DOMANDE LISTA 2

1. Mostrare che, note la metrica $g_{\mu\nu}$ e i coefficienti della connessione affine $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ in un punto, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente minkowskiane.

2. Dimostrare che il vettore tangente a una geodetica, quando trasportato parallelamente lungo la geodetica, rimane parallelo a sè stesso.

3. Ricavare la relazione che esiste tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico.

4. Dimostrare che il tensore di Riemann dà il commutatore delle derivate covarianti.

5. Dimostrare le identità di Bianchi ricordando che in un riferimento localmente inerziale il tensore di Riemann diventa

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right].$$

6. Dato il generico tensore energia-impulso $T^{\alpha\beta}$ spiegare perché l'equazione ${T^{\alpha\beta}}_{,\beta} = 0$, valida in spaziotempo piatto è una legge di conservazione, mentre ${T^{\alpha\beta}}_{;\beta} = 0$, valida in spaziotempo curvo, non lo è.

7. Discutere il problema dell'invarianza di gauge delle equazioni di Einstein.

8. Mostrare che se lo spaziotempo ammette un campo di vettori di Killing, si possono scegliere le coordinate in modo da sfruttare le simmetrie ad essi associate.

9. Mostrare che se una metrica ammette dei vettori di Killing si possono associare quantità conservate al moto geodetico e al tensore energia-impulso.

10. Definire cos'è un campo vettoriale ortogonale a una famiglia di ipersuperfici e mostrare come l'esistenza di un campo vettoriale che goda di questa proprietà consente di semplificare la forma del tensore metrico.

11. Ricavare la forma generale che deve avere la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica.

12. Discutere la natura delle singolarità della metrica di Schwarzschild.

13. Ricavare l'equazione della deviazione geodetica.

14. Si dimostri che le equazioni delle onde gravitazionali nel vuoto ammettono soluzioni di onda piana.
    Scegliendo la gauge in maniera opportuna (spiegando anche che, con tale scelta, la condizione di gauge armonica rimane soddisfatta), si dimostri che le onde gravitazionali sono trasverse, a traccia nulla e hanno due soli stati di polarizzazione.

15. Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{zz} \end{pmatrix}$$

    con $h_{yy}^{TT} = -h_{zz}^{TT} = 2A_{+} \cos \omega (t - \frac{x}{c})$.
    Si ricordi che

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + O(h^2),$$

16. Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{yz} \\ 0 & 0 & h_{zy} & 0 \end{pmatrix}$$

    con $h_{yz}^{TT} = h_{zy}^{TT} = 2A_{\times} \cos \omega (t - \frac{x}{c})$.
    Si ricordi che

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + O(h^2),$$