RELATIVITÀ GENERALE - SCRITTO 23-2-2012

Sia dato uno spazio-tempo descritto, nel riferimento O di coordinate $\{x^\mu\} = (t, x, y, z)$, dalla metrica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 - \frac{1}{2}e^{-2\omega x}dz^2 - 2e^{-\omega x}dtdz\,.$$

I simboli di Christoffel non nulli sono

$$\Gamma^t_{tx} \neq 0 \qquad \Gamma^z_{tx} = e^{\omega x}\omega \qquad \Gamma^x_{tz} = -\tfrac{1}{2}e^{-\omega x}\omega$$

$$\Gamma^t_{xz} = -\tfrac{1}{2}e^{-\omega x}\omega \quad \Gamma^x_{zz} = -\tfrac{1}{2}e^{-2\omega x}\omega$$

1. Calcolare il simbolo di Christoffel Γ^t_{tx}.
2. Dato il tensore T, di componenti nel riferimento O

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}.$$

   calcolare le componenti $T^\mu{}_\nu$.
3. Calcolare $T^{ty}{}_{;z}$ e $T^{xz}{}_{;x}$.
4. Sia dato il riferimento O', di coordinate $\{x^{\alpha'}\} = (t', x', y', z')$, definito dalla trasformazione di coordinate $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha)$

$$\begin{array}{rcl} t' &=& t \\ x' &=& 2z \\ y' &=& 3y \\ z' &=& \frac{1}{2}x \end{array},$$

   calcolare le componenti del tensore $T^{\mu'\nu'}$ nel riferimento O'.

Soluzioni

La metrica e la metrica inversa sono

$$
g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -e^{-\omega x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -e^{-\omega x} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}e^{-2\omega x} \end{pmatrix} ,
$$

$$
g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2e^{\omega x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2e^{\omega x} & 0 & 0 & 2e^{2\omega x} \end{pmatrix} .
$$

1.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t_{tx} &= \frac{1}{2}\left[g^{tt}\left(g_{tx,t} + g_{tt,x} - g_{tx,t}\right) + g^{tz}\left(g_{zx,t} + g_{zt,x} - g_{tx,z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{tz} g_{tz,x} = -\omega \,.
\end{aligned}
$$

2.

$$
T^{\mu}{}_{\alpha} = T^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & -e^{-\omega x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix} .
$$

3.

$$
\begin{aligned}
T^{ty}{}_{;z} &= T^{ty}{}_{,z} + \Gamma^t_{z\mu} T^{\mu y} + \Gamma^y_{z\mu} T^{t\mu} = \Gamma^t_{xz} T^{xy} = -\frac{1}{2}\omega e^{-\omega x} x \\
T^{xz}{}_{;x} &= T^{xz}{}_{,x} + \Gamma^x_{x\mu} T^{\mu z} + \Gamma^z_{x\mu} T^{x\mu} = \Gamma^z_{xt} T^{xt} = e^{\omega x}\omega \,.
\end{aligned}
$$

4. La matrice cambiamento di coordinate è:

$$
(\Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha\prime}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} .
$$

Si ha

$$
T^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu} T^{\mu\nu} \Lambda^{\beta\prime}{}_{\nu}
$$

quindi definendo le matrici $T = (T^{\mu\nu})$, $T' = (T^{\alpha'\beta'})$, $\Lambda = (\Lambda^{\alpha\prime}{}_{\mu})$, si trova

$$
T' = \Lambda T \Lambda^T
$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix} \Lambda^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{x}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 12z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3z' & 0 \end{pmatrix} .$$