RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 13-2-2012

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 - \frac{1}{2}e^{2\omega x}dy^2 - 2e^{\omega x}dtdy + dz^2 \,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^t_{tx} \neq 0 \qquad \Gamma^y_{tx} = -e^{-\omega x}\omega \quad \Gamma^x_{ty} = \tfrac{1}{2}e^{\omega x}\omega$$

$$\Gamma^t_{xy} = \tfrac{1}{2}e^{\omega x}\omega \quad \Gamma^x_{yy} = \tfrac{1}{2}e^{2\omega x}\omega$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^t_{tx}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

   $$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   calcolare le componenti $T^\mu{}_\nu$.
3. Calcolare $T^{tz}{}_{;y}$ e $T^{xy}{}_{;x}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha)$

   $$\begin{array}{rcl} t' & = & t \\ x' & = & 2y \\ y' & = & \frac{1}{2}x \\ z' & = & 3z \end{array} ,$$

   calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzioni

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -e^{\omega x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e^{\omega x} & 0 & -\frac{1}{2}e^{2\omega x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2e^{-\omega x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2e^{-\omega x} & 0 & 2e^{-2\omega x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tx} &= \frac{1}{2}\left[g^{tt}\left(g_{tx,x} + g_{tt,x} - g_{tx,t}\right) + g^{ty}\left(g_{yx,t} + g_{yt,x} - g_{tx,y}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}g^{ty}g_{ty,x} = \omega\,. \end{aligned}$$

2.

$$T^{\mu}{}_{\alpha} = T^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -e^{\omega x} & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned} T^{tz}{}_{;y} &= T^{tz}{}_{,y} + \Gamma^t_{y\mu}T^{\mu z} + \Gamma^z_{y\mu}T^{t\mu} = \Gamma^t_{xy}T^{xz} = \frac{1}{2}\omega e^{\omega x}x \\ T^{xy}{}_{;x} &= T^{xy}{}_{,x} + \Gamma^x_{x\mu}T^{\mu y} + \Gamma^y_{x\mu}T^{x\mu} = \Gamma^y_{xt}T^{xt} = -e^{-\omega x}\omega\,. \end{aligned}$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è:

$$(\Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu}T^{\mu\nu}\Lambda^{\beta\prime}{}_{\nu}$$

quindi definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$, $T' = (T^{\alpha'\beta'})$, $\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu})$, si trova

$$T' = \Lambda T \Lambda^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6x \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12y' \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 3y' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$