RELATIVITÀ GENERALE - PROVA dell' 8-11-2017

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, r, \theta, \phi)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + 2rdtdr + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

definita per $r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$. I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{rr} &\neq 0, & \Gamma^t_{\theta\theta} &= -\frac{r^2}{A}, \\ \Gamma^r_{rr} &= \frac{r}{A}, & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r}{A} \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} \\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \cot\theta. \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $A = 1 + r^2$.

1. Calcolare la metrica inversa $g^{\mu\nu}$
2. Calcolare Γ^t_{rr}.
3. Sia dato il tensore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ T, le cui componenti nel riferimento O sono
$$T_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calcolare le componenti del tensore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ associato a T, $T_{\mu\nu}$.
4. Calcolare la componente $T_r{}^t{}_{;\theta}$ della derivata covariante di T.
5. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', r', \theta', \phi')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu)$
$$\begin{aligned} t =& \ 3t' - r' \\ r =& \ 2t' - r' \\ \theta =& \ \theta' \\ \phi =& \ \phi' . \end{aligned}$$
Calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

RELATIVITÀ GENERALE - PROVA del 8-11-2017
SOLUZIONE

Data la metrica

$$ds^2 = -dt^2 + 2tdtd\phi + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

1. La metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/A & r/A & 0 & 0 \\ r/A & 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

dove abbiamo posto

$$A = 1 + r^2$$

2.

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{1}{2} g^{tk} \left(2g_{kr,r} - g_{rr,k} \right) = g^{tt} g_{tr,r} = -\frac{1}{A}.$$

3.

$$T_{\mu\nu} = T_\mu{}^\alpha g_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & r & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r^2 & r^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta & r\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.

$$T_r{}^t{}_{;\theta} = T_r{}^t{}_{,\theta} - \Gamma^k_{r\theta} T_k{}^t + \Gamma^t_{k\theta} T_r{}^k = -\Gamma^\theta_{r\theta} T_\theta{}^t + \Gamma^t_{\theta\theta} T_r{}^\theta = -\frac{\sin\theta}{r} - \frac{r^2\cos\theta}{A}.$$

5. Calcoliamo prima $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} T_\alpha{}^\nu = \begin{pmatrix} -1/A & r/A & 0 & 0 \\ r/A & 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r^2/A & 0 & r\cos\theta/A & 0 \\ r^3/A & 0 & \cos\theta/A & 0 \\ \sin\theta/r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2/\sin^2\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

6. La trasformazione inversa è

$$\begin{aligned} t' &= t - r \\ r' &= 2t - 3r \\ \theta' &= \theta \\ \phi' &= \phi\,, \end{aligned}$$

pertanto, detta

$$\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}_{\ \ \mu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le componenti del tensore nel nuovo riferimento sono

$$T^{\mu\prime\nu\prime} = \Lambda^{\mu\prime}_{\ \ \alpha} T^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu\prime}_{\ \ \beta}$$

ovvero, definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$ e $T' = (T^{\mu\prime\nu\prime})$ e Λ^T la matrice trasposta di Λ si ha

$$T' = (\Lambda)\ T\ \Lambda^T$$

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{r^2}{A} & 0 & \dfrac{r\cos\theta}{A} & 0 \\[2ex] \dfrac{r^3}{A} & 0 & \dfrac{\cos\theta}{A} & 0 \\[2ex] \dfrac{\sin\theta}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{r^2}{\sin^2\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{r^2(1+r)}{A} & 0 & \dfrac{(r-1)\cos\theta}{A} & 0 \\[2ex] -\dfrac{r^2(2+3r)}{A} & 0 & \dfrac{(2r-3)\cos\theta}{A} & 0 \\[2ex] \dfrac{\sin\theta}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{r^2}{\sin^2\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{r^2(1+r)}{A} & -\dfrac{2r^2(1+r)}{A} & \dfrac{(r-1)\cos\theta}{A} & 0 \\[2ex] -\dfrac{r^2(2+3r)}{A} & -\dfrac{2r^2(2+3r)}{A} & \dfrac{(2r-3)\cos\theta}{A} & 0 \\[2ex] \dfrac{\sin\theta}{r^2} & \dfrac{2\sin\theta}{r^2} & 0 & 0 \\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{r^2}{\sin^2\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix}
-\dfrac{(2t'-r')^2 C}{B} & -\dfrac{2(2t'-r')^2 C}{B} & \dfrac{D\cos\theta'}{B} & 0 \\[2ex]
-\dfrac{(2t'-r')^2 E}{B} & -\dfrac{2(2t'-r')^2 E}{B} & \dfrac{F\cos\theta'}{B} & 0 \\[2ex]
\dfrac{\sin\theta'}{(2t'-r')^2} & \dfrac{2\sin\theta'}{(2t'-r')^2} & 0 & 0 \\[2ex]
0 & 0 & \dfrac{(2t'-r')^2}{\sin^2\theta'} & 0
\end{pmatrix} .
$$

dove abbiamo posto

$$
\begin{aligned}
B &= 1 + r^2 = 1 + (2t' - r')^2, \\
C &= 1 + r = 1 + 2t' - r' \\
D &= r - 1 = 2t' - r' - 1, \\
E &= 2 + 3r = 2 + 3(2t' - r') \\
F &= 2r - 3 = 2(t' - r') - 3.
\end{aligned}
$$