DOMANDE LISTA 1

1. Ricavare il tensore di Riemann calcolando come varia un vettore quando lo si trasporta parallelamente lungo un cammino chiuso infinitesimale. Dimostrare che l'oggetto così ottenuto è un tensore.

2. Definire il tensore energia-impulso per un sistema di particelle non interagenti in Relatività Speciale, discutere il significato delle componenti e mostrare che e' un tensore.

3. Dimostrare che in Relatività Speciale il tensore energia-impulso per un sistema di particelle soddisfa la legge di conservazione $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$.

4. Discutere l'equazione delle geodetiche nel limite newtoniano.

5. Ricavare le equazioni di Einstein sapendo che, nel limite newtoniano, le equazioni delle geodetiche mostrano che

   $$g_{00} = -(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}),$$

   dove Φ è il potenziale newtoniano soluzione dell'equazione di Laplace

   $$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho.$$

6. Ricavare l'equazione di Killing e mostrare che si può scrivere nella forma

   $$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0.$$

   Mostrare che se lo spaziotempo ammette un campo di vettori di Killing, si possono scegliere le coordinate in modo da sfruttare le simmetrie ad essi associate.

7. Data la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica
$$ds^2 = -e^{2\nu}(dx^0)^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$
e date le equazioni di Einstein che deve soddisfare nel vuoto
$$\begin{aligned}
a)\quad & G_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu}\frac{d}{dr}\left[r(1-e^{-2\lambda})\right] = 0 \\
b)\quad & G_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\lambda}\left[(1-e^{-2\lambda})\right] + \frac{2}{r}\nu_{,r} = 0 \\
c)\quad & G_{\theta\theta} = r^2e^{-2\lambda}\left[\nu_{,rr} + \nu_{,r}^2 + \frac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r}\lambda_{,r} - \frac{\lambda_{,r}}{r}\right] = 0 \\
d)\quad & G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta} = 0\,,
\end{aligned} \tag{1}$$
ricavare e discutere la soluzione di Schwarzschild.

8. Discutere la natura delle ipersuperfici in Relatività Generale e, data la metrica di Schwarzschild
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2,$$
spiegare perché la superficie $r = 2m$ è un orizzonte degli eventi.

9. Derivare e discutere il redshift gravitazionale delle linee spettrali.

10. Data la metrica di Schwarzschild
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$
derivare le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla, e discutere i vari tipi di orbita.

11. Data la metrica di Schwarzschild
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$
derivare le equazioni delle geodetiche per particelle massive e discutere i vari tipi di orbita.

12. Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla nella metrica di Schwarzschild

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{t} = \frac{E}{\left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

derivare e discutere il fenomeno della deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo massivo.

13. Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle massive nella metrica di Schwarzschild

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{t} = \frac{E}{\left(1 - \dfrac{2m}{r}\right)}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad \dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

derivare e discutere il fenomeno della precessione del perielio.

14. Descrivere il moto di una particella massiva che cada radialmente in un buco nero di Schwarzschild. Discutere il problema sia dal punto di vista di un osservatore all'infinito, che di un osservatore solidale con la particella.

15. Mostrare che le equazioni di Einstein

$$\left\{\Box_F h_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h^\lambda_\nu + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h^\lambda_\mu - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda_\lambda\right]\right\} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left(T^{pert}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{pert\ \lambda}_{\lambda}\right) \tag{2}$$

per la metrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1,$$

con un'opportuna scelta di gauge e ponendo $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda$, si possono scrivere nella forma

$$\begin{cases} \Box_F \bar{h}_{\mu\nu} = -\dfrac{16\pi G}{c^4} T^{pert}_{\mu\nu} \\ \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^\mu{}_\nu = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$