$$A = t^2 + \sin^2\theta$$

2.

$$\Gamma^t_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{tk} \left(g_{k\theta,\phi} + g_{k\phi,\theta} - g_{\theta\phi,k} \right) = \frac{1}{2} g^{t\phi} g_{\phi\phi,\theta} = \frac{t \sin\theta \cos\theta}{t^2 + \sin^2\theta}.$$

3.

$$T^\mu{}_\nu = T^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ t & 0 & 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r^2 & 0 & 0 & tr^2 \\ 0 & 0 & r^2\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 0 & t\sin\theta \\ 0 & 0 & r^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.

$$T^{\phi\theta}{}_{;\theta} = T^{\phi\theta}{}_{,\theta} + \Gamma^\phi_{k\theta} T^{k\theta} + \Gamma^\theta_{k\theta} T^{\phi k} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} T^{\phi\theta} = \frac{r^2 \sin\theta \cos\theta}{t^2 + \sin^2\theta}.$$

5. Detta

$$\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}{}_\mu) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^\mu} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sqrt{\phi}) \end{pmatrix}.$$

Le componenti del tensore nel nuovo riferimento sono

$$T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\ \mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}_{\ \nu}$$

ovvero, definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$ e $T' = (T^{\alpha\prime\beta\prime})$, e la matrice trasposta di Λ, Λ^T, si ha

$$T' = \Lambda \; T \; \Lambda^T$$

In questo caso particolare, essendo Λ una matrice simmetrica si avrà $\Lambda^T = \Lambda$.

$$
\begin{aligned}
T' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sqrt{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sqrt{\phi}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r^2 & 0 & \cos\theta & 0 \\ r^2 & 0 & -\cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2/(2\sqrt{\phi}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sqrt{\phi}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r^2 & r^2 & \cos\theta & 0 \\ r^2 & r^2 & -\cos\theta & 0 \\ \sin\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2/(2\sqrt{\phi}) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{t'-r'}{2}\right)^2 & \left(\frac{t'-r'}{2}\right)^2 & \cos\theta' & 0 \\ \left(\frac{t'-r'}{2}\right)^2 & \left(\frac{t'-r'}{2}\right)^2 & -\cos\theta' & 0 \\ \sin\theta' & \sin\theta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (t'-\phi')^2/(8\phi') & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$