RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 19-9-2012

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, r)$, dalla metrica

$$ds^2 = r^2(-dt^2 + dx^2 + dy^2) + 4dtdx + \frac{1}{r^2}dr^2 \,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^t_{xr} \neq 0 \qquad \Gamma^r_{yy} \neq 0 \qquad \Gamma^t_{tr} = \tfrac{r^3}{r^4+4}$$

$$\Gamma^r_{tt} = r^3 \qquad \Gamma^r_{xx} = -r^3 \qquad \Gamma^r_{rr} = -\tfrac{1}{r}$$

$$\Gamma^x_{tr} = -\tfrac{2r}{r^4+4} \quad \Gamma^x_{xr} = \tfrac{r^3}{r^4+4} \qquad \Gamma^y_{yr} = \tfrac{1}{r}$$

1. Calcolare i simboli di Christoffel Γ^t_{xr} e Γ^r_{yy} .
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} .$$

   calcolare le componenti $T^\mu{}_\nu$.
3. Calcolare $T^t{}_{r;t}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', r')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha)$, valida per $r > 0,\ r' > 0$.

$$\begin{array}{rcl} t &=& t' \\ x &=& x' \\ y &=& y' \\ r &=& 2r'^2 \end{array} ,$$

   calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzioni

La metrica e la metrica inversa sono

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -r^2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \end{pmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{r^2}{r^4+4} & \frac{2}{r^4+4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{r^4+4} & \frac{r^2}{r^4+4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

1.

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{xr} &= \frac{1}{2} g^{t\alpha} \left[g_{\alpha x,r} + g_{\alpha r,x} - g_{xr,\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[g^{tt} g_{tx,r} + g^{tx} g_{xx,r} \right] = \frac{2r}{r^4+4} \\ \Gamma^r_{yy} &= \frac{1}{2} g^{r\alpha} \left[2 g_{\alpha y,y} - g_{yy,\alpha} \right] = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{yy,r}) = -r^3 \end{aligned}$$

2.

$$T^\mu{}_\alpha = T^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \begin{pmatrix} 2r & r^3 & 0 & 0 \\ -2x & -r^2 x & 0 & 0 \\ 2r^2 & r^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y/r^2 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{aligned} T^t{}_{r;t} &= T^t{}_{r,t} + \Gamma^t_{\alpha t} T^\alpha_{\ r} - \Gamma^\alpha_{tr} T^t{}_\alpha \\ &= \Gamma^t_{rt} \left(T^r_{\ r} - T^t_{\ t} \right) - \Gamma^x_{tr} T^t{}_x = \frac{ry}{r^4+4}. \end{aligned}$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è:

$$(\Lambda^{\alpha\prime}{}_\mu) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^\mu} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sqrt{2r}) \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}_{\ \mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}_{\ \nu}$$

quindi definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$, $T' = (T^{\alpha'\beta'})$, $\Lambda = (\Lambda^{\alpha'}{}_{\mu})$, si trova

$$
\begin{aligned}
T' &= \Lambda T \Lambda^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sqrt{2r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \Lambda^T
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y/(2\sqrt{2r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2\sqrt{2r}) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y/(8r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2r'^2 & 0 & 0 \\ 0 & -x' & 0 & 0 \\ 0 & 4r'^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y'/(16r'^2) \end{pmatrix}
$$